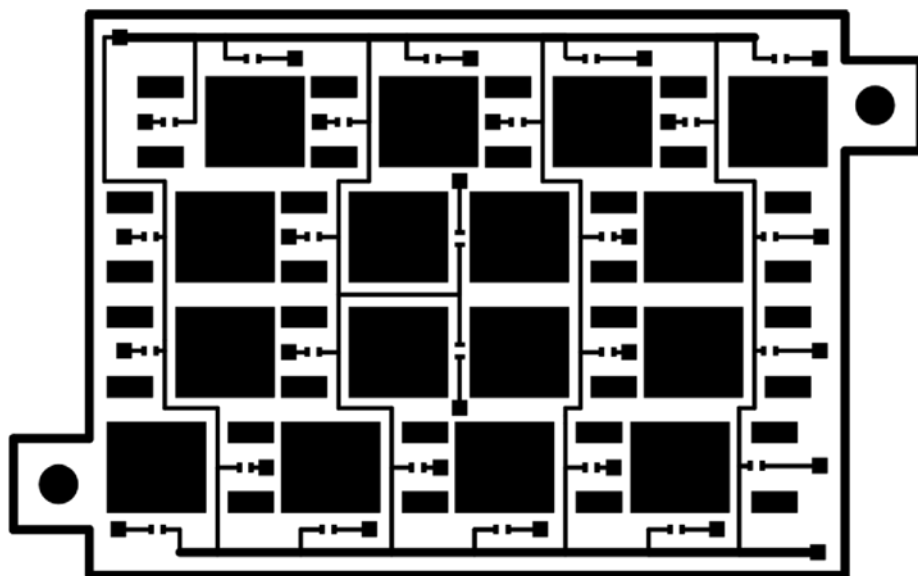


СИНТЕЗ, АНАЛИЗ И ДИАГНОСТИКА ЭЛЕКТРОННЫХ ЦЕПЕЙ

САД-2024



Ульяновск 2024

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE
OF THE RUSSIAN FEDERATION

ULYANOVSK STATE TECHNICAL UNIVERSITY

**SYNTHESIS, ANALYSIS
AND DIAGNOSIS
OF ELECTRONIC NETWORKS**

SAD–2024

Ulyanovsk 2024

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«УЛЬЯНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

СИНТЕЗ, АНАЛИЗ И ДИАГНОСТИКА ЭЛЕКТРОННЫХ ЦЕПЕЙ

Международный сборник научных трудов

Вып. 18

Подготовлен из докладов
Пятой международной конференции
«Синтез, анализ и диагностика электронных цепей»
(Ульяновск, 23–25 мая 2024 года)

Ульяновск
УлГТУ
2024

УДК 516.7.24/25+519.873
ББК 32.85
С38

УДК 516.7.24/25+519.873

Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международный сборник научных трудов. – Вып. 18 / под ред. В. В. Филаретова. – Ульяновск: УлГТУ, 2024. – 247 с.

Сборник продолжает серию специализированных сборников, изданных в Ульяновском государственном техническом университете (УлГТУ) в рамках международных конференций: «Континуальные логико-алгебраические исчисления и нейроматематика», «Конференция по логике, информатике, науковедению», «Волгинские чтения», «Синтез, анализ и диагностика электронных цепей».

Данный выпуск составлен из докладов Пятой международной конференции «Синтез, анализ и диагностика электронных цепей», проходившей в УлГТУ 23–25 мая 2024 года.

В статьях рассматриваются теоретические вопросы и практические приложения современной теории электрических сетей и электронных цепей, в том числе: анализ схем с идеальными диодами методом схемных определителей. Обсуждаются вопросы моделирования с позиций схемной алгебры, матричного анализа, теории графов, цифровых автоматов и символьных вычислений.

Рекомендуется для специалистов в области аналоговой и цифровой схемотехники, прикладной математики и информатики, магистрантов и аспирантов соответствующих направлений и специальностей.

Редакционная коллегия:

Горшков К.С., канд. техн. наук (ответственный секретарь);
Курганов С.А., д-р техн. наук (зам. ответственного редактора);
Канов Л.Н., канд. техн. наук, Севастопольский госуниверситет;
Лернер И. М., д-р техн. наук, КНИТУ – КАИ им. А.Н.Туполева;
Соловьева Е.Б., д-р техн. наук, СПбГЭТУ – ЛЭТИ им. В.И. Ленина;
Шушпанов Д.В., канд. техн. наук, СПбГУТ – ЛЭИС им. М.А. Бонч-Бруевича;
Филаретов В.В., д-р техн. наук (ответственный редактор).

**Пятая международная научно-техническая конференция
«Синтез, анализ и диагностика электронных цепей» (САД-2024)
Ульяновск: УлГТУ, 23–25 мая 2024 года.**

Организационный комитет:

Председатель оргкомитета – **д.т.н. Филаретов В.В.**

Зам председателя – профессор кафедры «Электроснабжение»,
д.т.н. **Курганов С.А.**

Ответственный секретарь –
ст. преподаватель кафедры «Электроснабжение» **Ребровская Д.А.**

Члены оргкомитета: **Дубов А.Л.** – декан энергетического факультета;

Юренков Ю.П. – и.о. завкафедрой «Электроснабжение»;

Тронин В.Г. – начальник НИО.

Первая конференция (САД–2015) была посвящена памяти **Леонида Ивановича Волгина – основателя сборника «Синтез, анализ и диагностика электронных цепей (САД)»**. Предыдущие конференции с другими названиями также служили для апробации и публикации материалов нашего сборника. Первые выпуски, начиная с 2003 года, издавались в виде четвертого тома трудов разноименных конференций под общей редакцией Л. И. Волгина. Процесс подготовки выпусков всегда отличало активное взаимодействие с авторами по электронной почте, что способствовало доработке и развитию статей, повышению научного уровня разделов сборника. Такое взаимодействие не знает границ и не сопряжено со значительными затратами для авторов.

Конференция предполагает интенсификацию взаимного обсуждения докладов участниками конференции и читателями по электронной почте в течение отведенного времени и за его пределами. В данном выпуске обсуждаются вопросы анализа и синтеза электрических и электронных цепей, предлагаются новые схемные решения. Традиционно обсуждаются вопросы моделирования электромагнитных устройств, в том числе вибрационных измерителей параметров жидкости, оптимальное управление электроприводом, конструирование плавающих гидроэлектростанций. Развивается теоретическая база в разделе «Теория электромагнитного поля». Как обычно, заполнены разделы «Матричный анализ» и «Структурный синтез». В разделе «Системы автоматизированного проектирования» обсуждаются вопросы искусственного интеллекта, связанные с когнитивными вычислениями. Раздел «Из истории электротехники» включает статьи, в которых выясняются тонкости до сих пор нечетко понимаемого топологического метода Кирхгофа. **Первая из статей представляет главу из последней книги нашего постоянного автора – Игоря Васильевича Ерохова (Запорожье), памятная статья о котором помещена в конце выпуска.**

СИНТЕЗ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И ЭЛЕКТРОННЫХ ЦЕПЕЙ

СИНТЕЗ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ С ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ГРУППОВОЙ ЗАДЕРЖКОЙ НА КОНВЕРТОРАХ СОПРОТИВЛЕНИЙ

С. А. Курганов, В. В. Филаретов

Предлагается реализация активных электрических цепей произвольного порядка с отрицательной групповой задержкой (ОГЗ) по передаточным полюсlessly функциям на основе полиномов Бесселя. Получено общее аналитическое выражение передаточной функции для схемы с конверторами сопротивлений в ARL-базисе, содержащем резисторы, катушки индуктивности, операционные усилители. Рассмотрены синтезированные схемы второго и третьего порядка. Каскадное соединение схем третьего порядка обеспечивает заданную задержку при числе операционных усилителей в полтора раза меньшем, чем в случае каскадного соединения известных активных схем с ОГЗ первого порядка. Вследствие меньшего на несколько порядков коэффициента усиления на высоких частотах полученные схемы более устойчивы к помехам, чем схемы на каскадах первого порядка. Приведены сведения о схемах с ОГЗ в ARC-базисе.

The implementation of active electric circuits of arbitrary order with negative group delay (NGD) by transfer pole-less functions based on Bessel polynomials is proposed. A general analytical expression of the transfer function for a circuit with resistance converters is obtained. The synthesized second- and third-order circuits in the ARL-basis (resistors, inductors of coils and operational amplifiers) are considered. The cascade connection of the third-order circuits provides a given delay with the number of operational amplifiers one and a half times less than in the case of the cascade connection of the known active circuits with NGD for first-order. Due to the lower gain by several orders of magnitude at high frequencies, the resulting circuits are more resistant to interference than the circuits on the first-order stages. Information is provided on circuits in the ARC basis.

О групповой временной задержке в сосредоточенных электрических цепях [1–3]. Идеальная передаточная функция с постоянной задержкой t_0 , пропускающая все частоты, имеет вид [1]

$$K(p) = e^{-pt_0}, \quad (1)$$

где p – оператор Лапласа и комплексная частота $j\omega$ для временной и частотной областей.

Функция групповой задержки сигнала с узкой полосой частот определяется по формуле [2]

$$t_0(\omega) = -\frac{d\Phi(\omega)}{d\omega}, \quad (2)$$

где $\Phi(\omega)$ – фазочастотная характеристика (ФЧХ) комплексной передаточной функции по напряжению.

Групповая задержка может задаваться вместо ФЧХ при синтезе электрических цепей в частотной области [3]. Цепи с задержкой сигналов используются в импульсной и вычислительной технике для формирования сигналов, измерения временных интервалов, последовательного запуска устройств, кодирования и дешифрирования информации.

Сосредоточенные схемы с групповой задержкой синтезируются путем аппроксимации функции (1) рядом Маклорена [1]

$$K(p) = e^{-pt_0} = \frac{1}{1 + pt_0 + \frac{(pt_0)^2}{2!} + \frac{(pt_0)^3}{3!} + \dots} \quad (3)$$

или полиномами Бесселя. Соответствующая функция при нормированном значении задержки $t_0=1$ имеет вид [2]

$$K(p) = \frac{a_0}{\sum_{k=0}^n a_k p^k}, \quad (4)$$

где действительные коэффициенты находятся по формуле

$$a_k = \frac{(2n-k)!}{2^{n-k}(n-k)!k!}. \quad (5)$$

Приближение (4) имеет максимально плоскую характеристику задержки времени в отличие от функции (3), характеризующейся колебательным характером. Функции (3)–(4) реализуются в RLC -базисе [2], могут быть реализованы активными ARC -схемами и методом имитации пассивных элементов на основе конверторов сопротивлений [4,5].

Отрицательная групповая задержка (ОГЗ) [1,6–16]. ОГЗ определяется по той же формуле (2), что и групповая задержка, и имеет место, если на ФЧХ $\Phi(\omega)$ имеется участок с положительной производной.

Идеальная передаточная функция схемы с ОГЗ и полиномиальное приближение этой функции были предложены в середине прошлого столетия в виде [1]

$$K(p) = e^{pt_0} = 1 + pt_0 + \frac{(pt_0)^2}{2!} + \frac{(pt_0)^3}{3!} + \dots \quad (6), (7)$$

Однако практическое применение схемы с ОГЗ получили только в последние десятилетия. В настоящее время они используются для выравнивания частотных функций групповой задержки в усилительных устройствах [11], компенсации задержки импульсных сигналов в линиях передач с распределенными параметрами [8], улучшения характеристик фазированных антенных решеток с последовательным питанием и реализации нестационарных реактивных элементов [14].

Функция (7) не может быть реализована в RLC -базисе, поскольку содержит только нули. Полосную функцию можно получить после повторной аппроксимации (7) в виде [1]

$$K(p) = H \frac{1 + \tau_0 p + \frac{(\tau_0 p)^2}{2} + \frac{(\tau_0 p)^3}{6}}{1 + \tau p + \frac{(\tau p)^2}{2} + \frac{(\tau p)^3}{6} + b_4 p^4 + b_5 p^5}, \quad (8)$$

где H – нормирующий коэффициент; τ_0, τ – постоянные времени ($\tau_0 > \tau$); b_4, b_5 – произвольные коэффициенты.

При этом увеличивается погрешность аппроксимации, а частотная функция задержки получается с большей неравномерностью, чем при использовании бесполосной функции (7).

Схемы с ОГЗ реализуются в виде: резонансных фильтров с последовательными RLC -контурами [9], пассивных последовательных и параллельных RLC -контуров [10], активного полосового фильтра [6], ARC -цепи первого порядка с функцией [7]

$$K(p) = 1 + p, \quad (9)$$

соответствующей приближению (7).

В СВЧ-схемах для получения ОГЗ используется малошумящий усилитель с RL - и RLC -цепями [12]. Схема согласуется с нагрузкой, а анализ проводится с помощью S -параметров. Формула используется для нахождения параметров элементов по заданной задержке.

В отечественной литературе относительно ОГЗ делаются противоположные выводы. Например, в [13, с. 21]

утверждается: «Отрицательная временная задержка сигнала на выходе рассмотренного звена фильтра [9] (как и для любого диссипативного или активного фильтра) не имеет места», а в [16, с. 223]: «При прохождении электрических колебаний через пассивные *RLC* фильтры (или цепочки таких фильтров) возникает некоторое групповое время задержки, которое (в зависимости от параметров фильтра) может быть как положительным, так и отрицательным». Действительно, схема активного *ARC*-фильтра первого порядка [8] с функцией (9) имеет ОГЗ $t_0=1$ для полосы нормированной частоты $\omega^* = \omega t_0 = [0; 0,1]$.

Сосредоточенная схема с ОГЗ позволяет получить сигнал быстрее, но ошибочно считать, что в таких цепях сигнал проходит со скоростью, выше скорости света [15]. Прохождение гармонического напряжения с опережением (выходной светодиод загорается раньше входного) [15] не связано с передачей информации, поскольку «...ни один сигнал, использующийся для передачи информации, не может являться аналитической функцией на всей вещественной оси» [16, с. 215]. В сосредоточенных цепях отклики появляются мгновенно, но имеют разную форму и задержку. Схема с ОГЗ имеет примерно постоянную амплитудно-частотную характеристику (АЧХ), а ФЧХ линейно возрастает с частотой. Поэтому сигнал оказывается на выходе схемы раньше, чем на входе.

Синтез схем с ОГЗ основан на каскадном соединении *ARC*-схем первого порядка [8], комбинировании последовательных и параллельных *RLC*-контуров [10], создании в СВЧ-диапазоне многокаскадных цепей из схем на активных элементах с *RLC*-контурами [12], аппроксимации *S*-параметров дробно-рациональными функциями и реализации их на связанных микрополосковых резонаторах [14]. ОГЗ реализуются также на основе функции (4) в *ARC*-базисе [17]. В настоящей работе рассматривается возможность реализации функции (4) в *ARL*-базисе, содержащем ОУ, резисторы и катушки индуктивности.

Синтез схем с ОГЗ в *ARL*-базисе на основе полиномов Бесселя (4).

При этом аппроксимирующая функция имеет вид

$$K(p) = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{a_k p^k}{a_0} = 1 + \sum_{k=1}^n b_k p^k, \quad (10), (11)$$

где параметры a_k находятся по формуле (5), а коэффициенты $b_k = a_k/a_0$.

Функция (11) реализуется на базе неинвертирующего усилителя с ОУ A_0 (рис. 1,а), обеспечивающего слагаемое нулевой степени. Слагаемое первой степени получается с помощью катушки индуктивности L_0 и сопротивления R_0 в цепи отрицательной обратной связи ОУ A_0 . Слагаемые с последующими степенями формируются с помощью конверторов.

Функции с нечетным порядком n реализуются (рис. 1,а) с помощью конвертора сопротивлений K_i'' (рис. 1,б), при этом число конверторов $v=(n-1)/2$. Для реализации функции четного порядка n используется не только конвертор K_i'' , но и K_i' (рис. 1,б), у которого на одну индуктивность меньше, чем у K_i'' . При этом конвертор K_i' подключается в единственном числе с номером $i=v$, где $v=n/2$ – общее число конверторов.

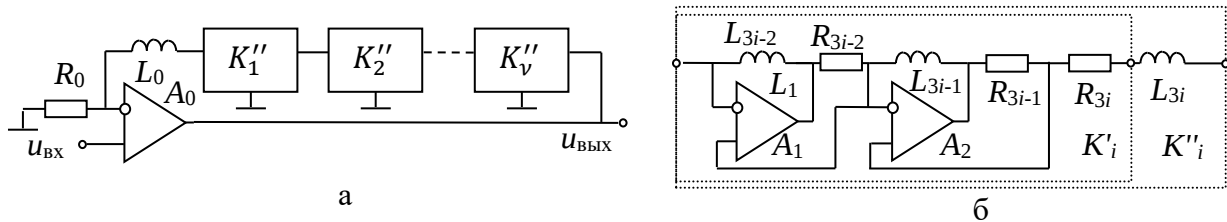


Рис.1. Схема с ОГЗ (а) при нечетном порядке n передаточной функции (11);
схемы конверторов K_i' и K_i'' (б)

Параметры элементов в схемах (рис.1,а) находятся из уравнений вида

$$b_k(R_1, R_2, \dots, R_{n+1}, L_1, L_2, \dots, L_{n+1}) = a_k/a_0, \text{ где } k = 1, 2, \dots, n. \quad (12)$$

В системе (12) при нечетном и четном n число неизвестных равно $3n-1$ и $3n+1$, поэтому $2n-1$ и $2n+1$ параметр может быть задан независимым образом. Остальные n параметров находятся из уравнений (12) при независимом решении. Выражения b_k находятся символьным анализом схем на рис. 1 методом схемных определителей (МСО) [18].

Передаточная функция для схемы n -го порядка (рис. 1,а) формируется в виде отношения определителей N и D схем числителя и знаменателя

$$K = N/D. \quad (13)$$

На этих схемах ОУ A_0 замещается нулором – парой из норатора и нуллатора, обозначенных одинарной и двойной укрупненными стрелками. Схема знаменателя получается путем замены входного источника

напряжения проводником. В результате определитель схемы знаменателя для нечетного порядка n (рис. 1,а) имеет вид

$$D = \left| \begin{array}{c} \text{---} R_0 \text{---} L_0 \text{---} K_1'' \text{---} K_2'' \text{---} \dots \text{---} K_v'' \text{---} \end{array} \right| = R_0 \left| \begin{array}{c} K_1'' \text{---} K_2'' \text{---} \dots \text{---} K_v'' \text{---} \end{array} \right|. \quad (14)$$

Схемно-алгебраическая формула (14) упрощается путем выделения сопротивления R_0 , параллельного нуллатору, и замены проводником катушки индуктивности L_0 , последовательной нуллатору. Определитель полученной каскадной схемы с нуллатором и норатором на входе и выходе равен произведению определителей каскадов [18]. Определители каскадов-конверторов K_1'' , K_2'' , ..., K_v'' равны с учетом схемы на рис. 1,б произведениям сопротивлений R_1R_2 , $R_4R_5, \dots$, $R_{3v-2}R_{3v-1}$ соответственно. Отсюда

$$D = R_0R_1R_2R_4R_5 \dots R_{3v-2}R_{3v-1}. \quad (15)$$

Определитель схемы числителя формируется из исходной схемы на рис. 1,а путем замены источника напряжения и приемника напряжения норатором и нуллатором, удаления и замены проводником последовательного и параллельного соединения норатора и нуллатора, в результате определитель числителя приводится к виду

$$N = \left| \begin{array}{c} \text{---} R_0 + pL_0 \text{---} K_1'' \text{---} K_2'' \text{---} \dots \text{---} K_v'' \text{---} \end{array} \right|. \quad (16)$$

Символьное разложение определителя схемы (16) выполняется путем рекурсивного деления ее по двум узлам [18]. Получающиеся при этом частичные схемные определители (табл. 1) являются однотипными по структуре, что упрощает формирование символьного выражения.

Таблица 1. Частичные определители ($i=1,2, \dots, v$) для разложения САФ числителя (16)

№	1	2	3	4
Частичный определитель				
Символьное выражение	0	$p^2L_{3i-2}L_{3i-1}$	$R_{3i-2}R_{3i-1}$	$p^2L_{3i-2}L_{3i-1}(pL_{3i}+R_{3i})$

Передаточная функция находится по (13) как отношение символьных выражений числителя и знаменателя. После сокращения одинаковых сомножителей передаточная функция для схемы нечетного n -го порядка:

$$K_n(p) = 1 + \frac{L_0}{R_0}p + \frac{R_3 L_1 L_2}{R_0 R_1 R_2}p^2 + \frac{L_1 L_2 L_3}{R_0 R_1 R_2}p^3 + \dots + \frac{R_{3v} L_1 L_2 L_4 L_5 \dots L_{3v-2} L_{3v-1}}{R_0 R_1 R_2 \dots R_{3v-2} R_{3v-1}}p^{n-1} + \frac{L_1 L_2 L_4 L_5 \dots L_{3v-2} L_{3v-1} L_{3v}}{R_0 R_1 R_2 \dots R_{3v-2} R_{3v-1}}p^n, \quad (17)$$

где $v=(n-1)/2$ – как и ранее, число конверторов.

После очевидных преобразований выражение (17) приводится к виду:

$$K_n(p) = 1 + \frac{L_0}{R_0}p + \frac{(R_3 + L_3 p)L_1 L_2 p^2}{R_0 R_1 R_2} + \dots + \frac{(R_{3v} + L_{3v} p)L_1 L_2 L_4 L_5 \dots L_{3v-2} L_{3v-1} p^{n-1}}{R_0 R_1 R_2 \dots R_{3v-2} R_{3v-1}}. \quad (18)$$

Предлагаемые схемы являются устойчивыми, поскольку не содержат полюсов и, следовательно, не имеют возрастающих во времени слагаемых в функциях токов и напряжений.

Схема первого порядка (рис. 2,а), соответствующая функции (9), следует из общей схемы на рис. 1,а. Комплексная передаточная функция схемы и ОГЗ имеют вид

$$K_1(j\omega) = 1 + j\tau\omega; t_0 = -\frac{\tau}{1+(\omega\tau)^2}. \quad (19), (20)$$

В (19) и (20) коэффициент $\tau=L_0/R_0$. Графики АЧХ $k(\omega^*)$ и ОГЗ $t_0(\omega^*)$ приведены на рис. 3,а и 3,б (первая слева кривая на каждом графике). При этом максимальная нормированная частота $\omega^*=\omega t_0=0,1$. Эта частота эквивалентна относительной задержке $t_0/T = 1,6 \%$ (T – период колебаний), при этом отклонение задержки и затухание не более 1%.

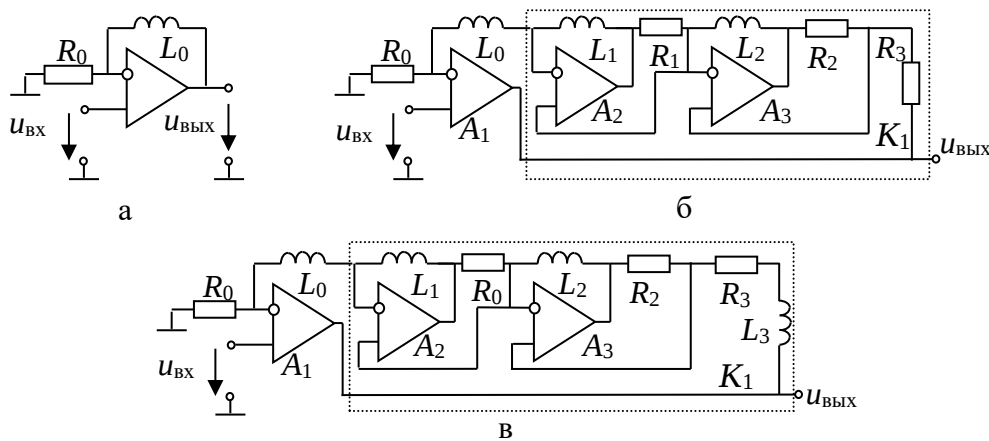


Рис. 2. Схемы с ОГЗ первого (а), второго (б) и третьего (в) порядка

Схема второго порядка (рис. 2,б) характеризуется в соответствии с (10) передаточной функцией и функцией ОГЗ

$$K(p) = 1 + p + \frac{p^2}{3}; t_0 = -\operatorname{Re}\left(\frac{3+2p}{3+3p+p^2}\right), \quad (21), (22)$$

где Re – реальная часть от комплексной функции. Схема содержит для реализации слагаемого второго порядка в соответствии с общей схемой (рис. 1,а) конвертор сопротивлений K'_1 из двух ОУ, двух катушек индуктивности L_1, L_2 и резисторов R_2, R_3 и R_4 . Коэффициент передачи

$$K(p) = 1 + \frac{L_0}{R_0} p + \frac{L_1 L_2 R_3}{R_0 R_1 R_2} p^2. \quad (23)$$

Функция (23) найдена по общей формуле (17) удалением всех слагаемых степени, большей двух. Графики АЧХ и ОГЗ схемы второго порядка приведены на рис. 3,а и 3,б – вторые кривые слева. Максимальная нормированная частота $\omega^*=0,56$, что соответствует относительной задержке 8,9%, при отклонении задержки 1% и затухании $\frac{1}{2}$ дБ.

Для схемы третьего порядка АЧХ и ОГЗ в соответствии с (10):

$$K_3(p) = 1 + p + \frac{6}{15} p^2 + \frac{1}{15} p^3; t_0 = -\operatorname{Re}\left(\frac{15+12p+3p^2}{15+15p+6p^2+p^3}\right), \quad (24), (25)$$

Схема третьего порядка (рис. 2,в) получается из схемы второго порядка (рис. 2,б) путем добавления в конвертор индуктивности L_3 последовательно с сопротивлением R_3 . Коэффициент передачи этой схемы

$$K_3(p) = 1 + \frac{L_0}{R_0} p + \frac{L_1 L_2 R_3}{R_0 R_1 R_2} p^2 + \frac{L_1 L_2 L_3}{R_0 R_1 R_2} p^3 \quad (26)$$

находится аналогично коэффициенту для схемы второго порядка.

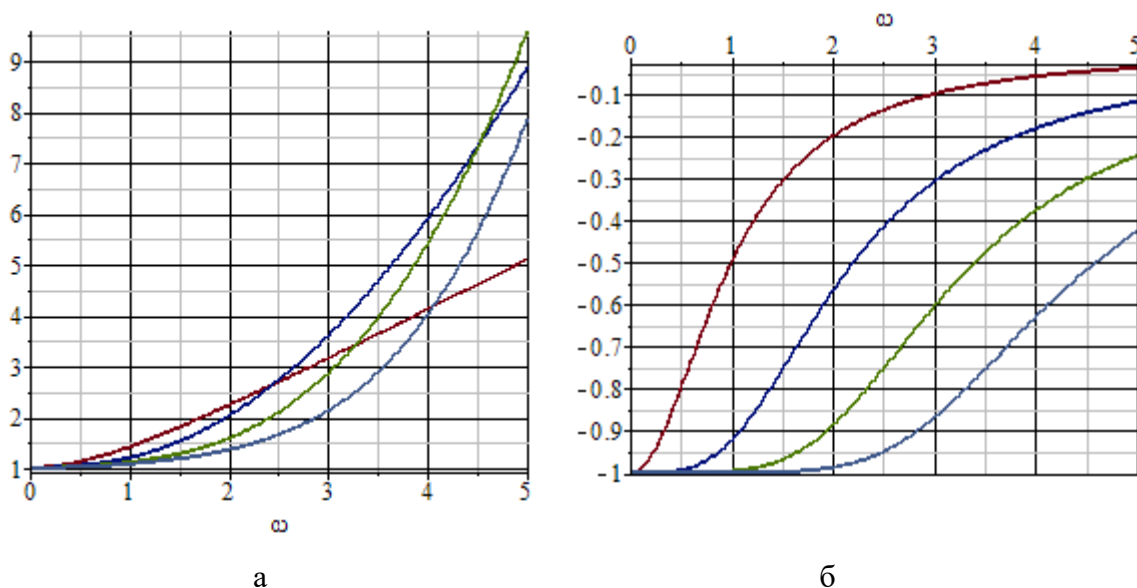


Рис. 3. Нормированные графики АЧХ $K(\omega^*)$ (а) и ОГЗ $t_0(\omega^*)$ (б) для схем первого, второго, третьего и четвертого порядка – слева направо соответственно

Графики АЧХ и ОГЗ приведены на рис. 3,а и 3,б – третьи кривые слева. Максимальная частота при этом $\omega^* = 0,75$, что соответствует относительной задержке, равной 11,9% при отклонении задержки 0,1% и затухании $\frac{1}{2}$ дБ.

Каскадное соединение схем с ОГЗ. Для увеличения ОГЗ целесообразно использовать каскадное соединение схем. Вход и выход предлагаемых схем являются входом и выходом ОУ, поэтому отсутствует взаимное влияние каскадов. АЧХ всей схемы находится перемножением функций АЧХ каскадов, а ОГЗ – суммированием ОГЗ каскадов. При этом неравномерность АЧХ увеличивается, поэтому относительная задержка оказывается меньше суммы задержек каскадов. Суммарная относительная задержка и максимальная нормированная частота при отклонении ОГЗ на 1% и неравномерности АЧХ $\frac{1}{2}$ дБ приведены для каскадного соединения схем первого (табл. 2), второго и третьего (табл. 3) порядка.

Таблица 2. Частота ω^* и относительная задержка t_0/T каскадного соединения n схем первого порядка при отклонении задержки на 1% и затухании $\frac{1}{2}$ дБ

n	1	2	3	4	5	...	13	14
ω^*	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	...	1,2	1,26
$t_0/T, \%$	1,6	3,2	4,8	6,2	8,0	...	19,1	20,0

Для получения задержки в 20% требуется 14 каскадов первого порядка (столбец 9 в табл. 2) или 3 каскада третьего порядка (столбец 5 и строка 4 в табл. 3).

Таблица 3. Частота ω^* и относительная задержка t_0/T соединения n каскадов второго и третьего порядка при отклонении задержки на 1% и затухании $\frac{1}{2}$ дБ

n	Каскады второго порядка		Каскады третьего порядка	
	ω^*	$t_0/T, \%$	ω^*	$t_0/T, \%$
1	0,56	8,9	0,75	11,9
2	0,78	12,4	1,08	17,2
3	0,96	15,3	1,29	20,5
4	1,12	17,8	1,52	24
5	1,3	20,7	1,7	27

Каскады третьего порядка требуют в 1,5 раза ОУ меньше, чем каскады первого порядка – 9 и 14 ОУ соответственно. При этом каскады третьего

порядка более устойчивы к помехам из-за многократно меньшего коэффициента усиления на высоких частотах. Так, при частоте в 2 раза большей, чем максимальная частота рабочего диапазона, коэффициент усиления равен 120 и 10 дБ для каскадов первого и третьего порядка.

Реализация схем с ОГЗ в ARC-базисе [17]. Бесполюсная передаточная функция (11) может быть реализована на основе конверторов сопротивлений и в базисе ОУ, резисторов и конденсаторов. Структура схем в ARC-базисе такая же, как в ARL-базисе. Схемы 2-го и 3-го порядка показаны на рис. 4.

В схеме 2-го порядка (рис. 4,а) имеется 2 конденсатора в отличие от 3-х катушек индуктивности L_0 , L_1 и L_2 в соответствующей ARL-схеме (рис. 2,б). L_2 необходима для слагаемого второй степени в (11), поскольку L_0 и L_1 образуют сечение с нуллатором ОУ A_2 . При удалении L_0 и L_1 , что соответствует коэффициенту перед второй степенью, нуллатор размыкается и схемный определитель равен нулю [18].

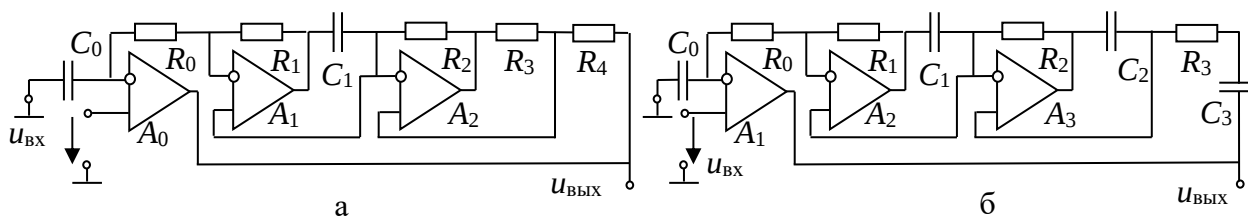


Рис. 4. Схема с ОГЗ второго (а) и третьего (б) порядка в ARC-базисе

Символьные передаточные функции для схем на рис. 4,а и 4,б находятся по МСО аналогично схемам в ARL-базисе и имеют вид соответственно

$$K_2(p) = 1 + R_0 C_0 p + \frac{R_1 R_2 R_3 C_0 C_1}{R_4} p^2; \quad (27)$$

$$K_3(p) = 1 + R_0 C_0 p + \frac{R_1 R_2 C_0 C_1 C_2}{C_3} p^2 + R_1 R_2 R_3 C_0 C_1 C_2 p^3. \quad (28)$$

В функции (28) 5 и 3 независимых и зависимых параметров, последние находятся последовательно без составления системы уравнений. Графики АЧХ и ОГЗ для схем на рис. 4,а и 4,б такие же, как и соответствующие графики для ARL-схем на рис. 2,б и 2,в. Схемы с ОГЗ в ARC-базисе, как и

схемы в *ARL*-базисе, устойчивы, поскольку сокращающиеся полюса, которые имеются здесь в отличие от схем в *ARL*-базисе, равны нулю.

Выводы

1. Реализация *ARLC*-схем произвольного порядка с конверторами сопротивлений, обеспечивает ОГЗ на основе бесполусной передаточной функции. 2. Каскадное соединение схем третьего порядка обеспечивает заданную задержку с большей помехоустойчивостью и требует в полтора раза меньше ОУ, чем в случае схем первого порядка.

Список литературы

1. Стюарт Дж. Теория и синтез электрических цепей. – Пер. с англ. под ред. П.А. Ионкина. – М.: Изд-во иностр. литературы. – 1962.– 518 с.
2. Карни Ш. Теория цепей. Анализ и синтез. Пер. с англ.–М.: Связь, 1973.– 368 с.
3. Миронов В.Г. Синтез электрических и электронных цепей: состояние и проблемы // Электричество. – 2000, № 7.– С. 45–50.
4. Ионкин П.А., Миронов В.Г. Синтез *RC*-схем с активными невзаимными элементами (вопросы реализации). –М.:Энергия,1976.–240 с.
5. Коротков А.С. Микроэлектронные аналоговые фильтры на преобразователях импеданса. – СПб: Наука. – 1999.– 416 с.
6. Mitchel M.W., Chiao R. Causality and Negative Group Delays in a Simple Bandpass Amplifier // American Journal of Physics. – 1998.– 66 (1).– P.14–19.
7. Nakanishi T., Sugiyama K., Kitano M. Demonstration of negative group delays in a simple electronic circuit // Am. J. Phys. – 2002.– Vol. 70 (Nov.). – P. 1117–1121.
8. Kitano M., Nakanishi T., Sugiyama K. Negative Group Delay and Superluminal Propagation: An Electronic Circuit Approach // IEEE J. Sel. Top. in Quantum Electron. – 2003.– Vol. 9, no. 1. – P. 43–51.
9. Бухман Н.С., Бухман С.В. Об отрицательном времени задержки узкополосного сигнала при прохождении через резонансный фильтр поглощения // Известия вузов. Радиофизика. – 2004, № 1.– С. 75–84.

10. Choi H., Song K., Kim C. D., and Jeong¹ Y. Synthesis of negative group delay time circuit // IEEE Xplore: Microwave Conference (APMC).– Asia-Pacific, 2008.– P. 1–4.
11. Ahn K.-P., Ishikawa R., Honjo K. Group delay equalized UWB InGaP/GaAs HBT MMIC amplifier using negative group delay circuits // IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques.– 2009.– Vol. 57 (9).–P. 2139–2147.
12. Ravelo B. Baseband NGD circuit with RF amplifier // Electronics Letters. – 2011.– Vol. 47.– P. 752–753.
13. Давидович М. В. Прохождение сигналов через фильтр с поглощением и отрицательное время задержки // Журнал технической физики. – 2012. – Т. 82, вып. 3. – С. 15–22.
14. Das R., Zhang Q., Mukherjee J. Synthesis of Negative Group Delay Using Lossy Coupling Matrix // arXiv:1708.02343 [physics.app-ph]. – 2017.– P. 1–10.
15. Юрова Т.С., Шубник А.А., Рябов Д.Р., Новокрещенов Д. Передача электрического сигнала со скоростью выше скорости света // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2020.– Вып. 16.– С. 158–171.
16. Бухман Н.С. О принципе причинности и сверхсветовых скоростях распространения сигналов // Радиотехника и электроника. – 2021.– Т. 66, № 3.– С. 209–225.
17. Курганов С.А., Филаретов В.В. Электронные цепи с отрицательной групповой задержкой на конверторах сопротивлений при стабилизирующей обратной связи // Computing, Telecommunications and Control. 2022. Т. 15, № 1. С. 29–39.
18. Филаретов В.В. Топологический анализ электронных схем методом выделения параметров // Электричество. – 1998.– № 5.– С. 43–52.

Курганов Сергей Александрович – д.т.н, профессор кафедры «Электроснабжение» Ульяновского государственного технического университета. 432027, Ульяновск, ул. Северный Венец, 32. Тел. 8-8422-77-85-29. E-mail: sak@ulstu.ru.

АНАЛИЗ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И ЭЛЕКТРОННЫХ ЦЕПЕЙ

ЧИСЛЕННО-СИМВОЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ТОКОВ ИСТОЧНИКОВ ГАРМОНИК В РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СЕТЯХ

С. А. Курганов, А. А. Митяев

Предлагаются численно-символьные формулы для токов источников гармоник в распределительных электрических сетях с нелинейными нагрузками. По теореме о компенсации источники тока с неизвестными параметрами заменяются источниками электродвижущей силы (ЭДС) с величиной, равной измеренному напряжению. Токи источников ЭДС – искомые токи гармоник находятся в виде отношения пары схемных определителей, которые раскладываются методом выделения параметров в численно-символьном виде – неизменные сопротивления сети представляются в численном, а изменяющиеся проводимости нагрузок и напряжения узлов – в символьном виде. Численно-символьные формулы требуют меньше вычислительных затрат по сравнению с численными методами, так как не требуют многократных повторений операций с постоянными параметрами. Построение численно-символьных формул может быть автоматизировано с помощью известной компьютерной программы CirSyt символьного анализа и диагностики электрических цепей.

Numerical-symbolic formulas for harmonic source currents in distribution electrical networks with nonlinear loads are proposed. According to the compensation theorem, current sources with unknown parameters are replaced by sources of electromotive force (EMF) with an amount equal to the measured voltage. The currents of EMF sources – the desired harmonic currents are in the form of a ratio of a pair of circuit determinants, which are decomposed by the method of parameter extraction in a numerically symbolic form - unchanged network resistances are represented numerically, and changing load conductivities and node voltages are represented symbolically. Numerical-

symbolic formulas require less computational costs compared to numerical methods, since they do not require multiple repetitions of operations with constant parameters. The construction of numerical-symbolic formulas can be automated using the well-known computer program CirSym for symbolic analysis and diagnostics of electrical circuits.

Введение. Источниками гармоник в распределительных электрических сетях являются потребители электроэнергии, применяющие полупроводниковые аналоговые и импульсные преобразователи напряжения, частотно-регулируемый электропривод и другие нелинейные устройства силовой электроники [1, 2]. Выявление местоположения источников гармоник является необходимым условием для снижения их уровня в электрической сети [3].

Методы нахождения источников гармоник можно условно разделить на три группы: методы, основанные на определении направления передачи мощности гармоники в узлах подключения нагрузок (*методы направления мощности – power direction methods*) [4]; методы анализа гармонического режима (*методы оценки гармонического состояния – harmonic state estimation*) [1] и эмпирические методы по оценке корреляции параметров режима без учета данных о топологии сети [5].

Метод направления мощности состоит в нахождении в узлах сети гармонической мощности со стороны как потребителя, так и электрической сети и последующем их сравнении. Доминирующим источником гармоники считается та сторона, у которой мощность превалирует. Для исследования используется активная [6], реактивная [4] или полная [3] мощность. Активная мощность не всегда дает правильный результат, лучшую корреляцию с величинами гармонических источников имеет направление потока реактивной мощности [4]. С помощью *метода направления мощности* можно определить местоположение доминирующего источника среди сторон (потребителей и поставщиков электроэнергии), которые подключены к исследуемому узлу, но конкретное местоположение источника гармоник найти нельзя [1].

Определить местоположение источника гармоники можно *методом оценки гармонического состояния*, который состоит в построении и

численном решении матричных уравнений состояния на основе линейной модели электрической сети. При этом задающими переменными являются напряжения узлов, а переменными состояния – токи источников гармоник. Напряжения измеряются синхронно векторными регистраторами [7]. При отсутствии измерений в отдельных узлах сети формируется недоопределенная система уравнений, которая решается итерационными методами минимизации целевой функции [1]. При известном числе источников гармоник задача решается с помощью локализирующих коэффициентов [8]. Параметры элементов сети и проводимости нагрузок находятся по данным измерений [5,9].

Местоположение источников гармоник изменяется со временем при изменении нагрузок в электрической сети, поэтому мониторинг режима сети – измерение, формирование и решение уравнений осуществляется непрерывно, что требует больших вычислительных затрат. В то же время известны методы символьного анализа и диагностики электрических цепей и сетей, позволяющие получить искомые переменные в виде численно-символьных функций, в которых неизменные параметры представляются в численном, а изменяющиеся величины – в символьном виде [10]. Численно-символьный расчет токов гармоник сокращает вычислительные затраты по сравнению с численными методами [11].

В настоящей работе предложены численно-символьные формулы для нахождения токов источников гармоник в электрической сети.

Символьная диагностика электрических цепей методом прямой компенсации [12,13]. Элемент с неизвестным параметром заменяется согласно теореме о компенсации источником напряжения (тока), если напряжение (ток) на этом элементе известно. По полученной схеме замещения искомая переменная находится в символьном виде *методом схемных определителей* [13].

Переменная – ток или напряжение – записывается в виде отношения схемных определителей. Схемный определитель знаменателя находится из исходной схемы приравниванием к нулю параметров источников напряжения и тока. Определитель числителя формируется также из исходной схемы путем подключения норатора вместо источника, а нуллатора – на место искомого напряжения или тока.

Схемные определители раскрываются по формулам выделения параметров. Для сопротивления Z и проводимости Y формулы выделения имеют вид [13]

$$\Delta = Z\Delta^Z + \Delta_Z; \quad \Delta = Y\Delta^Y + \Delta_Y. \quad (1), (2)$$

В (1) и (2) Δ – символ схемного определителя. Верхний индекс означает удаление из схемы соответствующего элемента, а нижний – замену на идеальный проводник. Применяются также правила разложения, такие как: определитель контура из сопротивления равен соответствующему сопротивлению; схема в виде контура из проводников имеет нулевой определитель; из определителя может быть удалена проводимость, параллельная проводнику, норатору или нуллятору.

Если схема делится на две подсхемы по одному и двум узлам a, b , то определители находятся по следующим формулам [13]

$$\Delta = \Delta_1\Delta_2; \quad \Delta = \Delta_1\Delta_{2(a,b)} + \Delta_{1(a,b)}\Delta_2, \quad (3), (4)$$

Δ_1, Δ_2 – определители первой и второй подсхем, а индекс (a, b) означает, что у соответствующей подсхемы узлы a и b соединены проводником.

В результате рекурсивного применения формул вида (1)–(4) и частных правил выделения параметров, подобных перечисленным выше, получается символьная дробно-рациональная функция для искомого напряжения или тока.

Формулы для токов источников гармоник в электрической сети.

Расчет выполняется отдельно для каждой исследуемой гармоники на основе линейной схемы замещения (рис. 1,а). Нагрузки представляются параллельными схемами замещения, содержащими источники гармоник и проводимости нагрузок, которые обозначены как $\underline{J}_1, \dots, \underline{J}_i, \dots, \underline{J}_k, \dots, \underline{J}_n$ и $\underline{Y}_1, \dots, \underline{Y}_i, \dots, \underline{Y}_k, \dots, \underline{Y}_n$ соответственно. Проводимости известны или могут быть найдены, например, методом приращений тока и напряжения в точках присоединения нагрузок [5]. Измеренные напряжения на нагрузках имеют вид $\underline{U}_1, \dots, \underline{U}_i, \dots, \underline{U}_k, \dots, \underline{U}_n$. Энергосистема и электрическая сеть представляются известными сопротивлениями Z_s и $Z_1, Z_2, \dots, Z_v$.

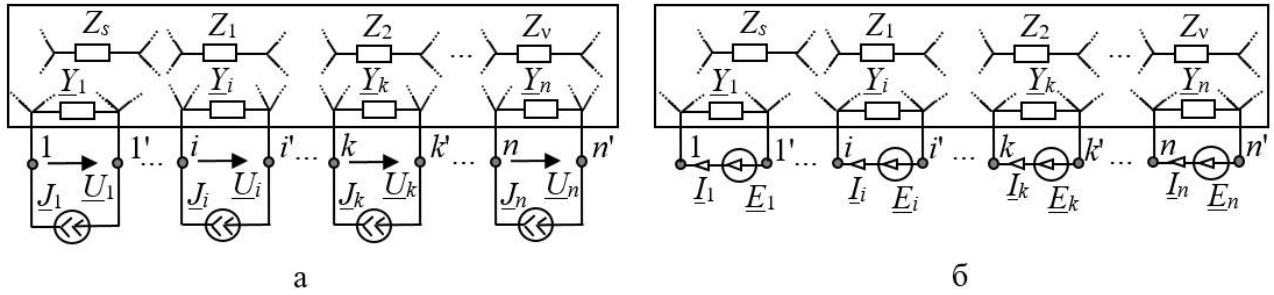


Рис. 1. Исходная схема замещения электрической сети для исследуемой гармоники (а) и схема с компенсированными источниками тока (б)

Согласно методу прямой компенсации источники тока $\underline{J}_1, \dots, \underline{J}_i, \dots, \underline{J}_k, \dots, \underline{J}_n$ (рис. 1,а) заменяются источниками ЭДС $\underline{E}_1 = \underline{U}_1, \dots, \underline{E}_i = \underline{U}_i, \dots, \underline{E}_k = \underline{U}_k, \dots, \underline{E}_n = \underline{U}_n$ (рис. 1,б). При этом искомые токи $\underline{J}_1, \dots, \underline{J}_i, \dots, \underline{J}_k, \dots, \underline{J}_n$ (рис.1,а) равны соответствующим токам $\underline{I}_1, \dots, \underline{I}_i, \dots, \underline{I}_k, \dots, \underline{I}_n$ (рис. 1,б). Ток с номером k в соответствии с принципом наложения имеет вид:

$$\underline{I}_k = \sum_{i=1}^n N_{ki} \cdot \underline{E}_i / D. \quad (5)$$

В (5) знаменатель получается из исходной схемы (рис. 1,б) обнулением параметров источников ЭДС. При этом проводимости $Y_1, \dots, Y_i, \dots, Y_k, \dots, Y_n$ оказываются замкнутыми проводниками и поэтому удаляются из схемы. В результате знаменатель имеет вид:

$$D = \left| \begin{array}{c} \begin{array}{c} Z_s \quad Z_1 \quad Z_2 \quad \dots \quad Z_v \\ \text{---} \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \quad 1' \quad i \quad i' \quad k \quad k' \quad n \quad n' \end{array} \end{array} \right|, \quad (6)$$

где $|\cdot|$ – символ определителя схемы.

Частичный определитель N_{ki} числителя из (5) получается из схемы на рис. 1,б путем замены: источника $\underline{E}_i$ норатором, остальных источников проводниками, а стрелки искомого тока $\underline{I}_k$ нулатором. При $i \neq k$ после удаления проводимостей, параллельных проводнику, норатору или норатору, частичный определитель имеет вид:

$$N_{ki} = \left| \begin{array}{c} \begin{array}{c} Z_s \quad Z_1 \quad Z_2 \quad \dots \quad Z_v \\ \text{---} \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \quad 1' \quad i \quad i' \quad k \quad k' \quad n \quad n' \end{array} \end{array} \right|, \quad (7)$$

где одинарной и двойной укрупненными стрелками обозначены нуллятор и норатор соответственно.

Из (7) видно, функция N_{ki} при $i \neq k$ не зависит от проводимостей нагрузок. Они подключены параллельно проводникам, норатору и нуллятору и удаляются из схемы. В то же время при $i=k$ функция N_{ki} зависит от проводимости Y_k . При этом норатор и нуллятор соединены последовательно и удаляются из схемы [13]. В результате частичный определитель имеет вид:

$$N_{kk} = \left| \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & Z_s & & Z_1 & & Z_2 & \dots & Z_v \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ & & & & & Y_k & & \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ 1 & 1' & \dots & i & i' & \dots & k & k' & \dots & n & n' \end{array} \end{array} \right|, \quad (8)$$

После выделения Y_k в (8) по формуле (2) получается следующее выражение

$$N_{kk} = Y_k (N_{kk})_{Y_k} + (N_{kk})^{Y_k}, \quad (9)$$

где $(N_{kk})_{Y_k}$, $(N_{kk})^{Y_k}$ – схемные определители после стягивания и удаления Y_k соответственно.

Символьная функция для тока в (5) формируется путем разложения определителей (6)–(9). Задача имеет решение, и токи могут быть однозначно определены, если определитель D в (6) отличен от нуля.

Численно-символьные функции получаются после подстановки в символьную функцию численных значений для сопротивлений Z_s и $Z_1, Z_2, \dots, Z_v$ энергосистемы и линий. Проводимости $Y_1, \dots, Y_i, \dots, Y_k, \dots, Y_n$ нагрузок могут изменяться, поэтому остаются в виде символов, а их численные значения подставляются при расчете токов гармоник. Если численное значение тока соизмеримо с погрешностью расчета, то в соответствующем узле источник гармоник отсутствует.

Расчет токов источников гармоник в электрической сети с двумя трехфазными нагрузками. Задана схема замещения трехфазной сети для произвольной гармоник (рис. 2,а). Известны сопротивления энергосистемы Z_s , сопротивления линий Z_α и Z_β , проводимости нагрузок $Y_{1a}, Y_{1b}, Y_{1c}, Y_{2a}, Y_{2b}$ и Y_{2c} . Измерены напряжения $\underline{U}_{1a}, \underline{U}_{1b}, \underline{U}_{1c}, \underline{U}_{2a}, \underline{U}_{2b}$ и $\underline{U}_{2c}$. Требуется найти символьные выражения для токов источников.

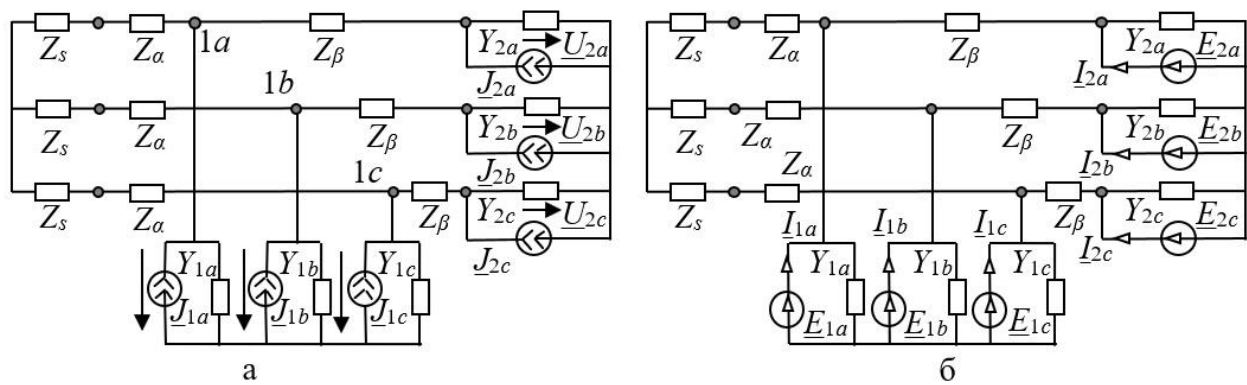


Рис. 2. Схема замещения трехфазной электрической сети для произвольной гармоника (а) и схема с компенсированными источниками тока (б)

Схема с компенсированными источниками тока представлена на рис. 2,б. Схема определителя D получается из рис. 2,б подобно (6) при нулевых источниках $\underline{E}_{1a}$, $\underline{E}_{1b}$, $\underline{E}_{1c}$, $\underline{E}_{2a}$, $\underline{E}_{2b}$ и $\underline{E}_{2c}$. Разложение схемы определителя после удаления из нее проводимостей Y_{1a} , Y_{1b} , Y_{1c} , Y_{2a} , Y_{2b} и Y_{2c} , замкнутых проводниками, показано в следующей формуле

$$D = \left| \begin{array}{ccc} Z_s & Z_\alpha & Z_\beta \\ Z_s & Z_\alpha & Z_\beta \\ Z_s & Z_\alpha & Z_\beta \end{array} \right| = 9Z_{sa}^2 Z_\beta^2, \quad (10)$$

где $Z_{sa} = Z_s + Z_\alpha$.

Схема в (10) делится на 2 подсхемы по узлу γ , следовательно, определитель равен произведению определителей подсхем по формуле (3). После сложения последовательных сопротивлений Z_s и Z_α подсхемы различаются только величинами сопротивлений, и их определители находятся с помощью формулы (1) выделения сопротивления. Из полученного символьного выражения (10) следует, что решение задачи существует, если сопротивления Z_β и $(Z_s + Z_\alpha)$ не равны нулю.

Символьное выражение для тока источника ЭДС $\underline{E}_{1a}$ (рис. 2,б) в соответствии с формулой (5) имеет вид

$$\underline{I}_{1a} = (N_{1a.1a}\underline{E}_{1a} + N_{1a.1b}\underline{E}_{1b} + N_{1a.1c}\underline{E}_{1c} + N_{1a.2a}\underline{E}_{2a} + N_{1a.2b}\underline{E}_{2b} + N_{1a.2c}\underline{E}_{2c})/D, \quad (11)$$

где $N_{1a.1a}$, $N_{1a.1b}$, ..., $N_{1a.2c}$ – частичные определители вида (7).

Первый по порядку в формуле (11) частичный определитель в соответствии с (8) имеет вид

$$N_{1a.1a} = \left| \begin{array}{ccc|ccc} \hline & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ \hline & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ \hline \end{array} \right| = Y_{1a} 9Z_{sa}^2 Z_{\beta}^2 + 6Z_{sa} Z_{\beta}^2 + 6Z_{sa}^2 Z_{\beta}. \quad (12)$$

Символьное выражение в (12) сформировано по формуле (9), содержащей два слагаемых. Первое слагаемое получено путем выделения проводимости Y_{1a} и замены ее проводником. Полученный при этом частичный определитель совпадает с определителем знаменателя в (10). Второе слагаемое сформировано после удаления проводимости Y_{1a} делением схемы по узлам θ и η и применения формулы (1).

Остальные частичные определители из формулы (11) находятся аналогично по формуле (7). После подстановки символьных выражений знаменателя (10) и частичных определителей числителя вида (12) в формулу (11) и сокращения одинаковых множителей в числителе и знаменателе получаются символьные выражения искомых токов:

$$\begin{aligned} \underline{I}_{1a} &= [(3Z_{sa}Z_{\beta}Y_{1a} + 2(Z_{\beta} + Z_{sa}))\underline{E}_{1a} - (Z_{\beta} + Z_{sa})\underline{E}_{1b} - (Z_{\beta} + Z_{sa})\underline{E}_{1c} - 2Z_{sa}\underline{E}_{2a} + \\ &+ Z_{sa}\underline{E}_{2b} + Z_{sa}\underline{E}_{2c}] / (3Z_{sa}Z_{\beta}); \\ \underline{I}_{1b} &= [-(Z_{\beta} + Z_{sa})\underline{E}_{1a} + (3Z_{\beta}Z_{sa}Y_{1b} + 2(Z_{\beta} + Z_{sa}))\underline{E}_{1b} - (Z_{\beta} + Z_{sa})\underline{E}_{1c} + Z_{sa}\underline{E}_{2a} - \\ &- 2Z_{sa}\underline{E}_{2b} + Z_{sa}\underline{E}_{2c}] / (3Z_{sa}Z_{\beta}); \\ \underline{I}_{1c} &= [-(Z_{\beta} + Z_{sa})\underline{E}_{1a} - (Z_{\beta} + Z_{sa})\underline{E}_{1b} + (3Z_{\beta}Z_{sa}Y_{1c} + 2(Z_{\beta} + Z_{sa}))\underline{E}_{1c} + Z_{sa}\underline{E}_{2a} + \\ &+ Z_{sa}\underline{E}_{2b} - 2Z_{sa}\underline{E}_{2c}] / (3Z_{sa}Z_{\beta}); \\ \underline{I}_{2a} &= [-2\underline{E}_{1a} + \underline{E}_{1b} + \underline{E}_{1c} + (3Z_{\beta}Y_{2a} + 2)\underline{E}_{2a} - \underline{E}_{2b} - \underline{E}_{2c}] / (3Z_{\beta}); \\ \underline{I}_{2b} &= [\underline{E}_{1a} - 2\underline{E}_{1b} + \underline{E}_{1c} - \underline{E}_{2a} + (3Z_{\beta}Y_{2b} + 2)\underline{E}_{2b} - \underline{E}_{2c}] / (3Z_{\beta}); \\ \underline{I}_{2c} &= [\underline{E}_{1a} + \underline{E}_{1b} - 2\underline{E}_{1c} - \underline{E}_{2a} - \underline{E}_{2b} + (3Z_{\beta}Y_{2c} + 2)\underline{E}_{2c}] / (3Z_{\beta}), \end{aligned} \quad (13)$$

где $Z_{sa} = (Z_s + Z_{\beta})$.

Формулы (13), полученные с помощью программы символьного анализа и диагностики электрических цепей CirSym [14], сворачиваются после подстановки значений неизменяющихся сопротивлений линий. Компактные численно-символьные выражения обеспечивают быстрый многократный расчет токов при изменении в процессе мониторинга сети ЭДС и проводимостей нагрузок (отмечены полужирным курсивом).

Если рассчитанное значение тока превышает по модулю погрешность измерений, то следует считать, что в узле находится источник гармоник, и его ток равен полученному значению. Если значение тока соизмеримо с погрешностью, то в узле отсутствует источник гармоник.

Пример численно-символьных формул для токов гармоник. В схеме замещения электрической сети (рис. 2,а) для некоторой гармоники сопротивления (в омах) энергосистемы и линий электропередачи имеют вид: $Z_s = 1,0j$; $Z_\alpha = Z_\beta = 1,0 + 10,0j$ (j – мнимая единица). После подстановки численных значений в (13) получим численно-символьные выражения для искомых токов гармоник

$$\begin{aligned} \underline{I}_{1a} &= (0,01206514095 - 0,1261158903j + Y_{1a}) \underline{E}_{1a} + (-0,006032570468 + \\ &+ 0,0630579451j)(\underline{E}_{1b} + \underline{E}_{1c}) + (0,00330033 - 0,0330033j) (-2\underline{E}_{2a} + \underline{E}_{2b} + \underline{E}_{2c}); \\ \underline{I}_{1b} &= (-0,006032570468 + 0,06305794513j) (\underline{E}_{1a} + \underline{E}_{1c}) + (0,01206514095 - \\ &- 0,12611589j + Y_{1b}) \underline{E}_{1b} + (0,00330033003 - 0,0330033j) (\underline{E}_{2a} - 2\underline{E}_{2b} + \underline{E}_{2c}); \\ \underline{I}_{1c} &= (-0,006032570472 + 0,0630579451j) (\underline{E}_{1a} + \underline{E}_{1b}) + (Y_{1c} + 0,01206514095 - \\ &- 0,1261158903j) \underline{E}_{1c} + (0,003300330034 - 0,0330033j) (\underline{E}_{2a} + \underline{E}_{2b} - 2\underline{E}_{2c}); \\ \underline{I}_{2a} &= (0,003300330033 - 0,03300330033j) (-2\underline{E}_{1a} + \underline{E}_{1b} + \underline{E}_{1c} - \underline{E}_{2b} - \underline{E}_{2c}) + (Y_{2a} + \\ &+ 0,006600660066 - 0,06600660066j) \underline{E}_{2a}; \\ \underline{I}_{2b} &= (0,003300330033 - 0,03300330033j) (\underline{E}_{1a} - 2\underline{E}_{1b} + \underline{E}_{1c} - \underline{E}_{2a} - \underline{E}_{2c}) + (Y_{2b} + \\ &+ 0,006600660066 - 0,06600660066j) \underline{E}_{2b}; \\ \underline{I}_{2c} &= (0,003300330033 - 0,03300330033j) (\underline{E}_{1a} + \underline{E}_{1b} - 2\underline{E}_{1c} - \underline{E}_{2a} - \underline{E}_{2b}) + (Y_{2c} + \\ &+ 0,006600660066 - 0,06600660066j) \underline{E}_{2c}, \end{aligned} \quad (14)$$

где полужирным курсивом, как и в (13), показаны величины, которые изменяются в процессе мониторинга электрической сети.

ЭДС источников $\underline{E}_{1a}$, $\underline{E}_{1b}$, $\underline{E}_{1c}$, $\underline{E}_{2a}$, $\underline{E}_{2b}$ и $\underline{E}_{2c}$ для функций (14) получают путем приравнивания их соответствующим напряжениям $\underline{U}_{1a}$, $\underline{U}_{1b}$, $\underline{U}_{1c}$, $\underline{U}_{2a}$, $\underline{U}_{2b}$ и $\underline{U}_{2c}$ (рис. 2,а), найденным здесь в результате вычислительного эксперимента при учете проводимостей нагрузок $Y_{1a} = Y_{1b} = Y_{1c} = Y_{2a} = Y_{2b} = Y_{2c} = 0,022 - 0,017j$ См и токов источников гармоник

$$\underline{J}_{1a} = 1 \text{ А}; \underline{J}_{1b} = 2 \text{ А}; \underline{J}_{1c} = \underline{J}_{2a} = 0; \underline{J}_{2b} = 3 \text{ А} \text{ и } \underline{J}_{2c} = 0. \quad (15)$$

При нахождении напряжений учитывается, что при измерении начальная фаза напряжений зависит от момента синхронного измерения напряжений. Здесь фаза напряжения $\underline{U}_{1a}$ принимается равной нулю. Фазы

остальных напряжений и токов отсчитываются от фазы $\underline{U}_{1a}$. В результате искомые ЭДС имеют вид (напряжения в вольтах, фазы в радианах):

$$\begin{aligned} \underline{E}_{1a} &= 30,27948670; \underline{E}_{1b} = 54,64914435 \cdot e^{j0,2400684151}; \underline{E}_{1c} = 24,62230298 \cdot e^{-j0,1839992321}; \\ \underline{E}_{2a} &= 25,04170991 \cdot e^{-j0,1686836729}; \underline{E}_{2b} = 66,75341375 \cdot e^{j0,2999970964}; \\ \underline{E}_{2c} &= 20,36311166 \cdot e^{-j0,3526829049}. \end{aligned} \quad (16)$$

Ограничим численные значения $\underline{E}_{1a}$, $\underline{E}_{1b}$, $\underline{E}_{1c}$, $\underline{E}_{2a}$, $\underline{E}_{2b}$ и $\underline{E}_{2c}$ в (16) 6-ю значащими цифрами, подставим их и проводимости Y_{1a} , Y_{1b} , Y_{1c} , Y_{2a} , Y_{2b} и Y_{2c} в численно-символьные функции (14), получим токи источников гармоник (токи в амперах, начальные фазы в радианах):

$$\begin{aligned} \underline{I}_{1a} &= 0,9999966432 \cdot e^{-j0,5791335417}; \underline{I}_{1b} = 2,000001113 \cdot e^{-j0,5791333682}; \\ \underline{I}_{1c} &= 0,000005638321115 e^{-j1,510280401}; \underline{I}_{2a} = 0,000004168860727 \cdot e^{-j1,117039613}; \\ \underline{I}_{2b} &= 2,999998386 e^{-j0,5791355210}; \underline{I}_{2c} = 0,000005110880104 e^{j1,790522574}. \end{aligned} \quad (17)$$

Численные значения модулей токов $\underline{I}_{1c}$, $\underline{I}_{2a}$, $\underline{I}_{2c}$ содержат 6 нулевых разрядов, то есть эти токи нулевые и в соответствующих нагрузках не содержатся источники гармоник. Модули токов $\underline{I}_{1a}$, $\underline{I}_{1b}$, $\underline{I}_{2b}$ в (17) не являются нулевыми, то есть имеются источники гармоник. По сравнению с исходными токами в (15) они содержат ошибку в 7-м знаке, что соответствует заданию ЭДС с 6-ю десятичными разрядами.

При наличии единожды построенных численно-символьных уравнений вида (14) не требуется заново формировать и решать системы уравнений при изменении проводимостей нагрузок и напряжений узлов. Это уменьшает объем вычислений при нахождении местоположения источников гармоник в режиме мониторинга электрических сетей.

Выводы

1. Предложено находить токи источников гармоник в электрических сетях с нелинейными нагрузками в виде численно-символьных формул, в которых напряжения узлов и проводимости нагрузок, изменяющиеся во времени, представляются символами, а неизменные сопротивления линий – численными значениями. Формулы получаются один раз, а используются многократно при мониторинге электрических сетей, что позволяет уменьшить затраты времени.

2. Символьное выражение определителя электрической сети позволяет исследовать и найти условия разрешимости задачи нахождения токов и местоположения источников гармоник.

Список литературы

1. Yang R., Yu M., Tai N., Duan R., Lu C. Harmonic source localization method for the port distribution system based on the stagewise regularized orthogonal matching pursuit algorithm // *Front. Energy Res., Sec. Process and Energy Systems Engineering*. – Vol. 11, February, 2023. – Pp.1–9. Doi.org/10.3389/fenrg.2023.1097300.

2. Levačić G., Župan A., Čurin M. An overview of harmonics in power transmission networks // *First International Colloquium on Smart Grid Metrology (SmaGriMet)*, 24-27 April 2018, Split, Croatia. – IEEE. – 2018. – Pp. 1–7. Doi:10.23919/SMAGRIMET.2018.8369828.

3. Bai Z., Xiao X., Zhang Y., Wang Y. Identification Method of Harmonic Source Considering Harmonic Apparent Power // *Automation of Electric Power Systems*. – 2017, 41 (08), 11–15. Doi:10.7500/AEPS20160913008.

4. Zheng X., Xiao X., Xu S., Wang Y., Li Y., Zhang H. A Multiple harmonic sources localization method based on data analysis // *Proc. of the 25th International Conference on Electricity Distribution (CIRED 2019)*. – Madrid, 3-6 June 2019. – Pp. 1–5. <http://dx.doi.org/10.34890/66>.

5. Дворкин Д.В., Силаев М.А., Тульский В.Н., Палис Ш. Проблемы оценки вклада потребителя в искажение качества электроэнергии // *Электричество*. – 2017, №7. – С.12 – 18. Doi: 10.24160/0013-5380-2017-7-12-19.

6. Xu W., Liu X., Liu Y. An Investigation on the Validity of Power-Direction Method for Harmonic Source Determination // *IEEE Transactions Power Delivery*. – 2003, v. 18, no. 1. – Pp. 214–219. Doi: 10.1109/MPER.2002.4312428.

7. Ревенко П. М., Мартусенко В. Е., Ревенко Д. М. Оптимизация расстановки векторных регистраторов в распределительных сетях // *Вестник Северо-Кавказского федерального университета*. – 2018, №6 (69). – С.41–54.

8. Адалев А.С., Коровкин Н.В. Метод локализации помехи в электротехнической системе // Известия РАН. – 2009, № 4. – С. 98–107.
9. Кононов Ю.Г., Рыбасова О.С., Михайленко В.С. Уточнение параметров участков линий сети среднего напряжения по данным синхронных измерений // Изв. вузов. Электромеханика. – 2018. Т. 61, № 1. – С. 77-84. Doi:10.17213/0136-3360-2018-1-77-84.
10. Курганов С.А., Филаретов В.В. Схемно-алгебраический расчет установившихся режимов электрических сетей // Электричество. – 2021, № 4. – С. 65–72. Doi: 10.24160/0013-5380-2021-4-65-72.
11. Митяев А.А. Численно-символьный расчет токов источников гармоник в электрических сетях // Электроэнергетика. Тезисы докладов Восемнадцатой всероссийской (десятой международной) научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. В 7-ми томах. Т.3.– Иваново, 2023. – С. 29.
12. Курганов С.А., Филаретов В.В. Схемно-алгебраический анализ, диакоптика и диагностика линейных электрических цепей: Учебное пособие. – Ульяновск: УлГТУ, 2005.– 320 с.
13. Филаретов В.В. Топологический анализ электронных схем методом выделения параметров // Электричество. – 1998, № 5. – С. 43–52.
14. Филаретов В.В. Программа символьного анализа CirSym: история создания, структура и функции // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2012.– Вып.10.– С.158–171.

Курганов Сергей Александрович – д.т.н, профессор кафедры «Электроснабжение» Ульяновского государственного технического университета. 432027, Ульяновск, ул. Северный Венец, 32. Тел. 8-8422-77-85-29. E-mail: sak@ulstu.ru.

Митяев Андрей Александрович – аспирант кафедры «Электроснабжение» Ульяновского государственного технического университета. 432027, Ульяновск, ул. Северный Венец, 32. E-mail: andrey_mityaev@mail.ru.

АНАЛИЗ РЕЗИСТИВНЫХ СХЕМ С ИДЕАЛЬНЫМИ ДИОДАМИ МЕТОДОМ СХЕМНЫХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Д. В. Шушпанов

Предложен алгоритм схемно-алгебраического анализа схем с идеальными диодами, использующий функцию преобразования модуля. Дана оценка сложности матричного подхода в определении аналитического решения схем с идеальными диодами с использованием метода схемных определителей. Рассмотрено уменьшение сложности путем расчета дополнительных схемных определителей.

An algorithm for circuit-algebraic analysis of circuits with ideal diodes using the modulus conversion function is proposed. An assessment of the complexity of the matrix approach in determining the analytical solution of circuits with ideal diodes using the circuit determinants method is given. The reduction of complexity by calculating additional circuit determinants is considered.

Кусочно-линейная аппроксимация нелинейного элемента. С появлением высокоскоростных транзисторов и диодов возрастают требования к точности моделирования радиоэлектронных устройств. Увеличение частоты переключения (при нуле напряжения, при нуле тока и т.д.) требует анализа с приемлемыми скоростью и точностью как медленных процессов – переходные процессы (мкс – мс и выше) ниже частоты переключения, так и быстрых процессов, проходящих при переключениях (доли мкс – нс и ниже, то есть решать жесткие задачи.

Для упрощения расчета нелинейных цепей используется кусочно-линейная аппроксимация вольтамперной характеристики (ВАХ) нелинейных элементов (рис. 1,а), что позволяет уменьшить время расчета нелинейных цепей с приемлемой точностью. Существуют два подхода, использующие: 1) модели нелинейных элементов в виде ВАХ (рис. 1,а), по

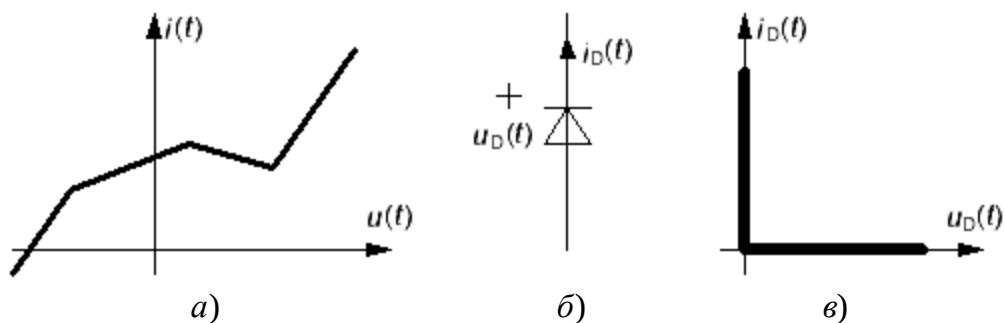


Рис. 1. Кусочно-линейная аппроксимация нелинейного элемента (а) и используемый для неё идеальный диод (б) со своей вольтамперной характеристикой (в)

которым можно определить выходную характеристику по характеристике на входе [1]; 2) схемные модели нелинейных элементов с идеальными диодами (ИД) (рис. 1,б), ВАХ которых имеет прямоугольную форму (рис. 1,в) [2,3]:

$$\begin{cases} i_D(t), u_D(t) \geq 0 \\ i_D(t) \cdot u_D(t) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

где $i_D(t)$, $u_D(t)$ – соответственно ток и напряжение на ИД.

Первый подход усложняется из-за сложности определения рабочей точки на ВАХ каждого нелинейного элемента, все методы являются численными. Второй подход предложил голландец Вильгельм Мария Гезинус ван Бокховен (Wilhelmus Maria Gezinus van Bokhoven) [2]. В цепи с одним ИД (рис. 2,а) уравнение, связывающее ток и напряжение ИД, будет представлено в виде

$$\begin{cases} u_D(t) = R_{\Sigma} \cdot i_D(t) + u_{\Sigma}(t) \\ i_D(t), u_D(t) \geq 0 \\ i_D(t) \cdot u_D(t) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

В случае электрической цепи с бóльшим числом ИД (рис. 2,б) получаем систему уравнений с матрицами эквивалентного генератора (ЭГ) [2]:

$$\begin{cases} \mathbf{U}_D = \mathbf{R}_{\Sigma} \cdot \mathbf{I}_D + \mathbf{U}_{\Sigma} \\ \mathbf{I}_D, \mathbf{U}_D \geq 0 \\ \mathbf{I}_D^T \cdot \mathbf{U}_D = 0 \end{cases} \quad (3)$$

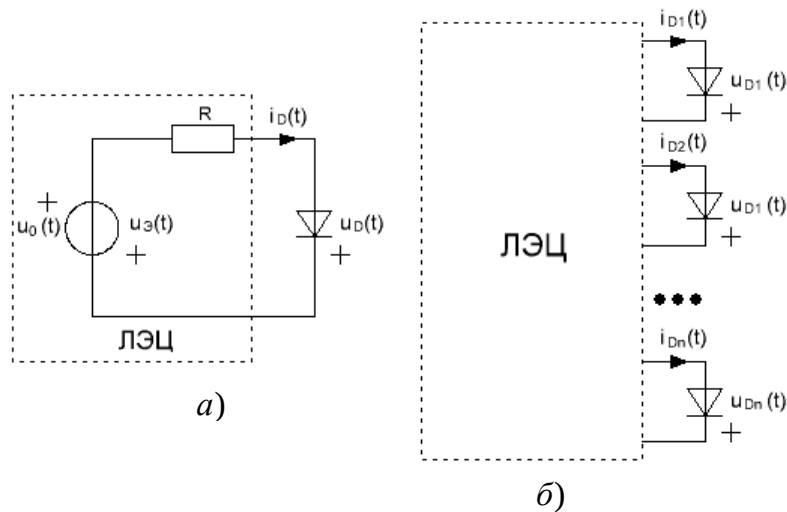


Рис. 2. Электрическая цепь с одним (а) и несколькими (б) ИД

В (3) U_D – вектор напряжений на идеальных диодах, I_D – вектор токов, протекающих через ИД, R_Σ – матрица линейных компонентов цепи, U_Σ – вектор эквивалентных источников возмущения.

Система (3) известна как Linear Complementarity Problem (LCP) [2–5] или линейная задача дополнителности (ЛЗД) [6, 7]:

$$\begin{cases} w = M \cdot z + q \\ w, z \geq 0 \\ z^T \cdot w = 0 \end{cases}, \quad (4)$$

где M – известная квадратная матрица $n \times n$, q – известный вектор размерностью n , z и w – линейно связанные (условие 1), неотрицательные (условие 2) и ортогональные (условие 3) векторы размерностью n .

Задача (4) была предложена Коттлом и Данцигом в 1968 году как задача математической теории оптимизации [4, 5]. ЛЗД используется в основном в теории игр и экономике [6], в некоторых задачах механики [7]. Методы решения ЛЗД являются, в основном, численными [5, 6]. Система (4) идентична системе (3). Бокховен заметил, что ЛЗД соответствует анализу схемы с ИД [2], используя систему (4), а не (3), и предложил численный алгоритм расчета системы (4) с полиномиальной сложностью вместо численных алгоритмов решения ЛЗД (методы Кацнельсона, Коттла, Лемке), имеющих не полиномиальную сложность. На основе [2] разработаны программы расчета нелинейных цепей [3, 8, 9].

В 1994 году в статье Бокховена с учениками [10] предложено использование функции преобразования модуля (modulus transform) для модификации модели Чуа [1, 3]. В [3,11] функция преобразования модуля использовалась при аналитическом решении (4) для схемы с ИД. В [11] был рассмотрен случай для схемы с двумя ИД, а в [3] – с тремя ИД, при численном решении. Американскими авторами в [12,13] на основании [3] проведен расчет той же схемы, выраженный в радикалах.

В [14] нами указано, что авторы статей [12,13] допустили ошибку в определении токов через ИД в схеме с двумя ИД, что нарушило условие 3 в (4) и привело к расхождению аналитического и численного решения [15]. Также в [14] рассмотрено решение (4) для произвольного числа ИД, выраженное в радикалах, сравниваются аналитические и численные решения для схем с двумя и тремя ИД.

Использование функции преобразования модуля для символьного анализа схем с ИД. Итак, аналитическое решение (4) возможно на основе функции преобразования модуля [3,11]:

$$y = \lfloor x \rfloor \rightarrow y = \max(x, 0) \rightarrow \begin{cases} y = x, & x \geq 0 \\ y = 0, & x < 0 \end{cases} \rightarrow y = \frac{x + |x|}{2}. \quad (5)$$

Отсюда решение уравнения (2) будет следующим [14]:

$$\begin{cases} u_D(t) = \lfloor u_{\mathfrak{D}}(t) \rfloor \\ i_D(t) = \lfloor -u_{\mathfrak{D}}(t) / R_{\mathfrak{D}} \rfloor \end{cases}. \quad (6)$$

При этом выполняется условие (1) или второе и третье условия в ЛЗД (4).

В двумерном случае решение системы (3) получается в виде [14]:

$$\begin{cases} u_{D1}(t) = \lfloor R_{\mathfrak{D}12} \lfloor i_{\mathfrak{D}2}^0(t) \rfloor + u_{\mathfrak{D}1}(t) \rfloor \\ u_{D2}(t) = \lfloor R_{\mathfrak{D}21} \lfloor i_{\mathfrak{D}1}^0(t) \rfloor + u_{\mathfrak{D}2}(t) \rfloor \end{cases}, \text{ где } i_{\mathfrak{D}i}^0(t) = -u_{\mathfrak{D}i}(t) / R_{\mathfrak{D}ii}. \quad (7)$$

Для двумерного случая системы (4) для токов через ИД необходимо [3,11], выразить (4) в виде $i_D = f(u_D)$ [14]:

$$\begin{cases} \mathbf{I}_D = \mathbf{G}_{\mathfrak{D}} \cdot \mathbf{U}_D + \mathbf{I}_{\mathfrak{D}} \\ \mathbf{I}_D, \mathbf{U}_D \geq 0 \\ \mathbf{I}_D^T \cdot \mathbf{U}_D = 0 \end{cases}, \quad (8)$$

где $\mathbf{G}_3 = \mathbf{R}_3^{-1}$, $\mathbf{I}_3 = -\mathbf{R}_3^{-1} \cdot \mathbf{U}_3$ – матрицы ЭГ, полученные путем обратного преобразования матриц ЭГ системы (3). Отсюда [14]:

$$\begin{cases} i_{D1}(t) = \left\lfloor G_{\mathfrak{E}12} \left\lfloor u_{\mathfrak{E}2}^1(t) \right\rfloor + i_{\mathfrak{E}1}(t) \right\rfloor \\ i_{D2}(t) = \left\lfloor G_{\mathfrak{E}21} \left\lfloor u_{\mathfrak{E}1}^2(t) \right\rfloor + i_{\mathfrak{E}2}(t) \right\rfloor \end{cases} \quad (9)$$

$$\text{где } u_{\mathfrak{E}i}^j(t) = -i_{\mathfrak{E}i}(t)/G_{\mathfrak{E}ii} = \begin{cases} u_{\mathfrak{E}1}^2(t) = R_{\mathfrak{E}12} i_{\mathfrak{E}2}^0(t) + u_{\mathfrak{E}1}(t) \\ u_{\mathfrak{E}2}^1(t) = R_{\mathfrak{E}21} i_{\mathfrak{E}1}^0(t) + u_{\mathfrak{E}2}(t) \end{cases}.$$

При этом будут выполняться второе и третье условия в системе (4), а решения (7) и (9) – корректными. Авторы работ [12,13] при нахождении токов через ИД для двумерного случая ЛЗД использовали систему (3) вместо системы (8) и получили некорректные результаты, хотя цитировали [3], в которой говорится, что при нахождении токов необходимо перестроить систему $u_D = f(i_D)$ в виде $i_D = f(u_D)$.

Для обобщения системы (3) для напряжений трех ИД следует найти токи для частных двумерных случаев, когда закрыт ИД, на котором находится напряжение, и подставить их в уравнения (3). Отсюда получаем [14]:

$$\begin{cases} u_{D1}(t) = \left\lfloor R_{\mathfrak{E}12} \left\lfloor \tilde{G}_{\mathfrak{E}12}^1 \left\lfloor u_{\mathfrak{E}3}^2(t) \right\rfloor + \tilde{i}_{\mathfrak{E}1}^1(t) \right\rfloor + R_{\mathfrak{E}13} \left\lfloor \tilde{G}_{\mathfrak{E}21}^1 \left\lfloor u_{\mathfrak{E}2}^3(t) \right\rfloor + \tilde{i}_{\mathfrak{E}2}^1(t) \right\rfloor + u_{\mathfrak{E}1}(t) \right\rfloor \\ u_{D2}(t) = \left\lfloor R_{\mathfrak{E}21} \left\lfloor \tilde{G}_{\mathfrak{E}12}^2 \left\lfloor u_{\mathfrak{E}3}^1(t) \right\rfloor + \tilde{i}_{\mathfrak{E}1}^2(t) \right\rfloor + R_{\mathfrak{E}23} \left\lfloor \tilde{G}_{\mathfrak{E}21}^2 \left\lfloor u_{\mathfrak{E}1}^3(t) \right\rfloor + \tilde{i}_{\mathfrak{E}2}^2(t) \right\rfloor + u_{\mathfrak{E}2}(t) \right\rfloor, \\ u_{D3}(t) = \left\lfloor R_{\mathfrak{E}31} \left\lfloor \tilde{G}_{\mathfrak{E}12}^3 \left\lfloor u_{\mathfrak{E}2}^1(t) \right\rfloor + \tilde{i}_{\mathfrak{E}1}^3(t) \right\rfloor + R_{\mathfrak{E}32} \left\lfloor \tilde{G}_{\mathfrak{E}21}^3 \left\lfloor u_{\mathfrak{E}1}^2(t) \right\rfloor + \tilde{i}_{\mathfrak{E}2}^3(t) \right\rfloor + u_{\mathfrak{E}3}(t) \right\rfloor \end{cases} \quad (10)$$

где $\tilde{\mathbf{G}}_3^i = (\hat{\mathbf{R}}_3^i)^{-1}$, $\tilde{\mathbf{I}}_3^i = (\hat{\mathbf{R}}_3^i)^{-1} \cdot \hat{\mathbf{U}}_3^i$ – матрицы ЭГ в случае закрытого i -го ИД;

$u_{\mathfrak{E}i}^j(t)$ – напряжение j -го ИД, когда i -й ИД открыт в схеме с двумя ИД.

Аналогично получаем решение для токов ИД [14]:

$$\begin{cases} i_{D1}(t) = \left\lfloor G_{\mathfrak{E}12} \left\lfloor \tilde{R}_{\mathfrak{E}12}^1 \left\lfloor i_{\mathfrak{E}3}^2(t) \right\rfloor + \tilde{u}_{\mathfrak{E}1}^1(t) \right\rfloor + G_{\mathfrak{E}13} \left\lfloor \tilde{R}_{\mathfrak{E}21}^1 \left\lfloor i_{\mathfrak{E}2}^3(t) \right\rfloor + \tilde{u}_{\mathfrak{E}2}^1(t) \right\rfloor + i_{\mathfrak{E}1}(t) \right\rfloor \\ i_{D2}(t) = \left\lfloor G_{\mathfrak{E}21} \left\lfloor \tilde{R}_{\mathfrak{E}12}^2 \left\lfloor i_{\mathfrak{E}3}^1(t) \right\rfloor + \tilde{u}_{\mathfrak{E}1}^2(t) \right\rfloor + G_{\mathfrak{E}23} \left\lfloor \tilde{R}_{\mathfrak{E}21}^2 \left\lfloor i_{\mathfrak{E}1}^3(t) \right\rfloor + \tilde{u}_{\mathfrak{E}2}^2(t) \right\rfloor + i_{\mathfrak{E}2}(t) \right\rfloor, \\ i_{D3}(t) = \left\lfloor G_{\mathfrak{E}31} \left\lfloor \tilde{R}_{\mathfrak{E}12}^3 \left\lfloor i_{\mathfrak{E}2}^1(t) \right\rfloor + \tilde{u}_{\mathfrak{E}1}^3(t) \right\rfloor + G_{\mathfrak{E}32} \left\lfloor \tilde{R}_{\mathfrak{E}21}^3 \left\lfloor i_{\mathfrak{E}1}^2(t) \right\rfloor + \tilde{u}_{\mathfrak{E}2}^3(t) \right\rfloor + i_{\mathfrak{E}3}(t) \right\rfloor \end{cases} \quad (11)$$

где $\tilde{\mathbf{R}}_{\mathfrak{z}}^i = (\hat{\mathbf{G}}_{\mathfrak{z}}^i)^{-1}$, $\tilde{\mathbf{U}}_{\mathfrak{z}}^i = (\hat{\mathbf{G}}_{\mathfrak{z}}^i)^{-1} \cdot \hat{\mathbf{I}}_{\mathfrak{z}}^i$ – матрицы ЭГ в случае открытого i -го диода;
 $i_{\mathfrak{z}i}^j(t)$ – ток через j -й диод, когда i -й ИД закрыт в схеме с двумя ИД.

Как видно, аналитическое решение для напряжений на ИД получается чередованием матриц $\mathbf{R}_{\mathfrak{z}} / \mathbf{G}_{\mathfrak{z}}$ и $\mathbf{U}_{\mathfrak{z}} / \mathbf{I}_{\mathfrak{z}}$ (одна создается по другой), причем порядок следующей матрицы на единицу меньше, чем у предыдущей, (номера строки и столбца указываются в верхнем индексе через тире) [14]:

$$\begin{cases} \mathbf{R}_{\mathfrak{z}} \rightarrow \tilde{\mathbf{G}}_{\mathfrak{z}}^i \rightarrow \tilde{\mathbf{R}}_{\mathfrak{z}}^{i-j} \rightarrow \dots \rightarrow \tilde{\mathbf{R}}_{\mathfrak{z}}^{i-\dots-z} (\tilde{\mathbf{G}}_{\mathfrak{z}}^{i-\dots-z}) \\ \mathbf{U}_{\mathfrak{z}} \rightarrow \tilde{\mathbf{I}}_{\mathfrak{z}}^i \rightarrow \tilde{\mathbf{U}}_{\mathfrak{z}}^{i-j} \rightarrow \dots \rightarrow \tilde{\mathbf{U}}_{\mathfrak{z}}^{i-\dots-z} (\tilde{\mathbf{I}}_{\mathfrak{z}}^{i-\dots-z}) \end{cases} \quad (12)$$

Для токов через ИД решение получается путем замены переменных.

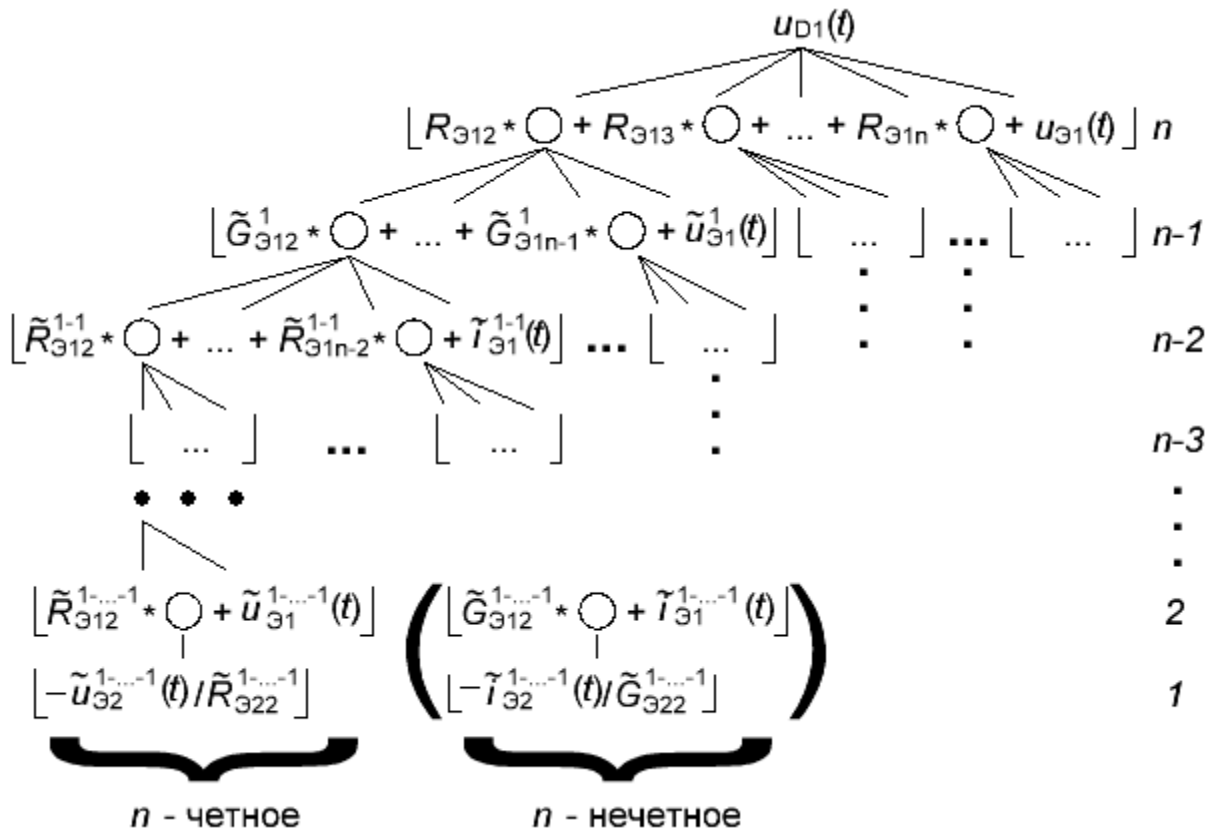


Рис. 3. Рекуррентный алгоритм решения в виде корневого дерева для напряжения $u_{D1}(t)$

На рис. 3 показано решение для напряжения на ИД D_1 ($u_{D1}(t)$) в виде корневого дерева. Этот алгоритм для напряжения $u_{D1}(t)$ модифицируется для другого напряжения ИД. При нахождении токов ИД по алгоритму на рис. 3 взаимно заменяются: $\mathbf{R}_{\mathfrak{z}}$ на $\mathbf{G}_{\mathfrak{z}}$ и $\mathbf{U}_{\mathfrak{z}}$ на $\mathbf{I}_{\mathfrak{z}}$. Для решения (3) требуются

в символьном виде как элементы матриц $\mathbf{R}_\Sigma$ и $\mathbf{U}_\Sigma$, так и элементы множества производных от них матриц ЭГ согласно (12) [14].

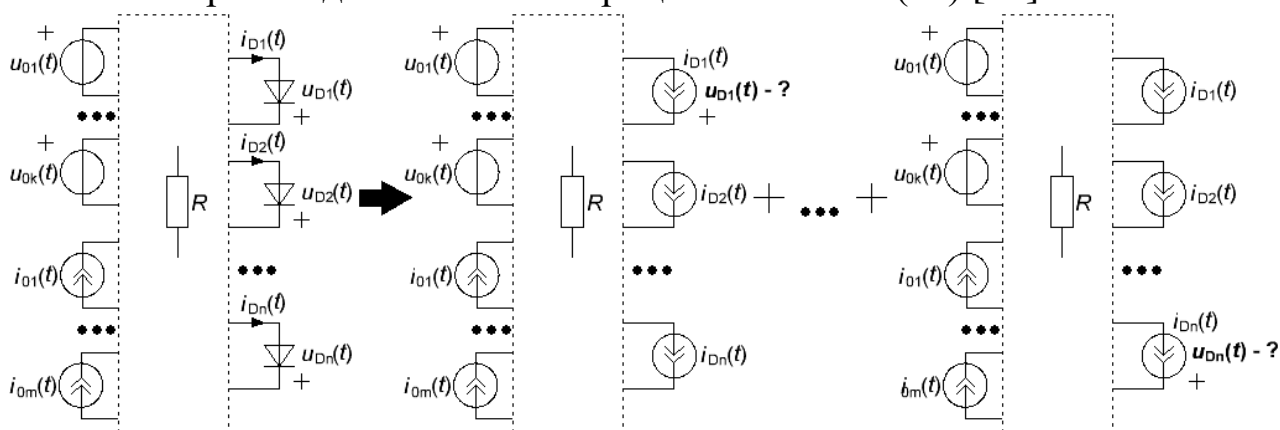


Рис. 4. Преобразование схемы с ИД для нахождения элементов матриц $\mathbf{R}_\Sigma$ и $\mathbf{U}_\Sigma$

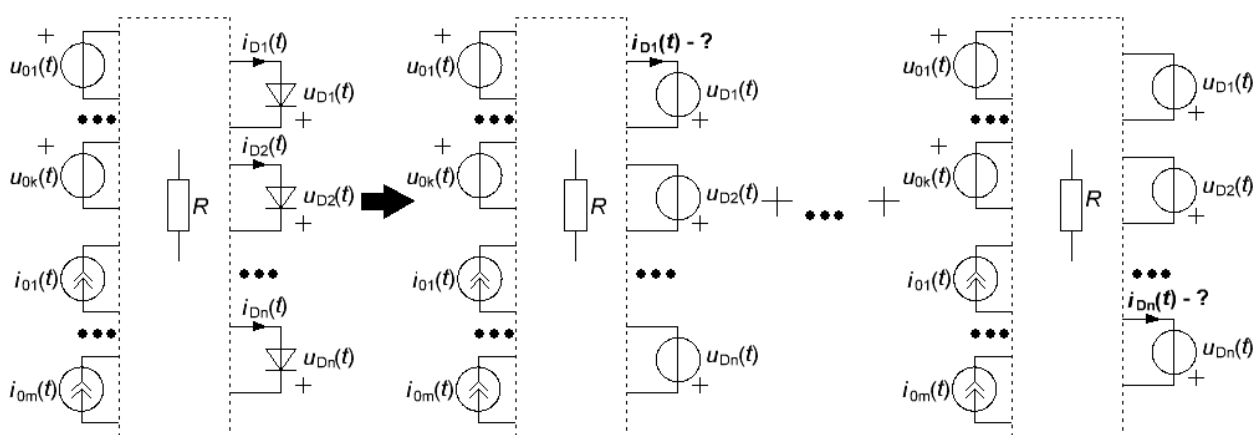


Рис. 5. Преобразование схемы с ИД для нахождения элементов матриц $\mathbf{G}_\Sigma$ и $\mathbf{I}_\Sigma$

Использование метода схемных определителей для нахождения элементов матриц ЭГ. Системы уравнений (3) и (8) представляют из себя ЗНК и ЗТК соответственно. Поэтому нахождение элементов матриц $\mathbf{R}_\Sigma$ и $\mathbf{U}_\Sigma$ равносильно получению напряжения на ИД их заменой независимыми источниками тока (рис. 4), а нахождение элементов матриц $\mathbf{G}_\Sigma$ и $\mathbf{I}_\Sigma$ равносильно нахождению тока на ИД их заменой независимыми источниками напряжения (рис. 5). После преобразования схемы с ИД решение можно найти с помощью метода схемных определителей (МСО) [16–18].

Перед преобразованиями схемы необходимо составить две схемы замещения при замене ИД разрывом или идеальным проводником. Для понимания использования МСО эти преобразования схемы сделаем только

для «простых» схем, когда замена ИД не приводит к разделению схемы на части, и в схеме отсутствуют зависимые источники.

Тогда, в силу метода схемных определителей и преобразований схемы (рис. 4 и 5), получаем алгоритм нахождения элементов матриц ЭГ: 1) для определения знаменателя элементов матриц $\mathbf{R}_\Sigma$ и $\mathbf{U}_\Sigma$ стянуть источники напряжения, а источники тока и ИД удалить; 2) для определения знаменателя элементов матриц $\mathbf{G}_\Sigma$ и $\mathbf{I}_\Sigma$ стянуть источники напряжения и ИД, а источники тока удалить; 3) для определения числителей элементов матрицы $\mathbf{R}_\Sigma$ (r_{ij}) стянуть все источники напряжения, удалить источники тока, i -й ИД заменить на ПНУИ, а j -й ИД заменить на ГНУИ (направления ПНУИ и ГНУИ определяются направлениями токов ИД), оставшиеся ИД удалить; если $i = j$, то i -й ИД заменить проводом; 4) для определения числителей элементов матрицы $\mathbf{U}_\Sigma$ (u_{ij}) i -й ИД заменить на ПНУИ (направление ПНУИ соответствует направлению напряжения на ИД), j -й источник (источник напряжения или источник тока) заменить на ГНУИ (направление ГНУИ соответствует направлению источника), стянуть оставшиеся источники напряжения, а оставшиеся источники тока и ИД удалить; 5) для определения числителей элементов матрицы $\mathbf{G}_\Sigma$ (g_{ij}) стянуть все источники напряжения, удалить источники тока, i -й ИД заменить на ПНУИ, а j -й ИД заменить на ГНУИ (направление ПНУИ определяется направлением напряжения на i -м ИД, а направление ГНУИ определяется направлением тока через j -й ИД), оставшиеся ИД стянуть; если $i = j$, то i -й ИД заменить проводом; 6) для определения числителей элементов матрицы $\mathbf{I}_\Sigma$ (i_{ij}) i -й ИД заменить на ПНУИ (направление ПНУИ соответствует направлению тока через ИД), j -й источник (источник напряжения или источник тока) заменить на ГНУИ (направление ГНУИ соответствует направлению источника), стянуть оставшиеся источники напряжения и ИД, а оставшиеся источники тока удалить.

Далее с помощью МСО [16–18] находятся элементы матриц ЭГ для данной схемы. При анализе схем, в которых замена ИД приводит к разделению на части, требуется модифицировать пункты 1 или 2. В этом случае у элемента матриц не будет общего знаменателя. При наличии управляемых источников используются дополнительные схемно-алгебраические преобразования МСО [16–18].

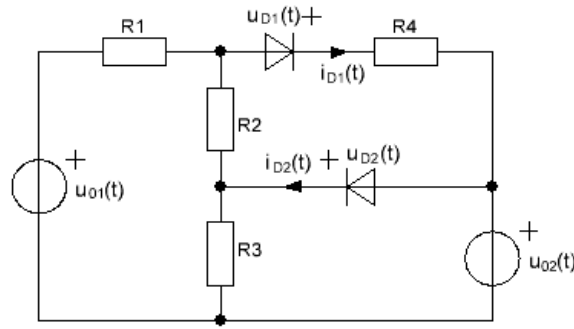


Рис. 6. Пример разветвленной цепи с двумя ИД

Расчет элементов матриц с помощью программы FASTMEAN.

Программа FASTMEAN [19,20] обладает модулем символьного анализа [21], основанным на МСО, и её можно использовать для нахождения элементов матриц $\mathbf{R}_\Sigma$, $\mathbf{G}_\Sigma$, $\mathbf{U}_\Sigma$ и $\mathbf{I}_\Sigma$ в символьном виде. В этом случае не надо использовать МСО, т.к. программа сама использует данный метод. Необходимо лишь построить схему, которую надо посчитать, и указать воздействие и реакцию.

Согласно предложенному алгоритму для расчета схемы (рис. 6) необходимо собрать две схемы замещения: для расчета элементов матриц $\mathbf{R}_\Sigma$ и $\mathbf{U}_\Sigma$, в которой ИД заменяются источниками тока (рис. 7,а), и для расчета элементов матриц $\mathbf{G}_\Sigma$ и $\mathbf{I}_\Sigma$, в которой ИД заменяются источниками напряжения (рис. 7,б). Для получившихся двухполюсников (источников тока или напряжения) необходимо, чтобы направление источника тока указывало на старший узел (рис. 7,а), и плюс источника напряжения был на старшем узле (рис. 7,б). Только в этом случае можно получить корректные результаты. В противном случае будет ошибка в знаках.

Далее для схемы (рис. 7,а) необходимо в меню «Символьный анализ» выбрать из списка напряжение нужного ИД. В этом случае получаем следующие результаты (рис. 8), которые соответствуют строкам в матрицах $\mathbf{R}_\Sigma$ и $\mathbf{U}_\Sigma$:

$$\mathbf{R}_\Sigma = \frac{1}{R_1 + R_2 + R_3} \begin{pmatrix} (R_2 + R_3)(R_1 + R_4) + R_1 R_4 & -R_1 R_3 \\ -R_1 R_3 & (R_1 + R_2) R_3 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

$$\mathbf{U}_\Sigma = \frac{1}{R_1 + R_2 + R_3} \begin{pmatrix} -(R_2 + R_3)u_{01}(t) + (R_1 + R_2 + R_3)u_{02}(t) \\ R_3 u_{01}(t) - (R_1 + R_2 + R_3)u_{02}(t) \end{pmatrix}, \quad (14)$$

что соответствует [14].

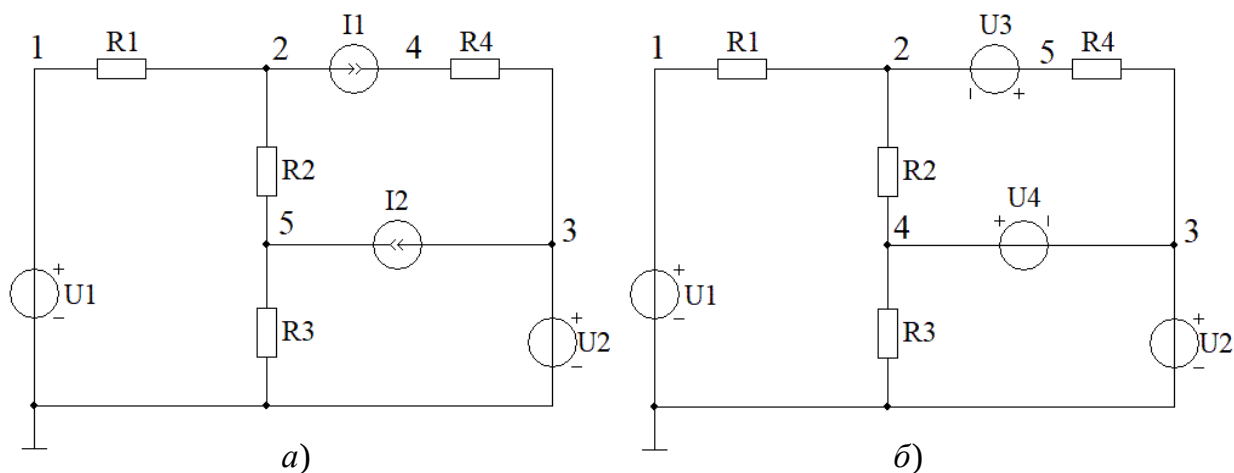


Рис. 7. Схемы замещения для расчета элементов матриц в разветвленной цепи с двумя ИД (рис. 6) в программе FASTMEAN

f U(p) = U_I1

$$U_{I1} = \frac{U1 * (-R2 - R3) + I1 * ((R2 + R3) * (R4 + R1) + R4 * R1) + U2 * (R2 + R3 + R1) - I2 * R3 * R1}{R2 + R1 + R3}$$

а)

f U(p) = U_I2

$$U_{I2} = \frac{U1 * R3 + I2 * (R2 + R1) * R3 + U2 * (-R2 - R1 - R3) - I1 * R1 * R3}{R2 + R1 + R3}$$

б)

Рис. 8. Результат расчета программы в FASTMEAN для элементов матриц $\mathbf{R}_3$ и $\mathbf{U}_3$

f I(p) = I_U3

$$I_{U3} = \frac{U1 * R3 * R2 + U3 * R3 * (R2 + R1) + U4 * R3 * R1 - U2 * R3 * R2}{R3 * (R2 * (R4 + R1) + R4 * R1)}$$

а)

f I(p) = I_U4

$$I_{U4} = \frac{U2 * (R2 * (R4 + R1) + R4 * (R3 + R1)) + U3 * R1 * R3 + U4 * ((R2 + R3) * (R4 + R1) + R4 * R1) - U1 * R4 * R3}{R3 * (R2 * (R4 + R1) + R4 * R1)}$$

б)

Рис. 9. Результат расчета программы в FASTMEAN для элементов матриц $\mathbf{G}_3$ и $\mathbf{I}_3$

Для схемы (рис. 7,б) необходимо в меню «Символьный анализ» выбрать из списка напряжение нужного ИД. В этом случае получаем следующие результаты (рис. 9), которые соответствуют строкам в матрицах $\mathbf{G}_3$ и $\mathbf{I}_3$:

$$\mathbf{G}_\mathfrak{z} = \frac{1}{R_3(R_2(R_1 + R_4) + R_1R_4)} \begin{pmatrix} R_3(R_1 + R_2) & R_1R_3 \\ R_1R_3 & (R_2 + R_3)(R_1 + R_4) + R_1R_4 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

$$\mathbf{I}_\mathfrak{z} = \frac{1}{R_3(R_2(R_1 + R_4) + R_1R_4)} \begin{pmatrix} R_2R_3u_{01}(t) - R_2R_3u_{02}(t) \\ -R_3R_4u_{01}(t) + (R_2(R_1 + R_4) + R_4(R_1 + R_3))u_{02}(t) \end{pmatrix}, \quad (16)$$

которые соответствуют полученным в [14].

Рассмотрим анализ схемы с двумя ИД (рис. 10) по программе FASTMEAN. Составляются две схемы замещения: для определения элементов матриц $\mathbf{R}_\mathfrak{z}$ и $\mathbf{U}_\mathfrak{z}$ (рис. 11,а) и для определения элементов матриц $\mathbf{G}_\mathfrak{z}$ и $\mathbf{I}_\mathfrak{z}$ (рис. 11,б). Отсюда

$$\mathbf{R}_\mathfrak{z} = \frac{1}{R_1 + R_4} \begin{pmatrix} R_1(R_2 + R_4) + R_2R_4 & R_1R_4 \\ R_1R_4 & R_1(R_3 + R_4) + R_3R_4 \end{pmatrix}, \quad (17)$$

$$\mathbf{U}_\mathfrak{z} = \frac{1}{R_1 + R_4} \begin{pmatrix} -R_1u_{01}(t) - (R_1 + R_4)u_{02}(t) \\ -R_1u_{01}(t) - (R_1 + R_4)u_{03}(t) \end{pmatrix}, \quad (18)$$

$$\mathbf{G}_\mathfrak{z} = \frac{1}{R_1(R_2(R_3 + R_4) + R_3R_4) + R_2R_3R_4} \begin{pmatrix} R_1(R_3 + R_4) + R_3R_4 & -R_1R_4 \\ -R_1R_4 & R_1(R_2 + R_4) + R_2R_4 \end{pmatrix}, \quad (19)$$

$$\mathbf{I}_\mathfrak{z} = \frac{1}{R_1(R_2(R_3 + R_4) + R_3R_4) + R_2R_3R_4} \times \\ \times \begin{pmatrix} R_1R_3u_{01}(t) + (R_1(R_3 + R_4) + R_3R_4)u_{02}(t) - R_1R_4u_{03}(t) \\ R_1R_2u_{01}(t) - R_1R_4u_{02}(t) + (R_1(R_2 + R_4) + R_2R_4)u_{03}(t) \end{pmatrix}. \quad (20)$$

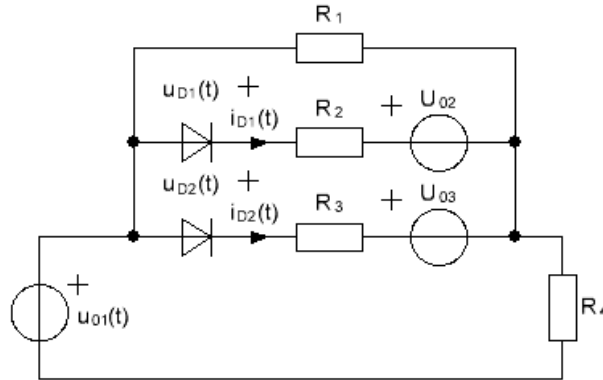


Рис. 10. Пример разветвленной цепи с двумя ИД

Формулы (17)–(20) соответствуют [14].

Используя программу Fastmean для получения элементов матриц ЭГ, требуется: 1) построить схему замещения для каждой пары матриц ЭГ; 2) учитывать направления токов и напряжений ИД при расстановке номеров узлов; 3) вручную заполнить матрицы ЭГ.

Компьютерная программа для расчета элементов матриц. Учитывая сложности использования программы Fastmean, а также возможность получения неправильных результатов, для автоматизации нахождения элементов матриц ЭГ реализована программа на языке C++, которая использует текстовый файл с описанием схемы.

Схема проверяется на связность после замены ИД разрывом или проводом. Если схема связна, то проводится расчет элементов матриц ЭГ. Схема преобразуется согласно правилам, описанным выше, затем с помощью МСО получаем решение. Для схемы на рис. 6 элементы матриц

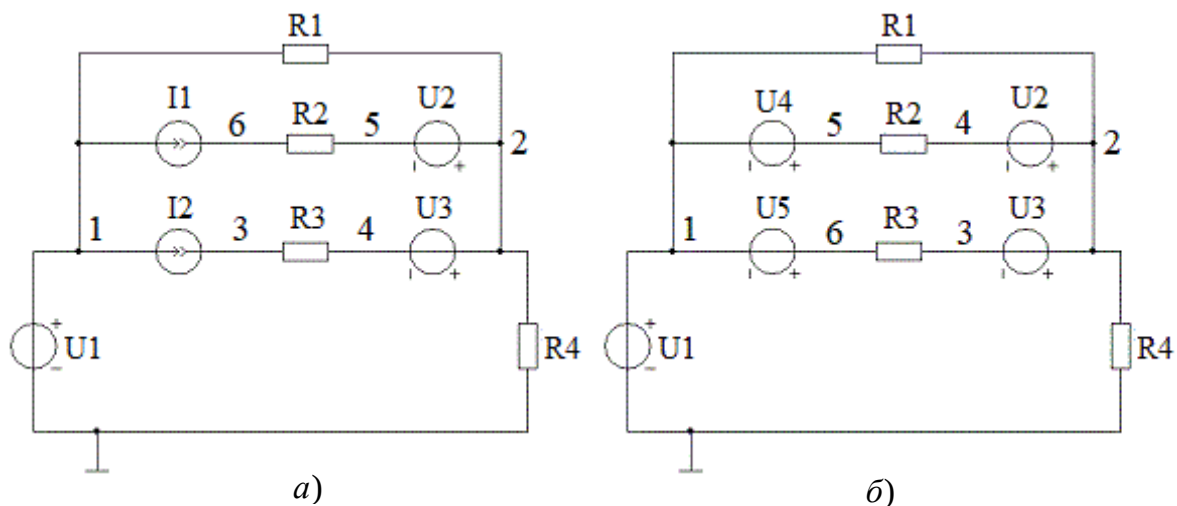


Рис. 11. Схемы замещения для расчета элементов матриц в разветвленной цепи с двумя ИД (рис. 10) в программе FASTMEAN

ЭГ представлены на рис. 12, а для схемы на рис. 10 – на рис. 13. Результаты расчета совпадают с решением по FASTMEAN.

Оценка сложности символьного анализа при обработке матриц. После подстановки (13) и (14) в (7) получаются напряжения ИД (рис. 6):

$$u_{D1}(t) = f_{MT} \left(\frac{-R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \left[\frac{R_1 + R_2 + R_3}{(R_1 + R_2) R_3} \cdot \frac{(R_1 + R_2 + R_3) u_{02}(t) - R_3 u_{01}(t)}{R_1 + R_2 + R_3} \right] + \right.$$

$$+ \frac{(R_1 + R_2 + R_3)u_{02}(t) - (R_2 + R_3)u_{01}(t)}{R_1 + R_2 + R_3} \Bigg), \quad (21)$$

$$u_{D2}(t) = f_{MT} \left(\frac{-R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \left[\frac{R_1 + R_2 + R_3}{(R_2 + R_3)(R_1 + R_4) + R_1 R_4} \cdot \frac{(R_2 + R_3)u_{01}(t) - (R_1 + R_2 + R_3)u_{02}(t)}{R_1 + R_2 + R_3} \right] + \right. \\ \left. + \frac{R_3 u_{01}(t) - (R_2 + R_3 + R_1)u_{02}(t)}{R_2 + R_1 + R_3} \right), \quad (22)$$

<pre>*****RU-графы***** Решение RU-графов: N = R1+R2+R3 r11 = R1*(R2+R3+R4)+(R2+R3)*R4 r12 = -R1*R3 r21 = -R1*R3 r22 = (R1+R2)*R3 u011 = -(R2+R3) u012 = R1+R2+R3 u021 = R3 u022 = -(R1+R2)-R3 *****</pre>	<pre>*****GI-графы***** Решение GI-графов: N = R3*(R1*(R2+R4)+R2*R4) g11 = (R1+R2)*R3 g12 = R1*R3 g21 = R1*R3 g22 = R1*(R2+R3+R4)+(R2+R3)*R4 i011 = R2*R3 i012 = -R2*R3 i021 = -R3*R4 i022 = R1*(R2+R4)+R4*(R2+R3) *****</pre>
а)	б)

Рис. 12. Результат расчета схемы (рис. 6) программой, написанной на C++:

а) элементы матриц $\mathbf{R}_\Sigma$ и $\mathbf{U}_\Sigma$; б) элементов матриц $\mathbf{G}_\Sigma$ и $\mathbf{I}_\Sigma$

где $f_{MT}(x)$ – альтернативная форма функции преобразования модуля $\lfloor x \rfloor$.

Как видно, (21) и (22) содержат взаимно уничтожаемые слагаемые. После их устранения:

$$u_{D1}(t) = \left[\frac{-R_1}{R_1 + R_2} \left[u_{02}(t) - \frac{u_{01}(t)R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \right] + u_{02}(t) - \frac{u_{01}(t)(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} \right], \quad (23)$$

$$u_{D2}(t) = \left[\frac{-R_1 R_3 \left[\frac{u_{01}(t)(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} - u_{02}(t) \right]}{(R_2 + R_3)(R_1 + R_4) + R_1 R_4} + \frac{u_{01}(t)R_3}{R_2 + R_1 + R_3} - u_{02}(t) \right], \quad (24)$$

Подставляя (15) и (16) в (9), находим токи ИД в схеме (рис. 6). После устранения одинаковых слагаемых противоположного знака:

$$i_{D1}(t) = f_{MT} \left(\frac{R_1 R_3}{R_3(R_2(R_1 + R_4) + R_1 R_4)} \times \right.$$

$$\times \left[\frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \cdot \frac{(R_1 + R_2 + R_3)u_{02}(t) - (R_2 + R_3)u_{01}(t)}{(R_2 + R_3)(R_1 + R_4) + R_1 R_4} + \frac{R_3 u_{01}(t)}{R_2 + R_1 + R_3} - u_{02}(t) \right] +$$

$$+ \frac{R_2 R_3 u_{01}(t) - R_2 R_3 u_{02}(t)}{R_3 (R_2 (R_1 + R_4) + R_1 R_4)}, \quad (25)$$

$$i_{D2}(t) = f_{MT} \left(\frac{R_1 R_3}{R_3 (R_2 (R_1 + R_4) + R_1 R_4)} \times \right.$$

$$\times \left[\frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \cdot \frac{R_3 u_{01}(t) - (R_1 + R_2 + R_3)u_{02}(t)}{(R_1 + R_2)R_3} + u_{02}(t) - \frac{(R_2 + R_3)u_{01}(t)}{R_1 + R_2 + R_3} \right] +$$

$$\left. + \frac{-R_3 R_4 u_{01}(t) + (R_2 (R_1 + R_4) + R_4 (R_1 + R_3))u_{02}(t)}{R_3 (R_2 (R_1 + R_4) + R_1 R_4)} \right). \quad (26)$$

Аналогично получаются напряжения на ИД (рис. 10):

$$u_{D1}(t) = \left[\frac{R_1 R_4}{R_1 + R_4} \left[\frac{R_1 u_{01}(t) + (R_1 + R_4)u_{03}(t)}{R_1 (R_3 + R_4) + R_3 R_4} \right] - \frac{R_1 u_{01}(t)}{R_1 + R_4} - u_{02}(t) \right], \quad (27)$$

$$u_{D2}(t) = \left[\frac{R_1 R_4}{R_1 + R_4} \left[\frac{R_1 u_{01}(t) + (R_1 + R_4)u_{02}(t)}{R_1 (R_2 + R_4) + R_2 R_4} \right] - \frac{R_1 u_{01}(t)}{R_1 + R_4} - u_{03}(t) \right], \quad (28)$$

и токи через ИД

$$i_{D1}(t) = f_{MT} \left(\frac{-R_1 R_4}{R_1 (R_2 (R_3 + R_4) + R_3 R_4) + R_2 R_3 R_4} \times \right.$$

$$\times \left[\frac{R_1 R_4}{R_1 + R_4} \cdot \frac{R_1 u_{01}(t) + (R_1 + R_4)u_{02}(t)}{R_1 (R_2 + R_4) + R_2 R_4} - \frac{R_1 u_{01}(t)}{R_1 + R_4} - u_{03}(t) \right] +$$

$$\left. + \frac{R_1 R_3 u_{01}(t) + (R_1 (R_3 + R_4) + R_3 R_4)u_{02}(t) - R_1 R_4 u_{03}(t)}{R_1 (R_2 (R_3 + R_4) + R_3 R_4) + R_2 R_3 R_4} \right), \quad (29)$$

$$i_{D2}(t) = f_{MT} \left(\frac{-R_1 R_4}{R_1 (R_2 (R_3 + R_4) + R_3 R_4) + R_2 R_3 R_4} \times \right.$$

$$\times \left[\frac{R_1 R_4}{R_1 + R_4} \cdot \frac{R_1 u_{01}(t) + (R_1 + R_4)u_{03}(t)}{R_1 (R_3 + R_4) + R_3 R_4} - \frac{R_1 u_{01}(t)}{R_1 + R_4} - u_{02}(t) \right] +$$

$$\left. + \frac{R_1 R_2 u_{01}(t) - R_1 R_4 u_{02}(t) + (R_1 (R_2 + R_4) + R_2 R_4)u_{03}(t)}{R_1 (R_2 (R_3 + R_4) + R_3 R_4) + R_2 R_3 R_4} \right). \quad (30)$$

Как видно из выражений (21)–(24), матричный подход [14] для определения токов и напряжений через ИД, имеет избыточность, обусловленную сокращением матричных определителей при делении элементов матриц $\mathbf{R}_\Sigma$, $\mathbf{U}_\Sigma$ и $\mathbf{G}_\Sigma$, $\mathbf{I}_\Sigma$. Кроме того, при использовании выражений (8)–(12), как видно из выражений (25), (26), (29), (30), формируются несколько коэффициентов при одном возмущении, которые желательно сгруппировать в компактном виде.

Кроме недостатков, данный подход имеет преимущество – схемы замещения получаются унифицированные, достаточно найти числитель и знаменатель только для одной из них, чтобы построить матрицы $\mathbf{R}_\Sigma$ и $\mathbf{U}_\Sigma$ или матрицы $\mathbf{G}_\Sigma$ и $\mathbf{I}_\Sigma$. В этом случае для нахождения токов и напряжений на ИД для схемы с одним ИД требуется два определителя (числитель и знаменатель напряжения на ИД), для схемы с 2-мя ИД – 4 определителя (числителя и знаменатель напряжений на ИД, а также числителя и знаменатель токов через ИД), для схемы с 3-мя ИД – уже 16 определителей (4 числителя и знаменателя из-за дополнительных схем замещения для токов и напряжений ИД), для схемы с 4-мя ИД – 32 определителя, для схемы с 5-ю ИД – 52 определителя и т.д. Начиная со схемы с 3-мя ИД, получаем арифметическую прогрессию, сумма которой равна

<pre>*****RU-графы***** Решение RU-графов: N = R1+R4 r11 = R1*(R2+R4)+R2*R4 r12 = R1*R4 r21 = R1*R4 r22 = R1*(R3+R4)+R3*R4 u011 = -R1 u012 = -R1-R4 u013 = 0 u021 = -R1 u022 = 0 u023 = -R1-R4 *****</pre>	<pre>*****GI-графы***** Решение GI-графов: N = R1*(R2*(R3+R4)+R3*R4)+R2*R3*R4 g11 = R1*(R3+R4)+R3*R4 g12 = -R1*R4 g21 = -R1*R4 g22 = R1*(R2+R4)+R2*R4 i011 = R1*R3 i012 = R1*(R3+R4)+R3*R4 i013 = -R1*R4 i021 = R1*R2 i022 = -R1*R4 i023 = R1*(R2+R4)+R2*R4 *****</pre>
а)	б)

Рис. 13. Результат расчета схемы (рис. 10) программой, написанной на C++:

а) элементы матриц $\mathbf{R}_\Sigma$ и $\mathbf{U}_\Sigma$; б) элементов матриц $\mathbf{G}_\Sigma$ и $\mathbf{I}_\Sigma$

$$\Sigma_{C3} = \left(\frac{3+n}{2} (n-2) + 1 \right) \cdot 4 = 2(n+3)(n-2) + 4 = 2(n^2 + n - 4), \quad (31)$$

где n – число ИД.

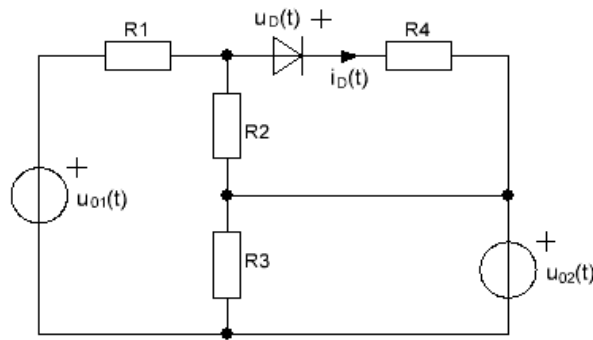


Рис. 14. Пример разветвленной цепи с одним ИД

Для n -го решения требуется $\Sigma_n = (n-1) \cdot \Sigma_{n-1} + 1$ операций функции преобразования модуля [14]. Для разреженных матриц ЭГ число операций преобразования модуля уменьшается. Сложность аналитического решения увеличивает наличие нескольких коэффициентов при одном возмущении ((29) или (30)). Важно, что этапы вычисления коэффициентов для каждого уровня решения на рис. 3 можно выполнять параллельно.

Уменьшение сложности символьного решения при анализе схем с ИД. Рассмотрим сначала цепь с одним ИД. Согласно выражению (6), чтобы не пользоваться матричным подходом следует найти только напряжение на ИД, когда ИД закрыт и ток через ИД, когда ИД открыт. Например, для схемы на рис. 14 получаем:

$$i_D(t) = \left[\frac{R_2(u_{01}(t) - u_{02}(t))}{R_1(R_2 + R_4) + R_2R_4} \right] \quad (32)$$

$$u_D(t) = \left[\frac{R_2(u_{02}(t) - u_{01}(t))}{R_1 + R_2} \right]. \quad (33)$$

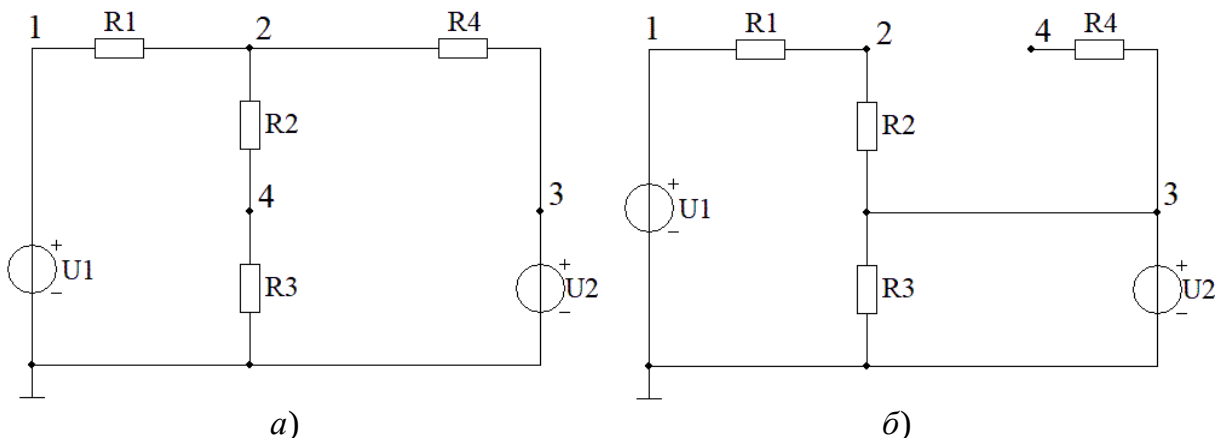


Рис. 15. Схемы замещения для расчета напряжения u_{02}^1 и u_{01}^2

в разветвленной цепи с двумя ИД (рис. 6) в программе FASTMEAN

Как видно из (6), для определения тока и напряжения в схеме с одним ИД используя матричный подход необходима одна схема замещения (когда ИД открыт), то есть необходимо посчитать два определителя для определения $u_{\Sigma}(t)$ и R_{Σ} . В случае прямого нахождения тока (32) и напряжения (33) требуются две схемы замещения (когда ИД открыт и когда ИД закрыт), то есть 4 схемных определителя.

При отказе от матричного подхода в схеме с двумя ИД в (7) токи $i_{\Sigma 1}^0$ и $i_{\Sigma 2}^0$ находятся по схеме, используя числитель для нахождения матриц $\mathbf{R}_{\Sigma}$ и $\mathbf{U}_{\Sigma}$ (рис. 7,а или рис. 11,а). Аналогично в (9) находятся по схеме напряжения $u_{\Sigma 2}^1$ и $u_{\Sigma 1}^2$. Для этого используются две схемы замещения, в которых один из ИД заменяется проводом, а другой – разрывом.

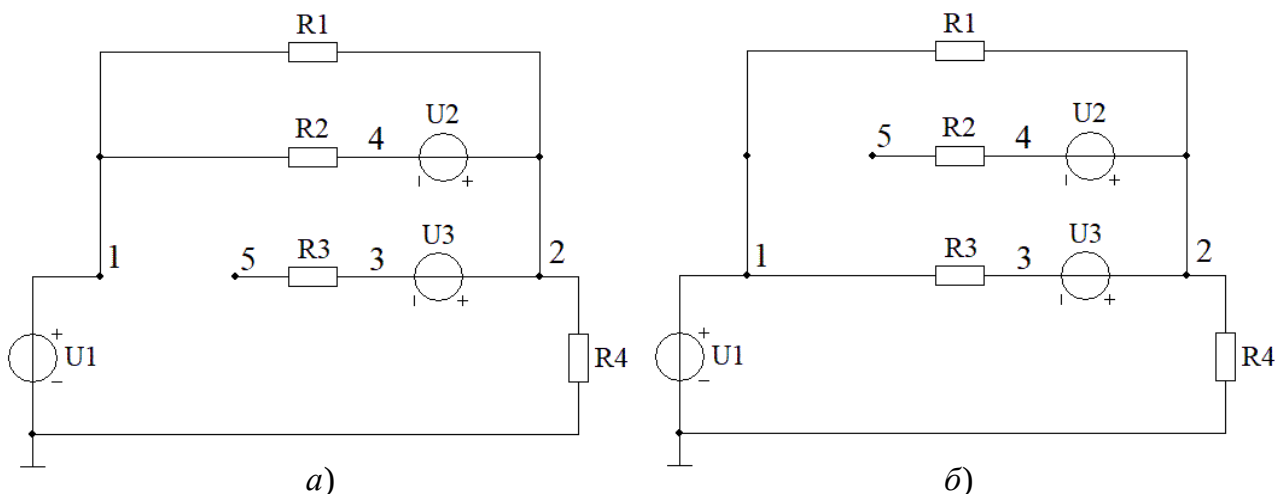


Рис. 16. Схемы замещения для расчета напряжения $u_{\Sigma 2}^1$ и $u_{\Sigma 1}^2$ матриц в разветвленной цепи с двумя ИД (рис. 10) в программе FASTMEAN

В каждой схеме замещения находится напряжение на разрыве, то есть требуется четыре новых определителя. Определим напряжения $u_{\Sigma 2}^1$ и $u_{\Sigma 1}^2$ для схем (рис. 6, 10), используя дополнительные схемы замещения. Для схемы, изображенной на рис. 6, получаем следующие схемы замещения (рис. 15), из которых определяем напряжение $u_{\Sigma 2}^1$ (напряжение между 4-м и 3-м узлами на рис. 15,а)

$$u_{\Sigma 2}^1(t) = \frac{u_{02}(t)R_1R_3 - u_{02}(t)(R_1(R_2 + R_4) + R_4(R_2 + R_3))}{(R_2 + R_3)(R_1 + R_4) + R_1R_4} \quad (34)$$

и напряжение $u_{\Sigma 1}^2$ (напряжение между 4-м и 2-м узлами на рис. 15,б)

$$u_{\mathfrak{S}1}^2(t) = \frac{u_{01}(t)R_2R_3 - u_{02}(t)R_2R_3}{(R_1 + R_2)R_3}. \quad (35)$$

Подставляя (15), (16) и (34), (35) в (9) получаем

$$i_{D1}(t) = f_{MT} \left(\frac{R_1R_3}{R_3(R_2(R_1 + R_4) + R_1R_4)} \left[\frac{u_{02}(t)R_1R_3 - u_{02}(t)(R_1(R_2 + R_4) + R_4(R_2 + R_3))}{(R_2 + R_3)(R_1 + R_4) + R_1R_4} \right] + \frac{R_2R_3u_{01}(t) - R_2R_3u_{02}(t)}{R_3(R_2(R_1 + R_4) + R_1R_4)} \right), \quad (36)$$

$$i_{D2}(t) = f_{MT} \left(\frac{R_1R_3}{R_3(R_2(R_1 + R_4) + R_1R_4)} \left[\frac{u_{01}(t)R_2R_3 - u_{02}(t)R_2R_3}{(R_1 + R_2)R_3} \right] + \frac{-R_3R_4u_{01}(t) + (R_2(R_1 + R_4) + R_4(R_1 + R_3))u_{02}(t)}{R_3(R_2(R_1 + R_4) + R_1R_4)} \right). \quad (37)$$

Для схемы на рис. 10 из схемы замещения на рис. 16 получаем:

$$u_{\mathfrak{S}2}^1(t) = \frac{-u_{01}(t)R_1R_2 + u_{02}(t)R_1R_4}{R_1(R_2 + R_4) + R_2R_4} - u_{03}(t) \quad (38)$$

$$u_{\mathfrak{S}1}^2(t) = \frac{-u_{01}(t)R_1R_3 + u_{03}(t)R_1R_4}{R_1(R_3 + R_4) + R_3R_4} - u_{02}(t). \quad (39)$$

Подставляя (19), (20) и (38), (39) в (9), получаем в схеме (рис. 10):

$$i_{D1}(t) = f_{MT} \left(\frac{-R_1R_4}{R_1(R_2(R_3 + R_4) + R_3R_4) + R_2R_3R_4} \left[\frac{-u_{01}(t)R_1R_2 + u_{02}(t)R_1R_4}{R_1(R_2 + R_4) + R_2R_4} - u_{03}(t) \right] + \frac{R_1R_3u_{01}(t) + (R_1(R_3 + R_4) + R_3R_4)u_{02}(t) - R_1R_4u_{03}(t)}{R_1(R_2(R_3 + R_4) + R_3R_4) + R_2R_3R_4} \right), \quad (40)$$

$$i_{D2}(t) = f_{MT} \left(\frac{-R_1R_4}{R_1(R_2(R_3 + R_4) + R_3R_4) + R_2R_3R_4} \left[\frac{-u_{01}(t)R_1R_3 + u_{03}(t)R_1R_4}{R_1(R_3 + R_4) + R_3R_4} - u_{02}(t) \right] + \frac{R_1R_2u_{01}(t) - R_1R_4u_{02}(t) + (R_1(R_2 + R_4) + R_2R_4)u_{03}(t)}{R_1(R_2(R_3 + R_4) + R_3R_4) + R_2R_3R_4} \right). \quad (41)$$

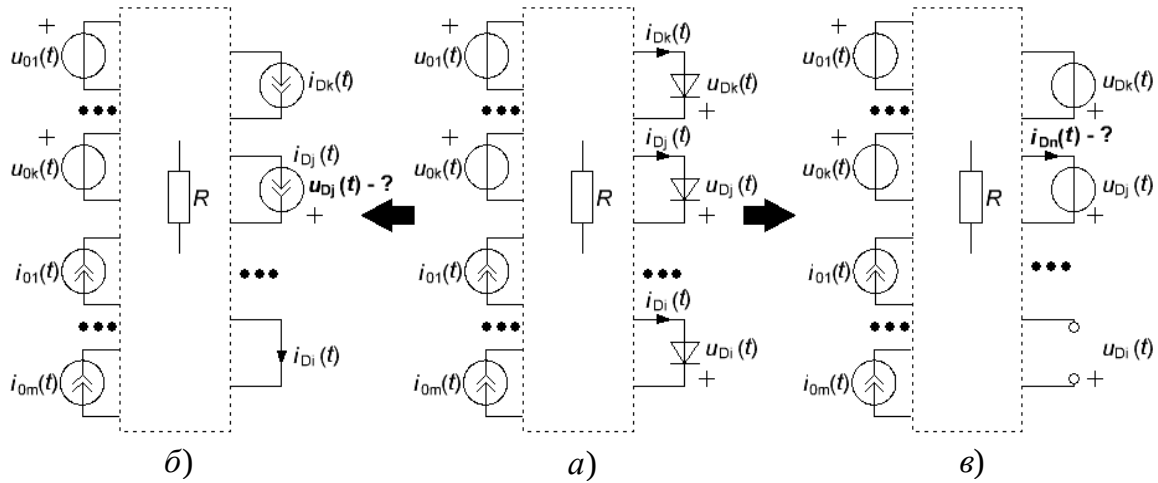


Рис. 17. Преобразование схемы с ИД (а) для
б) нахождения напряжений $u_{Dj}^i(t)$, в) нахождения тока $i_{Di}^j(t)$

С увеличением числа ИД по (12) и рис. 3 возрастает число вариантов с открытыми или закрытыми ИД (рис. 17) для двух ИД на месте n ИД:

$$\Sigma_{\text{ДСЗ}} = 4 \cdot C_n^2 = 4 \frac{n!}{2(n-2)!} = 2 \frac{n!}{(n-2)!} = 2A_n^2. \quad (42)$$

Вывод. Предложено обобщение метода схемных определителей для анализа резистивных схем с идеальными диодами при сокращении вычислений на основе дополнительных схемных определителей.

Список литературы

1. Kevenaar T.A.M., and Leenaerts D.M.W. A comparison of piecewise-linear model descriptions // IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications. – 1992. – Vol. 39, no. 12. – P. 996–1004.
2. Leenaerts D.M.W., van Bokhoven W.M.G. Piecewise Linear Modeling and Analysis / Kluwer Academic Publishers, 1998. – 208 p.
3. van Bokhoven W.M.G. Piecewise-linear modelling and analysis / Ph.D. dissertation. The Netherlands. Eindhoven. University of Technology. – 1981. 145 p.
4. Cottle R.W., Dantzig G.B. Complementary pivot theory of mathematical programming // Linear Algebra and its Applications. Vol. 1, is. 1, 1968. P. 103–125.
5. Cottle R.W., Pang J.-S., and Stone R.E. The Linear Complementarity Problem / Boston, MA: Academic, 1992. – 184 p.

6. Петрова Е.Г. Методы решения задач дополненности и двухуровневого программирования / Дис. канд. физ.-мат. наук. 05.13.01 – «Системный анализ, управление и обработка информации (в технике, экологии и экономике)». – Иркутск. 2011.– 129 с.

7. Ловцов А.Д. Линейная задача дополненности в динамическом расчете балок на односторонних опорах // Инженерный вестник Дона. 2023.– № 9 (105). – С. 292–307.

8. van Eijndhoven J.T.J. A piecewise linear simulator for large scale integrated circuits / Ph.D. dissertation. The Netherlands. Eindhoven: University of Technology, 1984. 118 p.

9. van Stiphout M.T. PLATO: A piecewise linear analysis tool for mixed level circuit simulation / Ph.D. dissertation. The Netherlands: Eindhoven. University of Technology. – 1990.

10. Kevenaer T.A.M., Leenaerts D.M.W., van Bokhoven W.M.G. Extensions to Chua's explicit piecewise linear function descriptions / IEEE Trans. Circuits Syst.– 1994.– Vol. 41, pt. I.– P. 308–314.

11. van Bokhoven W.M.G., Leenaerts D.M.W. Explicit Formulas for the Solutions of Piecewise Linear Networks // IEEE Transactions on Circuit and System – I.– 1999.– Vol. 46, no. 9, P. 1110–1117.

12. Manthe A., Li Z., Shi C.-J.R., and Mayaram K. Symbolic Analysis of Nonlinear Analog Circuits // Proc.s of the Design, Automation and Test in Europe Conference and Exhibition (DATE'03). – 2003. P. 11108–11109.

13. Manthe A., Li Z., Shi C.-J.R. Symbolic Analysis of Analog Circuits with Hard Nonlinearity // Proc. of the Design Automation Conference (DAC'03).– 2003. P. 542–545.

14. Шушпанов Д.В., Шомин А.Ю. Аналитическое решение линейной задачи дополненности на примере нелинейной резистивной цепи // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: международный сб. науч. тр. – Вып. 16. – Ульяновск: УлГТУ, 2020.– С. 25–46.

15. Шушпанов Д.В., Лучанский О.Д. Аналитический метод расчета резистивных цепей с идеальными диодами // Андреев Василий Андреевич: ученый, педагог, организатор: Синтез, анализ и диагностика электронных цепей.– Вып. 14. – Ульяновск: УлГТУ, 2017.– С. 68–87.

16. Курганов С.А., Филаретов В.В. Символьный анализ и диакоптика электрических цепей методом схемных определителей. Учеб. пособие / Ульяновск: УлГТУ, 2003.– 228 с.

17. Курганов С.А., Филаретов В.В. Символьный анализ линейных аналоговых и дискретно-аналоговых электрических цепей. Учеб. пособие / Ульяновск: УлГТУ, 2008. – 284 с.

18. Курганов С.А., Филаретов В.В. Топологические правила и формулы для анализа электрических цепей без избыточности / Ульяновск: УлГТУ, 2010.

19. Артым А.Д., Есполов К.Ж., Смирнов В.С., Филин В.А. Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ №2002610191 от 15 февраля 2002 г. «Автоматизированная компьютерная программа быстрого расчета и оптимизации переходных и стационарных процессов в электрических цепях радиотехнических и телекоммуникационных устройств» (Fastmean).

20. URL: <http://www.fastmean.ru>. Официал. сайт программы Fastmean.

21. Смирнов В.С. Символьный анализ линейных моделей мощных ключевых устройств в программе Fastmean // Схемно-топологические модели активных электрических цепей: синтез, анализ, диагностика: Тр. международной конференции «Континуальные алгебраические логики, исчисления и нейроинформатика в науке и технике – КЛИН-2006» Ульяновск: УлГТУ, 2006.– Т. 3. С. 181–187.

22. Filaretov V., Gorshkov K. Efficient generation of compact symbolic network functions in a nested rational form // International Journal of Circuit Theory and Applications: Research articles, May 2020.– P. 1–25.

Шушпанов Дмитрий Викторович – к.т.н., доцент, доцент кафедры теоретических основ телекоммуникаций Санкт-Петербургского государственного университета телекоммуникаций им. М. А. Бонч-Бруевича.
E-mail: dimasf@inbox.ru.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА СХЕМНЫХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МОМЕНТОВ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ ИДЕАЛЬНЫХ ДИОДОВ В РЕЗИСТИВНОЙ ЦЕПИ

Д. В. Шушпанов

В статье показано использование метода схемных определителей для определения моментов переключения идеальных диодов на примере схем с одним и двумя идеальными диодами. Показаны трудоемкость и преимущества данного подхода при анализе схем с идеальными диодами. Предложен новый вариант аналитического определения токов и напряжений на идеальных диодах через функцию преобразования модуля их частных решений, определяемых с помощью метода схемных определителей.

The use of the circuit determinants method for determining the switching moments of ideal diodes is shown using the example of circuits with one and two ideal diodes. The complexity and advantages of this approach when solving circuits with ideal diodes are shown. A new version of the analytical determination of currents and voltages on ideal diodes is proposed through the maximum function of their particular solutions, determined using the method of circuit determinants.

Трудоемкость решения, использующего функцию преобразования модуля. В [1] был предложен алгоритм схемно-алгебраического анализа схем с идеальными диодами (ИД), использующий функцию преобразования модуля [2]:

$$y = \lfloor x \rfloor \rightarrow y = \max(x, 0) \rightarrow \begin{cases} y = x, & x \geq 0 \\ y = 0, & x < 0 \end{cases} \rightarrow y = \frac{x + |x|}{2}. \quad (1)$$

Данный подход основывался на работе [3], в которой получено решение для схемы с любым количеством ИД в матричной форме с помощью функции преобразования модуля. В [1] было предложено использовать метод схемных определителей (МСО) [4,5] для определения элементов матриц, необходимых для матричного решения, предложенного

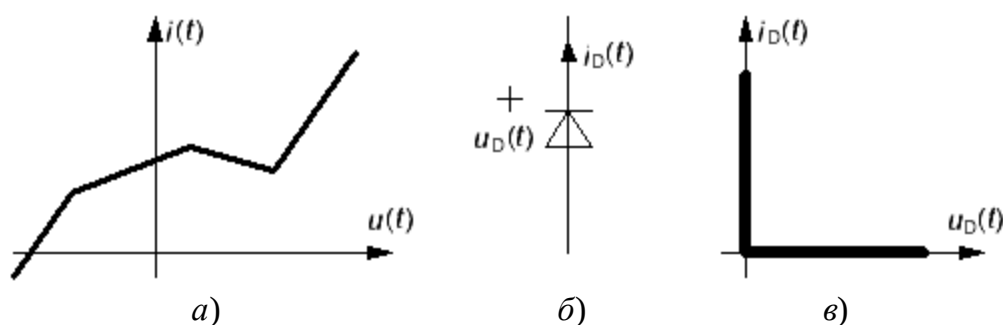


Рис. 1. Кусочно-линейная аппроксимация нелинейного элемента (а) и используемый для неё идеальный диод (б) со своей вольтамперной характеристикой (в)

в [3]. В [1] была дана оценка сложности предложенного символьного анализа схем с ИД, рассмотрена возможность уменьшения объема вычислений путем расчета дополнительных схемных определителей.

К сожалению, предложенный в [1] подход требует рассмотрения большого количества схем замещения и нахождения их схемных определителей, количество которых равно [1]:

$$\Sigma_{сз} = 2(n^2 + n - 4), \quad (2)$$

где n – число ИД. Для сокращения размера записываемого аналитического решения, т.е. для записи токов и напряжения на ИД в более компактном виде, необходимо посчитать дополнительные схемные определители, количество которых равно [1]:

$$\Sigma_{дсз} = 2 \frac{n!}{(n-2)!}. \quad (3)$$

Кроме того, для n -го аналитического решения схемы с n ИД требуется

$$\Sigma_n = (n-1) \cdot \Sigma_{n-1} + 1 \quad (4)$$

операций функции преобразования модуля, что в схеме с большим количеством ИД может привести к громоздким и долгим вычислениям.

В большинстве же случаев в нелинейной электрической цепи, в которой нелинейные элементы с кусочно-линейной вольтамперной характеристикой (рис. 1,а) замещаются эквивалентными схемами с ИД (рис. 1,б), ВАХ которых имеет прямоугольную форму (рис. 1,в), нет необходимости определять ток или напряжение на идеальном диоде. Достаточно лишь знать на каком линейном участке ВАХ работает электрическая схема. Для этого необходимо определить только моменты переключения ИД – моменты перехода от одного линейного участка ВАХ

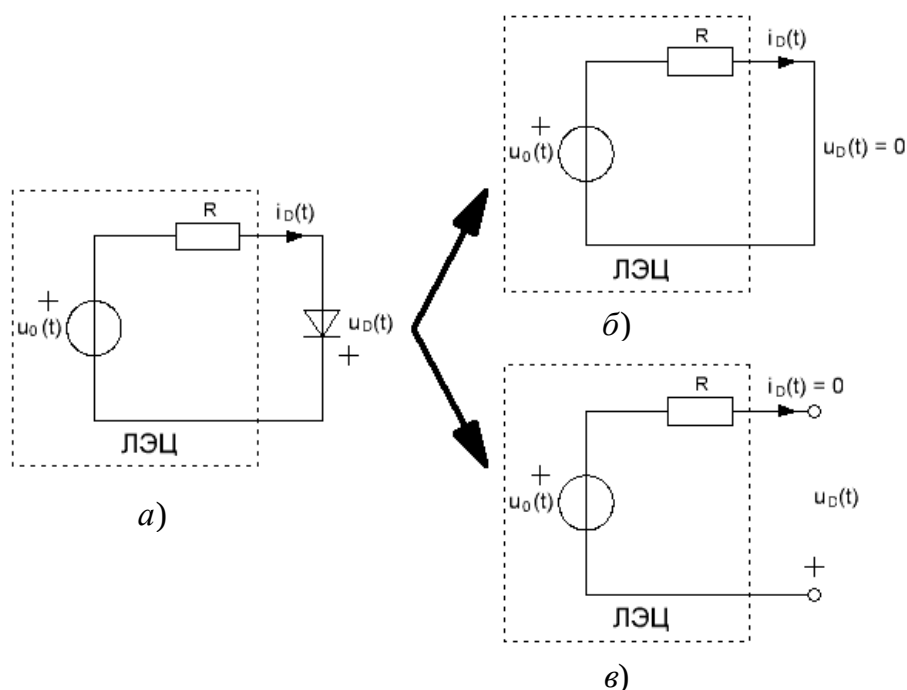


Рис. 2. Простейшая электрическая цепь с одним ИД (а) и её схемы замещения: б) ИД открыт; в) ИД закрыт

к другому. При этом МСО используется в начале анализа нелинейной электрической цепи для определения моментов переключения ИД, а не в продолжении, когда формируются схемы замещения [1].

Схема с одним ИД. В случае простейшей электрической цепи с одним ИД (рис. 2а) имеем две схемы замещения – когда ИД открыт (рис. 2б) и когда ИД закрыт (рис. 2в). Переход от схемы с открытым ИД к схеме с закрытым ИД происходит при условии $i_D(t) = 0$. Обратный переход происходит при условии $u_D(t) = 0$.

Воспользуемся методом схемных определителей [4–7] и составим схемные определители числителей тока и напряжения ИД. В каждом определителе заменим независимый источник напряжения $u_0(t)$ на генератор неудаляемого управляемого источника (ГНУИ), а отклик (ток или напряжение ИД) заменим на приемник неудаляемого управляемого источника (ПНУИ). Тогда условие $i_D(t) = 0$ будет соответствовать рис. 3,а, а условие $u_D(t) = 0$ – рис. 3,б. Из рис. 3,а и 3,б видно, что схемные определители отличаются только знаком из-за несогласного направления тока и напряжения на ИД (рис. 2,а). Так как схемный определитель числителя приравнивается к нулю, то выбор направления ПНУИ не важен.

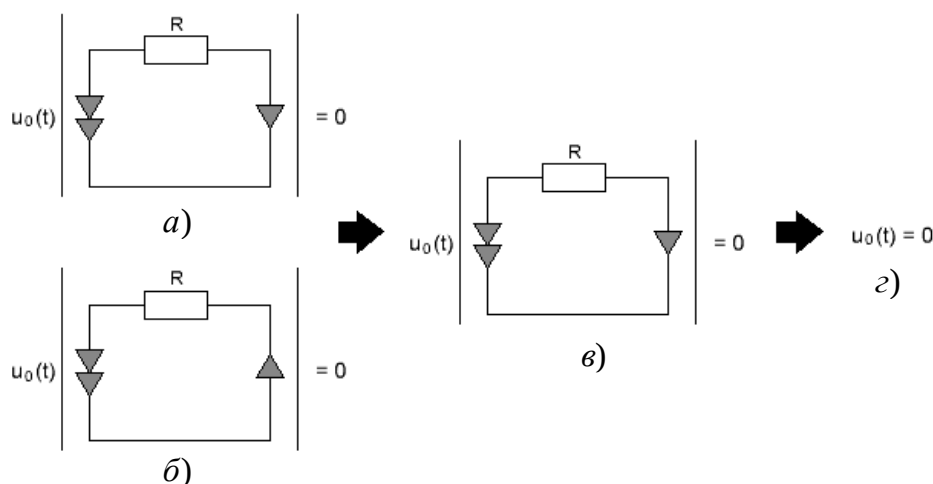


Рис. 3. Условия переключения ИД для схемы (рис. 2а)

Условимся, что направление ПНУИ в дальнейшем будет соответствовать току через ИД (рис. 3,в).

Из вышесказанного можно сделать первое заключение, что условие переключения ИД – это условие равенства нулю схемного определителя числителя, в котором ИД заменяется на ПНУИ (направление соответствует направлению тока через диод), а источники возмущения – на ГНУИ (направления соответствуют направлениям напряжений на источниках). В рассматриваемой схеме (рис. 2,а) получаем условие переключения ИД: $u_0(t) = 0$ (рис. 3,з).

Влияние определителя схемы на определение момента переключения ИД. В примере схемы с одним ИД (рис. 2) рассматривался только числитель тока или напряжения на ИД (рис. 3), так как определитель схемы равнялся R (рис. 2,б), или единице (рис. 2,в), сохраняя знак и не влияя на переключение ИД.

В общем случае схему с одним ИД (рис. 4,а) можно представить для условия $i_D(t) = 0$ (рис. 4,б) и условия $u_D(t) = 0$ (рис. 4,в). Ток или напряжение ИД равны нулю в момент переключения ИД, что соответствует значению числителя отклика.

Если определитель отклика тока (рис. 4,б) и напряжения (рис. 4,в) имеет отрицательный знак, то в формуле переключения изменяется знак, а момент переключения не изменяется. Если определитель для тока (рис. 4,б) или напряжения (рис. 4,в) равен нулю, то ИД выключен или включен соответственно и не может переключиться.

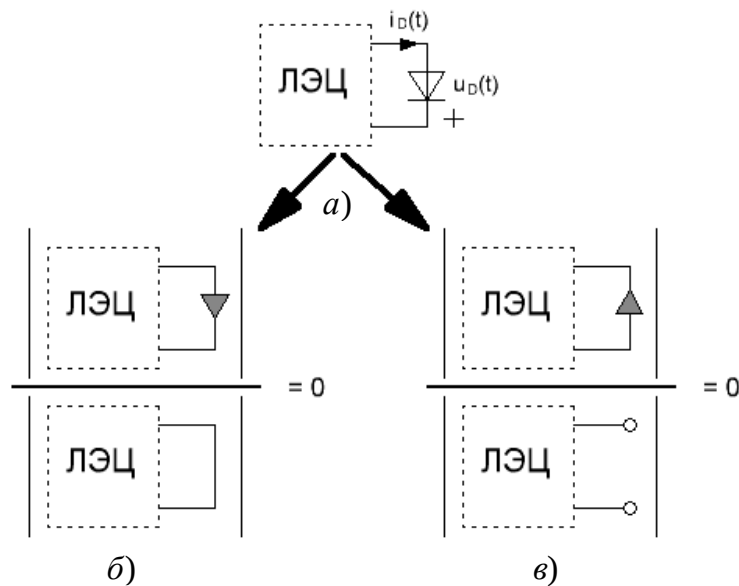


Рис. 4. Простейшая электрическая цепь с одним ИД (а) и её схемы замещения: б) ИД открыт; в) ИД закрыт

Если знак определителя тока (рис. 4,б) противоположен знаку определителя напряжения (рис. 4,в), то напряжение или ток при переключении этого ИД равен нулю вследствие того, что числитель положительный, знаменатель отрицательный, а ток и напряжения должны быть неотрицательны (рис. 1,в). Это возможно при наличии в схеме отрицательных сопротивлений. В этой статье рассматриваются случаи, когда знак определителя схемы при переключении ИД не меняется, и на моменты переключения ИД определители схем не влияют.

В схеме с одним ИД (рис. 5) получаем следующий схемный определитель числителя тока ИД

$$\Delta N = u_{01}(t) \cdot \left[\begin{array}{c} R_1 \\ \downarrow \\ R_2 \\ \downarrow \\ R_3 \end{array} \right] + u_{02}(t) \cdot \left[\begin{array}{c} R_1 \\ \downarrow \\ R_2 \\ \downarrow \\ R_3 \end{array} \right] =$$

$$= u_{01}(t)R_3R_2 - u_{02}(t)R_3R_2, \quad (5)$$

из которого после сокращения общего множителя R_2R_3 получаем условие переключения ИД

$$\Delta N = 0 \Rightarrow u_{01}(t) - u_{02}(t) = 0. \quad (6)$$

Чтобы сразу получить схемный определитель без общих сомножителей следует воспользоваться неявным методом наложения [6] и

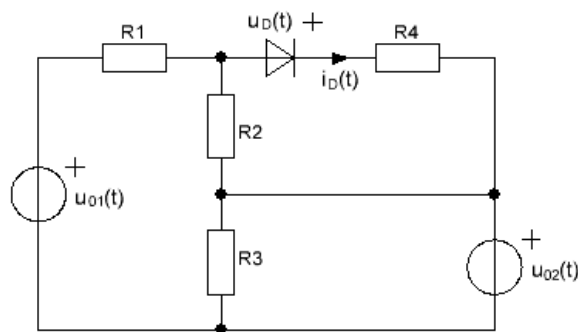


Рис. 5. Пример разветвленной резистивной цепи с одним ИД

до выделения параметров зависимых источников удалить без выноса сопротивления, включенные параллельно зависимым источникам напряжения (сопротивление R_3) или ПНУИ (сопротивление R_2):

$$\begin{aligned} \Delta N &= \left| \begin{array}{c} R_1 \\ u_{01} i \\ R_2 \\ R_3 \\ u_{02} i \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} R_1 \\ u_{01} i \\ R_4 \\ u_{02} i \end{array} \right| = \\ &= u_{01}(t) \cdot \left| \begin{array}{c} \downarrow \uparrow \\ \downarrow \uparrow \end{array} \right| + u_{02}(t) \cdot \left| \begin{array}{c} \uparrow \downarrow \\ \uparrow \downarrow \end{array} \right| = u_{01}(t) - u_{02}(t). \end{aligned} \quad (7)$$

Таким образом, получение условия переключения диодов не требует разложения знаменателя откликов, что предлагалось в [3].

Схема с двумя ИД (рис. 6). Для схемы с двумя идеальными диодами (рис. 6,а) можно записать граф переключений ИД (рис. 6,б), узлы которого соответствуют состоянию ИД («0» – выключен, «1» – включен), а ветви – условию перехода от одного состояния к другому. Поскольку условие включения ИД и условие выключения ИД одинаковые, то граф переключения ИД будет ненаправленным.

В схеме с двумя ИД возможно два варианта переключения: переключается только один ИД или переключаются оба ИД. В случае переключения одного ИД происходит перемещение по графу (рис. 6,б) только по одной ветви. Это значит, что должно соблюдаться только одно из 4-х условий. Используя МСО, как было описано выше, эти 4 условия можно найти, составив соответствующие схемные определители (рис. 7).

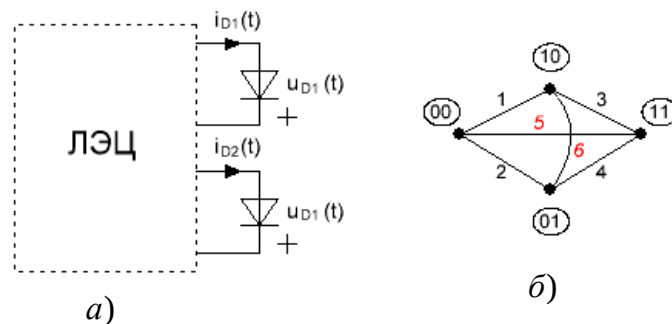


Рис. 6. Электрическая схема с двумя ИД (а) и граф переключений ИД (б)

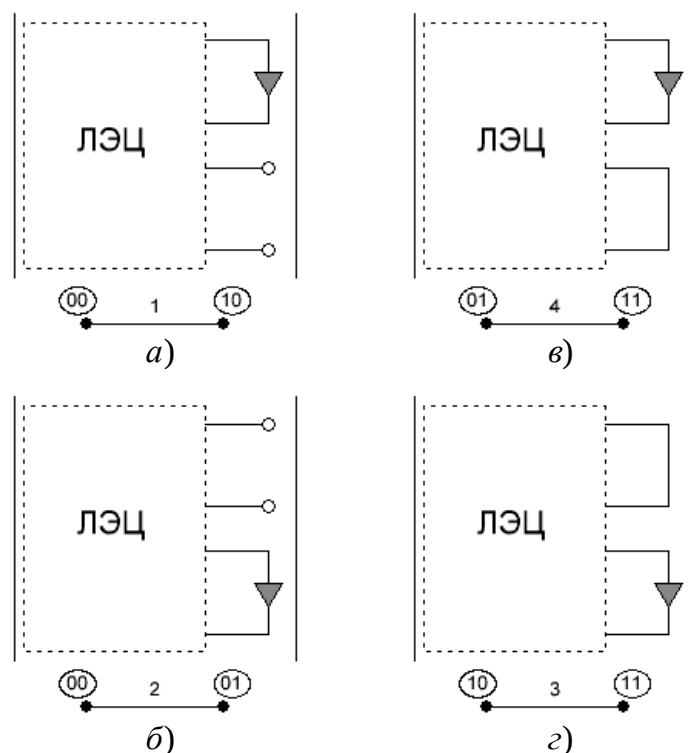


Рис. 7. Схемные определители для определения моментов переключения в схеме с двумя ИД (рис. 6)

В случае переключения ИД происходит либо перемещение по графу по двум ветвям, либо по ветви 5. Это происходит при соблюдении 2-х необходимых условий из 4-х (рис. 7). При соблюдении условия 1 (рис. 7,а) и условия 2 (рис. 7,б) происходит движение по ветви 5 (рис. 6,б). Это является не новым условием, а соблюдением двух других, поэтому номер ветви помечен красным цветом (рис. 6,б).

Для случая одновременного переключения ИД возможен вариант движения по ветви 6 или по двум ветвям 3 и 4 или 1 и 2 (рис. 6,б). Это происходит при одновременном соблюдении условий 1 и 2 (рис. 6,б) или

условий 3 и 4 (рис. 6,б). Номер ветви 6 также указан красным цветом, поскольку это не новое условие.

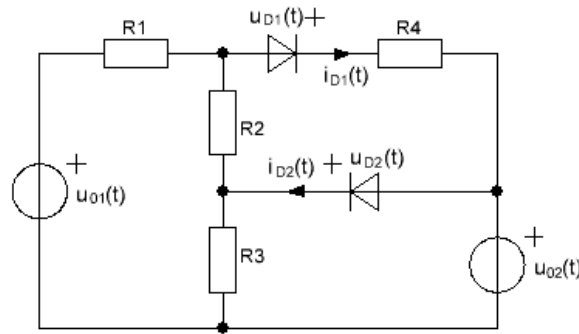


Рис. 8. Пример разветвленной цепи с двумя ИД

Таким образом, для определения моментов переключения в схеме с двумя ИД необходимо найти 4 схемных определителя (рис. 7).

Рассмотрим разветвленную цепь с двумя ИД (рис. 8). Получаем следующий схемный определитель для 1-го условия, когда второй ИД заперт (рис. 7,а)

$$\Delta N_1 = \begin{vmatrix} R_1 & i & R_4 \\ u_{01} & i & \\ R_2 & & \\ R_3 & & \\ & & u_{02} i \end{vmatrix} =$$

$$= u_{01}(t) \cdot \begin{vmatrix} R_1 & R_2 \\ R_3 & \end{vmatrix} + u_{02}(t) \cdot \begin{vmatrix} R_1 & R_2 \\ R_3 & \end{vmatrix} =$$

$$= u_{01}(t)(R_2 + R_3) - u_{02}(t)(R_1 + R_2 + R_3),$$

из которого получаем условие 1 (рис. 6,б)

$$\Delta N_1 = 0 \Rightarrow u_{01}(t)(R_2 + R_3) - u_{02}(t)(R_1 + R_2 + R_3) = 0; \quad (8)$$

схемный определитель для 2-го условия, когда первый ИД заперт (рис. 7,б)

$$\begin{aligned}
\Delta N_2 &= \left| \begin{array}{cc} R_1 & R_4 \\ u_{01} i & i \\ R_2 & u_{02} i \\ R_3 & \end{array} \right| = \\
&= u_{01}(t) \cdot \left| \begin{array}{cc} R_1 & R_2 \\ \downarrow & \uparrow \\ R_3 & \end{array} \right| + u_{02}(t) \cdot \left| \begin{array}{cc} R_1 & R_2 \\ \uparrow & \downarrow \\ R_3 & \end{array} \right| = \\
&= -u_{01}(t)R_3 + u_{02}(t)(R_1 + R_2 + R_3),
\end{aligned}$$

из которого получаем условие 2 (рис. 6,б)

$$\Delta N_2 = 0 \Rightarrow -u_{01}(t)R_3 + u_{02}(t)(R_1 + R_2 + R_3) = 0; \quad (9)$$

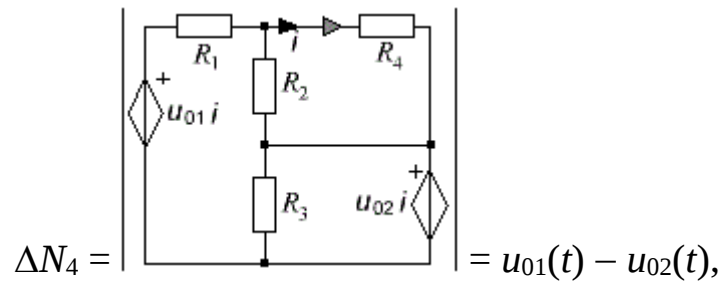
схемный определитель для 3-го условия, когда первый ИД открыт (рис. 7,з)

$$\begin{aligned}
\Delta N_3 &= \left| \begin{array}{cc} R_1 & R_4 \\ u_{01} i & i \\ R_2 & u_{02} i \\ R_3 & \end{array} \right| = \\
&= u_{01}(t) \cdot \left| \begin{array}{cc} R_1 & R_4 \\ \downarrow & \uparrow \\ R_2 & R_3 \end{array} \right| + u_{02}(t) \cdot \left| \begin{array}{cc} R_1 & R_4 \\ \uparrow & \downarrow \\ R_2 & R_3 \end{array} \right| = \\
&= -u_{01}(t)R_3R_4 + u_{02}(t)(R_2(R_1 + R_4) + R_4(R_1 + R_3)),
\end{aligned}$$

из которого получаем условие 3 (рис. 6,б)

$$\Delta N_3 = 0 \Rightarrow -u_{01}(t)R_3R_4 + u_{02}(t)(R_2(R_1 + R_4) + R_4(R_1 + R_3)) = 0; \quad (10)$$

схемный определитель для 4-го условия, когда второй ИД открыт (рис. 7,в)



из которого получаем условие 4 (рис. 6б)

$$\Delta N_4 = 0 \Rightarrow u_{01}(t) - u_{02}(t) = 0. \quad (11)$$

В [3] с помощью программы Fastmean на основе численных методов и программы Mathcad, используя аналитические выражения, были получены значения токов ИД в схеме (рис. 8). Параметры элементов: $R_1 = 1 \text{ кОм}$, $R_2 = 3 \text{ кОм}$, $R_3 = 4 \text{ кОм}$, $R_4 = 100 \text{ Ом}$, $u_{01}(t) = 5\cos(2\pi 10^3 t)$, $u_{02}(t) = \cos(4\pi 10^3 t)$. На рис. 9 приведены временные диаграммы токов ИД с отметками моментов переключения диодов.

В начальный момент времени все ИД открыты (состояние схемы «11»), в интервале 89–90 мкс срабатывает условие 3 (10) и второй ИД отключается (состояние «10»), в интервале 279–280 мкс срабатывает условие 4 (11), но переключения не происходит, так как 2-й ИД заперт, в интервале 286–287 мкс срабатывает условие 1 (8), и первый ИД отключается (состояние «00»), в интервале 305–306 мкс срабатывает условие 2 (9), и второй ИД включается (состояние «01»), в интервале 350–351 мкс и 649–650 мкс срабатывает условие 3 (10), но переключения не происходит, так как 1-й ИД заперт, в интервале 694–695 мкс срабатывает условие 2 (9), и второй ИД выключается (состояние «00»), в интервале 713–714 мкс срабатывает условие 1 (8), и первый ИД включается (состояние «10»), в интервале 720–721 мкс срабатывает условие 4 (11), но переключения не происходит, так как 2-й ИД заперт, в интервале 910–911 мкс срабатывает условие 3 (10) и второй ИД открывается («11»).

Таким образом, зная текущее состояние схемы и определяя переход через ноль выражений (8)–(11), можно определить, какой из идеальных диодов в схеме (рис. 7) переключается. Это значительно упрощает расчет схемы, так как получить условия (8)–(11) значительно проще, чем получать элементы матриц по методике [1], используя МСО.

Матричный метод, использующий функцию преобразования модуля [3], требует трудоемких и не всегда очевидных математических

преобразований, чтобы аналитически определить условия переключения ИД. Поэтому определение токов и напряжений ИД через функцию преобразования модуля получается более трудоемким, что видно уже на схеме с двумя ИД. Выражения (8)–(11) позволяют установить, когда какой ИД переключится. Иногда приходится решать все 4 уравнения, но они могут быть решены параллельно.

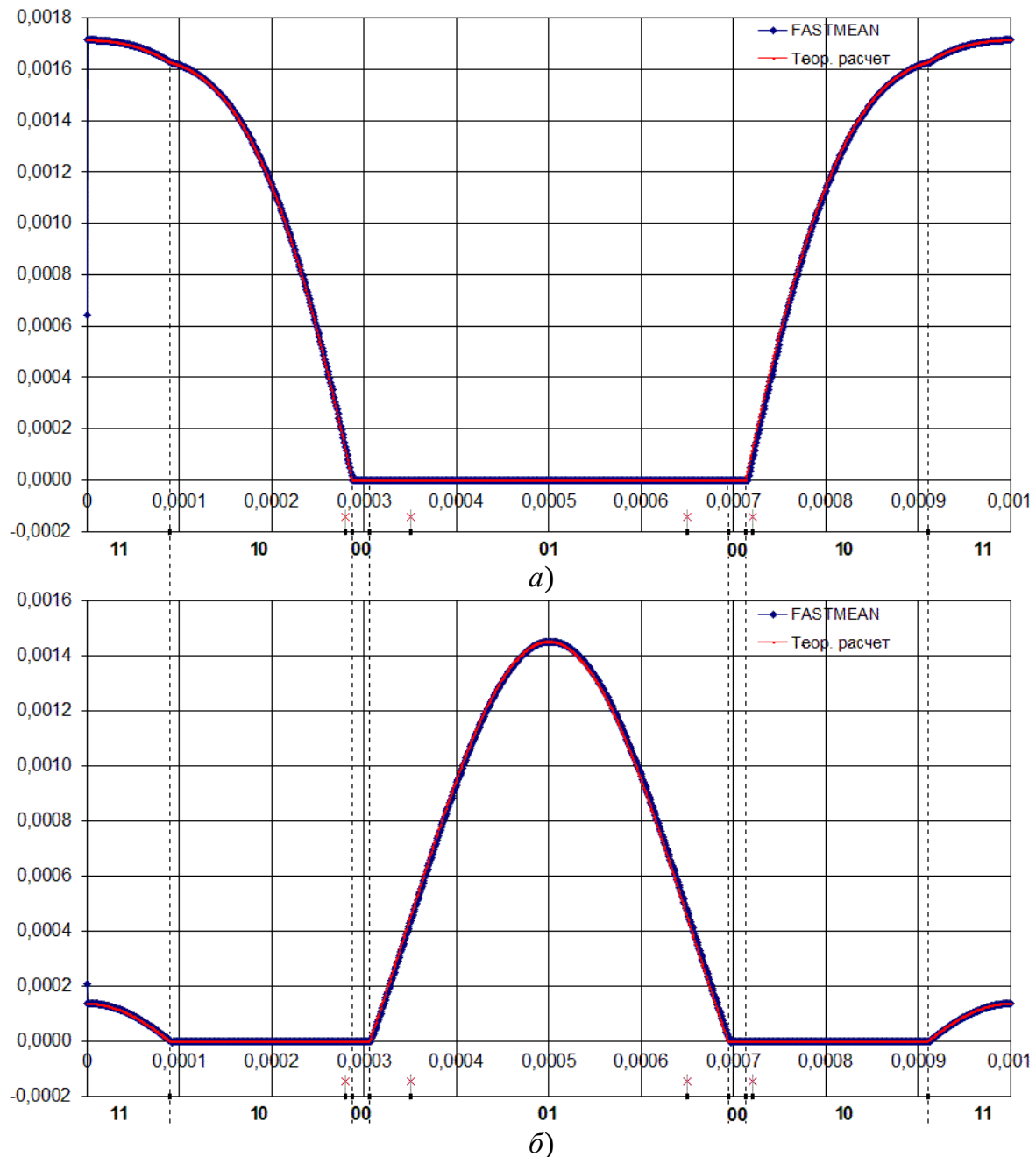


Рис. 9. Расчет токов через ИД: а) через D1, б) через D2
схемы (рис. 8) и состояния идеальных диодов

Рассмотрим пример цепи с двумя ИД (рис. 10) [1]. Получаем схемный определитель для 1-го условия, когда второй ИД заперт (рис. 7,а), из которого получаем условие 1 (рис. 6,б)

$$\Delta N_1 = 0 \Rightarrow u_{01}(t)R_{D0} - u_{D01}(t)(R_{D0} + R_1) = 0; \quad (12)$$

Схемный определитель для 2-го условия, когда первый ИД заперт (рис. 7,б)

$$\Delta N_2 = \left| \begin{array}{cc} R_{D0} & u_{D02}i \\ u_{01}i & R_{D2} \end{array} \right| = u_{01}(t)R_{D0} - u_{D02}(t)(R_{D0} + R_1),$$

из которого получаем условие 2 (рис. 6б)

$$\Delta N_2 = 0 \Rightarrow u_{01}(t)R_{D0} - u_{D02}(t)(R_{D0} + R_1) = 0; \quad (13)$$

схемный определитель для 3-го условия, когда первый ИД открыт (рис. 7,з)

$$\Delta N_3 = \left| \begin{array}{cc} R_{D0} & u_{D01}i \\ u_{01}i & R_{D2} \end{array} \right| =$$

$$= u_{01}(t) \cdot \left| \begin{array}{cc} R_{D0} & R_{D1} \\ R_{D2} & R_1 \end{array} \right| + u_{D01}(t) \cdot \left| \begin{array}{cc} R_{D0} & R_{D1} \\ R_{D2} & R_1 \end{array} \right| + u_{D02}(t) \cdot \left| \begin{array}{cc} R_{D0} & R_{D1} \\ R_{D2} & R_1 \end{array} \right| =$$

$$= u_{01}(t)R_{D0}R_{D1} + u_{D01}(t)R_{D0}R_1 - u_{D02}(t)(R_{D0}(R_{D1} + R_1) + R_{D1}R_1),$$

из которого получаем условие 3 (рис. 6,б)

$$\Delta N_3 = 0 \Rightarrow u_{01}(t)R_{D0}R_{D1} + u_{D01}(t)R_{D0}R_1 - u_{D02}(t)(R_{D0}(R_{D1} + R_1) + R_{D1}R_1) = 0. \quad (14)$$

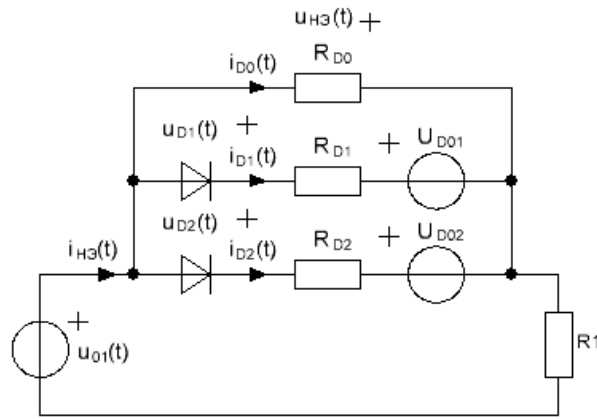


Рис. 10. Пример разветвленной цепи с двумя ИД

Схемный определитель для 4-го условия, когда второй ИД открыт (рис. 7,б)

$$\Delta N_4 = \begin{vmatrix} R_{D0} & u_{D01}i \\ R_{D1} & u_{D02}i \\ u_{01}i & R_1 \end{vmatrix} =$$

$$= u_{01}(t)R_{D0}R_{D2} - u_{D01}(t)(R_{D0}(R_{D2} + R_1) + R_{D2}R_1) + u_{D02}(t)R_{D0}R_1,$$

из которого получаем условие 4 (рис. 6,б)

$$\Delta N_4 = 0 \Rightarrow u_{01}(t)R_{D0}R_{D2} - u_{D01}(t)(R_{D0}(R_{D2} + R_1) + R_{D2}R_1) + u_{D02}(t)R_{D0}R_1 = 0. (15)$$

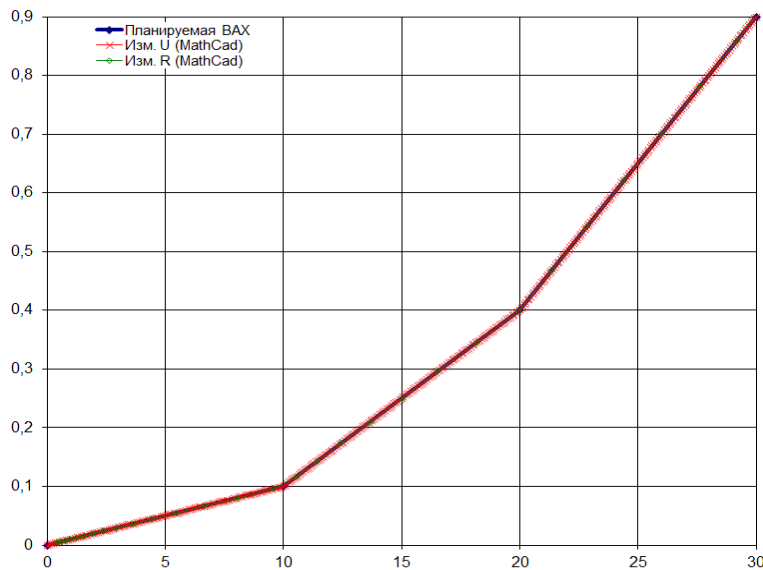


Рис. 11. ВАХ нелинейного элемента в схеме (рис. 10): планируемая и рассчитанная в [3] при изменении напряжения и сопротивления нагрузки

В [3] использована ВАХ нелинейного элемента, проходящая через точки: $U_0 = 0 \text{ В}$, $I_0 = 0 \text{ А}$; $U_1 = 10 \text{ В}$, $I_1 = 0,1 \text{ А}$; $U_2 = 20 \text{ В}$, $I_2 = 0,4 \text{ А}$; $U_3 = 30 \text{ В}$, $I_3 = 0,9 \text{ А}$, для схема замещения нелинейного элемента (рис. 10) с параметрами: $R_{D0} = 100 \text{ Ом}$, $R_{D1} = R_{D2} = 50 \text{ Ом}$, $U_{D01} = 10 \text{ В}$, $U_{D02} = 20 \text{ В}$ и аналитическая ВАХ (рис. 11), построенная по аналитическим формулам, полученным в [3]. При построении ВАХ в программе Mathcad варьировалось входное напряжение U_{01} (было взято сопротивление $R_1 = 10 \text{ Ом}$, а напряжение U_{01} менялось от 0 В до 40 В), а также сопротивление R_1 (было взято напряжение $U_{01} = 30 \text{ В}$, а сопротивление R_1 менялось от 1 мОм до 10 МОм).

На начальном участке ВАХ все ИД заперты (состояние схемы «00»), при напряжении на нелинейном элементе 10 В выполняется условие 1 (выражение (12)) и открывается первый ИД (состояние схемы «10»), при напряжении на нелинейном элементе 20 В выполняется условие 3 (выражение (14)) и открывается второй ИД (состояние схемы «11»).

Схема с произвольным количеством ИД. Как показано выше на примере схемы с двумя ИД, чтобы определить число схем замещения для нахождения моментов переключения ИД, необходимо составить граф переключения. Граф должен содержать ветви, в которых происходит одно переключение (изменение состояния). Число ребер этого графа равно числу схем замещения. Для цепи с двумя ИД число уравнений или схем замещения равно 4 (рис. 12,а), с 3-мя ИД – 12 (рис. 12,б). с 4-мя ИД – 32 (рис. 12,в). Для схемы с n ИД изображается граф с 2^n вершинами, от каждой вершины отходит n ребер (рис. 12). Число всех ребер графа равно числу схем замещения.

Уравнений получается много, но решать все эти уравнения не нужно, так как известно, какое первоначальное состояние ИД, в каком узле графа находимся. Число ребер, инцидентных каждому узлу, равно n , поэтому для того, чтобы определить какое будет следующее состояние ИД, требуется решить n уравнений, которые являются независимыми, и могут решаться параллельно. То уравнение, которое имеет самое короткое решение, будет определять новое время переключения и состояние ИД.

Теоретически ИД могут переключаться группами, поэтому подставим момент переключения в следующие возможные уравнения (их количество

уже будет меньше n). Если какое-либо из уравнений обратилось в ноль, то аналогичным образом проверяем дальнейшие уравнения. В противном случае заканчиваем проверку. Так получается новое состояние ИД для нового времени переключения.

Получается, что в схеме с n ИД, необходимо:

1) для определения времени переключения ИД (и направления движения по графу переключений) решить n независимых нелинейных уравнений; 2) для определения состояний всех возможных ИД подставить это решение в другие независимые нелинейные уравнения при возможном движении по графу переключения (рис. 12).

Недостатком предложенной методики является то, что необходимо составлять значительное число схем замещения. Однако схемы замещения получаются простыми (содержат только сопротивления и источники), поэтому этот процесс легко автоматизировать, выполнив один раз перед расчетом электрической схемы.

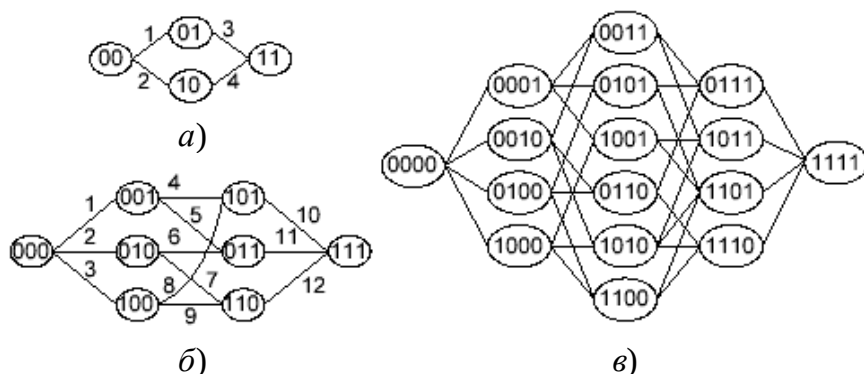


Рис. 12. Граф переключений для схемы:
а) с 2-мя ИД, б) с 3-мя ИД, в) с 4-мя ИД

Важно, что аналитическое представление уравнений, определяющих моменты переключения ИД, позволяет легко определить переключается ИД или нет. Если какое-либо уравнение не будет равняться нулю, то этот ИД не будет переключаться при данных условиях. Если при построении схемы замещения получаем вырожденную схему, то этот ИД не влияет на схему (ИД или независимый источник замкнут накоротко).

Бинарное дерево решений для токов и напряжений на ИД. Кроме определения момента переключения ИД условия переключения идеальных диодов позволяют также определить текущее состояние системы. Рассмотрим сначала на примере цепь с двумя ИД. В этом случае мы имеем

4 состояния для моментов переключений (рис. 12,а): «00» возникает, когда все из 4-х условий отрицательны; «01» возникает, когда только условие 1 положительно; «10» возникает, когда только условие 2 положительно; «11» возникает, когда положительно условие 1 или 2 и положительно условие 3 или 4.

В этом случае при нахождении требуемой реакции цепи в каждом из четырех состояний, используя четыре условия переключения ИД, можно определить требуемую реакцию цепи с двумя ИД с учетом всех четырех условий переключения. В случае схемы с бóльшим количеством ИД необходимо определить все 2^n решений, где n – число ИД.

Для уменьшения числа принимаемых условий можно описать состояния системы через токи или напряжения на ИД. Если посмотреть на схемные определители для определения моментов переключения (рис. 7), то они соответствуют числителям токов через ИД в зависимости от состояния системы (рис. 13). На рис. 13 введены следующие обозначения: i_{D1}^0 , i_{D2}^0 – ток через единственно включенный ИД, i_{D1}^2 , i_{D2}^1 – ток через рассматриваемый включенный ИД при включенном втором ИД. Аналогично рис. 13 можно определить напряжения на запертых ИД. В этом случае изменятся знаки у числителей, изменятся определители и вместо токов i_{D1}^0 , i_{D2}^0 будут напряжения u_{D1}^2 , u_{D2}^1 (напряжение на рассматриваемом выключенном ИД при выключенном втором ИД), а вместо токов i_{D1}^2 , i_{D2}^1 будут напряжения u_{D1}^0 , u_{D2}^0 (напряжение на единственно выключенном ИД). Тогда для каждого тока или напряжения ИД можно записать решение в виде графа решений (рис. 14). Решение для каждого тока или напряжения ИД через функцию преобразования модуля в общем случае можно записать в виде [1, 3]:

$$x(t) = \lfloor a \lfloor x_1(t) \rfloor + x_0(t) \rfloor, \quad (16)$$

где a – некоторая константа, $x_0(t)$ и $x_1(t)$ – некоторые частные решения. Для каждого тока и напряжения ИД необходимо проверить два условия: $ax_1(t) + x_0(t)$ больше или равно нулю (У1 и У2 на рис. 14 для первого и второго ИД соответственно) и $x_0(t)$ больше или равно нулю (У4 и У3 на рис. 14 для первого и второго ИД соответственно). Исходя из этих двух

условий, получаем один из трех вариантов ответа – $ax_1(t) + x_0(t)$ или $x_0(t)$, или ноль.

В этом случае два разных условия могут привести к одному ответу $ax_1(t) + x_0(t)$, то есть в графе решений (рис. 14) может появиться контур. Это теоретическая возможность (в рассмотренных примерах такого контура не было), поэтому ребро, создающее контур в графе переключений (рис. 14), помечено пунктиром.

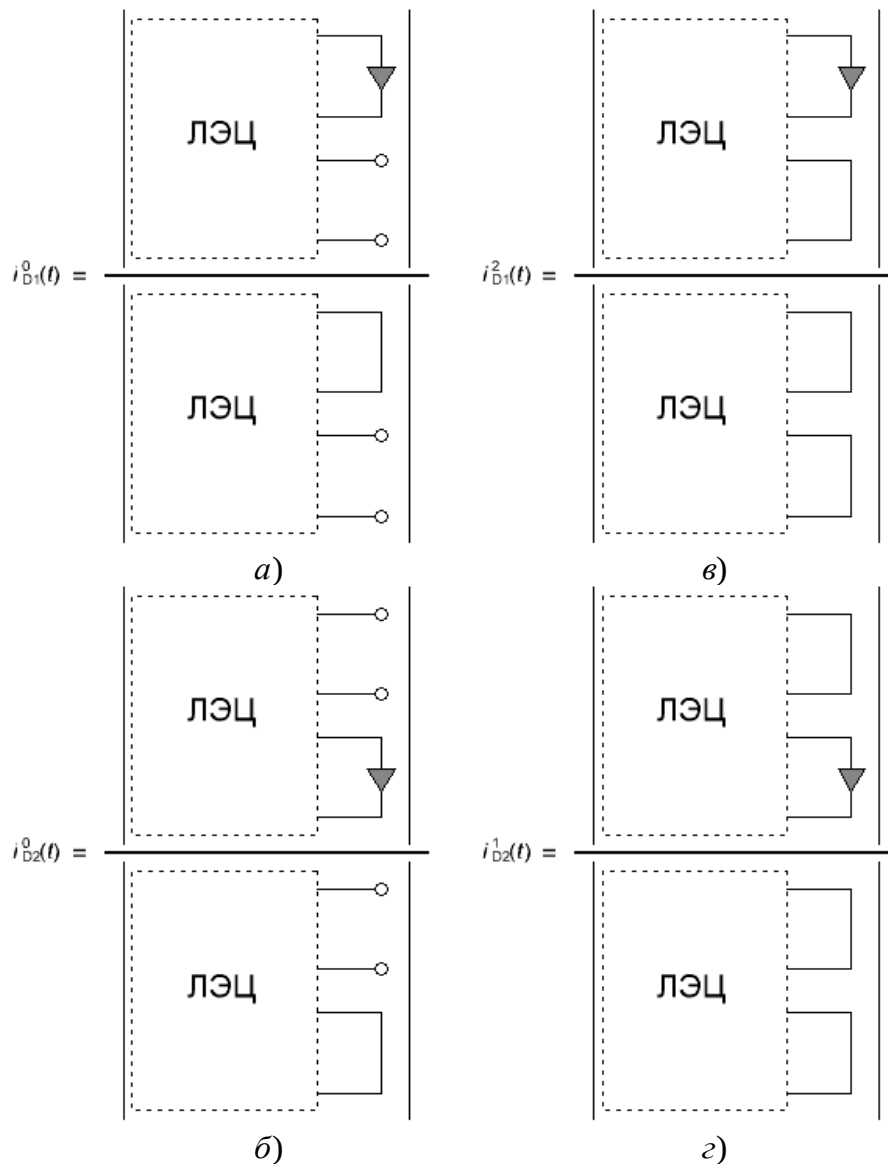


Рис. 13. Ненулевые решения для токов диодов в схеме с двумя ИД
в зависимости от состояния схемы:
а) «10», б) «01», в) «11», з) «11»

Из-за того, что в графе решений (рис. 14) всегда есть решение, которое зависит только от одного условия, то этот граф решений можно переписать в виде бинарного дерева (рис. 15). Такое описание решения схемы с ИД, как

видно из рис. 15, имеет преимущества: 1) для решения необходимо сделать либо одну проверку, либо две – в этом подходе возможно сокращение числа проверок, что важно при большом числе ИД; 2) дерево решений для токов (рис. 15,а) отличается от решений для напряжений (рис. 15,б) лишь знаком условия переключения, то не требуется считать ток и напряжение одного и того же ИД, достаточно найти на каждом ИД либо ток, либо напряжение, что не повлияет на время расчета.

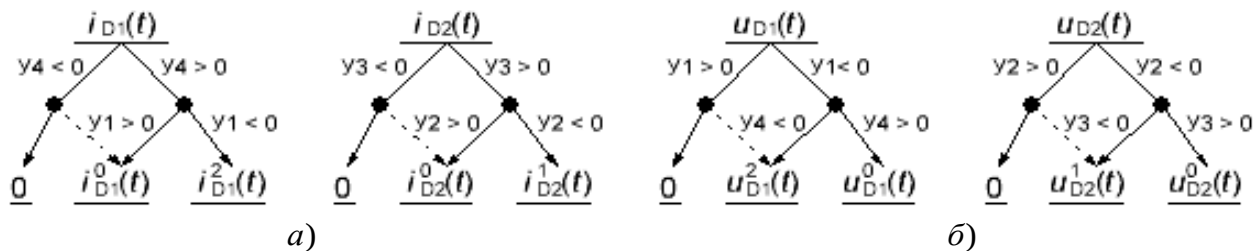


Рис. 14. Решения для токов (а) и напряжений (б) в схеме с двумя ИД в виде графа решений

Решение в виде бинарного дерева предложено в [3] как альтернатива решению через функцию преобразования модуля. Теперь стало понятно, что условия для токов и напряжений одинаковы (меняется только знак). Найдем для схемы на рис. 8 по МСО напряжения u_{D1}^0 , u_{D2}^0 , u_{D1}^2 , u_{D2}^1 и токи i_{D1}^0 , i_{D2}^0 , i_{D1}^2 , i_{D2}^1 . Условия переключения ИД определены выражениями (8)–(11). Тогда выражения для токов ИД

$$i_{D1} = \begin{cases} 0, & Y1 < 0 \text{ и } Y4 < 0 \\ \frac{R_2 R_3 (u_{01}(t) - u_{02}(t))}{R_3 (R_2 (R_1 + R_4) + R_1 R_4)}, & Y1 < 0 \text{ и } Y4 > 0, \\ \frac{u_{01}(t) (R_2 + R_3) - u_{02}(t) (R_1 + R_2 + R_3)}{(R_1 + R_4) (R_2 + R_3) + R_1 R_4}, & Y1 > 0 \end{cases} \quad (17)$$

$$i_{D2} = \begin{cases} 0, & Y2 < 0 \text{ и } Y3 < 0 \\ \frac{-R_3 R_4 u_{01}(t) + (R_2(R_1 + R_4) + R_4(R_1 + R_3))u_{02}(t)}{R_3(R_2(R_1 + R_4) + R_1 R_4)}, & Y2 < 0 \text{ и } Y3 > 0, \\ \frac{-R_3 u_{01}(t) + u_{02}(t)(R_1 + R_2 + R_3)}{(R_1 + R_2)R_3}, & Y2 > 0 \end{cases} \quad (18)$$

где $Y1 = u_{01}(t)(R_2 + R_3) - u_{02}(t)(R_1 + R_2 + R_3)$, $Y4 = u_{01}(t) - u_{02}(t)$,

$$Y2 = -u_{01}(t)R_3 + u_{02}(t)(R_1 + R_2 + R_3),$$

$$Y3 = -u_{01}(t)R_3 R_4 + u_{02}(t)(R_2(R_1 + R_4) + R_4(R_1 + R_3));$$

и напряжения ИД

$$u_{D1} = \begin{cases} 0, & Y1 > 0 \text{ и } Y4 > 0 \\ u_{02}(t) - \frac{u_{01}(t)(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}, & Y4 < 0 \\ \frac{R_2 R_3 (u_{02}(t) - u_{01}(t))}{(R_1 + R_2)R_3}, & Y1 < 0 \text{ и } Y4 > 0 \end{cases}, \quad (19)$$

$$u_{D2} = \begin{cases} 0, & Y2 > 0 \text{ и } Y3 > 0 \\ \frac{u_{01}(t)R_3}{R_2 + R_1 + R_3} - u_{02}(t), & Y3 < 0 \\ \frac{R_3 R_4 u_{01}(t) - u_{01}(t)(R_2(R_1 + R_4) + R_4(R_1 + R_3))}{(R_1 + R_4)(R_2 + R_3) + R_1 R_4}, & Y2 < 0 \text{ и } Y3 > 0 \end{cases}, \quad (20)$$

которые соответствуют токам и напряжениям на ИД, полученным в [1]:

$$i_{D1}(t) = f_{MT} \left(\frac{R_1 R_3}{R_3(R_2(R_1 + R_4) + R_1 R_4)} \left[\frac{u_{01}(t)R_1 R_3 - u_{02}(t)(R_1(R_2 + R_4) + R_4(R_2 + R_3))}{(R_2 + R_3)(R_1 + R_4) + R_1 R_4} \right] + \frac{u_{01}(t)R_2 R_3 - u_{02}(t)R_2 R_3}{R_3(R_2(R_1 + R_4) + R_1 R_4)} \right), \quad (21)$$

$$i_{D2}(t) = f_{MT} \left(\frac{R_1 R_3}{R_3 (R_2 (R_1 + R_4) + R_1 R_4)} \left[\frac{u_{02}(t) R_2 R_3 - u_{01}(t) R_2 R_3}{(R_1 + R_2) R_3} \right] + \frac{-u_{01}(t) R_3 R_4 + u_{02}(t) (R_2 (R_1 + R_4) + R_4 (R_1 + R_3))}{R_3 (R_2 (R_1 + R_4) + R_1 R_4)} \right), \quad (22)$$

$$u_{D1}(t) = \left[\frac{-R_1}{R_1 + R_2} \left[u_{02}(t) - \frac{u_{01}(t) R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \right] + u_{02}(t) - \frac{u_{01}(t) (R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} \right], \quad (23)$$

$$u_{D2}(t) = \left[\frac{-R_1 R_3 \left[\frac{u_{01}(t) (R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} - u_{02}(t) \right]}{(R_2 + R_3) (R_1 + R_4) + R_1 R_4} + \frac{u_{01}(t) R_3}{R_2 + R_1 + R_3} - u_{02}(t) \right]. \quad (24)$$

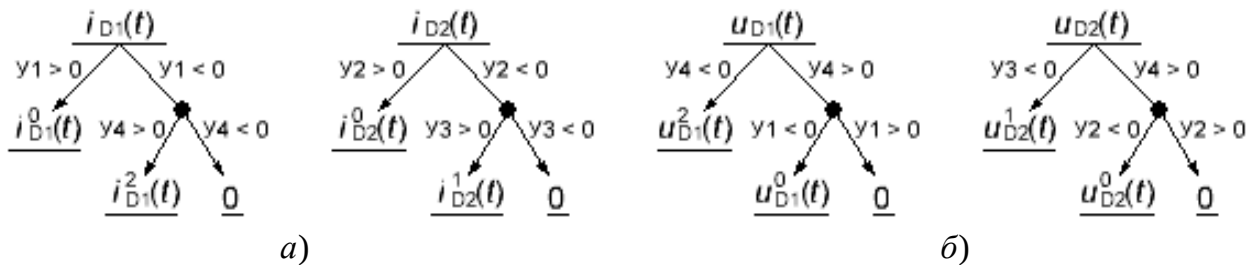


Рис. 15. Решения для токов (а) и напряжений (б) в схеме с двумя диодами в виде бинарного дерева

Видно, что выражения (17)–(20), полученные в этой статье, есть альтернативная форма записи выражений (21)–(24) [1]. Какая из этих форм является более компактной – вопрос дискуссионный. Но выражения, полученные с помощью бинарного дерева решения и МСО, требуют меньших вычислительных затрат по сравнению с матричным методом [1].

Запись решений токов и напряжений ИД через функцию максимума. На бинарном дереве решений (рис. 15) можно увидеть, что все левые потомки для условий больше нуля, а правые – меньше (для случая напряжений условия меняют знак из-за несогласного выбора напряжения и тока на ИД – рис. 1,б). Тогда (18) можно переписать в виде

$$x(t) = \left[a \left[x_1(t) \right] + x_0(t) \right] = \begin{cases} ax_1(t) + x_0(t) & ax_1(t) + x_0(t) > 0 \\ x_0(t) & ax_1(t) + x_0(t) < 0 \text{ и } x_0(t) > 0. \\ 0 & ax_1(t) + x_0(t) < 0 \text{ и } x_0(t) < 0 \end{cases} \quad (25)$$

Выражение (25) представляет функцию максимума от трех аргументов:

$$x(t) = \left\lfloor a \left\lfloor x_1(t) \right\rfloor + x_0(t) \right\rfloor = \max(ax_1(t) + x_0(t), x_0(t), 0). \quad (26)$$

В случае схемы с тремя ИД решение записывается в форме [1, 3]

$$x(t) = \left\lfloor a_1 \left\lfloor x_1(t) \right\rfloor + a_2 \left\lfloor x_2(t) \right\rfloor + x_0(t) \right\rfloor, \quad (27)$$

где a_1, a_2 – некоторые константы, $x_1(t)$ и $x_2(t)$ – частные решения схемы с двумя ИД. Подставляя в (27) вместо $x_1(t)$ и $x_2(t)$ выражение (26), получаем

$$x(t) = f_{\text{MT}} \left(a_1 \max(a_{11}x_{11}(t) + x_{10}(t), x_{10}(t), 0) + \right. \\ \left. + a_2 \max(a_{21}x_{21}(t) + x_{20}(t), x_{20}(t), 0) + x_0(t) \right). \quad (28)$$

Функция преобразования модуля (1) является функцией максимума аргумента функции и нуля [2], поэтому (27) можно переписать:

$$x(t) = \left\lfloor a_1 \left\lfloor x_1(t) \right\rfloor + a_2 \left\lfloor x_2(t) \right\rfloor + x_0(t) \right\rfloor = \\ = \max \left(a_1 a_{11} x_{11}(t) + a_1 x_{10}(t) + a_2 a_{21} x_{21}(t) + a_2 x_{20}(t) + x_0(t), \right. \\ \left. a_1 x_{10}(t) + x_0(t), a_2 x_{20}(t) + x_0(t), x_0(t) \right) \quad (29)$$

или

$$x(t) = \left\lfloor a_1 \left\lfloor x_1(t) \right\rfloor + a_2 \left\lfloor x_2(t) \right\rfloor + x_0(t) \right\rfloor = \max(x_i^j(t), x_i^k(t), x_i^l(t), x_i^m(t), 0), \quad (30)$$

где $x_i^j(t)$ – j -е частное решение (ток или напряжение) на i -м ИД.

Таким образом можно получить решение для схемы с n ИД:

$$x(t) = \left\lfloor a_1 \left\lfloor a_{11} \left\lfloor \dots \left\lfloor a_{1n-2} \left\lfloor x_{1n-2}(t) \right\rfloor + x_{0n-2}(t) \right\rfloor \dots \right\rfloor + \dots + a_{1n-2} \left\lfloor \dots \right\rfloor + a_{10} \right\rfloor + a_{n-1} \left\lfloor \dots \right\rfloor + x_0(t) \right\rfloor = \\ = \max(x_i^j(t), \dots, x_i^{\dots}(t), 0), \quad (31)$$

что значительно проще решения, полученного в [3]. Чтобы получить решение для тока или напряжения на ИД в схеме с n ИД, нужно найти максимум всех возможных решений на этом ИД. Данный подход справедлив только для схем, в которых при переключении любого ИД определитель схемы сохраняет свой знак. Такое решение было предложено в [3], но не было ясности с применением функции максимума.

Запишем решения для схемы на рис. 8 через функцию максимума:

$$i_{D1} = \max \left(\frac{u_{01}(t)(R_2 + R_3) - u_{02}(t)(R_1 + R_2 + R_3)}{(R_1 + R_4)(R_2 + R_3) + R_1 R_4}, \frac{R_2 R_3 (u_{01}(t) - u_{02}(t))}{R_3 (R_2 (R_1 + R_4) + R_1 R_4)}, 0 \right), \quad (32)$$

$$i_{D2} = \max \left(\frac{-R_3 u_{01}(t) + u_{02}(t)(R_1 + R_2 + R_3)}{(R_1 + R_2) R_3}, \dots \right),$$

$$\frac{-R_3 R_4 u_{01}(t) + (R_2(R_1 + R_4) + R_4(R_1 + R_3))u_{02}(t)}{R_3(R_2(R_1 + R_4) + R_1 R_4)}, 0 \Bigg). \quad (33)$$

$$u_{D1} = \max \left(u_{02}(t) - \frac{u_{01}(t)(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}, \frac{R_2 R_3 (u_{02}(t) - u_{01}(t))}{(R_1 + R_2) R_3}, 0 \right), \quad (34)$$

$$u_{D2} = \max \left(\frac{u_{01}(t) R_3}{R_2 + R_1 + R_3} - u_{02}(t), \frac{R_3 R_4 u_{01}(t) - u_{01}(t)(R_2(R_1 + R_4) + R_4(R_1 + R_3))}{(R_1 + R_4)(R_2 + R_3) + R_1 R_4}, 0 \right). \quad (35)$$

Как видно, (32)–(35) компактнее выражений (17)–(20). По формулам (32) и (33) можно записать токи через ИД для схемы на рис. 8 как функцию максимум частных токов (рис. 16). Такое представление удобнее представления токов через функцию преобразование модуля [1] на рис. 9.

Сравнение методов решения схем с ИД. Итак, можно выделить 3 подхода к символьному анализу по МСО схем с ИД: 1) с использованием функции преобразования модуля [1]; 2) с использованием функции максимума всех частных решений; 3) путем нахождения моментов переключения ИД. Второй подход по сравнению с первым подходом обеспечивает получение решений в более компактной форме.

В первом случае число требуемых схемных определителей находится из (1) и (2), что в 2 раза меньше числа схемных определителей, чем во втором случае:

$$\Sigma_{CO} = n^2 + n - 4 + \frac{n!}{(n-2)!}, \quad (36)$$

где n – количество ИД, количество которых, как было сказано в самом начале статьи, определяются в схеме. Во втором случае необходимо составить по два определителя для каждого из 2^n вариантов включения, то есть число требуемых схемных определителей равно.

$$\Sigma_{CO} = 2^{n+1}. \quad (37)$$

Для нахождения моментов переключения ИД в третьем случае необходимо составить только 2^n схемных определителей. Изобразим зависимость количества необходимых схемных определителей для каждого метода (рис. 17,а).

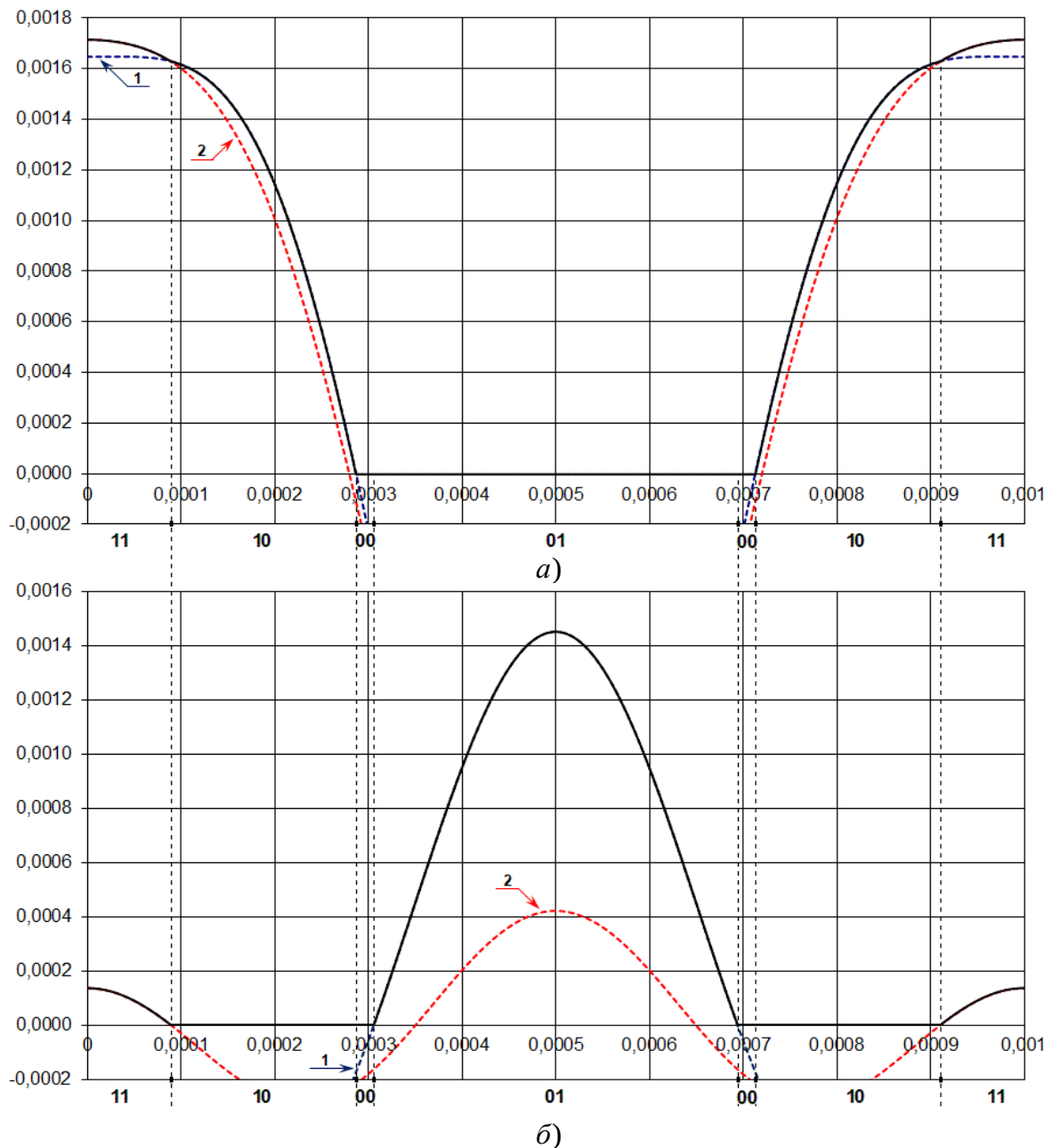


Рис. 16. Представление тока через идеальный диод в схемы (рис. 8) как максимум его частных токов:

а) ток i_{D1} как максимум i_{D1}^0 (кривая 1) и i_{D1}^2 (кривая 2),

б) ток i_{D2} как максимум i_{D2}^0 (кривая 1) и i_{D2}^1 (кривая 2)

В первом случае для n -го аналитического решения схемы с n ИД требуемое число операций функции преобразования модуля находится по (3). Для нахождения всех токов или напряжений ИД требуется в n раз больше операций. Во втором случае необходимо для каждого решения найти максимум из 2^{n-1} его частных решений и нуля, выполнив сравнения, число которых равно

$$\Sigma_n = n \cdot 2^{n-1}. \quad (38)$$

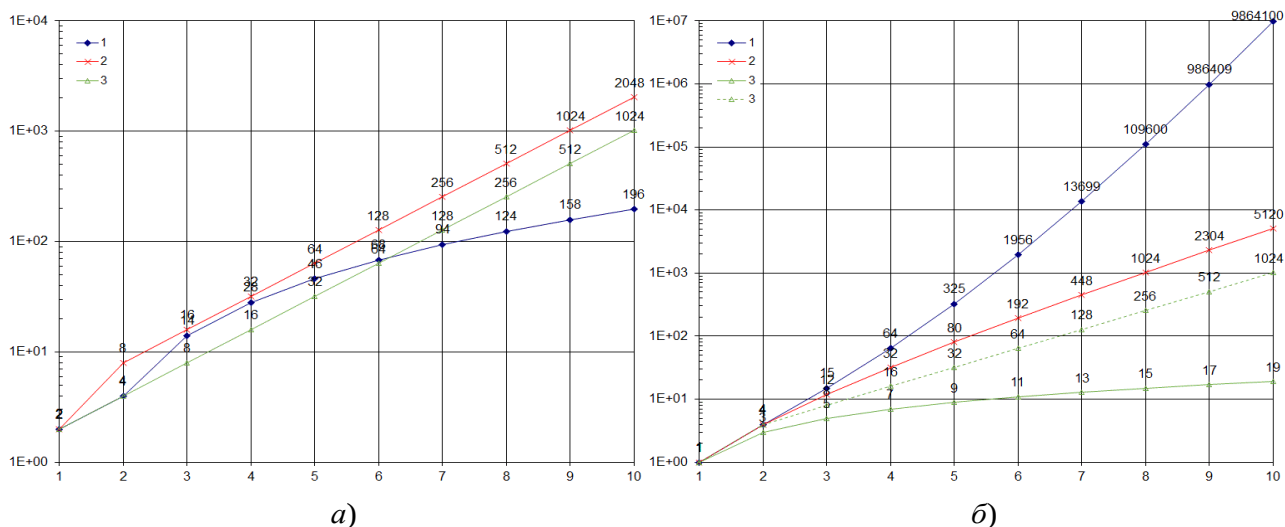


Рис. 17. Сравнение различных методов:
 а) по количеству необходимых схемных определителей;
 б) по количеству необходимых операций

Зависимости количества необходимых действий для первого и второго случая представлены на рис. 17,б. В третьем случае необходимо решить уравнения для 2^n состояний. Определение момента переключения требует решения n уравнений согласно состоянию графа переключений. Для проверки возможности одновременного переключения ИД нужно рассмотреть ещё $n - 1$ возможных состояний. Таким образом, получаем число действий, которые требуются в третьем подходе:

$$\Sigma_n = n \cdot (n - 1). \quad (39)$$

На рис. 17,б кривая по уравнению (39) изображена сплошной линией, а кривая всех возможных условий – пунктирной линией. Из рис. 17 видно, что для схем с малым числом ИД число схемных определителей для первого и второго подхода близки, но при бóльшем количестве ИД первый подход требует меньшего числа схемных определителей. Это и понятно, так как в схемно-матричном подходе в схемном определителе содержится несколько элементов матриц, а во втором подходе схемный определитель определяет только один элемент. Но в первом подходе используется функция преобразования модуля и число обращений к ней значительно увеличивается по сравнению с использованием функции максимума двух элементов (рис. 7,б). Этот недостаток первого подхода [1] устраняется использованием функции максимума.

Для третьего метода получаем самое меньшее количество необходимых схемных определителей для схем с небольшим количеством ИД. Для схем с бóльшим количеством ИД получаем значительно большее число схемных определителей по сравнению с первым методом, но в третьем методе используются схемные определители числителей. В третьем методе нет необходимости решать все получившиеся условия (пунктир на рис. 17,б), достаточно решить либо n условий (наилучший вариант), либо $n(n - 1)$ условий (наихудший вариант – сплошная кривая на рис. 17,б). Можно выбрать один из трех подходов к символьному анализу схем с ИД по МСО применительно схемам, в которых определитель не меняет знак.

Выводы

1. Метод схемных определителей удобен для определения моментов переключения идеальных диодов. Проведено сравнение по трудоемкости различных подходов к символьному анализу схем с идеальными диодами.

2. Предложено представление токов и напряжений на идеальных диодах через функцию максимума частных решений.

Список литературы

1. Шушпанов Д.В. Анализ резистивных схем с идеальными диодами методом схемных определителей // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: международ. сб. науч. тр. – Ульяновск: УлГТУ, 2020. – Вып. 18. – С. 25–46.

2. Leenaerts D.M.W., van Bokhoven W.M.G. Piecewise Linear Modeling and Analysis / Kluwer Academic Publishers, 1998. 208 pp.

3. Шушпанов Д.В., Шомин А.Ю. Аналитическое решение линейной задачи дополнителности на примере нелинейной резистивной цепи // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: международ. сб. науч. тр. – Ульяновск: УлГТУ, 2020. – Вып. 16. – С. 25–46.

4. Курганов С.А., Филаретов В.В. Символьный анализ и диакоптика электрических цепей методом схемных определителей. учеб. пособие / Ульяновск: УлГТУ, 2003. – 228 с.

5. Курганов С.А., Филаретов В.В. Символьный анализ линейных аналоговых и дискретно-аналоговых электрических цепей: учеб. пособие / Ульяновск: УлГТУ, 2008. – 284 с.

НОВЫЕ СХЕМНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

ОКОННЫЕ ФУНКЦИИ В МОДЕЛИ ЛИНЕЙНОГО ДРЕЙФА ИОНОВ ДЛЯ МЕМРИСТОРОВ

Е. Б. Соловьева, В. А. Смирнов

Рассмотрены свойства оконных функций, вносящих нелинейный эффект в модель линейного дрейфа ионов для мемристоров. Приведен сравнительный анализ функций на основе оценки их свойств и эффекта «запирания границы». Отмечены часто используемые на практике оконные функции.

The properties of window functions, which add a non-linear effect to the model of linear ion drift for memristors, are considered. Comparative analysis of functions on the basis of their properties and effect of "border locking" is represented. The most commonly used window functions are highlighted.

Существование четвертого (наряду с резистором, конденсатором и индуктивностью) пассивного электрического элемента – мемристора, предсказано профессором Леоном Чуа в 1971 году [1]. В 2008 году исследователи компании Hewlett-Packard (HP) обнаружили существование этого элемента [2]. С тех пор развиваются технологии производства и моделирование мемристоров, расширяется область применения [3,4]. Некоторые устройства на базе мемристоров: перестраиваемые электротехнические системы (фильтры, осцилляторы, выпрямители, корректоры, генераторы сигналов и т.д.); регуляторы в системах управления; элементы памяти; логические элементы; нейроморфные системы на нейронных сетях (мемристоры – синапсы) и т. д. [3].

Проектирование устройств невозможно без моделирования [5,6], поэтому с появления мемристора начался процесс построения его моделей. Простая HP-модель (модель Струкова) предложена в 2008 году и основана на структуре, которая показана на рис. 1 [2,4,7,8]. Полупроводник толщиной D (пленка диоксида титана – активная область мемристора)

расположен между платиновыми электродами. Пленка состоит из двух частей: легированной (TiO_{2-x} , её толщина равна w) и нелегированной (TiO_2). Легированная область, благодаря высокой концентрации вакансий кислорода, обладает низким сопротивлением. Нелегированная область не содержит вакансий кислорода, поэтому её сопротивление в несколько раз выше [2,4].

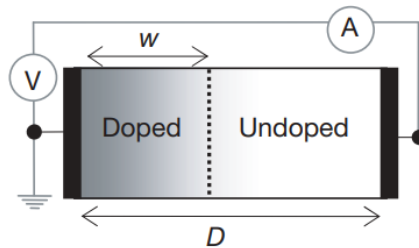


Рис. 1. Структура мемристора для НР модели

Д. Струков ввел предположения: 1) электронное сопротивление мемристора обладает омическим свойством; 2) приложенное электрическое поле однородно; 3) дрейф ионов линеен. На основе этих свойств им предложена НР-модель [2,4,7,8]:

$$V(t) = \left(R_{\text{ON}} \frac{w(t)}{D} + R_{\text{OFF}} \left(1 - \frac{w(t)}{D} \right) \right) I(t), \quad (1)$$

$$\frac{dw(t)}{dt} = \mu_v \frac{R_{\text{ON}}}{D} I(t),$$

где $V(t)$ — напряжение на мемристоре; $I(t)$ — ток, протекающий через мемристор, R_{ON} — минимальное сопротивление мемристора; R_{OFF} — максимальное сопротивление мемристора; D — толщина плёнки полупроводника; $w(t)$ — переменная состояния (толщина легированной области в тонкой плёнке); μ_v — постоянная средней подвижности ионов.

НР-модель описывает линейную зависимость между скоростью перемещения ионов и приложенным электрическим полем [9]. Для учета нелинейного распределения поля в активной области мемристора, а также для предотвращения выхода нормированной переменной состояния $x(t) = \frac{w(t)}{D}$ за пределы ее границ $[0; 1]$ вводится нелинейная оконная функция $F(x)$ [9,10]. В результате (1) преобразуется к виду [9]:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \mu_v \frac{R_{ON}}{D^2} I(t) F(x(t)), \quad (2)$$

где $x(t) = w(t)/D$, $x(t) \in [0, 1]$ – нормированная переменная состояния;
 $F(x(t))$ – оконная функция.

Математические формы часто используемых оконных функций:

1. Функция Струкова–Вильямса [11]

$$F(w) = \frac{w(1-w)}{D^2} \quad \text{или} \quad F(x) = x \left(\frac{1}{D} - x \right).$$

2. Функция Бендерли [7,11]

$$F(w) = \frac{w(D-w)}{D^2} \quad \text{или} \quad F(x) = x(1-x).$$

3. Модель Джоглекара [7,9,11]

$$F(x) = 1 - (2x-1)^{2p},$$

где p – положительная целая константа, задающая нелинейность.

4. Функция Биолека [7,9,11]

$$F(x) = 1 - (x - \delta_1(-i))^{2p},$$

где i – ток, протекающий через мемристор; p – положительная целая константа; δ_1 – единичная ступенчатая функция (функция Хевисайда):

$$\delta_1(-i) = \begin{cases} 0, & \text{при } i > 0 \\ 1, & \text{при } i \leq 0 \end{cases}.$$

5. Функция Продромакиса [7,9,11]

$$F(x) = j \left(1 - \left[(x-0.5)^2 + 0.75 \right]^p \right),$$

где p и j – положительные вещественные константы, которые задают нелинейность и максимальное значение функции соответственно.

6. Функция Чжа – гибрид функции Биолека и Продромакиса [7,9,11]:

$$F(x) = j \left(1 - \left[0.25(x - \delta_1(-i))^2 + 0.75 \right]^p \right),$$

где p и j – положительные вещественные константы, δ_1 – единичная ступенчатая функция (функция Хевисайда), описанная ранее.

Для оценки эффективности оконных функций Продромакис ввел следующие свойства [12]: 1) учет граничных условий на электродах мемристора ($F(x(t)) = 0$ при $x = 0$ и $x = 1$); 2) нелинейность во всей активной

области мемристора; 3) возможность перехода от нелинейной к линейной функции; 4) масштабируемость (максимальное значение оконной функции должно меняться на интервале аргумента $x(t) \in [0, 1]$); 5) присутствие дополнительных настроечных переменных для повышения гибкости функции. Кроме того, упомянем проблему «запираания границы» [11], суть которой – установление статического режима переменной состояния w (или x) при равной нулю оконной функции и, как следствие из (2), равной нулю производной переменной состояния $dw(t)/dt = 0$ (или $dx(t)/dt = 0$). В табл. 1 оконные функции сравниваются по этим свойствам.

Таблица 1. Оценки оконных функций согласно их свойствам

Свойства	Оконные функции					
	Струкова–Вильямса	Бендерли	Джоглекара	Биолека	Продромакиса	Чжа
Соблюдение граничных условий	–	+	+	наличие разрывов	+	–
Нелинейность во всей активной области	+	+	+	+	+	+
Переход к линейной функции	–	–	+	+	+	+
Масштабируемость	–	–	–	ограничено	+	+
Гибкость	–	–	+	+	+	+
Решение проблемы «запираания границы»	–	–	–	+	–	+

Из табл. 1 следует, что оконным функциям Джоглекара, Биолека, Продромакиса и Чжа, присущи полезные свойства Продромакиса.

Список литературы

1. Chua L. Memristor-The missing circuit element // IEEE Transactions on Circuit Theory. – 1971.– Vol. 18, is. 5.– P. 507–519.
2. The missing memristor found / D. B. Strukov, G. S. Snider, D. R. Stewart, S. R. Williams // Nature. – 2008.– Vol. 453, is. 7191.– P. 80–83.
3. Solovyeva E., Serdyuk A. Behavioral Modeling of Memristors under Harmonic Excitation. – Micromachines. – 2024.– Vol. 15, no 1.– P. 51.
4. Соловьева Е. Б., Смирнов В. А. О физических процессах в мемристорах // Известия СПбГЭТУ «ЛЭТИ». – 2024.– Т.17, № 1.– С.90–98.

5. Данилов Л. В., Соловьева Е. Б. Макромоделирование существенно нелинейных электрических цепей на основе функциональных полиномов // Известия высших учебных заведений. Радиоэлектроника. – 1990.– Т.33, №6.– С.3–7.

6. Solovyeva E. Types of recurrent neural networks for non-linear dynamic system modelling // Proceedings of 2017 XX IEEE International Conference on Soft Computing and Measurements (SCM2017). – St. Petersburg, May 24–26, 2017.– P. 252–255.

7. Solovyeva E. B., Azarov V. A. Comparative Analysis of Memristor Models with a Window Function Described in LTspice // 2021 IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (ElConRus). – Russia, Moscow and St. Petersburg, January 26–29, 2021.– P. 1097–1101.

8. Gale E. M. Uniform and Piece-wise Uniform Fields in Memristor Models // arXiv:1404.5581v2 [cs.ET], 23 Apr. 2014.– P. 1–10.

9. Oğuz Y. Mathematical Modeling of Memristors // Memristor and Memristive Neural Networks. — 2018.

10. Isah A., Bilbault J.-M. Review on the Basic Circuit Elements and Memristor Interpretation: Analysis, Technology and Applications // Journal of Low Power Electronics and Applications. – 2022.– Vol. 12.– P. 44.

11. Maruf M. H., Ali S. I. Review and comparative study of I-V characteristics of different memristor models with sinusoidal input // International Journal of Electronics. – 2019.– Vol. 107, is. 3.– P. 349–375.

12. A Versatile Memristor Model With Nonlinear Dopant Kinetics / T. Prodromakis, B. P. Peh, C. Papavassiliou, C. Toumazou. // IEEE Transactions on Electron Devices. – 2011.– Vol. 58, is. 9.– P. 3099–3105.

Соловьева Елена Борисовна – д-р техн. наук, зав. кафедрой теоретических основ электротехники СПбГЭТУ «ЛЭТИ», почетный работник сферы образования РФ.

E-mail: selenab1@yandex.ru. <https://orcid.org/0000-0001-8204-6632>.

Смирнов Владислав Александрович – студент СПбГЭТУ «ЛЭТИ».

E-mail: vladsmirn289@gmail.com.

ИНДУКТИВНОСТИ И ЕМКОСТИ С ПРЯМОУГОЛЬНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Д. В. Шушпанов

Предложены обобщения линейных индуктивностей и емкостей по аналогии с моделью идеального диода: идеальный индуктивный диод (индуктивность с прямоугольной вебер-амперной характеристикой) и идеальный емкостной диод (емкость с прямоугольной вольт-фарадной характеристикой). Показано, что для анализа схем с элементами, имеющими прямоугольные характеристики, можно использовать метод схемных определителей.

Generalizations of linear inductances and capacitances are proposed by analogy with the model of an ideal diode: an ideal capacitive diode (capacitance with a rectangular volt-farad characteristic) and an ideal inductive diode (inductance with a rectangular weber-ampere characteristic). It is shown that the method of circuit determinants can be used to analyze circuits with elements having rectangular characteristics.

Идеальный диод. Существует три вида электрического сопротивления (рис. 1): линейное сопротивление с линейной ВАХ, нелинейное сопротивление с нелинейной ВАХ и идеальный диод с прямоугольной ВАХ. Идеальный диод можно считать предельным случаем нелинейного сопротивления.

Идеальный диод в большей мере является абстракцией, чем линейное сопротивление. Прямоугольную вольтамперную характеристику (ВАХ) идеального диода физически нельзя реализовать, но его ВАХ можно точно воспроизвести в методах расчета [1–4]. Наиболее наглядное аналитическое решение [3,4] получается методом схемных определителей (МСО) [5]. При этом предельные случаи идеального диода (открыт или замкнут) соответствуют схемам, производным от исходной схемы.

Операции стягивания и удаления элементов, на которых основан МСО укладываются в логику работы идеального диода с состояниями: открыт (идеальный проводник) и закрыт (разрыв соединения). Поэтому схемно-

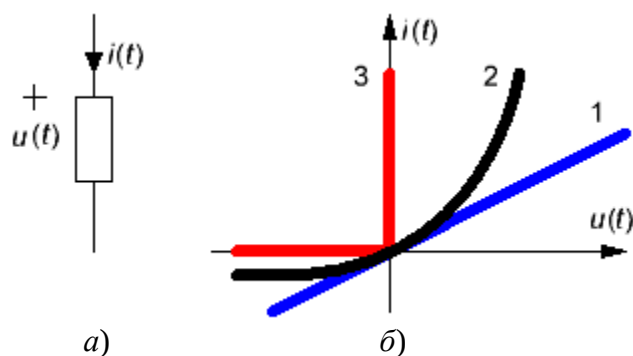


Рис. 1. Сопротивление (а) и ВАХ различного сопротивления (б):
1 – линейное сопротивление, 2 – нелинейное сопротивление (диод),
3 – идеальный диод

символьные методы анализа схем, обобщенные на идеальные диоды [3,4] оказываются весьма наглядными, доступными для понимания.

Наряду с нелинейными сопротивлениями, существуют нелинейные индуктивности и нелинейные емкости. Аналогия идеальному диоду с параметром сопротивления (идеальный резистивный диод) позволяет ввести другие схемные элементы. Это идеальный индуктивный диод (индуктивность с прямоугольной вебер-амперной характеристикой) и идеальный емкостной диод (емкость с прямоугольной вольт-фарадной характеристикой). Символьный анализ схем с реактивными идеальными диодами требует развития методов [1–4], предназначенных для резистивных цепей.

В методе [4] желательно снять ограничение, касающееся определения момента переключения идеальных диодов. Если определитель отклика тока и напряжения имеет отрицательный знак, то в условии переключения изменяется знак, а момент переключения не изменяется. Если определитель для тока или напряжения равен нулю, то диод выключен или включен соответственно, и не может переключиться.

Если знак определителя тока противоположен знаку определителя напряжения, то напряжение или ток при переключении этого диода равен нулю вследствие того, что числитель положительный, знаменатель отрицательный, а ток и напряжения должны быть неотрицательны. Это возможно при наличии в схеме отрицательных сопротивлений, то есть в практически важном случае. Вопрос о знаке определителя схемы связан не только с моментами переключения идеальных диодов, но и с устойчивостью активной схемы [6].

Выводы. 1. Предложены идеальные модели с прямоугольными характеристиками для нелинейных элементов: индуктивного и емкостного. 2. Идеальный индуктивный диод (индуктивность с прямоугольной вебер-амперной характеристикой) и идеальный емкостной диод (емкость с прямоугольной вольт-фарадной характеристикой) могут рассматриваться как новые схемные элементы.

Список литературы

1. Шушпанов Д.В., Лучанский О.Д. Аналитический метод расчета резистивных цепей с идеальными диодами // Андреев Василий Андреевич: ученый, педагог, организатор: Синтез, анализ и диагностика электронных цепей.– Ульяновск: УлГТУ, 2017.– Вып. 14.– С. 68–87.

2. Шушпанов Д.В., Шомин А.Ю. Аналитическое решение линейной задачи дополнителности на примере нелинейной резистивной цепи // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2020. – Вып. 16.– С. 25–46.

3. Шушпанов Д.В. Анализ резистивных схем с идеальными диодами методом схемных определителей // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей. – Ульяновск: УлГТУ, 2024.– Вып. 18.

4. Шушпанов Д.В. Использование метода схемных определителей для определения моментов переключения идеальных диодов в резистивной цепи // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: международ. сб. науч. тр. – 2024.– Ульяновск: УлГТУ, Вып. 18.

5. Курганов С.А., Филаретов В.В. Символьный анализ и диакоптика электрических цепей методом схемных определителей. Учебное пособие / Ульяновск: УлГТУ, 2003.– 228 с.

6. Hoang S. About the stability of frequency-independent networks // IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications.– 1985.– Vol. 32, no. 9.– P. 970–973.

Шушпанов Дмитрий Викторович – к.т.н., доцент, доцент кафедры теоретических основ телекоммуникаций Санкт-Петербургского государственного университета телекоммуникаций им. М.А. Бонч-Бруевича.
E-mail: dimasf@inbox.ru.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ УСТРОЙСТВ

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРИСОЕДИНЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ ЖИДКОСТИ В НИЗКОЧАСТОТНЫХ ВИБРОВИСКОЗИМЕТРАХ

Ю. С. Борисов, Б. А. Соломин

Предложен метод экспериментального определения присоединенной упругости, позволяющий повысить точность измерения присоединенных параметров жидкости в низкочастотных вибровискозиметрах. При этом используется регулярное контролируемое изменение структуры сигнала адаптивного внешнего возбуждения колебательной системы вибродатчика.

A method for the experimental determination of the attached elasticity is proposed, which makes it possible to increase the accuracy of measuring the attached liquid parameters in low-frequency vibration meters. In this case, a regular controlled change in the signal structure of the adaptive external excitation of the vibratory system of the vibration sensor is used.

Особенности вибрационной вискозиметрии. Вибрационные методы широко используются в современной промышленности для контроля состава и качества разнообразных жидкостей [1–3]. Среди них важное место занимают низкочастотные вибрационные вискозиметры [4–8]. Чувствительным элементом вибровискозиметра является вибродатчик, представляющий собой механическое колебательное звено второго порядка, в ненагруженном состоянии полностью задаваемое тремя собственными физическими параметрами: колеблющейся массой M_0 , упругостью B_0 и затуханием H_0 .

Возбуждение механических колебаний звена создается электромеханическим устройством возбуждения, преобразующим возбуждающее напряжение $U_v(t)$ в возбуждающую силу $F_v(t)$. Отклик

вибродатчика на возбуждение оценивают с помощью датчика положения по его выходному напряжению $U_D(t)$, пропорциональному геометрическому отклонению $x(t)$ колеблющейся массы M_0 от равновесного положения.

В общем случае собственные параметры ненагруженного вибродатчика M_0 , B_0 и H_0 являются функциями текущей температуры колебательного звена и должны обозначаться как $M_0(T)$, $B_0(T)$ и $H_0(T)$, они теоретически или экспериментально определяются на стадии проектирования и изготовления датчика. Отклик $x(t)$ колебательной системы на возбуждающую силу $F_v(t)$ находят путем решения следующего линейного дифференциального уравнения:

$$m_0 \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \right) + h_0 \left(\frac{dx}{dt} \right) + k_0 x(t) = F_v(t). \quad (1)$$

При $F_v(t) = F_0 \sin(\omega t)$ отклик $x(t)$ имеет вид:

$$x(t) = x_{\max}(\omega) \sin(\omega t + \varphi(\omega)), \quad (2)$$

где F_0 – амплитуда возбуждающей силы, ω – круговая частота гармонической возбуждающей силы, $\varphi_v(\omega)$ – фазовый сдвиг между возбуждающей силой и откликом.

Для колебательного звена второго порядка, чем и является колебательная система большинства вибровискозиметров, справедливы следующие соотношения:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_0}{m_0}}; \quad Q_0 = \frac{\omega_0 m_0}{h_0}, \quad (3), (4)$$

где ω_0 – собственная частота ненагруженной колебательной системы, Q_0 – ее добротность. При этом фазовый сдвиг между возбуждающей силой и откликом на собственной частоте колебательной системы равен $\pi/2$.

При полном или частичном погружении колеблющейся массы вибровискозиметра в жидкость параметры колебательной системы изменяются и приобретают новые значения:

$$m_L = m_0 + \Delta m; \quad h_L = h_0 + \Delta h; \quad k_L = k_0 + \Delta k,$$

где m_L , h_L , k_L – соответственно масса, коэффициент демпфирования и коэффициент жесткости колебательной системы, взаимодействующей с

исследуемой жидкостью. Изменение массы и коэффициента жесткости колебательной систем приводит и к изменению собственной частоты, которая приобретает значение ω_L .

Величины Δm , Δh , Δk – это изменения параметров колебательной системы, вызванные исследуемой жидкостью. Величина Δm – это так называемая присоединенная масса, то есть масса окружающей зонд жидкости, участвующая в колебаниях. Трение о жидкость вызывает изменение коэффициента демпфирования Δh . Величина Δk – это изменение коэффициента жесткости (его естественно назвать присоединенной жесткостью), связанное с упругими свойствами жидкости, контактирующей с зондом. Используя вычисленное значение массы m_L колебательной системы, определяют коэффициент демпфирования в жидкости.

Эффект увеличения резонансной частоты и постановка задачи. В ходе разработки и исследования аппаратно-программного вибровискозиметрического комплекса было обнаружено, что на высоковязких объектах (моторные и индустриальные масла, глицерин) в области температур, близких к температурам застывания, наблюдается увеличение резонансной частоты датчика. Этот эффект не согласуется с принятой теорией вибрационной вискозиметрии, поскольку в ней как основополагающее явление рассматривается увеличение присоединенной массы и увеличение потерь при увеличении вязкости жидкости.

При таком подходе невозможно объяснить рост резонансной частоты вблизи температуры застывания. Однако, если предположить, что в жидкости могут существовать "резиноподобные" агломераты и их количество резко увеличивается при приближении к температуре застывания, то можно говорить о присоединенной жесткости, о которой было сказано выше. Таким образом, интересно определить величину присоединенной жесткости, что даст новый инструмент для исследования реологических свойств жидкости. Наиболее простым представляется использование в качестве датчика колебательной системы с управляемой массой или жесткостью.

Нами предлагается способ экспериментального определения присоединенной упругости, основанный на модификации разработанного и успешно реализованного в УФ ИРЭ РАН способа адаптивного внешнего

возбуждения вибровискозиметрического датчика [4–7]. В этом способе вибровискозиметрический датчик работает в режиме внешнего возбуждения периодическим сигналом $F_v(t)$ постоянной амплитуды с автоматической дискретной подстройкой микропроцессором частоты возбуждения под собственную частоту колебательной системы, то есть до выполнения условия (2). Это позволяет определять с высокой точностью текущую собственную частоту колебательного звена вибродатчика.

Адаптивное внешнее возбуждение вибровискозиметрического датчика. Предлагаемая здесь модификация способа адаптивного внешнего возбуждения заключается в регулярном временном изменении при постоянной температуре вибродатчика возбуждающего напряжения от закона $F_v(t)$ до закона $F_{vm}(t)$, где

$$F_{vm}(t) = \alpha \cdot (U_v(t) + \gamma \cdot \beta \cdot x(t)) = F_v(t) + \alpha \cdot \gamma \cdot \beta \cdot x(t); \quad (5), (6)$$

Подставляя полученное значение возбуждающей силы в уравнение (1), получаем:

$$m \left(\frac{d^2x}{dt^2} \right) + h \left(\frac{dx}{dt} \right) + (k - \alpha \cdot \gamma \cdot \beta) \cdot x(t) = F_v(t). \quad (7)$$

Анализ выражения показывает, что подобное изменение возбуждающей силы эквивалентно изменению коэффициента жесткости колебательного звена от значения k до значения $k_m = k - \alpha \cdot \gamma \cdot \beta = k - \Delta k_m$. Изменение коэффициента жесткости Δk_m приведет, к изменению собственной частоты колебательного звена от значения ω_0 до значения ω_{0m} .

Значение Δk_m может быть определено при калибровке ненагруженной колебательной системы вибровискозиметра (это достаточно сделать однократно) по известной зависимости $k_0(T)$, а так же по измеренным значениям собственных частот ω_0 и ω_{0m} :

$$\Delta k_m = k_0(T) \cdot \left(1 - \left(\frac{\omega_{0m}}{\omega_0} \right)^2 \right). \quad (8)$$

Отметим, что значение Δk_m определяется весовым коэффициентом γ в уравнении в процессе начальной калибровки вибровискозиметра. При

последующей эксплуатации вибровискозиметра параметр Δk_m остается постоянным вне зависимости от температуры и свойств исследуемой жидкости, а также амплитуды возбуждающего напряжения.

Появившаяся возможность управлять коэффициентом жесткости колебательной системы позволяет в процессе испытания жидкости определить, какая часть в изменении текущего значения собственной частоты вызвана изменением присоединенной массы, а какая связана с влиянием жидкости на коэффициент жесткости системы. Для этого необходимо повторить операции, аналогичные проводимым при калибровке ненагруженной колебательной системы. Измерения собственной частоты до (ω_L) и после изменения возбуждающей силы (ω_{Lm}) проводятся для колебательной системы, взаимодействующей с исследуемой жидкостью. Выражение для величины изменения коэффициента жесткости данной колебательной системы будет:

$$\Delta k_m = k_L(T) \cdot \left(1 - \left(\frac{\omega_{Lm}}{\omega_L}\right)^2\right). \quad (9)$$

Учитывая, что изменение коэффициента жесткости Δk_m под действием изменения возбуждающей силы не зависит от текущего значения коэффициента жесткости, можно приравнять правые части выражений (8) и (9), и получить выражение для коэффициента жесткости колебательной системы под действием жидкости:

$$k_L = \Delta k_m \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega_{Lm}}{\omega_L}\right)^2}. \quad (10)$$

Вычисленное значение коэффициента жесткости $k_L(T)$ позволяет, определить величину колеблющейся массы

$$m_L = \frac{k_L(T)}{(\omega_L)^2} = \Delta k_m \frac{1}{\omega_L^2 - \omega_{Lm}^2}.$$

Реализация адаптивного внешнего возбуждения в вибродатчике вискозиметра. Рассмотренный способ экспериментального определения присоединенной упругости позволяет не только повысить точность определения присоединенных параметров, но и провести исследования самой присоединенной упругости в зависимости от вида жидкости, ее температуры, уровня возбуждения. Для этих целей необходимо

использовать высокочувствительные и быстродействующие вибродатчики, например, с ненагруженной колебательной системой [6].

Принцип работы колебательной системы (КС) в режиме вынужденных колебаний с поддержанием заданного значения разности фаз путем подстройки частоты возбуждающего сигнала – иллюстрируется на рис. 1.



Рис. 1. Функциональная схема работы КС в режиме вынужденных колебаний с поддержанием заданного значения разности фаз путем подстройки частоты

В качестве критерия настройки генератора на собственную частоту колебательной системы используется значение разности фаз $\varphi_0 = \pi/2$ между сигналом возбуждения и выходным сигналом колебательной системы. Подстройка частоты осуществляется модулем управления генератора.

Включение и выключение режима модифицированного сигнала осуществляется с помощью аналогового ключа, подающего на вход аналогового сумматора либо «землю», либо сигнал с датчика положения. При этом коэффициент γ определяется коэффициентом усиления сумматора. Структурная схема представлена на рис. 2.

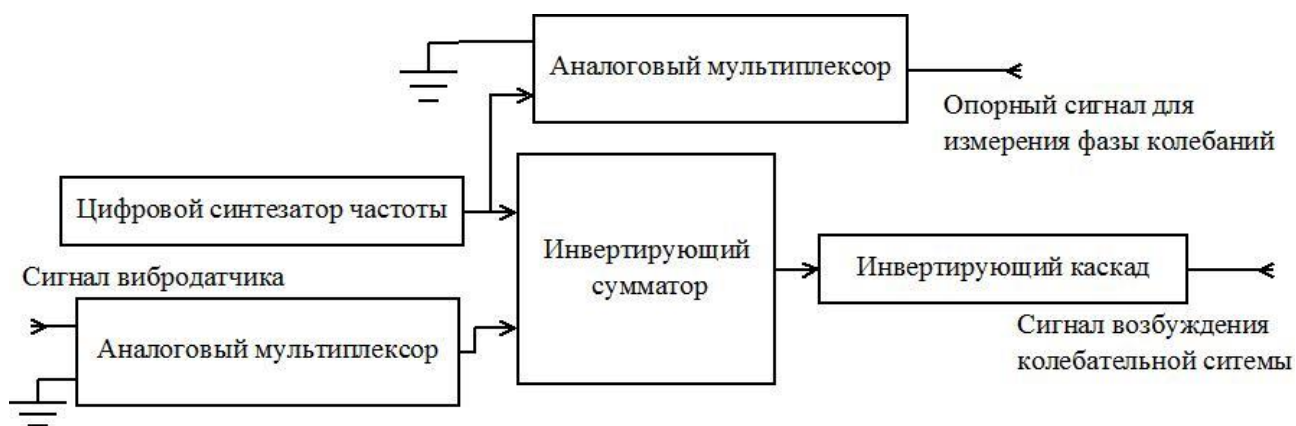


Рис. 2. Функциональная схема системы возбуждения

Таблица 1. Часть экспериментальных данных, измеренных на воздухе

Температура	Состояние обратной связи				k_{1L}	m_{1L}	Δf_1
	ОТКЛ	ВКЛ	ОТКЛ	ВКЛ			
	Вибро1	Вибро1	f1	f1			
°C	отн.ед.	отн.ед.	Гц	Гц	Н/м	мг	Гц
-54,1	0,977	0,585	265,69	258,70	2203	790	7,00
-54,0	0,979	0,587	265,69	258,69	2201	790	7,00
-53,9	0,979	0,588	265,69	258,69	2202	790	7,00
-53,8	0,978	0,589	265,69	258,70	2204	791	6,99
-53,7	0,979	0,590	265,69	258,69	2205	791	6,99
-53,6	0,979	0,589	265,69	258,69	2203	791	7,00
-53,5	0,978	0,590	265,69	258,69	2201	790	7,01
-53,4	0,977	0,591	265,69	258,68	2199	789	7,01
-53,3	0,977	0,590	265,69	258,69	2201	790	7,00
-53,2	0,978	0,590	265,69	258,69	2203	791	7,00
-53,1	0,978	0,592	265,70	258,69	2201	790	7,00
-53,0	0,976	0,592	265,71	258,69	2198	789	7,01
-52,9	0,976	0,591	265,71	258,70	2199	789	7,01
-52,8	0,977	0,592	265,70	258,70	2202	790	7,00
-52,7	0,978	0,592	265,70	258,70	2203	791	7,00
-52,6	0,977	0,593	265,71	258,71	2202	790	7,00
-52,5	0,977	0,593	265,71	258,70	2200	789	7,01

Параметр Δk_m – "Изменение жесткости ненагруженной колебательной системы при включении обратной связи" составляет 115 Н/м – при номинале резистора, установленного на 2-ом входе инвертирующего сумматора, равном 15 кОм. Исходные параметры ненагруженной

колебательной системы, следующие: масса ненагруженной колебательной системы камертонного вибродатчика с установленным стеклянным зондом с шариком – 789,0 мг; собственная частота ненагруженной колебательной системы – 265,3 Гц; расчет коэффициента жесткости ненагруженной колебательной системы 2192 Н/м.

Таблица 2. Часть экспериментальных данных, измеренных на моторном масле

Температура	Состояние обратной связи				k_{1L}	m_{1L}	φf_1
	ОТКЛ	ВКЛ	ОТКЛ	ВКЛ			
	Вибро1	Вибро1	f_1	f_1			
°C	отн.ед.	отн.ед.	Гц	Гц	Н/м	мг	Гц
-3,0	0,149	0,169	284,33	278,14	2660	833	6,19
-2,9	0,150	0,169	284,15	277,95	2651	832	6,21
-2,8	0,151	0,169	283,98	277,76	2642	830	6,22
-2,7	0,152	0,170	283,80	277,58	2638	830	6,23
-2,6	0,153	0,171	283,64	277,39	2630	828	6,24
-2,5	0,153	0,172	283,47	277,19	2614	824	6,28
-2,4	0,154	0,173	283,30	276,98	2596	819	6,32
-2,3	0,155	0,174	283,14	276,77	2574	813	6,37
-2,2	0,156	0,174	282,97	276,56	2558	809	6,41
-2,1	0,157	0,174	282,81	276,36	2539	804	6,45
-2,0	0,158	0,175	282,65	276,17	2526	801	6,48
-1,9	0,159	0,176	282,49	275,98	2513	798	6,51
-1,8	0,160	0,177	282,32	275,78	2501	795	6,54
-1,7	0,160	0,178	282,16	275,58	2487	791	6,57
-1,6	0,161	0,179	282,00	275,38	2469	786	6,62
-1,5	0,162	0,179	281,85	275,18	2449	781	6,67
-1,4	0,163	0,180	281,69	274,99	2434	777	6,71

Результаты экспериментальных исследований вибровискозиметра. В табл. 1 представлена часть экспериментальных данных, измеренных в воздухе. Всего было проведено 4 серии измерений. На рис. 3 представлен график результатов расчетов массы и жесткости колебательной системы при охлаждении воздуха в кювете.

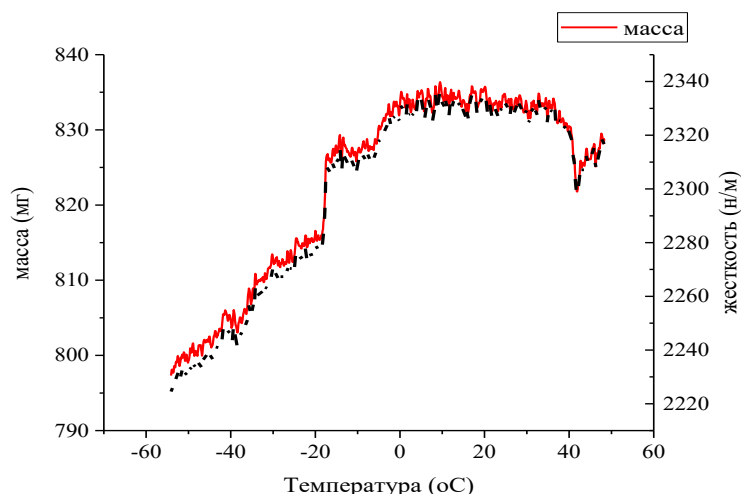


Рис 3. Зависимость массы и жесткости колебательной системы от температуры на воздухе

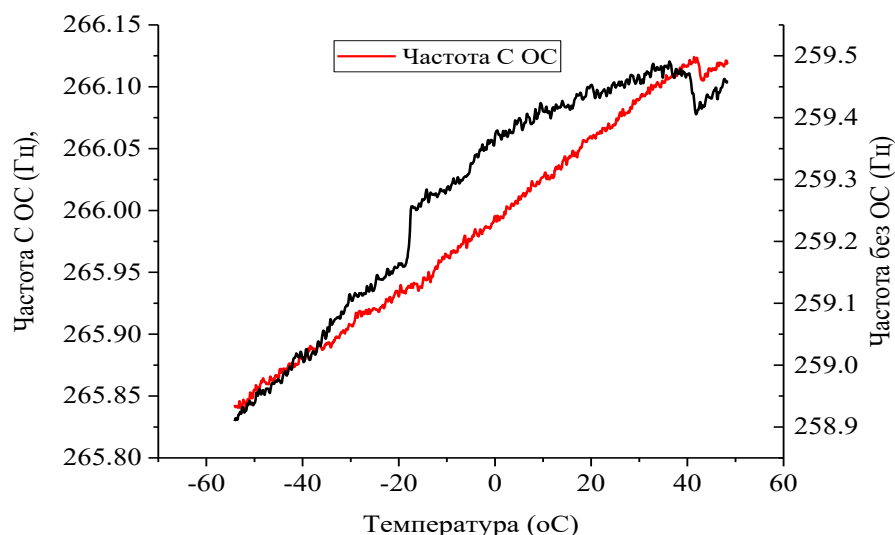


Рис 4. Зависимость резонансной частоты от температуры на воздухе

При этом теоретически должна расти колеблющаяся масса вследствие конденсации воды из паров воздуха и незначительно увеличиваться жесткость из-за укорочения стеклянного капилляра зонда. Как следствие, должно наблюдаться снижение резонансной частоты. Однако экспериментальные исследования показали обратный результат. Возможно, это связано с каким-то просчетом в методике. Например, спорно приравнивание выражений (8) и (9).

Далее проводились подобные измерения на заведомо вязком объекте — моторном масле. Измерения на воздухе в динамике были проведены в последнюю очередь — для проверки достоверности метода. До этого

проверялось лишь в статике при нескольких температурах, причем ничего необычного обнаружено не было.

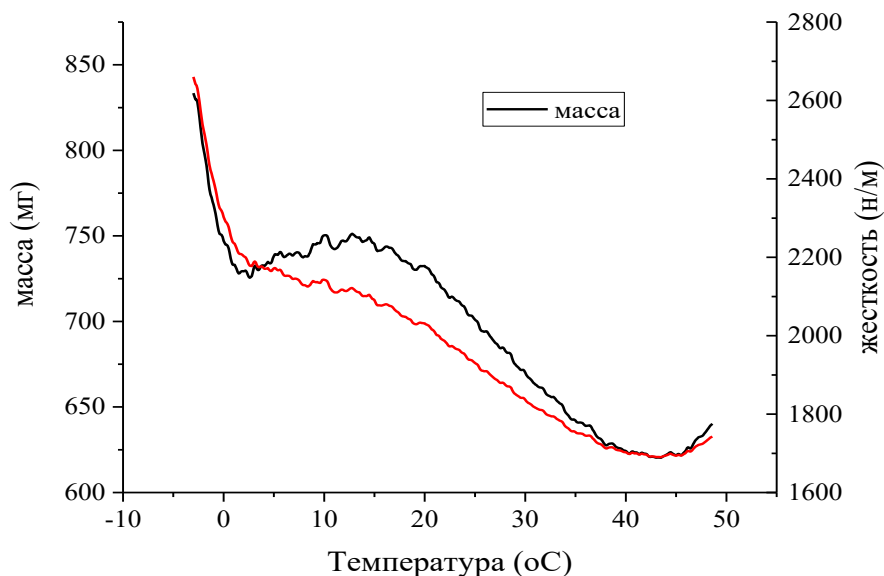


Рис 5. Зависимость массы и жесткости колебательной системы от температуры моторного масла

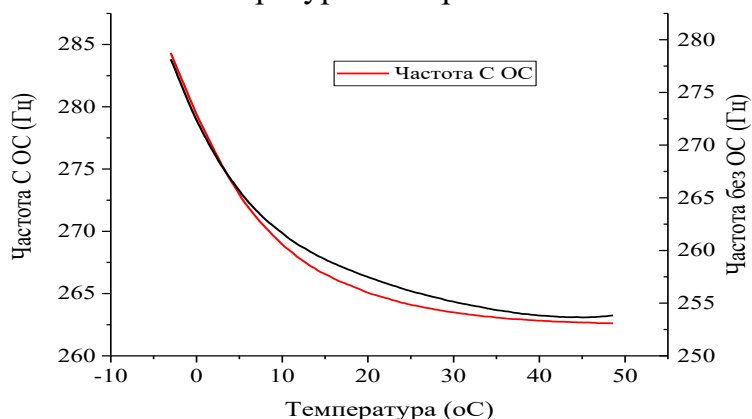


Рис 6. Зависимость резонансной частоты от температуры в моторном масле

Вывод. Предложена и реализована схема возбуждения колебательной системы вибротермодатчика, позволяющая управлять эффективной жесткостью с помощью электрического сигнала.

Список литературы

1. Каплун А.Б., Мешалкин А.Б. Вибрационные методы в теплофизических и физико-химических исследованиях //Теплофизика высоких температур. – 2010. – Т. 48. – №. 4. – С. 553–560.

2. Галкин В.М., Богословский А.В., Волков Ю.С. Вибрационная вискозиметрия и численный метод определения динамики гелеобразования // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2016. – Т. 19. – №. 4. – С. 22–30.

3. Некучаев В.О., Михеев М.М., Михеев Д.М. Исследование вязкости аномальных нефтей с помощью ротационного и вибрационного вискозиметров // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2018. – Т. 84. – №. 12. – С. 45–49.

4. Патент РФ № 2607048 МПК G01N 25/00. Способ и устройство внешнего резонансного возбуждения механической колебательной системы вибровискозиметра / Низаметдинов А.М., Соломин Б.А., Черторийский А.А.; патентообладатель ООО Малое инновационное предприятие «Микроэлектронный контроль». – Заявка № 2015126832 от 03.07.2015, опубл. 10.01.2017, бюл. № 1.

5. Миниатюрный вибровискозиметрический датчик повышенной чувствительности и быстродействием / Б.А. Соломин, А.М. Низаметдинов, А.А. Черторийский, М.Л. Конторович // Датчики и системы. – 2015.– № 7.– С. 35–39.

6. Патент РФ №2662948, МПК G01N 25/00. Ненагруженный вибровискозиметрический датчик / Соломин Б.А., Конторович М.Л., Черторийский А.А. Низаметдинов А.М.; патентообладатель ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН. – Заявка № 2017133693 от 27.09.2017, опубл. 31.07.2018, бюл. № 1.

7. Патент РФ 2723159 С1. Ненагруженный вибровискозиметрический датчик / Соломин Б.А., Борисов Ю. С., Черторийский А.А. Низаметдинов А.М.; патентообладатель ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН. – Заявка № 2019117107 от 03.06.2019.

Борисов Юрий Сергеевич – научный сотрудник УФИРЭ им. В.А. Котельникова РАН, старший преподаватель кафедры "Радиотехника, телекоммуникации и защита информации" Ульяновского Государственного технического университета. E-mail: rgitars@rambler.ru.

Соломин Борис Александрович – кандидат технических наук, консультант УФИРЭ им. В.А. Котельникова РАН. E-mail: solomin.boris@yandex.ru.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОПРИВОДОМ ПОСТОЯННОГО ТОКА В УСЛОВИЯХ ПЕРЕМЕННОЙ НАГРУЗКИ

Н. И. Маринов, Л. Н. Канов

На основе теории инвариантов предложена методика расчета напряжения питания электродвигателя постоянного тока при изменении момента нагрузки. Выявлена зависимость скорости вращения двигателя от напряжения питающего генератора. Проверка модели в среде MathCad подтвердила методику для стабилизации скорости двигателя и повышения надежности электропривода.

Based on the theory of invariants, a method for calculating the supply voltage of a DC electric motor with a change in the load torque is proposed. The dependence of the engine rotation speed on the voltage of the supply generator is revealed. Checking the model in the MathCad environment confirmed the methodology for stabilizing the motor speed and increasing the reliability of the electric drive.

О сохранении заданной скорости вращения электродвигателей.

Одной из актуальных задач при проектировании электроприводов является задача поддержания заданной скорости вращения электродвигателей, необходимой для обеспечения перемещения грузов, нормальной работы насосов и вентиляторов, якорных и швартовых судовых систем. Для этого обычно применяются механические задатчики скорости, редукторы, а также регуляторы напряжения возбуждения. Недостатком является их низкая точность и быстроедействие, что особенно актуально в морских условиях туманов, ветров и волнения.

В последнее время был разработан математический аппарат, позволяющий подойти к решению этой задачи с точки зрения теории инвариантов [1]. В предлагаемой работе рассматривается проблема инвариантности решений систем дифференциальных уравнений, описывающих динамику электропривода постоянного тока, относительно коэффициентов этих уравнений. Структура решений уравнений не изменяется, изменяются все или группа коэффициентов уравнений. Такая

проблема возникает в технике проектирования электропривода, когда результат его действия определяется решениями уравнений его математической модели, а коэффициенты этих уравнений определяют вид электропривода, условия его работы, варианты конструкции.

Обычно управление напряжением на двигателе осуществляется регулированием токов возбуждения генераторов согласно регулировочным характеристикам: зависимость тока возбуждения i_B от тока якоря i при неизменном напряжении U и скорости вращения Ω [2]. Эта характеристика показывает, как надо изменять ток возбуждения для того, чтобы при изменении нагрузки поддерживать заданную скорость вращения. Недостатком этого способа управления является необходимость усложнения работы персонала при частых колебаниях момента сопротивления нагрузки.

Другим возможным способом стабилизации является регулирование напряжения по отклонению скорости [3]. При этом заранее подсчитываются необходимые значения сопротивления возбуждения $R_B(\Delta U)$ для различных величин отклонения напряжения нагрузки $\Delta U = U - U_{НОМ}$ и скорости. С ростом момента нагрузки следует увеличивать ток возбуждения путем уменьшения сопротивления возбуждения для регулировки напряжения генератора.

При увеличении ΔU , когда $U > U_{НОМ}$, сопротивление возбуждения увеличивается, снижается ток возбуждения i_B и электродвижущая сила генератора E . При увеличении момента нагрузки сопротивление возбуждения должно снижаться, что увеличивает ток возбуждения и напряжение генератора. Этот способ предоставляет возможность автоматического регулирования напряжения, но его точность невелика из-за необходимости отслеживать регулировочную кривую $R_B(\Delta U)$. Цель работы – повышение качества управления электроприводами полностью автоматическим методом стабилизации скорости вращения при изменении момента нагрузки по теории инвариантов.

Методика оптимизации управления динамической системой.
Рассмотрим дифференциальное уравнение для переменной $x(t)$

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), a(t), b(t)), \quad (1)$$

где $a(t), b(t)$ – заданные параметры, зависящие от времени. Обозначим решение этого уравнения $x_0(t)$ с начальным условием $x_0(0)$. Поставим задачу определения новых значений параметров $a(t), b(t)$ так, чтобы решение $x(t)$ уравнения (1) не изменилось $x(t) = x_0(t)$.

Для этого подставим $x_0(t)$ в уравнение (1)

$$\frac{dx_0(t)}{dt} = f(x_0(t), a(t), b(t)) \quad (2)$$

и получаем алгебраическое уравнение для определения двух переменных параметров $a(t), b(t)$, так как $x_0(t)$ и $\frac{dx_0(t)}{dt}$ известны.

Параметры $a(t), b(t)$ следует подчинить желаемым дополнительным условиям оптимальности или выбрать один из них произвольным. Подставив новые параметры $a(t), b(t)$ в (1), получаем уравнение, решение которого будет совпадать с $x_0(t)$, если $x(0) = x_0(0)$. При отклонении $x(0)$ от $x_0(0)$ вид решения $x(t)$ может отклоняться от $x_0(t)$.

Для преодоления этого затруднения введем вспомогательную переменную $y(t)$ для разности желаемого и фактического решения (1)

$$y(t) = x_0(t) - x(t). \quad (3)$$

Необходимо, чтобы эта разность стремилась к нулю. Такое поведение переменной $y(t)$ обеспечивается условием

$$\frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = 0; \quad k > 0, \quad (4)$$

аналитическое решение которого известно $y(t) = y(0)e^{-kt}$.

Функция $y(t)$ в этом случае за время примерно $4/k$ стремится к нулю для любого значения $y(0) = x_0(0) - x(0)$. Выбор k достаточно большим обеспечивает равенство $x_0(t) \approx x(t)$, достаточное для решения большинства задач управления на желаемом интервале времени.

Подставим $y(t)$ из выражения (3) во вспомогательное уравнение (4)

$$\frac{dx_0(t)}{dt} - \frac{dx(t)}{dt} + kx_0(t) - kx(t) = 0,$$

а вместо производной $\frac{dx(t)}{dt}$ подставим ее выражение из уравнения (1)

$$\frac{dx_0(t)}{dt} - f(x(t), a(t), b(t)) + kx_0(t) - kx(t) = 0. \quad (5)$$

Так как $x_0(t)$ и $\frac{dx_0(t)}{dt}$ известны, получаем алгебраическое уравнение (5) для определения новых $a(t), b(t)$, которые будут зависеть от известных $x_0(t)$ и $\frac{dx_0(t)}{dt}$ и текущего значения $x(t)$. После подстановки новых параметров $a(t), b(t)$ в уравнение (1) получаем уравнение, решение которого будет стремиться к желаемому $x_0(t)$ тем быстрее, чем больше выбрано k при любом начальном значении $x(0)$, не равном $x_0(0)$.

Оптимизация электропривода постоянного тока. Рассмотрим работу электродвигателя постоянного тока (рис.1). В переходном режиме уравнение механического равновесия моментов [3]

$$M_{ДИН} + M_{ТР} + M = M_M$$

или

$$J \frac{d\Omega(t)}{dt} + k_{ТР}\Omega(t) + M(t) = \Phi \cdot i_{ВН}(t), \quad (6)$$

где J – момент инерции; $M(t)$ – заданный переменный момент нагрузки;

$i_{ВН}(t) = \frac{U - \Phi\Omega(t)}{R_{ВН}}$ – внутренний ток электродвигателя; U – входное

напряжение; Φ – постоянный заданный магнитный поток.

Приведем уравнение (6) к виду (1) относительно угловой скорости

$$\frac{d\Omega(t)}{dt} = J^{-1} \cdot \left(-k_{ТР}\Omega(t) - M(t) + \Phi \cdot \frac{U(t) - \Phi\Omega(t)}{R_{ВН}} \right). \quad (7)$$

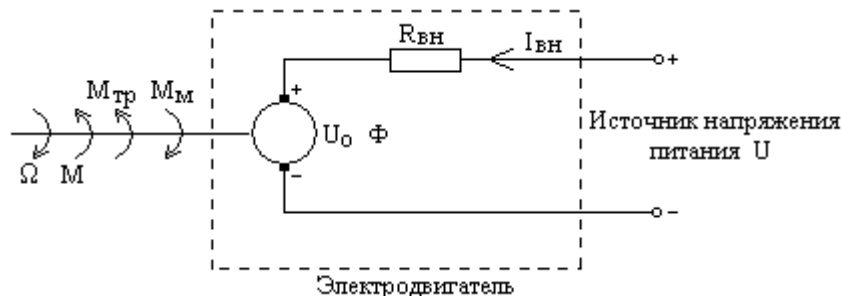


Рис.1. Электродвигатель с постоянным магнитным потоком

При номинальных заданных параметрах момента нагрузки $M(t)$ и входного напряжения $U(t)$ решение уравнения (7) дает номинальный вид переменной $\Omega_0(t)$, необходимый для технологического процесса.

Предположим, что момент нагрузки $M(t)$ начинает изменяться. В этих условиях определим напряжение $U(t)$ с целью обеспечения номинальной скорости электродвигателя $\Omega(t) = \Omega_0(t)$. Согласно (1) полагаем $x(t) = \Omega(t)$, $a(t) = M(t)$, $b(t) = U(t)$. Тогда (5) примет вид

$$\frac{d\Omega_0(t)}{dt} - J^{-1} \cdot \left(-k_{TP}\Omega(t) - M(t) + \Phi \cdot \frac{U(t) - \Phi\Omega(t)}{R_{BH}} \right) + k\Omega_0(t) - k\Omega(t) = 0.$$

Отсюда получаем напряжение $U(t)$, сложным образом зависящее от желаемого вида скорости $\Omega_0(t)$ и ее производной, от момента нагрузки и текущего значения скорости

$$U(t) = \frac{R_{BH}}{\Phi} \cdot \left(J \frac{d\Omega_0(t)}{dt} + k_{TP}\Omega(t) + M(t) + \frac{\Phi^2 \cdot \Omega(t)}{R_{BH}} + J \cdot k \cdot (\Omega_0(t) - \Omega(t)) \right). \quad (8)$$

Покажем, подставляя (8) в (7), что при произвольном изменении момента нагрузки входное напряжение $U(t)$ (8) обеспечивает требуемое изменение скорости $\Omega_0(t)$.

$$\frac{d(\Omega_0(t) - \Omega(t))}{dt} + k \cdot (\Omega_0(t) - \Omega(t)) = 0.$$

Таким образом, уравнение вида (4) относительно вспомогательной переменной $y(t) = \Omega_0(t) - \Omega(t)$, согласно которому при выборе достаточно большого коэффициента k при произвольном изменении коэффициента нагрузки зависимость скорости от времени близка к желаемой $\Omega_0(t)$.

На рис.2 показана реализация рабочего процесса электродвигателя с произвольно изменяющимся моментом нагрузки и необходимым видом желаемой скорости $\Omega_0(t) = 160 + 20\sin 10t$ при напряжении $U(t)$ по (8).

Из рис.2 следует, что при выборе $k=200$ спустя время 10 мс график скорости $\Omega(t)$ полностью повторяет заданный график $\Omega_0(t)$ даже при значительном отклонении скорости в начальный момент. Построение выполнено при $\Phi = 1,33$ Вб, $J = 2,4$ кг · м². Для сравнения определим

напряжение $U(t)$ путем непосредственной подстановки вида (2) желаемого значения $\Omega_0(t)$ в уравнение (7)

$$U(t) = \frac{R_{BH}}{\Phi} \cdot \left(J \frac{d\Omega_0(t)}{dt} + k_{TP}\Omega_0(t) + M(t) + \frac{\Phi^2 \cdot \Omega_0(t)}{R_{BH}} \right). \quad (9)$$

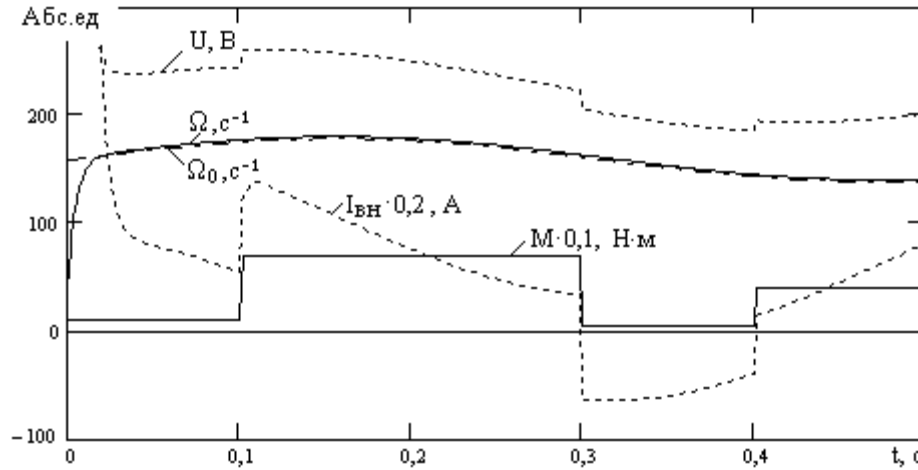


Рис. 2. Рабочий процесс электродвигателя с оптимальным напряжением

После подстановки найденного напряжения обратно в уравнение (7)

$$\frac{d(\Omega_0(t) - \Omega(t))}{dt} + \left(\frac{k_{TP}}{J} + \frac{\Phi^2}{R_{BH}} \right) \cdot (\Omega_0(t) - \Omega(t)) = 0.$$

Это уравнение дает $\Omega(t) = \Omega_0(t)$ только при совпадении начальных значений $\Omega(0) = \Omega_0(0)$; иначе решение $\Omega(t)$ стремится к желаемому виду $\Omega_0(t)$ произвольно. На рис.3 даны графики рабочего процесса электродвигателя при напряжении $U(t)$ по (9). Сравнение рис. 2 и 3 показывает, что напряжение по (8) согласно методу инвариантного выбора обеспечивает приближение скорости к нужному виду.

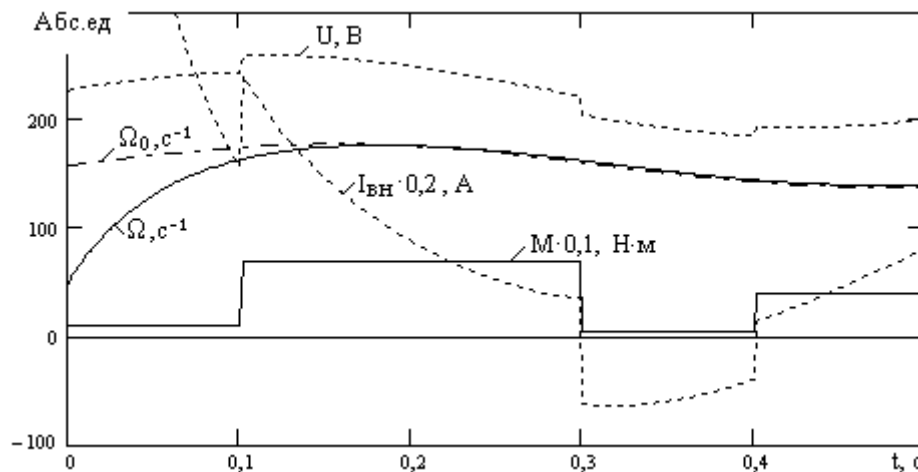


Рис. 3. Рабочий процесс электродвигателя с неоптимальным напряжением

Выводы. Исследована проблема оптимального инвариантного выбора коэффициентов линейных и нелинейных дифференциальных уравнений для установившихся режимов технических систем на примере электрического двигателя постоянного тока. Предложена методика расчета оптимального напряжения на электродвигателе постоянного тока для поддержания закона изменения скорости вращения при изменяющемся моменте нагрузки. Требуется развитие методики инвариантных преобразований дифференциальных уравнений, чтобы преобразованные параметры удовлетворяли бы условиям оптимальности, например, минимальным потерям мощности, что важно для реализации.

Список литературы

1. Морозов А.Д. Инвариантные множества динамических систем / А.Д.Морозов. — М.: URSS, 1998. — 187 с.
2. Касаткин А.С., Немцов М.В. Электротехника. — М.: Высшая школа, 2002. — 542 с.
3. Петров Ю.П., Петров И.А. Введение в теорию инженерных расчетов, учитывающую вариации параметров исследуемых объектов. — СПб.: БХВ –Петербург, 2014. — 272 с.

Маринов Никита Игоревич, магистрант, n99etr@gmail.com, +79785969209, Севастопольский государственный университет, г. Севастополь.

Канов Лев Николаевич, канд. техн. наук, доцент каф. Судовое электрооборудование, Морской институт, Inkanov48@mail.ru, +79780205675, Севастопольский государственный университет, г. Севастополь.

О ЦЕЛЕСООБРАЗНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ НАПЛАВНЫХ МИКРО-ГЭС

Ю. П. Свиридов, А. А. Алексеев

Показана возможность и целесообразность использования наплавных микро-ГЭС с водяным колесом в качестве приводного двигателя, несмотря на низкий КПД водяного колеса и малую получаемую электрическую мощность.

The possibility and expediency of using floating micro-hydroelectric power plants with a water wheel as a drive motor is shown, despite the low efficiency of the water wheel and the low electrical power received.

В современном мире вопросы энергетики и экологии становятся все более актуальными. В поисках альтернативных источников энергии и решений для снижения негативного воздействия на окружающую среду, внимание ученых и инженеров привлекает гидроэнергетика, в том числе использование малых гидроэлектростанций (микро-ГЭС). В статье рассматривается возможность использования наплавных микро-ГЭС с водяным колесом для генерации электроэнергии.

Этот подход предполагает установку энергетического оборудования на плавучей платформе, что позволяет эффективно использовать потенциал водотока без необходимости строительства дорогостоящих гидротехнических сооружений. Также среди достоинств данного типа микро-ГЭС выделяют: 1) мобильность и гибкость – перемещение в другое место течения, эксплуатация в различных условиях; 2) простота установки и обслуживания – для установки микро-ГЭС не требуется сложная инфраструктура, имеется возможность переместить её на берег для обслуживания агрегатов и узлов.

Целесообразность использования микро-ГЭС как основного или дополнительного источника электроэнергии заключается в возможности размещения её на водоёмах с постоянным течением, расположенных близко к маломощным потребителям, не имеющим доступа к центральной системе электроснабжения по причине удалённости и дороговизны

проведения линий электропередач. Такими объектами могут выступать мосты через реки, чабанские пункты, прибрежные кемпинги.

В отсутствии активного потребления электроэнергии при работающей микро-ГЭС также можно заряжать аккумуляторы для дальнейшего пользования, либо совместить с использованием мобильных источников, таких как топливные генераторы.

Микро-гидроэлектростанции с водяным колесом работают на основе принципа преобразования кинетической энергии потока воды в механическую энергию вращения водяного колеса, которая затем преобразуется в электрическую энергию с помощью генератора [1]

Прежде чем приступить к установке микро-ГЭС, необходимо провести тщательное исследование гидрологических условий их потенциального месторасположения. В это исследование входят следующие этапы: 1) оценка скорости потока воды; 2) оценка уровня воды в реке или водоеме; 3) оценка режима водосброса.

Гидрологические наблюдения на протяжении определенного временного периода помогут оценить средний расход воды и изменчивость уровня воды в реке или потоке. Эти данные помогут определить потенциал для использования воды в качестве источника энергии. Также необходимо учитывать сезонные изменения в режиме водотока, чтобы определить наилучшее время для работы микро-ГЭС. Например, в периоды повышенного уровня воды можно ожидать большей производительности станции [2].

На основе анализа гидрологических данных и топографии региона, можно предложить следующие потенциальные места для установки микро-ГЭС с водяным колесом (табл. 1).

Одним из основных параметров для оценки гидрологических условий является диапазон скоростей потока воды. Диапазоны скоростей потока воды для рассмотренных регионов приведены в табл. 2.

Итак, оценка гидрологических условий для использования микро-ГЭС с водяным колесом играет ключевую роль в успешной реализации проекта. Тщательный анализ данных позволяет определить потенциал для использования воды как источника возобновляемой энергии и спланировать эффективную работу станции.

Таблица 1. Потенциальные места для установки микро-ГЭС с водяным колесом

Оцениваемый регион	Водоём	Отличительные черты
Республика Карелия	Река Шуя	высокий уровень воды крутые склоны
	Река Ладога	обилие водных ресурсов
	Озеро Онежское	участки с высоким уровнем воды
	Река Вуокса	участки с быстрым течением
	Река Сия	участки с крутыми склонами высокие водопады
Алтайский край	Река Катунь	участки с быстрым течением
	Река Чулышман	участки с крутыми склонами высокие водопады
	Река Бия	обширный водосборный бассейн
	Река Чемал	участки с крутыми склонами высокие водопады
	Озеро Телецкое	участки с крутыми склонами высокие водопады
Красноярский край	Река Енисей	участки с быстрым течением
	Река Ангара	значительный перепад высот
	Река Кан	участки с крутыми склонами высокие водопады
	Река Тура	участки с быстрым течением небольшие водопады
Республика Башкортостан	Река Белая	участки с быстрым течением
	Река Уфа	участки с крутыми склонами высокие водопады
	Река Ик (левый приток Камы)	возвышенный рельеф с глубокими долинами
	Река Юрюзань	участки с быстрым течением небольшие водопады
Поволжье (Река Волга и ее притоки)	Река Кама (самый крупный приток Волги)	значительный перепад высот
	Река Ока	значительный перепад высот
	Река Сура	участки с быстрым течением

Таблица 2. Диапазон скоростей потока воды по рассмотренным регионам

Оцениваемый регион	Диапазон скоростей потока воды
Республика Карелия	0,5 – 1,2 м/с
Алтайском крае	2 – 3 м/с
Красноярском крае	1 – 2 м/с
Республике Башкортостан	1 – 2 м/с
Поволжье	0,5 – 2 м/с

Кроме того, необходимо учитывать сезонные изменения в уровне воды и потоке, а также возможные воздействия климатических факторов, такие как обледенение водоёма и т. д. С учетом потенциала потока воды и особенностей местности проектируется и изготавливается плавучая платформа с установленным энергетическим оборудованием, включая водяное колесо, генератор и системы управления.

Оптимальным решением является платформа, установленная на плавучем корпусе, обеспечивающая мобильность и возможность переноса генератора энергии на разные участки водотока, особенно в случае небольших потоков воды и ограниченных ресурсов для строительства и эксплуатации стационарных сооружений [3, 4]

Эффективность использования энергии потока воды в конструкции плавучих платформ микро-ГЭС зависит от нескольких факторов, включая гидродинамические особенности платформы, характеристики водяного колеса, скорость потока воды и другие параметры [5].

Располагать установку лучше всего ближе к середине течения для получения максимальной мощности с водяного колеса, так как по краям водоёма происходит торможение и волнение потока за счёт препятствующих течению элементов ландшафта. Для закрепления платформы микро-ГЭС можно использовать опоры в виде установленных на дно водоёма бетонных столбов, опор мостовых пролётов и других объектов окружающей инфраструктуры.

При расположении нескольких плавучих микро-ГЭС с водяным колесом стоит отдать предпочтение параллельному их расположению, либо последовательному, но на значительном расстоянии друг от друга, чтобы исключить влияние первой расположенной по течению станции на

последующие, вследствие чего не достигается нужной отдачи от кинетической энергии потока на водяное колесо,

Предлагается расположить на одной платформе два водяных колеса с генератором на каждом с диаметром колеса около 2 м и шириной 2м. Это позволит сократить габариты установок, позволяющих извлечь энергию с водяного течения.

Для примера использования микро-ГЭС на участке с благоприятными для её установки условиями примем в качестве потребителя сеть из дорожных осветительных приборов – светодиодных светильников мощностью 100 Вт каждый (минимальная мощность для устанавливаемого на магистральной дороге светодиодного светильника) [6]. Для светодиодных светильников обычно используется коэффициент мощности близкий к единице.

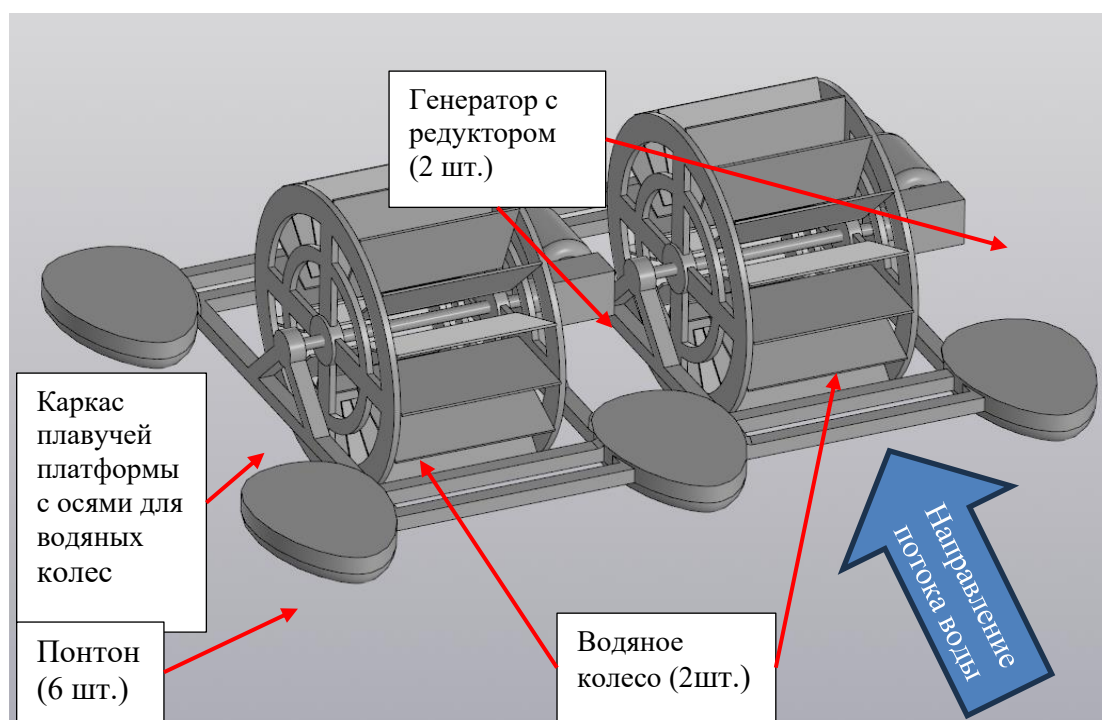


Рис. 1. Расположение 2-х водяных колес на одной платформе микро-ГЭС

Режим работы осветительной сети варьируется в зависимости от смены сезона с весны по осень, поэтому предлагается дополнительно использовать аккумуляторную батарею для накопления энергии в часы малых и отсутствия электрических нагрузок, а также использовать

электроэнергию в дневное время для электроснабжения места отдыха водителей

При скорости потока воды в 2 м/с, лопастей шириной 2 м и высотой 0,5 м на 2-х водяных колесах (см. рис. 1) мощность на валу водяного колеса будет равна:

$$P_{\text{вод.кол.}} = \eta \times \frac{1}{2} \times \rho \times S \times v^3,$$

где $P_{\text{вод.кол.}}$ – выходная мощность водяного колеса, кВт; η – коэффициент полезного действия водяного колеса (0,35); ρ – плотность воды (10^3 кг/м^3); S – площадь эффективного сечения лопасти поперек потока, м²;

$$S = a \times b = 2 \times 0,5 = 1 \text{ м}^2$$

a и b – высота и ширина лопасти водяного колеса; v – скорость потока воды, м/с.

$$P_{\text{вод.кол.}} = 0,35 \times \frac{1}{2} \times 1000 \times 1 \times 2^3 = 1400 \text{ Вт} = 1,4 \text{ кВт.}$$

Полезная мощность на генераторе определяется произведением мощности водяного колеса на КПД генератора (0,9 для синхронного генератора) и КПД редуктора (0,96), то есть:

$$N_{\text{ген}} = P_{\text{вод.кол.}} \times \eta_{\text{ген}} \times \eta_{\text{ред}} = 1,4 \times 0,9 \times 0,96 = 1,21 \text{ кВт}$$

При установке на платформе двух агрегатов полезная мощность микро-ГЭС составит 2,4 кВт, что вполне достаточно для освещения в ночное время моста и подходов к нему:

$$2,4 : 0,1 = 24 \text{ светильника.}$$

При расстоянии между светильниками 35 м длина освещенной трассы составит $24 \times 35 = 840$ м, что в значительной степени повысит безопасность дорожного движения на этом участке и будет способствовать выполнению национальной программы безопасности дорожного движения.

Вывод. Использование наплавных микро-ГЭС с водяным колесом представляет собой важное направление развития малой гидроэнергетики. Это позволит максимально эффективно использовать потенциал водотока во благо территорий, отдаленных от централизованной электросети в

определенной степени снизить негативное воздействие на окружающую среду. Кроме того, будет способствовать выполнению национальной программы «Безопасные дороги» и создавать благоприятные условия для отдыха водителей, что способствует безопасности дорожного движения.

Список литературы

1. Шейпак А.А. История науки и техники. Энергомашиностроение. Водяные колеса и турбины, 2017. URL: онлайн книга История науки и техники. Энергомашиностроение. 4. Водяные колеса и турбины (А. А. Шейпак, 2017) (mnogoslovs.ru) (дата обращения: 06.05.2024).

2. Петров В. И., Смирнов Д. В. Гидроэнергетика: Учебник для вузов. – Санкт-Петербург: Питер, 2018. URL: <https://www.c-o-k.ru/library/document/12850/35743.pdf>.

3. Громова Л. А., Шмелев А. А. Надводные плавучие микрогидроэлектростанции. – Москва: Наука и Техника. – 2014.

4. Щербов Н. Л., Пименов Ф. В. Регулирование и оптимизация гидроэнергетических процессов. – Санкт-Петербург: Университет, 2018.

5. Захаренко С. Н., Голубев А. П. Расчет параметров гидротурбин. – Москва: Энергоиздат, 2015.

6. Освещение светодиодными светильниками улиц и автомобильных дорог общего назначения URL: <https://saransk.glavsvet.su/shopblog/iskusstvennoe-svetodiodnoe-osveschenie/osveschenie-avtomobilnykh-dorog> (дата обращения: 06.05.2024).

Свиридов Юрий Павлович – канд. техн. наук, доцент кафедры «Электроснабжение» Ульяновского государственного технического университета. 432027, Ульяновск, ул. Северный Венец, 32.
E-mail: sviridovup@mail.ru.

Алексеев Александр Андреевич – магистрант Ульяновского государственного технического университета 432027, Ульяновск, ул. Северный Венец, 32. E-mail: trainofbird@gmail.com.

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ МИКРОТОКИ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Е. Н. Меньшов

В рамках классической электродинамики решаются задачи квантовой теории на основе выявленных микротоков. Разработаны методы решения задач и построены корректные математические модели характеристик, относящихся к инструментарию квантовой теории.

Within the framework of classical electrodynamics, the problems of quantum theory are solved on the basis of the identified microcurrents. Methods for solving problems have been developed and correct mathematical models of characteristics related to the tools of quantum theory have been constructed.

О микротоках электромагнитной природы. В результате проведенного анализа фундаментальных уравнений ЭМП в [1–4] раскрыты два новых вида тока электромагнитной природы и разработаны два метода расчета физических характеристик электромагнитных систем. К первому типу тока отнесем псевдоисточник волнового уравнения, составленного относительно векторного потенциала при кулоновской калибровке, выступающий как дополнительный ток, который считался фиктивным, и ранее не проводилось его глубокого исследования. Ко второму типу относится микроток неизвестной физической природы, создаваемый циркуляцией потока электромагнитной мощности при наличии в микросистеме постоянного электрического напряжения.

Дополнительный ток (псевдоисточник волнового уравнения), который считался фиктивным. Раскрыто его физическое содержание, которое представляет собой ток смещения мгновенного электрического кулоновского поля.

$$\vec{J}_k = -\frac{1}{\mu_0 c^2} \frac{\partial \vec{E}_k}{\partial t},$$

где $\vec{E}_k = -\nabla u$ напряженность кулоновского поля, u – скалярный потенциал, который определяется мгновенным распределением зарядов так, как будто они покоились, но мгновенное распределение зарядов непрерывно изменяется во времени [5].

Математически корректно доказано [1], что этот ток, усредненный за период времени T_0 вращения электрона по орбите произвольной формы,

$$\left\langle \int_S \left(\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \right) \vec{e}_n dr_{xy} dz \right\rangle_{T_0} = \left\langle \int_S (\vec{J} + \vec{J}_k) \vec{e}_n dr_{xy} dz \right\rangle_{T_0}$$

приводит к компенсации электронного (зарядового тока):

$$\left\langle \int_S (\vec{J} + \vec{J}_k) \vec{e}_n dr_{xy} dz \right\rangle_{T_0} = 0.$$

Здесь: $\vec{J}$ – плотность тока переноса электрического заряда; $\vec{e}_n$ – единичный нормальный вектор к фиксированной произвольной полуплоскости S , проходящей через ось OZ и некоторый радиус-вектор r .

Равенство нулю левого поверхностного интеграла приводит к следующему однородному волновому уравнению

$$\nabla^2 \langle A_n \rangle_{T_0} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \langle A_n \rangle_{T_0}}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

относительно усредненной проекции векторного потенциала $\langle \vec{A} \vec{e}_n \rangle_{T_0} = \langle A_n \rangle_{T_0}$ на нормаль $\vec{e}_n = \alpha_n \vec{e}_x + \beta_n \vec{e}_y$ к неподвижной полуплоскости, перпендикулярной к плоскости орбиты, (через которую определялся результирующий ток):

$$\langle A_n \rangle_T = \langle \vec{A} \vec{e}_n \rangle_T = \alpha_n \langle A_x \rangle_T + \beta_n \langle A_y \rangle_T.$$

Поэтому о первом микротоке известно:

1) в рамках классической теории отсутствует физическая причина излучения электромагнитного поля зарядом, вращающимся на стационарной (замкнутой) орбите;

2) уравнение (1) описывает стационарный (в соответствии с исходными условиями задачи) свободный волновой процесс с собственной частотой колебания электромагнитного поля;

3) получено решение однородного волнового уравнения в виде решения стационарного уравнения Шредингера при центрально-

симметричном силовом поле:

$$\vec{A}_{xy} = Y \{ \bar{e}_x \cos \Psi + \bar{e}_y \sin \Psi \}, \quad (2)$$

где $Y = C_0 R(r) P(\theta) \Phi(\varphi)$ произведение радиальной и сферической функций; $\Psi = m\varphi + \omega_{cn}t + \varphi_x$, m – азимутальное квантовое число [6].

В рамках классического подхода решение (2) допускает дискретные орбиты, квантовые свойства атомной системы и устойчивость атома.

Электромагнитный микроток, создаваемый циркуляцией потока электромагнитной мощности. Раскрыта математическая формула плотности этого тока [2]: как отношение постоянной составляющей вектора Пойнтинга $\langle \vec{P}_0 \rangle$ к постоянному электрическому напряжению, создаваемому микросистемой:

$$\vec{J}_{\text{по}} = \langle \vec{P}_0 \rangle U_0^{-1}. \quad (3)$$

Постоянное напряжение равно разности потенциалов $U_0 = V_3 - V(\infty)$ на поверхности микросистемы V_3 и бесконечности $V(\infty) = 0$.

В частности, напряжение на расстоянии R от центра электрона равно

$$U(R) = \varphi(R) - \varphi(\infty) = \varphi(R) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

На основе этой формулы разработан электротехнический метод математического моделирования механических характеристик электромагнитных микрообъектов (заряженных частиц и циркулирующих потоков энергии электромагнитных полей) [2, 4].

Понятие «электромагнитный микроток» введено для решения теоретической проблемы классической электродинамики. Применение этого понятия позволило снять существующее в классической физике противоречие несоответствия электромагнитной массы механической массе электрона – электромагнитный импульс равномерно движущегося электрона полностью совпал с его механическим импульсом [2].

В [3] этот микроток использован для обоснования физической причины многократного дискретного орбитального магнитного момента электрона в рамках классической электродинамики. Если в рамках классических представлений вращение заряда по орбите создает магнитный момент кратностью единицы, то в квантовой механике причина орбитального магнитного момента – это особый ток, ток плотности вероятности, который обуславливает магнитный момент кратностью m [6, с. 175–177]. Однако в [3] не решен вопрос энергетических характеристик

теоретически обнаруженных орбитальных полевых электромагнитных структур (замкнутая электромагнитная волна, циркулирующая плотность потока электромагнитной энергии).

Математическое моделирование магнитного момента. Для полноты описания энергетических характеристик исследуемых структур повысим корректность задачи путем учета калибровки.

Преобразованное волновое уравнение (1) не позволяет определить составляющую A_z , поэтому определим её из кулоновской калибровки:

$$\operatorname{div} \vec{A}_{xy} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0. \quad (4)$$

В координатной форме с учетом (2) векторный потенциал примет вид

$$\vec{A} = Y \{ \bar{e}_x \cos \Psi + \bar{e}_y \sin \Psi \} + A_z \bar{e}_z. \quad (5)$$

Вычисляем дивергенцию $\vec{A}_{xy}$:

$$\operatorname{div} \vec{A}_{xy} = C_0 \Lambda \cos(\Psi - \varphi), \quad \Lambda = \left(P \frac{\partial R}{\partial r} \sin \theta + R \frac{\partial P}{r \partial \theta} \cos \theta + \frac{m R P}{r \sin \theta} \right) \quad (6)$$

Вследствие независимости переменной сферической системы φ от z структура неизвестной функции A_z должна иметь следующий вид:

$$\frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{\partial A_{mz}(r, \theta)}{\partial z} \cos(\Psi - \varphi) = -C_0 \Lambda \cos(\Psi - \varphi);$$

$$A_z = A_{mz} \cos(\Psi - \varphi). \quad (7)$$

Далее выразим все величины в сферической системе координат [7]:

$$A_r = (Y \sin \theta + A_{mz} \cos \theta) \cos(\Psi - \varphi) = A_{mr} \cos(\Psi - \varphi); \quad (8)$$

$$A_\theta = (Y \cos \theta - A_{mz} \sin \theta) \cos(\Psi - \varphi) = A_{m\theta} \cos(\Psi - \varphi); \quad (9)$$

$$A_\varphi = Y [-\cos \Psi \sin \varphi + \sin \Psi \cos \varphi] = Y \sin(\Psi - \varphi); \quad (10)$$

Вихревые составляющие электрического поля на основе (5)-(10):

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \omega_{cn} Y \{ \bar{e}_x \sin \Psi - \bar{e}_y \cos \Psi \} + \bar{e}_z E_z = \bar{e}_r E_r + \bar{e}_\theta E_\theta + \bar{e}_\varphi E_\varphi; \quad (11)$$

$$E_z = \omega_\phi A_{mz} \sin(\Psi - \varphi).$$

Записываем составляющие поля из (11) в сферических координатах:

$$E_r = E_{mr} \sin(\Psi - \varphi); \quad E_\theta = E_{m\theta} \sin(\Psi - \varphi); \quad E_\varphi = -E_{m\varphi} \cos(\Psi - \varphi); \quad (12)$$

$$E_{mr} = \omega_{cn} A_{mr}; \quad E_{m\theta} = \omega_{cn} A_{m\theta}; \quad E_{m\varphi} = \omega_{cn} Y.$$

Составляющие магнитной индукции на основе (5)-(7):

$$\begin{aligned}\vec{B} = \text{rot}\vec{A} &= \begin{bmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Y\cos\Psi & Y\sin\Psi & A_{mz}\cos(\Psi - \varphi) \end{bmatrix} = \\ &= [-\bar{e}_x\sin\Psi + \bar{e}_y\cos\Psi] \frac{\partial Y}{\partial z} + \bar{e}_x \frac{\partial}{\partial y} [A_{mz}\cos(\Psi - \varphi)] - \\ &\quad - \bar{e}_y \frac{\partial}{\partial x} [A_{mz}\cos(\Psi - \varphi)] + \bar{e}_z C_0\Lambda\sin(\Psi - \varphi).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B_x &= A'_{mz}\sin\varphi\cos(\Psi - \varphi) - \frac{(m-1)A_{mz}}{r\sin\theta}\cos\varphi\sin(\Psi - \varphi) - \sin\Psi \frac{\partial Y}{\partial z}; \\ B_y &= -A'_{mz}\cos\varphi\cos(\Psi - \varphi) - \frac{(m-1)A_{mz}}{r\sin\theta}\sin\varphi\sin(\Psi - \varphi) + \cos\Psi \frac{\partial Y}{\partial z}; \\ B_z &= C_0\Lambda\sin(\Psi - \varphi); \quad A'_{mz} = \frac{\partial A_{mz}}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial A_{mz}}{r\partial\theta}\cos\theta. \\ \frac{\partial Y}{\partial z} &= \frac{\partial Y}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial Y}{r\partial\theta}\sin\theta; \quad \frac{\partial A_{mz}}{\partial z} = \frac{\partial A_{mz}}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial A_{mz}}{r\partial\theta}\sin\theta.\end{aligned}\quad (13)$$

Выразим $\vec{B}$ в сферических координатах:

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A}_\phi = \bar{e}_r B_r + \bar{e}_\theta B_\theta + \bar{e}_\varphi B_\varphi; \quad (14)$$

$$B_r = B_{mr}\sin(\Psi - \varphi); \quad B_\theta = B_{m\theta}\sin(\Psi - \varphi); \quad B_\varphi = B_{m\varphi}\cos(\Psi - \varphi);$$

$$B_{mr} = \cos\theta C_0\Lambda - \sin\theta \left(\frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{(m-1)A_{mz}}{r\sin\theta} \right); \quad (15)$$

$$\begin{aligned}B_{m\theta} &= -\sin\theta C_0\Lambda - \cos\theta \left(\frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{(m-1)A_{mz}}{r\sin\theta} \right); \quad B_{m\varphi} \\ &= \left(\frac{\partial Y}{\partial z} - A'_{mz} \right); \quad (16)\end{aligned}$$

Вектор Пойнтинга $\vec{\Pi}$ и его составляющие:

$$\vec{\Pi} = [\vec{E} \times \vec{H}] = \Pi_r \bar{e}_r + \Pi_\theta \bar{e}_\theta + \Pi_\varphi \bar{e}_\varphi; \quad (17)$$

$$\Pi_r = \frac{1}{\mu_0} (E_{m\theta} B_{m\varphi} - E_{m\varphi} B_{m\theta}) \sin(\Psi - \varphi) \cos(\Psi - \varphi); \quad (18)$$

$$\begin{aligned}\Pi_\theta &= \frac{(E_{m\varphi} B_{mr} - E_{mr} B_{m\varphi})}{\mu_0} \sin(\Psi - \varphi) \cos(\Psi - \varphi) \\ &= \frac{\Pi_{m\theta}}{2} \sin(2\Psi - 2\varphi); \quad (19)\end{aligned}$$

$$\Pi_\varphi = \frac{(E_{mr} B_{m\theta} - E_{m\theta} B_{mr})}{\mu_0} \sin^2(\Psi - \varphi) = \Pi_{m\varphi} \sin^2(\Psi - \varphi).$$

Подставляем в $\Pi_{m\varphi} = \mu_0^{-1} (E_{mr} B_{m\theta} - E_{m\theta} B_{mr})$ формулы (12), (15)-(16):

$$\Pi_{m\varphi} = -\frac{\omega_{cn}}{\mu_0} \left\{ (Y \sin\theta + A_{mz} \cos\theta) \left[C_0 \Lambda \sin\theta + \cos\theta \left(\frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{(m-1)A_{mz}}{r \sin\theta} \right) \right] + \right. \\ \left. + (\cos\theta Y_\phi - \sin\theta A_{mz}) \left[\cos\theta C_0 \Lambda - \sin\theta \left(\frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{(m-1)A_{mz}}{r \sin\theta} \right) \right] \right\}.$$

Группируя родственные члены и вводя обозначения $Y = C_0 Y_0$; $A_{mz} = C_z A_{0z}$; $\alpha_z = C_z/C_0$, получим:

$$\Pi_{m\varphi} = -\frac{\omega_{cn} C_0^2}{\mu_0} \left\{ \Lambda Y_0 + \alpha_z A_{0z} \left[\frac{\partial Y_0}{\partial z} + \frac{(m-1)\alpha_z A_{0z}}{r \sin\theta} \right] \right\}. \quad (20)$$

Постоянная составляющая вектора Пойнтинга

$$\langle \vec{\Pi}_0 \rangle_{T_0} = \frac{\Pi_{m\varphi}}{T_0} \int_0^{T_0} \sin^2(\Psi - \varphi) dt = 0.5 \Pi_{m\varphi}. \quad (21)$$

Согласно выражениям (17), (20) и (3) вектор Пойнтинга и поток вектора плотности тока циркулируют в азимутальной плоскости. Вычислим магнитный момент, создаваемый непрерывно распределенной плотностью тока, по методике, излагаемой в [6, с. 176]. Пусть через элемент площади ds_φ , нормальный азимутальной координатной линии φ , протекает элемент тока $dI = \bar{J}_{I0} ds_\varphi$, создающий элемент магнитного момента $dM_{\Pi z} = dIS$, где $S = \pi r^2 \sin^2\theta$, $ds_\varphi = r dr d\theta$.

Подставив (3) и (21), получим элемент магнитного момента $dM_{\Pi z}$ и результирующую проекцию магнитного момента $M_{\Pi z}$ на ось Z:

$$dM_{\Pi z} = -\bar{e}_z \frac{\pi \omega_{cn}}{2\mu_0 V_3} \Pi_{m\varphi} r^3 \sin^2\theta dr d\theta; \\ \vec{M}_{\Pi z} = -\bar{e}_z \frac{\pi \omega_{cn}}{2\mu_0 V_3} \int_0^\infty r^3 dr \int_0^\pi \Pi_{m\varphi} \sin^2\theta d\theta. \quad (22)$$

Подставляя (20) в (22), вычислим следующий интеграл:

$$\int_0^\infty r^3 dr \int_0^\pi \left\{ \Lambda Y_0 + \alpha_z A_{0z} \left[\frac{\partial Y_0}{\partial z} + \frac{(m-1)\alpha_z A_{0z}}{r \sin\theta} \right] \right\} \sin^2\theta d\theta. \quad (23)$$

С учетом (3) интегрируем по частям второе слагаемое (23)

$$\alpha_z \int_0^\pi \sin^2\theta \cos\theta d\theta \int_0^\infty A_{0z} r^3 \frac{\partial Y_0}{\partial r} dr - \alpha_z \int_0^\infty r^2 dr \int_0^\pi \sin^3\theta A_{0z} \frac{\partial Y_0}{\partial \theta} d\theta =$$

$$\begin{aligned}
&= -\alpha_z \left[\int_0^\pi P \sin^2 \theta \cos \theta d\theta \int_0^\infty R (3r^2 A_{0z} + r^3 \frac{\partial A_{0z}}{\partial r}) dr + \right. \\
&\quad \left. + \int_0^\infty R r^2 dr \int_0^\pi P (3 \sin^2 \theta \cos \theta A_{0z} + \sin^3 \theta \frac{\partial A_{0z}}{\partial \theta}) d\theta \right] = \\
&= -\alpha_z \int_0^\infty R r^3 dr \int_0^\pi \left(\frac{\partial A_{0z}}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial A_{0z}}{r \partial \theta} \sin \theta \right) P \sin^2 \theta d\theta = \int_0^\infty r^3 dr \int_0^\pi \Lambda Y_0 \sin^2 \theta d\theta.
\end{aligned}$$

Подставляя результат интегрирования в (23) и далее в (22), получим:

$$\vec{M}_{\Pi z} = -\bar{e}_z \frac{\pi \omega_{cn} C_0^2}{\mu_0 V_3} \int_0^\infty r^3 dr \int_0^\pi \left\{ \Lambda Y_0 + \frac{(m-1)(\alpha_z A_{0z})^2}{2r \sin \theta} \right\} \sin^2 \theta d\theta. \quad (24)$$

В работе [2] показано, что интеграл от функции ΛY_0 в (24) принимает вид

$$\vec{M}_{\Pi 0} = -\bar{e}_z (m-1) C_0^2 \frac{\pi \omega_{cn}}{\mu_0 V_3} \int_0^\infty R^2 r^2 dr \int_0^\pi P^2(\theta) \sin \theta d\theta. \quad (25)$$

Учитывая в (24) выражение (25), получим:

$$\vec{M}_{\Pi z} = -\bar{e}_z (m-1) \frac{\pi \omega_{cn} C_0^2}{\mu_0 V_3} \int_0^\infty r^2 dr \int_0^\pi \left(Y_0^2 + \frac{(\alpha_z A_{0z})^2}{2} \right) \sin \theta d\theta. \quad (26)$$

Заметим, что направление магнитного момента $\vec{M}_{\Pi z}$ связано с направлением тока правилом правого винта, поэтому $\vec{M}_{\Pi z} = M_{\Pi z} \bar{e}_z$ и назовем его полевым магнитным моментом. Из (26) следует, что полевая составляющая магнитного момента на ось Z имеет кратность $(m-1)$. Результирующий орбитальный магнитный момент $\vec{M}_z$ должен состоять из полевого магнитного момента $\vec{M}_{\Pi z}$ и магнитного момента движения заряженной частицы, который в квантово-механическом выражается через магнетон Бора μ_B [6, с.177]. Значение результирующего орбитального магнитного момента соответствует обоснованному значению $(m\mu_B)$:

$$\vec{M}_z = \vec{M}_{\Pi z} - \mu_B \bar{e}_z = -m\mu_B \bar{e}_z.$$

Для реализации этого условия по формуле (26) определяем постоянную интегрирования C_0^2 :

$$C_0^2 = \mu_B V_3 \left[\frac{\pi \omega_{cn}}{\mu_0} \int_0^\infty r^2 dr \int_0^\pi \left(Y_0^2 + \frac{(\alpha_z A_{0z})^2}{2} \right) \sin \theta d\theta \right]^{-1}. \quad (27)$$

Если принять условие, что $V_9 = m_0 c^2 / q$ – есть потенциал электрона с зарядом q и массой покоя m_0 на удалении классического радиуса, то произведение $\mu_B V_9 = 0.5 \hbar c^2$. В этом случае (27) примет вид:

$$C_0^2 = \frac{\hbar}{2\pi\epsilon_0\omega_{cn}} \left[\int_0^\infty r^2 dr \int_0^\pi \left(Y_0^2 + \frac{(\alpha_z A_{0z})^2}{2} \right) \sin\theta d\theta \right]^{-1}. \quad (28)$$

Плотность энергии электрической составляющей на основе (11) и (28):

$$w_E = \frac{\epsilon_0 \bar{E}_\Phi^2}{2} = \frac{\epsilon_0}{2} (\omega_{cn})^2 C_0^2 \left[Y_0^2 + (\alpha_z A_{0z} \sin(\Psi - \varphi))^2 \right]. \quad (29)$$

Интегрируя (29) по объему, получим энергию электрического поля орбитальной замкнутой электромагнитной волны

$$W_E = \int_V w_E r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi = \pi \epsilon_0 \omega_{cn}^2 C_0^2 \int_0^\infty r^2 dr \int_0^\pi \left(Y_0^2 + \frac{(\alpha_z A_{0z})^2}{2} \right) \sin\theta d\theta$$

С учетом (28), будем иметь:

$$W_E = 0.5 \hbar \omega_{cn} \quad (30)$$

Энергию магнитной составляющей поля определим на основе известного преобразования типовой формулы следующим образом:

$$\begin{aligned} W_H &= \int_V \frac{\vec{H} \vec{B}}{2} dV = \int_V \frac{\vec{H} \text{rot} \vec{A}}{2} dV = \int_V \frac{\text{div}[\vec{A} \vec{H}]}{2} dV + \int_V \frac{\vec{A} \text{rot} \vec{H}}{2} dV = \\ &= \oint_S \frac{[\vec{A} \vec{H}]}{2} dS + \frac{\epsilon_0}{2} \int_V \vec{A} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} dV. \end{aligned} \quad (31)$$

Подставив в (31) выражения (5), (11) и, учтя условие $\vec{A} = 0$ на бесконечности, что приводит к равенству нулю поверхностного интеграла, то формула магнитной энергии W_H поля с учетом (28) примет вид:

$$W_H = \pi \epsilon_0 \omega_{cn}^2 C_\Phi^2 \int_0^{r_\Phi} r^2 dr \int_0^\pi \left(Y_0^2 + \frac{(\alpha_z A_{0z})^2}{2} \right) \sin\theta d\theta = 0.5 \hbar \omega_{cn}. \quad (32)$$

Полная электромагнитная энергия орбитальной замкнутой электромагнитной волны (30) и (32) описывается квантом энергии:

$$W = W_E + W_H = \hbar \omega_{cn}.$$

Таким образом, получено, что замкнутая орбитальная электромагнитная волна характеризуется квантом энергии $\hbar \omega_{cn}$, где ω_{cn}

частота колебания орбитального электромагнитного поля, которая связана с угловой скоростью вращения электрона в атоме [1].

Рассмотрим физический смысл орбитальной замкнутой электромагнитной волны, полученной из решения однородного волнового ДУ (1) с учетом (4). Так как однородные ДУ описывают свободные процессы физических систем за счет внутренних запасов энергии, то орбитальное ЭМП должно возникать за счет энергии электрона.

Действительно, при решении в [1] волнового уравнения (1) определено выражение коэффициента при временной производной:

$$\frac{\omega_{cn}^2}{c^2} = \frac{2m_0[W_n - U(r_n)]}{\hbar^2},$$

где W_n , $U(r_n) = U_n$ – полная и потенциальная энергии орбитального электрона на n энергетическом уровне соответственно. Из этого равенства получим следующее выражение кванта энергии замкнутой ЭМ волны:

$$\hbar\omega_{cn} = \sqrt{2W_{0e}(W_n - U_n)} = \sqrt{2W_{0e}|W_n|} = \sqrt{W_{0e}|U_n|}; \quad (33)$$

$$W_{0e} = m_0c^2; \quad U_n = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n},$$

где m_0 – масса покоя электрона, W_{0e} – собственная энергия электрона.

В формуле (33) с левой стороны представлена энергия замкнутой орбитальной электромагнитной волны. С правой стороны имеет место усредненная энергия от произведения собственной энергии электрона на модуль потенциальной энергии электрона в атоме (заметим, что внешняя энергия электрона это внутренняя энергия системы – атом).

Отсюда следует, что источником энергии орбитального ЭМП может являться только собственная энергия электрона, а физической причиной дискретных орбит электрона в атоме является наличие устойчивых замкнутых электромагнитных орбитальных волн, что объясняет дискретность магнитных моментов и моментов количества движения.

Угол между моментами количества движения орбитального ЭМП и электрона в атоме водорода. В [2] из вектора Пойнтинга построена математическая модель момента количества движения. Математические модели магнитного момента и момента количества движения на основе вектора Пойнтинга орбитальной замкнутой электромагнитной волны удовлетворяют условию гиромангнитной связи. При этом угловой момент орбитального ЭМП и проекция на ось Z углового момента орбитального

электрона равны: $\vec{L}_{\Pi Z} = -(m-1)\hbar\vec{e}_z$; $\vec{L}_{ez} = -\hbar\vec{e}_z$.

Учтем, что математические функции, определяющие решение стационарного уравнения Шредингера, являются собственными функциями оператора квадрата момента импульса [6]. Функции орбитального электромагнитного поля (2) по структуре совпадают с решением уравнения Шредингера, поэтому значение квадрата момента импульса L_l^2 для электронно-полевой системы будет известно и равно:

$$L_l^2 = \hbar^2 l(l+1). \quad (34)$$

С другой стороны, квадрат момента импульса можно определить как сумма квадратов его проекций на ось Z и на плоскость OXY :

$$L_l^2 = L_z^2 + L_{xy}^2(\varphi) = m^2\hbar^2 + L_e^2(\varphi)\sin^2\theta_e, \quad (35)$$

где $L_e^2(\varphi)$ – квадрат углового момента электрона; $L_{xy}^2(\varphi)$ – квадрат проекции вектора момента импульса электрона на плоскость OXY (с неопределенным азимутальным углом φ).

Учитывая условие из [2] (или из аналога в разделе 2), что на всех энергетических уровнях проекция момента импульса электрона должна иметь значение $L_{ez} = \hbar$, то меридиональный угол θ_e углового момента электрона можно рассчитать по формуле $\hbar^2 = L_e^2(\varphi)\cos^2\theta_e$. Уравнение, связывающее угол наклона θ_e с магнитным m и орбитальным l квантовыми числами примет вид:

$$l(l+1) = m^2 + \operatorname{tg}^2\theta_e. \quad (36)$$

Азимутальное (магнитное) квантовое число m связано с влиянием воздействия на атом внешнего магнитного поля, по (36) рассчитывается угол прецессии θ_e момента импульса электрона вокруг магнитного момента орбитального ЭМП по направлению внешнего магнитного поля.

Баланс моментов импульса при излучении фотона. Квантовая теория и классическая релятивистская электродинамика утверждают, что безмассовая частица – фотон – имеет спин, равный единице. Но отсутствие электрического заряда и магнитного момента у фотона концептуально подтверждает отсутствие микротока (3).

В квантовой механике обосновывается правило отбора для орбитальных электронов, согласованного с опытом, что изменение орбитального квантового числа Δl при переходе электрона из одного состояния в другое должно быть следующим [8]:

$$\Delta l = \pm 1. \quad (37)$$

Магнитное квантовое число m атома водорода при излучении атомом фотона вдоль оси Z (системы отсчета атома водорода) уменьшится на единицу, а при излучении атомом фотона перпендикулярно оси Z магнитное квантовое число m орбитального электрона не изменится.

Таким образом, при переходе атома водорода с повышенного энергетического уровня на пониженный уровень, излучаемый фотон уносит вектор момента импульса [9]

$$\vec{L}_\phi = \hbar \vec{e}_{Z'}, \quad (38)$$

где $\vec{e}_{Z'}$ направляющий вектор оси Z' системы отсчета фотона.

На основе закона сохранения момента импульса при составлении уравнения баланса моментов импульса будем учитывать правила отбора: $\Delta l = -1$; $\Delta m = 0$ при $Z \perp Z'$; $\Delta m = -1$ при $Z \parallel Z'$.

Если принять (36) за уравнение баланса момента импульса атома водорода при повышенном энергетическом уровне, то на пониженном энергетическом уровне (после излучения фотона) возможны два уравнения баланса моментов импульса:

1) при $Z \perp Z'$, получим пределы варьирования углов наклона θ_e'

$$l(l-1) = m^2 + (\operatorname{tg} \theta_e' \pm 1)^2; \quad (39)$$

$$2) \text{ при } Z \parallel Z' \quad l(l-1) = (m-1)^2 + \operatorname{tg}^2 \theta_e''. \quad (40)$$

Сопоставляя выражения (39)–(40) с (37), имеем: $\theta_e' < \theta_e$, $\theta_e'' < \theta_e$.

Таким образом, наличие замкнутой орбитальной ЭМ волны приводит к выполнению закона сохранения момента импульса при переходе атома с одного энергетического уровня на другой вследствие излучения фотона.

Выводы. Установлены математически корректные и не противоречащие квантовой теории явления, объясняющие квантовые свойства микрообъектов: 1) орбитальная замкнутая электромагнитная волна, как новое электромагнитное явление в атоме, обусловленная током смещения мгновенного кулоновского поля; 2) микроток, создаваемый циркуляцией потока электромагнитной мощности при наличии в микросистеме постоянного электрического напряжения и объясняющий квантованные орбитальные магнитные моменты в атоме.

Список литературы

1. Меньшов Е.Н. Расширение возможностей классической теории электромагнитного поля // Научное обозрение. Физико-математические науки. – 2020. – № 1. – 8 с. [Электронный ресурс]; URL: <https://physics-mathematics.ru/ru/article/view?id=92>.
2. Меньшов Е.Н. Представление вектора Пойнтинга через электрические характеристики электротехнических систем// Интеллектуальная электротехника. – 2021. – № 4 (16). – С. 36–46. – URL: [https://jsee.nntu.ru/frontend/web/ngtu/files/nomera/2021/4\(16\)/036.pdf](https://jsee.nntu.ru/frontend/web/ngtu/files/nomera/2021/4(16)/036.pdf)
3. Меньшов Е.Н. Представление вектора Пойнтинга через электрические характеристики электротехнических систем. Часть 2. Моделирование плотности тока / Интеллектуальная электротехника. – 2022. – №2. – С.30–45. – [Электронный ресурс]; URL: [https://ie.nntu.ru/frontend/web/ngtu/files/nomera/2022/2\(18\)/030.pdf](https://ie.nntu.ru/frontend/web/ngtu/files/nomera/2022/2(18)/030.pdf)
4. Меньшов Е. Н. Исследование дополнительного тока при кулоновской калибровке/ Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: межд. сб. науч. тр. – Ульяновск : УлГТУ, 2022, Вып. 17. – С. 108–119.; URL: <http://lib.ulstu.ru/venec/disk/2022/95.pdf>
5. Джексон Д. Классическая электродинамика. –М.: Мир,1965.–702 с.
6. Матвеев А.Н. Квантовая механика и строение атома. М.: Высш. шк., 1965. – 355 с.
7. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1973. – 831 с.
8. Фок В.А. Начала квантовой механики. – М.: Наука, 1976. – 376 с.
9. Меньшов Е.Н. Математическая модель квантово-волнового электромагнитного излучения. – Ульян. гос. техн. ун-т. – Ульяновск, 2024. – 12 с. – Деп. в ВИНТИ от 12.02.2024, №3 – В2024.

Меньшов Евгений Николаевич – докт. техн. наук, профессор
каф. «Электроснабжение», УлГТУ. E-mail: raynd2@rambler.ru .

СИСТЕМЫ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ

КОГНИТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ ЦИФРОВЫХ АВТОМАТОВ

В. В. Кожевников

Когнитивные вычисления представляют собой одно из основных направлений развития искусственного интеллекта или комплекс технологических решений, позволяющий имитировать когнитивные функции человека. Рассмотрено понятие и концепция моделирования когнитивных вычислений. Предложен формальный подход к когнитивным вычислениям на основе матричных уравнений цифровых автоматов. Показаны преимущества реализации этого подхода в имитации когнитивных функций человека-оператора, точности, быстродействию и требуемой памяти по сравнению с известными моделями и методами моделирования нейронных сетей.

Cognitive computing is one of the main directions of the development of artificial intelligence or a set of technological solutions that allows you to simulate human cognitive functions. The concept and the concept of modeling cognitive computing are considered. A formal approach to cognitive computing based on matrix equations of digital automata is proposed. The advantages of implementing this approach in simulating the cognitive functions of a human operator, accuracy, speed and required memory are shown in comparison with known models and methods of modeling neural networks.

Искусственный интеллект и когнитивные вычисления. Стратегия развития искусственного интеллекта предполагает комплекс технологических решений, позволяющий имитировать когнитивные функции человека (включая самообучение и поиск решений без заранее

заданного алгоритма) и получать при выполнении конкретных задач результаты, сопоставимые, как минимум, с результатами интеллектуальной деятельности человека [1].

Имитация процессов мышления человека может быть продемонстрирована на обычном компьютере в результате выполнения некоторой последовательности вычислений в соответствии с заданным алгоритмом. При этом когнитивные функции человека по составлению алгоритма вычислений сам человек и выполняет. С точки зрения имитации когнитивных функций человека на первый план выдвигается проблема формализации понятия когнитивных вычислений [2].

Когнитивные вычисления представляют собой одно из основных направлений развития искусственного интеллекта или комплекс технологических решений, позволяющий имитировать когнитивные функции человека. Несмотря на широкое распространение, понятие когнитивных вычислений до настоящего времени не имеет четкого определения. Отличительная особенность когнитивных вычислений заключается в том, что исходный алгоритм вычислений заранее не задан и формируется в процессе обучения и генерации решений, не предусмотренных в процессе обучения [3]. Обучение, в данном случае, выполняется на ограниченном (минимальном) порождающем множестве обучающих наборов данных (неполных обучающих выборках), определяющих множество базовых (элементарных) функций алгоритма.

В качестве базовых (элементарных) функций могут рассматриваться множества микроопераций, микрокоманд, команд и макрокоманд, выполняемых в течение одного цикла (одного такта) срабатывания автомата. При этом возможность формирования формулы (алгоритма) зависит от критической массы (качества) обучающих наборов и алгоритмов обучения. Отсюда особое значение приобретает задача генерации минимального множества обучающих наборов для заданной или экспериментально определяемой функции (алгоритма). В процессе генерации решений выполняется адаптация (экстраполяция) алгоритма в зависимости от конкретных входных наборов данных.

Обработка информации осуществляется в соответствии с (формулой) алгоритмом, который воспроизводится в процессе когнитивных вычислений. В процессе обработки информации осуществляется

распознавание, понимание и, в случае необходимости, реагирование на поступающий поток информации (преобразование информации) [4].

Научная значимость и актуальность решения обозначенной проблемы определяется необходимостью перехода к принципиально новым (когнитивным) подходам к развитию искусственного интеллекта. Известные на данный момент технологии моделирования искусственного интеллекта не обеспечивают решения проблемы [5]. Наиболее популярные в последнее время технологии коннективизма строятся на основе математических моделей цифровых автоматов (ЦА) с пороговой логикой (искусственные нейронные сети) и малопригодны для решения задач вычислительного характера, и, тем более, когнитивных вычислений.

Технологии для решения задач вычислительного характера на основе математических моделей ЦА с жесткой или программируемой логикой, в том числе и технологии символизма, предполагают наличие полных обучающих наборов данных (полных таблиц истинности) и, соответственно, не решают проблемы когнитивности вычислений.

В статье предлагается подход к решению проблемы формализации понятия когнитивных вычислений на основе математической модели (матричных уравнений) когнитивных цифровых автоматов. Рассматривается качественно новая концепция моделирования искусственного интеллекта (концепция когнитивных вычислений). Формализация понятия когнитивных вычислений предполагает решение следующих задач: 1) построение (структурный синтез) математической модели когнитивных цифровых автоматов (КЦА) с логикой, самопрограммируемой в процессе обучения и генерации решений; 2) обучение (синтез логики) математической модели КЦА на ограниченном (минимальном) множестве обучающих наборов (неполных обучающих выборках); 3) генерация решений (генерация логики) на основе математической модели КЦА, не предусмотренных в процессе обучения – без заданного априори алгоритма.

Научная новизна предлагаемого подхода заключается в математическом определении (формализации) понятия когнитивных вычислений. В качестве фундаментальной основы для решения проблемы формализации понятия когнитивных вычислений предлагаются методы математического моделирования (математическая логика) КЦА [6].

Математическая логика КЦА объединяет в себе двоичную логику, сети Петри и, соответственно, возможность моделирования параллельных вычислений. Важно отметить, что известные методы математической логики (Булева алгебра, исчисление высказываний, исчисление предикатов и т.п.) не обеспечивают адекватности представления КЦА и возможности моделирования когнитивных вычислений.

Комплексная математическая модель КЦА может быть представлена матричным уравнением состояний ингибиторных сетей Петри из класса уравнений Мурата с неявно определяемой (самопрограммируемой) логикой или уравнения состояний КЦА. Возможность представления КЦА в виде матричных уравнений обусловлена неявным определением логики (неявным определением ингибиторных дуг в матрице инцидентности). Алгоритм и исходная структура КЦА задаются на минимальном множестве обучающих наборов информационного потока (неполных обучающих выборках). Практически информационный поток конвертируется в математическую модель КЦА для обработки информации этого потока.

Формализация понятия когнитивных вычислений

1. Построение (структурный синтез) математической модели КЦА. Задача построения (структурного синтеза) математической модели КЦА решается в результате структуризации данных информационного потока. В качестве обучающих отбираются (формируются) наборы входных и выходных данных, которые относятся только к одному кластеру (классу). В случае, если такие наборы данных отсутствуют или их недостаточно, в качестве обучающих наборов могут отбираться наборы данных, которые относятся к двум и более кластерам (классам). Важно сформировать минимальное порождающее множество обучающих наборов, позволяющих воспроизвести все множества наборов данных.

Структурный синтез выполняется на основе кластерного анализа (классификации) обучающих наборов данных. Структурная схема КЦА представляется в виде универсальной матрицы инцидентности множества структурных связей между компонентами схемы. Наборы данных представлены вектором разности начальной и конечной разметки уравнения состояний КЦА.

1.1. Формирование исходной структурной схемы автомата. На основе результатов кластерного анализа (классификации) множества

обучающих наборов можно определить количество входов и выходов исходной структуры, количество слоев и количество компонентов в каждом слое, структуру связей между компонентами. Количество компонентов структурной схемы КЦА зависит от числа классов (подклассов) для каждого слоя. При многоуровневой классификации число уровней определяет количество слоев структурной схемы КЦА.

При формировании исходной структуры автомата множество классов составляет первый слой структурной схемы, где для каждого класса отводится один компонент. Множество подклассов составляет второй слой структурной схемы, где для каждого подкласса также отводится один компонент. Для каждого подкласса деление на подклассы может быть продолжено и соответственно формируется третий слой и т.д.

В результате исходная структура автомата состоит из n слоев. Количество компонентов первого слоя равно количеству классов. Количество компонентов второго слоя равно количеству подклассов и т.д. Структура связей между входами и слоями структурной схемы может формироваться по принципу «все со всеми» или по принципу сверточных нейронных сетей. Формирование структурных связей по принципу сверточных нейронных сетей значительно упрощает задачу синтеза логики, но ограничивает когнитивные возможности сети.

1.2. Модельное представление исходной структурной схемы автомата. Исходная структурная схема КЦА представляется в виде маркированного графа путем интерпретации входов и выходов схемы и структурных компонентов позициями маркированного графа, а самих компонентов и линий соединений составными и простыми переходами соответственно. Множество входов и выходов структурной схемы интерпретируется как множество входных и выходных позиций сети, множество входов и выходов компонентов схемы — как множество внутренних позиций сети, логическая единица — как фишка в позиции сети, ее отсутствие — как логический ноль, а перемещение сигналов — как движение фишек в сети.

Графическая форма представления структурной схемы КЦА позволяет перейти от описания структурной схемы к ее математическому представлению матрицей инцидентности. Представление КЦА в виде двудольного ориентированного графа или матрицы инцидентности

позволяет задать логические схемы статически. Динамику в модель вносит движение фишек, регулируемое правилами запуска переходов и смены разметки сети.

1.3. Построение уравнения состояний КЦА. Комплексная математическая модель КЦА представляется в виде уравнения состояний СП из класса уравнений Мурата:

$$\Delta \mu = A \cdot x, \quad (1)$$

где $\Delta \mu = \mu - \mu_0$, μ_0 – вектор начальной разметки сети, μ – вектор конечной разметки сети, x – вектор покрытия переходов сети, который определяет только состав и не определяет последовательность срабатываний переходов. Вектор $\Delta \mu$ задается на множестве позиций сети P , вектор x – на множестве переходов сети T . Множество векторов $\Delta \mu$ образует множество ΔM ($\Delta \mu \in \Delta M$), а множество векторов покрытия переходов x – покрытие сети S ($x \in S$).

Каждый обучающий набор интерпретируется как вектор разности начальной и конечной разметки на множестве входных и выходных позиций сети. На множестве внутренних позиций сети вектор разности начальной и конечной разметки не определен. Исходная структура определена и представляется в виде матрицы инцидентности. Покрытие сети формируется в процессе синтеза логики структурной схемы КЦА.

2. Обучение (синтез логики) математической модели КЦА. Задача обучения сводится к исчислению инвариантов уравнения состояний КЦА на ограниченном (минимальном) множестве обучающих наборов. При этом критерий достижимости формируется в процессе исчисления инвариантов. Однородность уравнения состояний достигается на множестве активных структурных связей схемы, полученных в результате регрессионного анализа данных. Множество инвариантов уравнения состояний (покрытие сети) определяет логику КЦА и служит минимальным порождающим множеством решений (инвариантов) уравнения состояний КЦА.

Логика компонентов схемы задается неявно в виде набора кодов, определяющих логику (логическую функцию) запуска (активизации) компонентов. В отличие от известных методов «синтеза» логика КЦА жестко задана только на множестве активных входов компонентов схемы, что, в свою очередь, и обеспечивает возможность генерации логики или

генерации решений (инвариантов), не предусмотренных в процессе обучения.

2.1. Исчисление инвариантов уравнения состояний структурной схемы (маркированного графа) КЦА. Для решения задачи синтеза логики математической модели КЦА (обучения) используются методы исчисления инвариантов уравнения состояний структурной схемы автомата. Инварианты маркированного графа – инструмент исследования структурных свойств сетей и решениями однородных систем уравнений.

Как известно, для маркированных графов вектор $\Delta\mu$ в уравнении состояний (1) равен нулю на множестве всех внутренних позиций сети: $\Delta\mu(P_0) = 0$, где P_0 – множество внутренних позиций сети. Соответственно, уравнение (1) для маркированных графов имеет решение x тогда и только тогда, когда вектор $\Delta\mu$ ортогонален любому решению уравнения:

$$A^T(P, T_0) \cdot y = 0, \quad (2)$$

где A^T – транспонированная матрица инцидентности сети, $y \in R$ – вектор покрытия позиций сети при $y_i = \{0,1\}$, R – покрытие позиций сети для заданного вектора $\Delta\mu$, T_0 – множество внутренних переходов сети. Соответственно: $x(T)$ – S-инвариант сети, $y(P)$ – R-инвариант сети.

Следует отметить, что уравнение (2) справедливо только для подкласса однородных СП. Проблема заключается в том, что при моделировании (программировании) логики свойство однородности (критерий достижимости) маркированных графов утрачивается. Поэтому, что особо важно отметить, критерий достижимости формируется в процессе исчисления инвариантов. Свойство однородности для каждого вектора покрытия переходов сохраняется только на множестве внутренних позиций, входящих в состав инвариантного вектора (векторов) покрытия позиций маркированного графа. Каждый полученный вектор покрытия переходов маркированного графа в данном случае определяет не только состав, но и коды запуска переходов. Множество инвариантов уравнения состояний определяет логику компонентов структурной схемы автомата.

2.2. Регрессионный анализ активности структурных связей КЦА. Регрессионный анализ активности структурных связей между компонентами структурной схемы автомата на множестве обучающих

наборов выполняется в процессе исчисления инвариантов уравнения состояний. Множество полученных инвариантов отражает результаты регрессионного анализа оптимальным множеством активных структурных связей между компонентами структурной схемы автомата. Множество активных структурных связей задается на множестве позиций, входящих в состав инвариантного покрытия позиций маркированного графа.

2.3. Неявное определение логики структурной схемы КЦА.

Логика компонентов схемы задается (определяется) неявно в виде набора кодов, определяющих логику (логическую функцию) запуска (активизации) компонентов. Каждая пара инвариантов определяет коды срабатываний переходов на множестве активных входов компонентов. Множество инвариантов уравнения состояний (покрытие сети) определяет логику компонентов и логику структурной схемы КЦА

3. Генерация решений (генерация логики) на основе математической модели КЦА. Задача генерации решений (генерации логики), не предусмотренных в процессе обучения, выполняется на основе реляционного исчисления инвариантов. В процессе реляционного исчисления инвариантов допускаются все возможные комбинации инвариантов, не исключая друг друга. В качестве исходной информации (критерия) для генерации решений (реляционного исчисления инвариантов) уравнения состояний КЦА служат наборы входных данных информационного потока.

3.1. Реляционное исчисление инвариантов уравнения состояний КЦА. В реляционном исчислении задается формула реляционного исчисления, которая должна удовлетворять множеству возможных решений. В данном случае формула представляется в виде системы уравнений, заданной на минимальном множестве обучающих наборов:

$$\Delta M_{min} = A \cdot S_{min} .$$

Для реляционного исчисления инвариантов могут быть использованы операции реляционной алгебры: соединение, объединение (сложение), разность (вычитание) и т.д. Эффект когнитивности достигается уже при выполнении операции объединения инвариантов. Если каждую пару инвариантов, полученных на множестве обучающих наборов в процессе

обучения (синтеза логики), определять как правильную формулу (ПФ), то для произвольной пары инвариантов также может быть получена ПФ.

3.2. Генерация решений (инвариантов) уравнения состояний КЦА.

Проблема заключается в том, что известные методы генерации решений линейных систем уравнений в целых неотрицательных числах имеют асимптотически экспоненциальную вычислительную сложность, что затрудняет их применение для анализа реальных систем. Критическим с точки зрения эффективности является время генерации (построения) минимального порождающего множества решений (МПМР) на множестве не выраженных переменных (проблема полного перебора).

В случае реляционного исчисления инвариантов уравнения состояний КЦА в качестве МПМР используется множество инвариантов, полученных в процессе обучения (синтеза логики) на минимальном множестве наборов. Генерация решений сводится к отбору инвариантов, удовлетворяющих вектору начальной разметки уравнения состояний КЦА (построению ППФ). Возможность отбора инвариантов (по принципу бегущей единицы) обеспечивает решение проблемы полного перебора.

Анализ взаимного влияния инвариантов выполняется в процессе решения уравнения состояний КЦА исходя из принципа безопасности сетевой модели. В процессе решения уравнения состояний КЦА для комбинации инвариантов достигается эффект когнитивности вычислений.

3.3. Построение протоколов (воспроизведение алгоритма) когнитивных вычислений. Реализация алгоритма в ходе когнитивных вычислений (построение протоколов) сводится к итеративному решению уравнения состояний КЦА с вектором начальной разметки для последовательности наборов данных. Процесс решения уравнения состояний каждого набора входных данных продолжается, пока автомат не перейдет в устойчивое состояние. Реализуется принцип управления потоками данных. Алгоритм представляется диаграммой переходов и состояний КЦА или диаграммы Мура.

Выводы: 1. Предложен подход к формализации понятия когнитивных вычислений, основанный на логике КЦА в виде системы матричных уравнений. Показаны преимущества подхода по сравнению с использованием искусственных нейронных сетей, имитирующих когнитивные функции человека-оператора в любой сфере деятельности:

военно-технической, технологической и социально-экономической. 2. Когнитивность обеспечивается генерацией логики (реляционным исчислением инвариантов) уравнения состояний КЦА. Сингулярность проявляется в увеличении быстродействия, точности вычислений и емкости памяти. Синергетика КЦА достигается структурным синтезом (самоорганизацией) и генерацией логики (самообучением). Когнитивные вычисления могут стать основой совершенных цифровых технологий.

Список литературы

1. Указ Президента РФ от 10 октября 2019 г. № 490 «О развитии искусственного интеллекта в Российской Федерации».
2. Шевчик А.П., Мусаев А.А. Когнитивный вызов: ожидания и свершения // Известия СПбГТИ (ТУ), – 2016. – № 33. – С. 84–90.
3. Каляев И.А. Искусственный интеллект: от метафоры к техническим решениям. // CONTROL ENGINEERING Россия. Интеллектуальные технологии. – 2019. – № 5 (83). – С. 26–31.
4. Шумский С.А. ADAM — модель искусственной психики //Автоматика и телемеханика. – 2022. – № 6. – С. 24–37.
5. Ульянов С.В., Шевченко А.А., Шевченко А.В. Технологии когнитивных вычислений: модели и алгоритмы // Системный анализ в науке и образовании: сетевое научное издание. – 2021. – № 2, – С. 118–132.
6. Кожевников В. В. Метод математического моделирования когнитивных цифровых автоматов // Автоматизация процессов управления. 2019. – № 2. – С. 101–112.

Кожевников Валерий Владимирович – старший научный сотрудник Ульяновского филиала Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова Российской академии наук (УФИРЭ им. В. А. Котельникова РАН). E-mail: vvk28061955@mail.ru

АНАЛИЗ ТЕПЛОВОГО РЕЖИМА ЭЛЕКТРОННЫХ УСТРОЙСТВ МЕТОДОМ СХЕМНЫХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Н. П. Кузьмин

Исследуется температурный режим силового электронного модуля с помощью программ символьного и численного расчета. Показано, что вывод формул с помощью программы CirSym обеспечивает не только получение численных значений, но и предоставляет возможности для оценки факторов, влияющих на тепловые процессы.

The temperature regime of the power electronic module is investigated using symbolic and numerical calculation programs. It is shown that the derivation of formulas using the CirSym program provides not only numerical values, but also provides opportunities for evaluating factors affecting thermal processes.

Символьные выражения в проектировании электронной аппаратуры. Представление результатов в аналитическом (символьном) виде повышает интеллектуальный уровень систем автоматизации схемотехнического проектирования и математического обеспечения автоматизированных рабочих мест [1–7]. При этом повышается точность вычислений. Визуализация численного результата в виде символьного решения позволяет «рассмотреть структуру числа», провести оптимизацию параметров, убрать элементы, мало влияющие на работоспособность устройства и т.д.

Однако полезные свойства символьных выражений, позволяющие качественно оценить влияние параметров, необходимо дополнять возможностью численного расчета. Интерпретатор CalcSym [8] используется почти четверть века совместно с программой символьного анализа и диагностики электронных цепей CirSym (Circuit Symbol) [2–7]. С 2007 года программа CirSym была оснащена графическим редактором SCAD [4]. Компактная свертка символьных выражений обеспечивает конкурентоспособность программ символьного анализа программам численного расчета. Среди тестов практических схем используются схемы

замещения избирательного усилителя Лаксберга и $\mu A741$ [7], содержащие десятки узлов и сотни элементов.

Физические основы анализа тепловых процессов. Чтобы сократить время цикла проектирования и создания физического прототипа, производителям электронного оборудования необходимо определять тепловые характеристики новых систем на как можно более ранней стадии процесса проектирования. Точное прогнозирование температур критически важных электронных компонентов на уровне микросборки, печатной платы и системы серьезно затруднено отсутствием надежных входных данных и моделей, характеризующих тепловое поведение этих деталей.

Традиционно анализ тепловых процессов проводится решением уравнений теплопроводности Фурье [9,10] и требует больших вычислительных ресурсов даже для изделий с небольшим количеством компонент. Например, в телекоммуникационной системе, состоящей из четырех стоек, каждая из которых содержит 20 плат, а каждая плата содержит 30 микросхем, расчет тепловых процессов системы представлял бы невыполнимую вычислительную задачу. Поэтому актуальны компактные тепловые модели, в том числе линейные модели в виде схемных функций, которые могут представлять собой доступное и правдоподобное вычислительное решение.

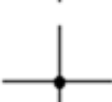
Понятие «тепловое сопротивление» широко используется в конструировании радиоэлектронной аппаратуры и в теплотехнике [11]. Существует аналогия между тепловым потоком за счет проводимости (закон Фурье) и протеканием электрического тока (закон Ома), но соответствующие физические свойства теплопроводности и электропроводности приводят к тому, что поведение теплового потока сильно отличается от потока электричества в обычных ситуациях. На сходстве электрических и тепловых дифференциальных уравнений основывается аналогия между электрическими и тепловыми процессами и элементами [9,11], что отражено в табл. 1.

Значения тепловых сопротивлений рассчитываются по формуле [10]

$$R_t = (1/\lambda) * (L/S), \quad (1)$$

где λ – коэффициент теплопроводности среды передачи тепла, L – длина канала передачи тепла, S – площадь поперечного сечения канала передачи тепла.

Таблица 1. Символы электрических и тепловых эквивалентных схем

Электрические элементы	Символы	Тепловые элементы
Источник тока, I, А		Поток, Вт
Потенциал, В		Температура, К
Электрическое сопротивление, R, Ом		Тепловое сопротивление, R_T , К/Вт
Электрическая емкость, C, Ф		Теплоемкость, C, Дж/К
Узел		Узел тепловой схемы
Заземление		Заземление

Далее на примере силового модуля рассмотрено применение метода схемных определителей для теплового анализа печатной платы с тепловыделяющими элементами.

Анализ температурного режима силового модуля. Произведем исследование тепловых процессов на примере силового модуля GD35PIT1205SN [12] производства *StarPower Semiconductor Ltd* (рис.1), который предназначен для применения в инверторах электродвигателей, преобразователей напряжения сервоприводом, источниках бесперебойного питания.

Модуль рис.2, состоит из шести IGBT кристаллов инвертора, шести диодов инвертора, шести диодов выпрямителя, одного кристалла IGBT тормозного прерывателя (brake-chopper), одного диода тормозного прерывателя и терморезистора.



Рис. 1. Внешний вид силового модуля GD35PIT1205SN.

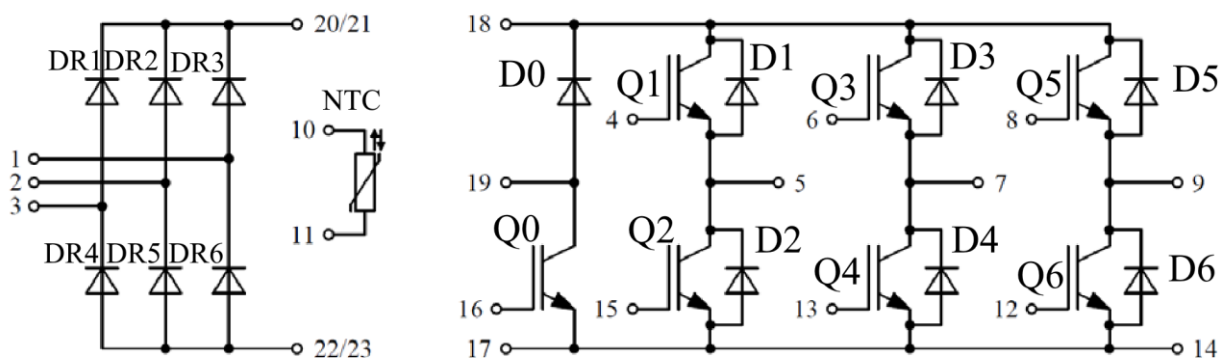


Рис. 2. Электрическая схема модуля.

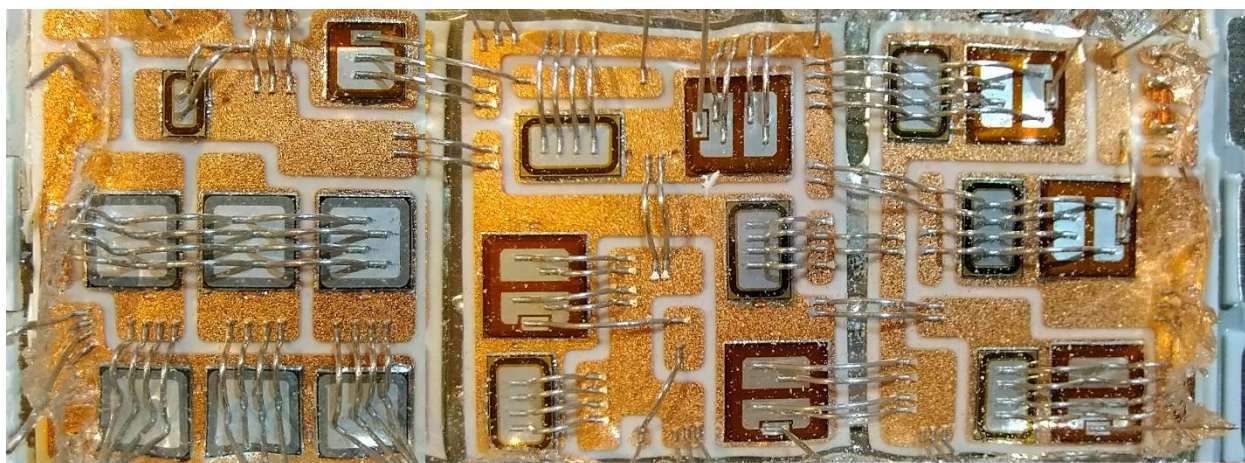


Рис. 3. Вид модуля.

Конструктивно модуль (рис.3), представляет из себя три платы DBC (direct-bond copper), толщиной 1мм из окиси алюминия, покрытые медным слоем толщиной 0,5 мм. Каждая плата DBC имеет размеры 30x25 мм. На первой плате (слева направо) расположены диоды выпрямителя, транзистор и диод тормозного прерывателя. Две остальные платы несут транзисторы и диоды инвертора. На правой плате дополнительно смонтирован терморезистор NTC. Кристаллы транзисторов инвертора (Q1 – Q6) имеют размеры 6x6 мм.

Коэффициент теплопроводности окиси алюминия 30 Вт*К/м , коэффициент теплопроводности медного слоя 400 Вт*К/м . Поэтому допускаем что основная теплопередача (тепловая связь) между транзисторами Q и терморезистором NTC происходит в медном слое. Тепловые связи, обозначенные на рис.4 как R12, R14, R24, рассчитываются по формуле (1).

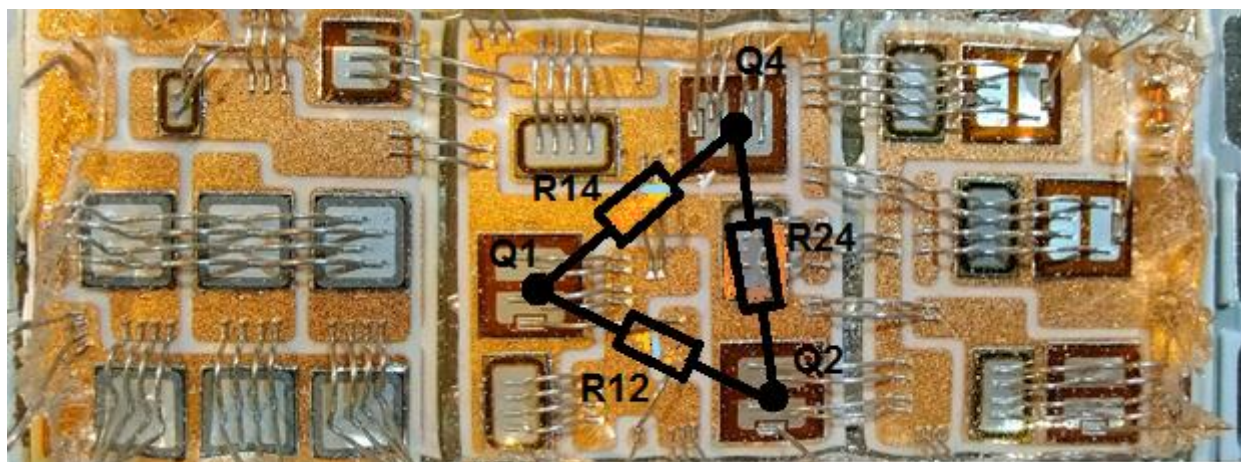


Рис. 4. Вид модуля с транзисторами (источниками тепла) Q1, Q2, Q4 и взаимной теплопередачей, представленной тепловыми сопротивлениями R12, R14, R24.

Исходя из геометрического расположения транзисторов на плате, коэффициентов теплопроводности кристаллов транзисторов, медного покрытия платы, коэффициента теплопроводности печатной платы, по формуле (1) определяем тепловые сопротивления передачи тепла, как между транзисторами, так и вертикально через плату.

Тепловые сопротивления IGBT кристаллов транзисторов равны 0.084 К/Вт . Тепловые сопротивления на рис.5, равные 0.03 К/Вт , моделируют теплоперенос от кристалла транзистора через плату из окиси алюминия. Тепловые сопротивления, равные 0.35 К/Вт характеризуют вертикальный теплоперенос в алюминиевом основании модуля.

На схеме рис.5 выделение греющей мощности на каждом транзисторе 40 Вт представлено на эквивалентной теплоэлектрической схеме независимым источником тока 40А .

Согласно теплоэлектрической аналогии, напряжение в узлах схемы Q1, Q2, Q4, соответствует температуре кристалла соответствующего транзистора. Если измерить сопротивление терморезистора и по его калибровочной таблице определить температуру на плате, то измерить непосредственно температуру кристалла транзистора в пластиковом

корпусе (возможно залитым компаундом), не представляется возможным. Преимущество теплоэлектрического моделирования заключается в том, что появляется возможность расчетным путем, используя программу SPACE, MULTISIM, или CirSym (метод схемных определителей), вычислять температуру в точках, недоступных для измерения.

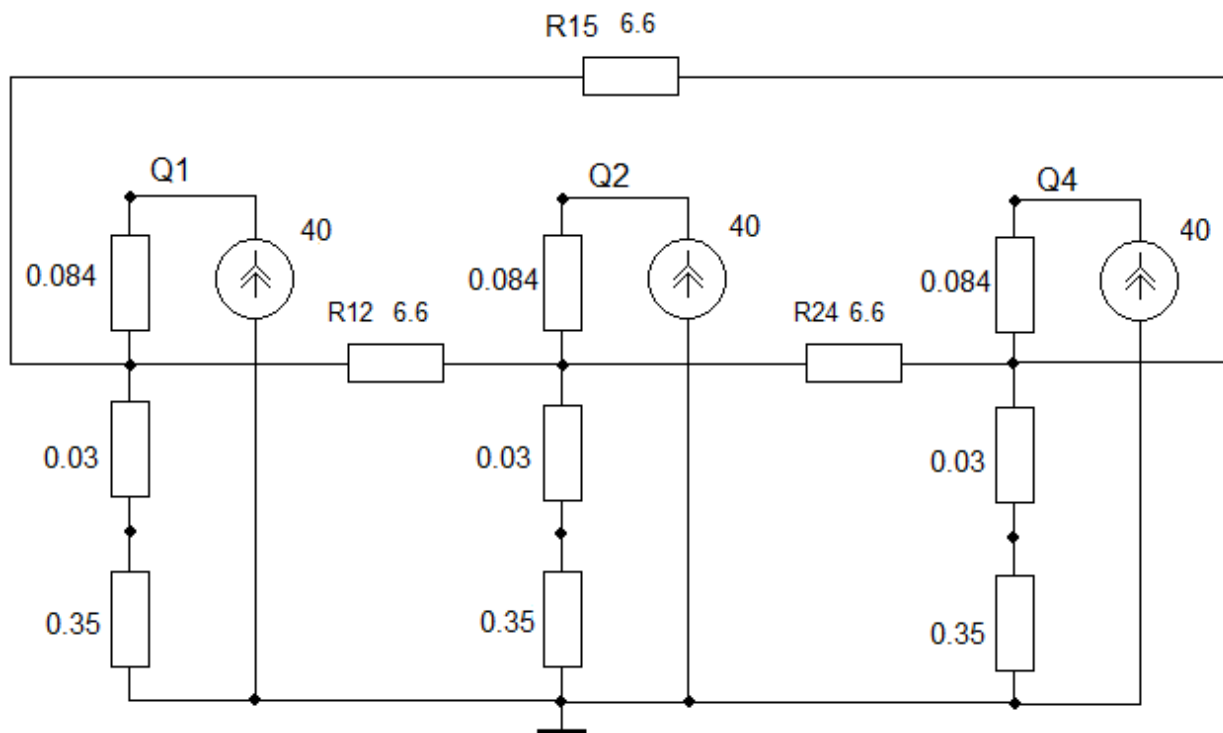


Рис. 5. Эквивалентная теплоэлектрическая схема платы с транзисторами Q1, Q2, Q4.

Упростим схему, заменяя последовательно включенные резисторы (рис. 6). Для определения напряжений в узлах 4, 5, 6 (температур кристаллов транзисторов) методом схемных определителей [7], составим задание на расчет для программы CirSym [6,7]:

```

R12 1 2 6.6      R10 1 0 0.38
R13 2 3 6.6      R20 2 0 0.38
R15 1 3 6.6      R30 3 0 0.38
R14 1 4 0.084    J1 0 4 40
R25 2 5 0.084    J2 0 5 40
R36 3 6 0.084    J3 0 6 40
U 4 0
U 5 0
U 6 0
.end

```

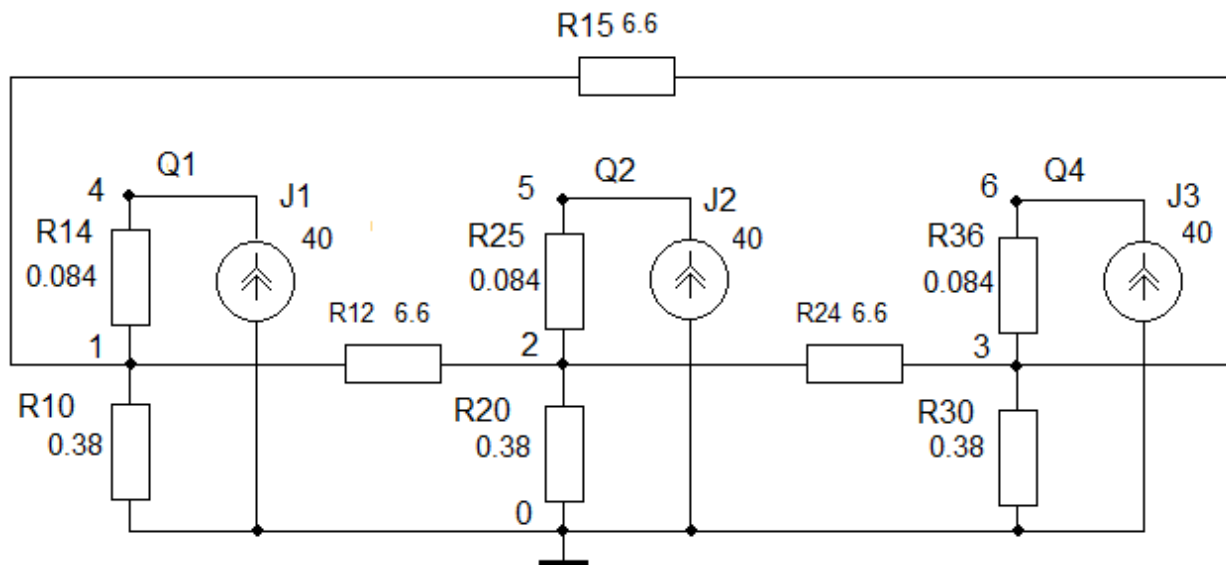


Рис. 6. Упрощенная эквивалентная теплоэлектрическая схема платы с транзисторами Q1, Q2, Q4.

После завершения работы программы получаем символьное выражение напряжений в интересующих узлах 4, 5, 6 схемы:

U4 =

$$\frac{(J1) * ((R12 * ((R13 + R20) * (R15 + R30) + R15 * R30) + R20 * (R13 * (R15 + R30) + R15 * R30)) * (R10 + R14) + ((R12 + R15) * (R13 + R20 + R30) + R13 * (R20 + R30)) * (R10 * R14)) + R10 * (R20 * (R13 * (J2) * (R15 + R30)) + R30 * (J2) * (R12 + R15)) + R30 * (R12 * ((J3) * (R13 + R20)) + R20 * (J3) * (R13 + R15))}{R12 * ((R13 + R20) * (R15 + R10 + R30) + (R15 + R10) * R30) + R13 * ((R15 + R30) * (R10 + R20) + R10 * R20) + R15 * (R10 * (R20 + R30) + R20 * R30)};$$

U5 =

$$\frac{R10 * R20 * (R13 * ((J1) * (R15 + R30)) + R30 * (J1) * (R12 + R15)) + (J2) * ((R12 * (R15 + R10) * (R13 + R30) + R13 * R30) + R10 * (R13 * (R15 + R30) + R15 * R30)) * (R20 + R25) + ((R12 + R13) * (R15 + R10 + R30) + R15 * (R10 + R30)) * (R20 * R25) + R30 * R20 * (R12 * ((J3) * (R15 + R10)) + R10 * (J3) * (R13 + R15))}{R12 * ((R13 + R20) * (R15 + R10 + R30) + (R15 + R10) * R30) + R13 * ((R15 + R30) * (R10 + R20) + R10 * R20) + R15 * (R10 * (R20 + R30) + R20 * R30)};$$

U6 =

$$\frac{R10 * R30 * (R12 * ((J1) * (R13 + R20)) + R20 * (J1) * (R13 + R15)) + R20 * R30 * R12 * ((J2) * (R15 + R10)) + R10 * (J2) * (R13 + R15) + (J3) * ((R13 * (R12 + R20) * (R15 + R10) + R15 * R10) + R20 * (R12 * (R15 + R10) + R15 * R10)) * (R30 + R36) + ((R13 + R15) * (R12 + R10 + R20) + R12 * (R10 + R20)) * (R30 * R36)}{R12 * ((R13 + R20) * (R15 + R10 + R30) + (R15 + R10) * R30) + R13 * ((R15 + R30) * (R10 + R20) + R10 * R20) + R15 * (R10 * (R20 + R30) + R20 * R30)};$$

$$R12*((R13+R20)*(R15+R10+R30)+(R15+R10)*R30)+R13*((R15+R30)*(R10+R20)+R10*R20)+R15*(R10*(R20+R30)+R20*R30).$$

После автоматической подстановки численных значений параметров схемы в полученные формулы и выполнения алгебраических действий с помощью интерпретатора CalcSym [8], получаем значения напряжений узлов схемы (температур кристаллов транзисторов):

$$U4 = 18.56000 \quad U5 = 18.56000 \quad U6 = 18.56000.$$

Для проверки этого решения проведем расчет напряжений $U4$, $U5$, $U6$ в программе MULTISIM, решающей уравнения электрических схем по методу узловых напряжений. Составим задание для программы (рис.7).

Полученные значения напряжений (температур кристаллов транзисторов Q1, Q2, Q4) в программе MULTISIM, равные 18.6 практически равны значениям 18.56, вычисленным по формулам программы CirSym интерпретатором CalcSym.

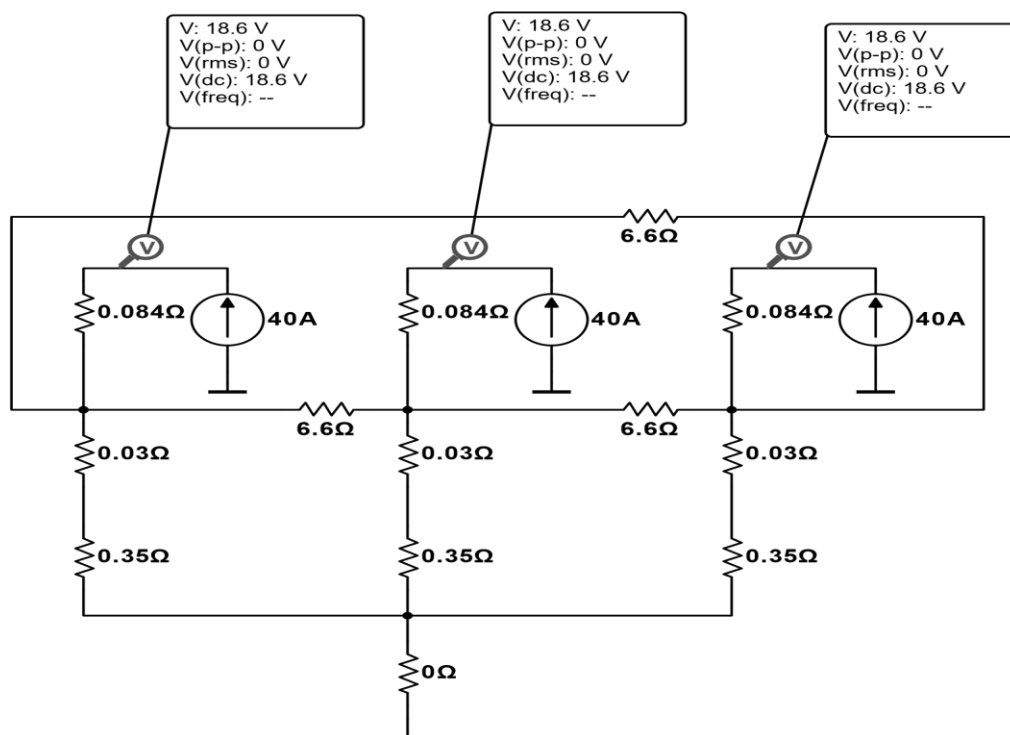


Рис. 7. Результат моделирования в MULTISIM эквивалентной теплорезистивной схемы на рис.5.

Выводы: 1. Символьное выражения для значений температуры (результаты программы CirSym) позволяют оценить влияние различных параметров теплового процесса на температурный режим. В случае

сложных теплоэлектрических моделей вычисление значений требует пренебрежимо малого времени по сравнению с генерацией выражения символьной модели. Единоразово полученные символьные выражения могут быть многократно использованы для многовариантного анализа и оптимизации защиты от теплового перегрева силового модуля. 2. Численные значения, которые получают большинство программ автоматизации проектирования (MULTISIM и др.) не позволяют представить «структуру числа», выявить факторы, влияющие на температурный режим. Численные теплоэлектрические модели в виде систем уравнений имеют ограниченное применение, являясь «одноразовыми». При необходимости система уравнений может быть компактно решена в символьном виде методом половинного деления матрицы [13] и это решение многократно использовано.

Список литературы

1. Компьютерная алгебра: Символьные и алгебраические вычисления / Под ред. Б.Бухбергера, Дж.Коллинза, Р.Лооса. – М.: Мир, 1986.– 392 с.
2. Филаретов В.В., Шеин Д.В. Формирование, интерпретация и компиляция символьных функций электронных схем // Логико-алгебраические методы, модели, прикладные применения: Тр. международ. конф. – Ульяновск: Ульян. гос. техн. ун-т, 2001.–С. 10–12.
3. Березуев Р.И., Курганов С.А., Филаретов В.В., Шеин Д.В. Символьный анализ и диагностика электронных цепей // Гос. координационный центр информационных технологий. – 2004.– №ОФАП 3981; № ГР 50200401291.
4. Березуев Р.И., Курганов С.А., Филаретов В.В., Шеин Д.В. SCAD – система символьного анализа и диагностики линейных электронных цепей // Схемно-топологические модели активных электрических цепей: синтез, анализ, диагностика: Тр. международ. конф. КЛИН–2005.– Ульяновск: УлГТУ, 2005.– Т. 4.– С. 3–10.
5. Курганов Д.С., Филаретов В.В. Программа символьного анализа и диагностики электронных цепей CIRSYMW32.– М.: ОФАП Госкоорцентра Минобрнауки России. – № ОФАП 9589; №ГР 50200702592. – 2007.

6. Филаретов В.В. Программа символьного анализа CIRSYM: история создания, структура и функции // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. научн. труд. – Ульяновск: УлГТУ, 2012.– Вып. 10.– С.158–171.

7. Filaretov V., Gorshkov K. Efficient generation of compact symbolic network functions in a nested rational form // International Journal of Circuit Theory and Applications: Research articles. – May 2020.– P. 1–25.

8. Шеин Д.В. Интерпретатор сложных символьных выражений схемных функций // Тез. докл. 34 науч.-техн. конф. – Ульяновск: УлГТУ, 2000.– С. 6–7.

9. Туищев А.И. Принципы моделирования тепловых режимов вычислительных устройств методом электротепловых аналогий // Инновации, наука, образование. – Тольятти, 2018.– № 5.

10. Lasance C., Ten Years of Boundary-Condition-Independent Compact Thermal Modelling of Electronic Perts: A Rewiew. Heat Transfer Enginiring. 2008.– Vol. 29.– P. 149–168.

11. Сигорский В.П. Математический аппарат инженера. – Изд. 2-е, стереотип. «Техника», 1977.– 768 с.

12. http://www.powersemi.cc/hchi_admin/upfile/GD35PIT120C5SN.pdf

13. Кузьмин Н.П., Курганов Д.С., Филаретов В.В. Параллельный расчет символьных определителей полных матриц высокого порядка при произвольном числе процессоров // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. труд. – Ульяновск: УлГТУ, 2022.– Вып. 17.– С.135–141.

Работа выполнена в рамках госзадания ИРЭ им. В.А.Котельникова РАН.

Кузьмин Николай Павлович – аспирант

Ульяновского Государственного технического университета,
инженер I категории УФИРЭ им. В.А. Котельникова РАН.

E-mail: niko_rus@mail.ru.

МАТРИЧНЫЙ АНАЛИЗ

ИНТЕРПРЕТАТОР ДЛЯ РАСЧЕТА СЛОЖНЫХ ЧИСЛЕННО-СИМВОЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ МАТРИЧНЫХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

П. В. Недорезов, В. В. Филаретов

Предложен простой алгоритм и реализована программа вычисления сложных алгебраических выражений в режиме интерпретации. Показана эффективность программы при расчете по частям определителей разреженных матриц высокого порядка (от сотен до тысяч). Вычисление значений требует пренебрежимо малого времени по сравнению с генерацией выражения. Общие затраты на расчет определителей в десятки раз меньше, чем требуют расчеты в системе Maple.

A simple algorithm is proposed and a program for calculating complex algebraic expressions in interpretation mode is implemented. The effectiveness of the program in calculating the determinants of high-order sparse matrices (from hundreds to thousands) in parts is shown. Calculating values requires negligible time compared to generating an expression, the total cost of calculating determinants is ten times less than calculations in the Maple system require.

Символьные выражения и их интерпретация. Представление результатов в аналитическом (символьном) виде повышает интеллектуальный уровень систем автоматизации схемотехнического проектирования и математического обеспечения автоматизированных рабочих мест [1–7]. Визуализация численного результата в виде символьного решения позволяет «рассмотреть структуру числа», провести оптимизацию параметров, убрать элементы, мало влияющие на работоспособность устройства и т.д.

Однако полезные свойства символьных выражений, позволяющие качественно оценить влияние параметров, необходимо дополнять

возможностью численного расчета. Интерпретатор CalcSym [8] используется почти четверть века совместно с программой символьного анализа и диагностики электронных цепей CirSym (Circuit Symbol) [2–7]. С 2007 года программа CirSym была оснащена графическим редактором SCAD [4]. Среди тестов практических схем используются схемы замещения избирательного усилителя Лаксберга и $\mu A741$ [7], содержащие десятки узлов и сотни элементов.

К интерпретатору CalcSym не было замечаний [9,10] до разработки эффективных программ разложения матричных определителей на основе половинного деления матрицы [11–19]. Минимизировать сложность выражения определителя оказалось возможным, представив его в виде суммы произведений двух сомножителей-миноров равного порядка или с порядками, отличающимися на единицу, то есть при половинном делении матрицы [11]. Это обеспечивает не только наименьший объем алгебраических выкладок для получения результата, но и равномерную загрузку процессоров при параллельном разложении определителей в случае матрицы четного порядка. При нечетном порядке размерности миноров будут отличаться на единицу. Такую загрузку процессоров (ядер) при большом порядке матрицы также можно считать равномерной.

Различие в порядках миноров не будет сказываться на времени генерации и интерпретации, если нагрузкой процессоров являются пары миноров – подмножества слагаемых определителя. Например, если 6 пар миноров в случае матриц Гинзбурга считать на 6 процессорах (вместо 12), то затраты времени процессоров (ядер) будут мало отличаться. Столь же равномерная загрузка получается при делении слагаемых определителя в виде пар сомножителей-миноров на произвольное число процессоров [15].

После перехода к алгоритмам на основе половинного деления матрицы время генерации символьных выражений для полных [11–14] и разреженных [15,16] матриц высоких порядков оказалось сопоставимым или даже меньшим времени их вычисления программой CalcSym. Практика занесения формируемого выражения на жесткий диск оказывается несостоятельной по мере усложнения формулы. Размеры символьного результата для сложных схем или систем уравнений столь велики, что вычисление может потребовать больше времени, чем генерация выражений [13,14,17]. Тем более, невозможна компиляция таких выражений в

системах программирования для проведения многовариантных расчетов и оптимизации.

Занесение на диск и чтение с диска требует во много раз больше времени, чем использование оперативной памяти. Непрерывное обращение для посимвольной интерпретации выражения приводит к аномальной работе (с характерным звуком) и преждевременному износу жесткого диска. В случае полных матриц относительно невысокого (до 40) появилась альтернатива в виде отказа от интерпретации и формирования последовательных выражений миноров, вычисляемых в ходе генерации [14,15].

Этот алгоритм недавно был усовершенствован [18,19] путем учета одинаковых строк, образующихся в подматрицах при половинном делении, что позволило увеличить порядок матриц Кирхгофа с 34-го [15] до 44-го [19]. По-прежнему для каждой пары миноров используется общий шаблон в виде последовательности выражений. В случае разреженных матриц использование подобных шаблонов невозможно, поскольку заполнение пар миноров ненулевыми элементами различное – меняется от сочетания к сочетанию строк [14,18].

Для ускорения расчета программа CalcSym встраивалась в программу HalfsMat, что позволило рассчитать определители матриц Гинзбурга до 500-го порядка [17]. Однако увеличение затрат времени, например, в 3 раза при переходе от порядка 400 к порядку 500 [17] препятствует дальнейшему усложнению матрицы. В данной статье обсуждаются возможности усовершенствования интерпретатора CalcSym для повышения эффективности интерпретации сложных алгебраических выражений. Целью является сокращение времени интерпретации до значений, которыми можно пренебречь по сравнению со временем вывода формулы. Мотивы модификации CalcSym, алгоритм и программа специализированного интерпретатора CalcMat представлены ниже.

Матрицы Гинзбурга. Матричные модели практических схем, сетей, объектов произвольной физической природы обладают высокой разреженностью и представляются ленточными матрицами. В качестве тестовой разреженной матрицы было удобно использовать пяти диагональную матрицу Гинзбурга 40-го порядка [20]. После обобщения [17] матрицы Гинзбурга можно формировать, начиная с шестого порядка,

до произвольного порядка. Значения определителей, как и значения элементов матриц, являются целочисленными, что упрощает отладку программ разложения и вычисления матричных определителей.

В [17] было показано, что матрица Гинзбурга порядка p соответствует каскадному соединению $p-2$ четырехполюсников. Например, схемная модель в виде каскадного соединения $(6-2=4)$ четырех четырехполюсников соответствует матрице Гинзбурга порядка 6:

1	5	-4	1			
2	-4	6	-4	1		
3	1	-4	6	-4	1	
4		1	-4	6	-4	1
5			1	-4	6	-4
6				1	-4	5
	1	2	3	4	5	6

(1)

Половинное деление этой матрицы – граница левой и правой подматриц – показано жирной линией. Подматрицы имеют размерность 6 на 3. Присвоение численных значений элементам, заданным номером строки и столбца, согласно формату исходного файла [17] выполняется через символ подчеркивания: $1_1=5$; $1_2=-4$; $1_3=1$; $2_1=-4$; $2_2=6$; $2_3=-4$; $2_4=1$; $3_1=1$; $3_2=-4$; $3_3=6$; $3_4=-4$; $3_5=1$; $4_2=1$; $4_3=-4$; $4_4=6$; $4_5=-4$; $4_6=1$; $5_3=1$; $5_4=-4$; $5_5=6$; $5_6=-4$; $6_4=1$; $6_5=-4$; $6_6=5$.

Пары алгебраического дополнения $m1$ и минора $m2$, соответствующие левой и правой подматрицам матрицы (1), образуют 6 слагаемых:

$$\begin{aligned}
 &1) m1=5, \quad m2=5; \quad 2) m1=-(4*5-4), \quad m2=5*4-4; \\
 &3) m1=6*5-4*4, \quad m2=5*(4*4-6)-4*4+1; \\
 &4) m1=4*(4*5-4)+1-6*5, \quad m2=5*6-4*4; \\
 &5) m1=-(4*(6*5-4*4)+4-4*5), \quad m2=5*(6*4-4)-4*4*4+4; \\
 &6) m1=6*(6*5-4*4)+4*(4-4*5)+4*4-6, \\
 &\quad m2=5*(6*6-4*4)+4*(4-4*6)+4*4.
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

Сумма произведений шести пар $m1*m2$ в подвыражениях (2), полученная с помощью интерпретатора CalcSym, равна 49.

Исключение из строки выражения унарных минусов для их учета в интерпретаторе. В шести парах подвыражений (2) отсутствуют унарные минусы перед значением «4». Эти подвыражения упрощены в процессе

генерации формулы разложения определителя матрицы (1) для ускорения последующей интерпретации (вычисления).

Типичное для матриц наличие отрицательных значений (обычно вне главной диагонали) стоит учесть, предусмотрев «согласование генератора с интерпретатором». Генератор будет заносить в строку положительные значения вместо отрицательных, а интерпретатор – учитывать фактический знак значений после их считывания. Для матриц больших порядков это почти на треть сокращает строку за счет унарных минусов и связанных с ними пар скобок. Допустимая длина строки выражения обуславливает предельный порядок матриц, подлежащих расчету.

Упрощения символьных выражений, обусловленные одинаковыми значениями и значениями, равными 1. Упрощения, выполняемые в ходе генерации, не должны отнимать значительного времени, например, для сдвига продолжения строки. Необходимо корректировать добавляемый фрагмент перед его занесением в строку, как показано на примере подвыражений для пар миноров (2), где удалены избыточные умножения на единицу. Подвыражения (2) отличаются и тем, что в них отсутствуют идентификаторы элементов матрицы, которым присваиваются значения перед вычислением определителя.

Исключение из выражения идентификаторов элементов матрицы. Вместо идентификаторов целесообразно записывать в строку численные значения, то есть формировать численно-символьное выражение минора без операторов присваивания, иницилирующих вычисления. Это не только избавит от сопровождения процесса интерпретации таблицей переменных и соответствующих операций присваивания, но и упростит синтаксический разбор выражения, в котором отсутствуют идентификаторы.

Выигрыш по времени вычислений от этого нововведения будет больше, если значения элементов матрицы по количеству цифр не превышают длины идентификаторов. При этом значительно уменьшится длина строки, в которую помещается выражение минора. Для матрицы Гинзбурга до 1000-го порядка максимальная длина идентификатора составляет семь символов, например, a999_999.

Интерпретатор алгебраического выражения CalcMat. Обработка при каждой интерпретации только одного выражения – без операторов, иницилирующих присваивание значений, не только упростит алгоритм. На

каждом шаге расчета идентификатор минора в формируемом выражении будет один – в левой части при вызове функции. Это иллюстрирует фрагмент программы на Си:

```
c[0]='\0'; // строка, хранящая выражение
b=c; // указатель к началу строки c.
strcat(b,"m1="); b+=3; // указатель к началу правой части выражения
... b++; // переход очередному символу строки c
... // формирование выражения
strcat(b++,";"); // занесение в строку c символа «;» конца выражения
b=c+3; // возвращение указателя к началу правой части выражения
m1=calc(!); // вычисление значения m1 интерпретатором calc
```

Текст функции CalcMat, возвращающей целое значение, которое равно определителю целочисленной матрицы, приводится ниже:

```
int CalcMat (char flag) // интерпретатор алгебраического выражения
{
    int val = 0; // промежуточное или результирующее значение
    for (;;) // синтаксический разбор строки c
    { // вычисление подвыражения внутри скобок
        if (b[0] == '(') {b++; val= CalcMat (!); b++;}
        else if (b[0] == '+' || b[0] == '-')
        { // аддитивные операции
            if (flag == '!')
            { b++; // переход очередному символу строки c
              // добавление или вычитание второго слагаемого
              if (*(b-1) == '+') val = val +CalcMat (*(b-1));
              else val = val – CalcMat (*(b-1)); }
            else return (val); // значение первого слагаемого
        }
        else if (b[0] == '*')
        { // операция умножения
            b++;
            if (b[0] == '(') val = val * CalcMat (*); // сомножитель в скобках
            else // умножение сомножителей
                {if (b[0] == '4') val = val * (- 4); else val = val * (b[0]-48); b++;}
        }
        else if (b[0] == ')' || b[0] == ';') return(val); // значение выражения
    }
```

```

        // чтение из строки числа val
    else {if (b[0] == '4') val = -4; else val = b[0] - 48; b++;}
} }

```

Для облегчения понимания алгоритма интерпретации численные значения, используемые в формулах, являются натуральными числами от 0 до 9. Этого диапазона достаточно для расчета определителей матриц Гинзбурга. В тексте CalcMat предусматривается, что отрицательным может быть только значение «4». Смена знака выполняется в двух условных операторах, записанных жирным шрифтом. Работа цикла for(;;) без явного указания параметров останавливается оператором return(val), который передает значение в функцию, вызывающую calc().

При обращении к функции CalcMat формальный параметр flag='!', поэтому осуществляется переход к последнему else без условий. Внутри функции этот параметр может принимать такое же значение «!» после открывающей скобки, что равносильно началу вычислений. При этом выполняется рекурсивный вызов calc при значении указателя строки b[0], равном открывающей скобке: if (b[0] == '(') { b++; val=calc(!); b++; } . Другие возможные три значения переменной flag равны '+', '-' или '*', что указывает на переход внутри цикла for(;;) на оператор else с соответствующими условиями.

Реализацию функции CalcMat упрощает сочетание цикла for(;;), перебирающего по порядку символы строки смещением указателя b++, с рекурсивными вызовами. При этом не требуются возвраты на предшествующие позиции строки за исключением просмотра значения предыдущего символа *(b-1).

Использование функции CalcMat в программах HalfsVal и jHalfsVal. В программе HalfsVal, написанной на Си, [17] функция CalcSym была заменена на функцию CalcMat. Затем программа HalfsVal переведена П. В. Недорезовым на язык программирования Ява. К имени программы добавился суффикс «j»: jHalfsVal. Результаты тестирования обеих программ на матрицах Гинзбурга с порядками $p=400 - 1200$ приведены в табл. 1. В столбцах с показателями времени программ HalfsVal и jHalfsVal: А, В, С указано: А – время генерации символьного выражения одного

минора, В – время интерпретации этого выражения, С – суммарное время вычисления шести пар миноров матрицы Гинзбурга.

Таблица 1. Значения определителей (det) матриц Гинзбурга порядка p и время вычислений программами HalfsVal, jHalfsVal и Maple

p	det	Время, в секундах						
		HalfsVal			jHalfsVal			Maple: функция det
		A	B	C	A	B	C	
400	160801	1,5	0,0	18	0,5	0,5	7	117
500	251001	4,5	0,0	53	1,1	0,1	15	253
600	361201	7,0	0,3	86	1,6	0,2	22	478
700	491401	10,0	0,5	129	3,3	0,4	31	872
800	641601	17,1	1,1	214	3,7	0,6	54	1264
900	811801	31,2	1,2	383	8,1	1,1	109	2284
1000	1002001	50,1	2,4	625	16,5	1,5	211	3214
1200	1442401	80,2	4,0	1017	22,2	3,0	310	–

Целочисленные расчеты определителей матриц Гинзбурга в системе Maple выполнялись с помощью функции *det* и сведены в последний столбец табл. 1. Во всех случаях использовался компьютер с процессором Intel Core i5-11400F (2.6 - 4.4 GHz).

Тестирование показало, что версия программы на языке Ява – jHalfsVal более, чем в 3 раза, превосходит по быстродействию программу-прототип на языке Си – jHalfsVal. Система Maple намного отстает по времени от обеих программ. Например, на порядке 1000 отставание примерно в 5 и 16 раз соответственно.

Следует отметить, что предыдущая версия программы HalfsVal [17] значительно уступала Maple уже на порядках 400 и 500. Время вычисления определителей этих матриц Гинзбурга было соответственно 286 и 924 секунд [17], что в 2,5 – 3,5 раза превышает значения Maple (табл. 1). Новые версии программы HalfsVal на этих порядках имеют 15 – 20 кратное преимущество (табл. 1).

Выводы: 1. Разработан алгоритм и программа (функция CalcMat) для интерпретации сложных алгебраических выражений матричных определителей. Многократно уменьшено время интерпретации и требуемая емкость оперативной памяти за счет преобразования выражений в ходе генерации и упрощения синтаксического разбора. 2. Функция CalcMat используется в новых версиях программы HalfsVal [17] на языках Си и Ява. Расчет определителей разреженных матриц высокого порядка показал многократное преимущество новых версий HalfsVal в скорости вычислений на одном процессоре по сравнению с системой компьютерной алгебры Maple. При многопроцессорной обработке отставание Maple увеличивается в десятки-сотни раз.

Список литературы

1. Компьютерная алгебра: Символьные и алгебраические вычисления / Под ред. Б.Бухбергера, Дж.Коллинза, Р.Лооса. – М.: Мир, 1986.– 392 с.
2. Филаретов В.В., Шеин Д.В. Формирование, интерпретация и компиляция символьных функций электронных схем // Логико-алгебраические методы, модели, прикладные применения: Тр. международ. конф. – Ульяновск: Ульян. гос. техн. ун-т, 2001.–С. 10–12.
3. Березуев Р.И., Курганов С.А., Филаретов В.В., Шеин Д.В. Символьный анализ и диагностика электронных цепей // Гос. координационный центр информационных технологий. – 2004.– №ОФАП 3981; № ГР 50200401291.
4. Березуев Р.И., Курганов С.А., Филаретов В.В., Шеин Д.В. SCAD – система символьного анализа и диагностики линейных электронных цепей // Схемно-топологические модели активных электрических цепей: синтез, анализ, диагностика: Тр. международ. конф. КЛИН–2005.– Ульяновск: УлГТУ, 2005.– Т. 4.– С. 3–10.
5. Курганов Д.С., Филаретов В.В. Программа символьного анализа и диагностики электронных цепей CIRSYMW32.– М.: ОФАП Госкоорцентра Минобрнауки России. – № ОФАП 9589; №ГР 50200702592. – 2007.
6. Филаретов В.В. Программа символьного анализа CIRSYM: история создания, структура и функции // Синтез, анализ и диагностика

электронных цепей: Международ. сб. научн. труд. – Ульяновск: УлГТУ, 2012.– Вып. 10.– С.158–171.

7. Filaretov V., Gorshkov K. Efficient generation of compact symbolic network functions in a *nested* rational form // International Journal of Circuit Theory and Applications: Research articles. – May 2020.– P. 1–25.

8. Шеин Д.В. Интерпретатор сложных символьных выражений схемных функций // Тез. докл. 34 науч.-техн. конф.– Ульяновск: УлГТУ, 2000.– С. 6–7.

9. Королев Ф.А., Филаретов В.В. Сравнение способов наращивания и половинного деления при символьном раскрытии матричных определителей // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр. – Ульяновск: УлГТУ, 2009. – Вып. 7. – С. 183–193.

10. Филаретов В.В. Генерация компактных формул для матричных определителей // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2012.– Вып.10.–С.120–133.

11. Недорезов М.В., Филаретов В.В. Минимальные формулы определителей полных матриц на основе их половинного деления // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. научн. труд. – Ульяновск: УлГТУ, 2020.– Вып. 16. – С. 124–144.

12. Курганов Д.С., Тимофеев В.Ф., Филаретов В.В. Разложение символьных определителей полных матриц высокого порядка // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. научн. труд. – Ульяновск: УлГТУ, 2020.– Вып. 16.– 145–152.

13. Недорезов П.В., Филаретов В.В. Оптимизация символьных определителей разреженных матриц // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2020. – Вып. 16.– С. 153–163.

14. Недорезов М.В., Тимофеев В.Ф., Филаретов В.В. Вычисление символьных определителей полных матриц на основе их половинного деления и наращивания строк // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. научн. труд. – Ульяновск: УлГТУ, 2022.– Вып. 17. – С. 120–134.

15. Кузьмин Н.П., Курганов Д.С., Филаретов В.В. Параллельный расчет символьных определителей полных матриц высокого порядка при

произвольном числе процессоров // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. труд. – Ульяновск: УлГТУ, 2022.– Вып. 17.– С.135–141.

16. Недорезов П.В., Филаретов В.В. Оптимизация символьных определителей разреженных матриц // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2020. – Вып. 16.– С. 153–163.

17. Горшков К.С., Недорезов, П.В. Филаретов В.В. Генерация и вычисление компактных символьных определителей для разреженных матриц высокого порядка // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: международ. сб. науч. труд. – Ульяновск: УлГТУ, 2022.– Вып. 17. – С. 142–151.

18. Филаретов В.В. Преобразование выражения определителя полной матрицы в последовательную формулу на основе генерации сочетаний // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: международ. сб. науч. труд. – Ульяновск: УлГТУ, 2024.– Вып. 18.

19. Курганов Д.С., Филаретов В.В. Быстрое вычисление определителей полных матриц высокого порядка на основе последовательных формул половинных миноров // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: международ. сб. науч. труд. – Ульяновск: УлГТУ, 2024.– Вып. 18.

20. Уилкинсон Д., Райнш К. Справочник по алгоритмам на языке Алгол: Линейная алгебра. – М.: Машиностроение, 1976.– 389 с. [Wilkinson J.H., Reinsch C. Handbook for automatic computation: Linear algebra. – Heidelberg New York Springer–Verlag Berlin.].

21. Дьяконов В.П. Maple 10/11/12/13/14 в математических расчетах. – М.: ДМК Пресс, 2011.– 800 с.

Недорезов Петр Владимирович – выпускник магистратуры Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета – ЛЭТИ им. В.И.Ленина. E-mail: pyatakpy@rambler.ru .

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ПОЛНОЙ МАТРИЦЫ В ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНУЮ ФОРМУЛУ НА ОСНОВЕ ГЕНЕРАЦИИ СОЧЕТАНИЙ

В. В. Филаретов

Предложен алгоритм наращивания строк полной матрицы порядка p и формирования последовательного выражения, содержащего подвыражения, соответствующие минорам 2, 3, ...($p-1$)-го порядка. При этом формируется не выражение, а шаблон определителя заданного порядка, содержащий только номера предыдущих подвыражений. Этот шаблон для матриц высокого порядка получается один раз за минуты-часы, а вычисляется многократно за секунды.

An algorithm is proposed for increasing the rows of a complete matrix of order p and forming a sequential expression containing subexpressions corresponding to the minors of the 2nd, 3rd, ...($p-1$) th order. In this case, not an expression is formed, but a template of the determinant of a given order, containing only the numbers of the previous subexpressions. This template for high-order matrices is obtained once in minutes or hours, and calculated many times in seconds.

О вычислениях в процессе генерации выражения. Наиболее сложными для разложения определителя в аналитическом виде являются полностью заполненные матрицы (полные матрицы) [1–3]. Для ускорения вычисления значения определителя в процессе генерации символьного выражения предложено представлять миноры половинного порядка в виде последовательных выражений, вычисление которых не требует интерпретации [4]. Выражение определителя полной матрицы с увеличением порядка на единицу увеличивается примерно в 2 раза, поскольку число сочетаний пар миноров удваивается.

Это позволило на средних по производительности компьютерах двукратно превзойти существующие ограничения на порядок полных матриц для символьных вычислений. Однако даже при самом эффективном способе деления такой матрицы предельного, например, 34-го порядка – на

миноры половинного 17-го порядка – для хранения числа пар сомножителей слагаемых определителя не хватает обычной размерности целого числа в 4 байта [5]. Для ускорения вычислений необходима оптимизация алгоритма формирования последовательных выражений, реализованного в программе **HalfSeq** [4].

Идея последовательного объединения (наращивания) строк матрицы порядка p предусматривает формирование подвыражений для всех миноров $2, 3, \dots (p-1)$ -го порядка, включающих первые две, три, и т.д. строки. Заключительное $(p-1)$ -е объединение строк приводит к минору p -го порядка – определителю матрицы и соответствующему подвыражению, завершающему сформированное последовательное выражение.

Последовательное выражение определителя полной матрицы характеризуется числом подвыражений n_1 и числом слагаемых (пар операндов) в подвыражениях n_2 . При упорядоченной записи слагаемых их знаки чередуются, что является следствием зависимости знака от четности строки и столбца выбранного элемента. Первым в подвыражении идет слагаемое с положительным знаком (без знака). Число слагаемых в подвыражении для миноров одного порядка одинаково и равно числу слагаемых в разложении. Значения подвыражений для миноров i -го порядка используются в подвыражениях $(i+1)$ -порядка.

С увеличением порядка показатели сложности последовательного выражения увеличиваются комбинаторно. Например, для 40-го порядка: $n_1=1048573$ и $n_2=20971480$, а для 42-го: $n_1=2097149$ и $n_2=44040150$, то есть показатели сложности последовательного выражения примерно удваиваются. Следует напомнить, что последовательные выражения формируются не для исходной матрицы, а для половинных миноров, порядки которых соответственно 20 и 21. Уже на этих порядках примерно вдвое уменьшается число верных цифр результата на хорошо обусловленных матрицах вследствие накопления погрешности последовательного выражения, усложняющегося с кратностью двум. Тем не менее, формирование последовательных выражений для половинных миноров целесообразно, так как обеспечивает раскрытие и вычисление определителей высокого порядка, как с приемлемой точностью, так и быстродействием, не требуя интерпретации алгебраических выражений.

Хранение выражений определителей полных матриц на жестком диске делает их бесполезными, поскольку затраты времени на интерпретацию в несколько раз превышают время генерации выражения [3,4]. Вариантом, позволяющим использовать преимущества символьных выражений, является вычисление значения определителя в процессе генерации символьного выражения. Это выражение будет не записываться на жесткий диск, а храниться в оперативной памяти по мере вычисления. При совмещении генерации формулы с ее вычислением все операции выполняются в оперативной памяти компьютера.

Необходимость последующей интерпретации или компиляции возникает, при формировании единых выражений. Если выражение представляет собой иерархическую последовательность подвыражений, являясь последовательным выражением, то значения предыдущих подвыражений подставляются в последующие подвыражения. При этом важно, что хранение самих подвыражений не требуется, так как для других параметров может быть проведен повторный быстрый расчет по компактному шаблону выражения, сформированному для заданного порядка [4]. Последовательные выражения наглядно формируются наращиванием строк матрицы [6,7]. Этот алгоритм не требует доказательства, поскольку основан на разложении определителя по элементам добавляемой строки.

Последовательное выражение определителя полной матрицы 4-го порядка. Сформируем такие выражения для матрицы X:

0_0	0_1	0_2	0_3
1_0	1_1	1_2	1_3
2_0	2_1	2_2	2_3
3_0	3_1	3_2	3_3

Рис. 1. Полная матрица четвертого порядка

Нумерация строк и столбцов, а также номеров подвыражений начинается с нуля. Первая и вторая строки матрицы имеют вид:

$X_{0_0} \ X_{0_1} \ X_{0_2} \ X_{0_3}$ и $X_{1_0} \ X_{1_1} \ X_{1_2} \ X_{1_3}$.

Левые части подвыражений, обозначенные символом «V» имеют непрерывную порядковую нумерацию от нуля. Первые четыре подвыражения последовательности – элементы первой строки:

$$V0=X0_0; V1=X0_1; V2=X0_2; V3=X0_3. \quad (1)$$

Объединение строк 1 и 2

0_0	0_1	0_2	0_3
1_0	1_1	1_2	1_3

состоит в образовании допустимых множеств индексов, взятых из разных столбцов первой и второй строки соответственно в виде суммы декартовых произведений множеств:

$$0 * (1+2+3) + 1 * (0+2+3) + 2 * (0+1+3) + 3 * (0+1+2). \quad (2)$$

После раскрытия скобок в (2) получается 12 размещений из четырех элементов по два. Порядок следования элементов в них не существен, поэтому пары с одинаковыми элементами можно задать одним кодом по возрастанию значения элемента. В результате 12 пар элементов сводятся к 6 парам: {01,02,03,12,13,23}, которые являются сочетаниями из 4 по 2. Двухзначный код элемента однозначно соответствует номеру подвыражения: V4, V5, V6, V7, V8, V9, являющемуся одним из миноров второго порядка:

$$\begin{aligned} V4 &= V0 * X1_1 - V1 * X1_0; \\ V5 &= V0 * X1_2 - V2 * X1_0; \\ V6 &= V0 * X1_3 - V3 * X1_0; \\ V7 &= V1 * X1_2 - V2 * X1_1; \\ V8 &= V1 * X1_3 - V3 * X1_1; \\ V9 &= V2 * X1_3 - V3 * X1_2. \end{aligned} \quad (3)$$

Номер первого подвыражения блока подвыражений (3) следует за номером последнего подвыражения предыдущего блока (1). Каждое подвыражение блока (3), соответствующее объединению первых двух строк, в левой части характеризуется его порядковым номером после символа «V». Слагаемые подвыражения образуют сумму произведений двух сомножителей. Первый сомножитель каждого слагаемого имеет номер, отсылающий к соответствующему подвыражению первого – иницилирующего вычисления – блоку подвыражений (1). Вторым сомножителем является одним из элементов добавляемой второй строки.

Обратим внимание на то, что номер используемого подвыражения предыдущего блока и второй индекс (индекс столбца) добавляемой второй строки матрицы каждого подвыражения блока (2) образуют упомянутые ранее 12 размещений: {01,10; 02,20; 03,30; 12,21; 13,31; 23, 32}, составленных из элементов каждого сочетания. Однако такая простая

группировка размещений по подвыражениям присуща только добавлению второй строки, что можно учесть в алгоритме формирования последовательного выражения определителя полной матрицы.

Подвыражения, соответствующие объединению первых трех строк,

0_0	0_1	0_2	0_3
1_0	1_1	1_2	1_3
2_0	2_1	2_2	2_3

характеризуется тремя индексами столбцов. Добавление третьей строки $X2_0 \ X2_1 \ X2_2 \ X2_3$ к объединению двух первых строк (блоку (2)) заключается в образовании допустимых комбинаций элементов, взятых из сочетаний, соответствующих объединению первой и второй строки, и дополняющих элементов третьей строки, что соответствует декартовому произведению множеств:

$$\begin{aligned}
 &V4 \quad \quad \quad V5 \quad \quad \quad V6 \quad \quad \quad V7 \quad \quad \quad V8 \quad \quad \quad V9 \\
 &01 * (2+3) + 02 * (1+3) + 03 * (1+2) + 12 * (0+3) + 13 * (0+2) + 23 * (0+1). \\
 &= 01 * 2 + 01 * 3 + 02 * 1 + 02 * 3 + 03 * 1 + 03 * 2 + 12 * 0 + 12 * 3 + 13 * 0 \\
 &+ 13 * 2 + 23 * 0 + 23 * 1 .
 \end{aligned} \tag{4}$$

Первые сомножители выражения (4) сверху помечены соответствующими обозначениями подвыражений блока (3). После раскрытия скобок, как и в предыдущем случае, получается 12 комбинаций, которые после приведения подобных членов (без учета порядка следования индексов) образуют все возможные 4 минора третьего порядка и раскрываются четырьмя подвыражениями:

$$\begin{aligned}
 V10 &= V4 * X2_2 - V5 * X2_1 + V7 * X2_0; \\
 V11 &= V4 * X2_3 - V6 * X2_1 + V8 * X2_0; \\
 V12 &= V5 * X2_3 - V6 * X2_2 + V9 * X2_0; \\
 V13 &= V7 * X2_3 - V8 * X2_2 + V9 * X2_1;
 \end{aligned} \tag{5}$$

Вместо комбинаций индексов, соответствующих кодовым сочетаниям предыдущего блока (3), указываются их порядковые номера (без пропусков) в списке подвыражений (показаны в (3) над сочетаниями. Очевидно, что число подвыражений в (5) равно числу сочетаний из 4 по 3.

Добавление последней – четвертой – строки $X3_0 \ X3_1 \ X3_2 \ X3_3$ к третьему блоку (5) заключается в образовании допустимых комбинаций элементов, взятых из разных столбцов первой, второй, третьей и четвертой строки, то есть сумме декартовых произведений множеств, которое не требует использования скобок:

$$012 * 3 + 013 * 2 + 023 * 1 + 123 * 0$$

что соответствует объединению всех четырех строк матрицы, поскольку характеризуется всеми четырьмя индексами столбцов: 0123. Все четыре слагаемых подобны, поэтому получается одно подвыражение

$$V14 = V10 * X3_3 - V11 * X3_2 + V12 * X3_1 - V13 * X3_0, \quad (6)$$

значение которого равно определителю полной матрицы 4-го порядка.

Число подвыражений в (6) равно числу сочетаний из 4 по 4, то есть 1.

В решении этого примера просматривается общий алгоритм, когда добавляется третья строка. Базовое значение, после которого начинается нумерация подвыражений этого третьего блока (5), равно 9, то есть нумерация подвыражений начинается с 10. Номера первых множителей в слагаемых находятся в диапазоне 4, 5, ..., 9 номеров подвыражений предыдущего блока (3). Базовым значением для номеров первых множителей слагаемых блока (5) является номер последнего подвыражения первого блока (1), то есть 3.

Распределение слагаемых декартового произведения строк среди подвыражений. Этот шаг является самым сложным в предлагаемом алгоритме. Распределим слагаемые декартового произведения (4) среди четырех подвыражений (5). Из рассмотренного выше примера следует, что слагаемые декартового произведения являются всеми возможными сочетаниями из номеров столбцов {0,1,2,3} по 3: {012, 013, 023, 123}. Это коды четырех подвыражений, порядковые номера которым 10, 11, 12, 13 присваиваются в порядке кодов рассматриваемых четырех сочетаний.

Код слагаемых третьего блока подвыражений (5) образован кодами второго блока (3) в виде двух первых цифр и индексами столбцов третьей строки матрицы. Вместо того, чтобы раскрывать выражение (4) и заниматься трудоемкой сортировкой слагаемых, предлагается обработка приведенных выше сочетаний.

Возьмем первое сочетание 012. Поочередно удаляя его элементы, начиная с конца, получаем последовательность сочетаний с меньшим на единицу числом элементов: {01,02,12}. Именно эти сочетания записываются при раскрытии выражения (4) перед знаком «*» и соответствуют кодам подвыражений предыдущего блока: V4, V5, V7, которые используются в качестве первых сомножителей слагаемых искомого подвыражения V10. Номерами вторых сомножителей слагаемых

этого подвыражения являются индексы, удаленные из рассматриваемых сочетаний, то есть: 2, 1, 0, которые следуют после знака «*» в результате раскрытия выражения (3). Таким образом, подвыражение V10 получено.

Далее так же можно выполнять сортировку слагаемых по их коду, минуя раскрытие выражения (4) и сравнение слагаемых развернутого выражения между собой. Аналогично получают оставшиеся подвыражения, например V13 с кодом 123. Для этого поочередно удаляются элементы этого сочетания, начиная с конца, и получается последовательность сочетаний: {12,13,23}.

Эти сочетания соответствуют кодам подвыражений предыдущего блока: V7, V8, V9, которые используются в качестве первых сомножителей слагаемых искомого подвыражения V13. Номера используемых подвыражений получаются добавлением номеров рассматриваемых сочетаний в их последовательности к базовому значению, то есть: $3+4=7$, $3+5=8$, $3+6=9$. Номерами вторых сомножителей слагаемых этого подвыражения являются индексы, отсутствующие в рассматриваемых сочетаниях, то есть: 3, 2, 1. Подвыражение V13 получено.

Завершение решения примера показывает, что число блоков последовательного выражения полной матрицы порядка p равно p , а число подвыражений в i -м блоке равно числу сочетаний из p по i .

Алгоритм формирования последовательного выражения. В предлагаемом алгоритме два основных шага: 1) занесение в последовательность первого блока подвыражений:

$$V0=X0_0; V1=X0_1; V2=X0_2; \dots VP=X0_p-1;$$

2) занесение k -го блока C_p^k подвыражений для $k=2,3, \dots p-1$.

В алгоритме формирования подвыражений k -го блока предусматривается: 1) генерация всех возможных сочетаний из p элементов добавляемой строки по $k+1$; 2) каждое сочетание служит основой для образования $(k+1)$ -го слагаемых соответствующего подвыражения в виде двух сомножителей.

Для формирования слагаемых подвыражений выполняется поочередное удаление каждого из элементов. Полученная после удаления комбинация является сочетанием из p элементов по k , а место этой комбинации в списке сочетаний при обратном их порядке является номером первого сомножителя, который вычислен в одном из

подвыражений предыдущего $(k-1)$ -го блока. Номер элемента, который был удален при образовании рассмотренной комбинации, является номером элемента добавляемой строки. Таким образом, при формировании последовательного выражения полной матрицы используются генераторы сочетаний с прямым и обратным порядком следования. В остальном реализация программы генерации последовательных выражений полных матриц не вызывает затруднений.

Для определения порядкового номера выбранного сочетания, требующегося для первого сомножителя слагаемых подвыражений, можно выполнять сравнение перечисляемых сочетаний до совпадения элементов. Однако это не экономно, проще перейти к обратной генерации сочетаний, начиная с выбранного сочетания, и определить число последующих (до исчерпания) сочетаний, не делая сравнения элементов. Это число и будет номером выбранного сочетания (подвыражения) в последовательности сочетаний предыдущего объединения строк.

Шаблон определителя полной матрицы. Последовательное выражение определителя полной матрицы, состоящее из четырех блоков подвыражений: (1), (3), (5), (6), можно использовать для многократных вычислений. Хранить на жестком диске целесообразно шаблон – «выжимку» последовательного выражения, в которой указываются одно за другим номера сомножителей подвыражений, а также разделители блоков и подвыражений в них. Шаблон позволяет воспроизвести последовательное выражение для многократного вычисления.

Например, шаблон первого блока (1): $\{0\ 1\ 2\ 3\}$ очевиден – это присвоение значений элементов первой строки первым p левым частям подвыражений. Шаблоны для блоков подвыражений (3), (5), (6):

$$\begin{aligned} &\{0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 2\ 2\ 0\ 0\ 3\ 3\ 0\ 1\ 2\ 2\ 1\ 1\ 3\ 3\ 1\ 2\ 3\ 3\ 2\} \\ &\{4\ 2\ 5\ 1\ 7\ 0\ 4\ 3\ 6\ 1\ 8\ 0\ 5\ 3\ 6\ 2\ 9\ 0\ 7\ 3\ 8\ 2\ 9\ 1\} \\ &\{10\ 3\ 11\ 2\ 12\ 1\ 13\ 0\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Для хранения и воспроизведения требуется только половина целых чисел шаблонов для блоков 2–4. Эти числа занимают нечетные позиции в соответствующих строках:

$$\begin{aligned} &\{0\ 1\ 0\ 2\ 0\ 3\ 1\ 2\ 1\ 3\ 2\ 3\} \\ &\{4\ 5\ 7\ 4\ 6\ 8\ 5\ 6\ 9\ 7\ 8\ 9\} \\ &\{10\ 11\ 12\ 13\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Числа в четных позициях не требуют хранения, поскольку могут быть получены при воспроизведении шаблона путем генерации обратных сочетаний [4] из множества: {3,2,1,0} по 2, 3, 4 для блоков 2–4:

$$\begin{aligned} &\{10, 20, 30, 21, 31, 32\} \\ &\{210, 310, 320, 321\} \\ &\{3210\}. \end{aligned} \tag{9}$$

Шаблон (7) становится пригодным для воспроизведения последовательного выражения, когда его половина (8), хранящаяся на диске, объединяется с половиной (9), генерируемой в оперативной памяти перед вычислением. Для хранения шаблона (7) в оперативной памяти используется целочисленный вектор P , в который пара за парой записываются номера сомножителей подвыражений каждого блока.

При вычислении последовательного выражения необходимо учитывать границы подвыражений в шаблоне (7). Для этого используются два дополнительных целочисленных вектора с размерностью $p-1$. Например, вектор P шаблона (7) необходимо сопровождать двумя векторами $N=\{3,9,13\}$ и $M=\{24,48,56\}$. В первом векторе N хранятся номера левых частей последних подвыражений первого (1), второго (3) и третьего (5) блоков. Во втором векторе N хранятся номера последних позиций вектора P для первого (1), второго (3) и третьего (5) блоков. «Разметка» вектора P с использованием двух векторов N и M позволяет быстро вычислять определитель матрицы по шаблону в виде трех целочисленных векторов, хранящихся на диске или в оперативной памяти.

Для вычисления по шаблону определителя матрицы четного порядка используется следующая функция, реализованная на языке Си:

```
void pattern(int p) {
    int k,k1,j,j1,v,v2,v3,na,nb,nu,i,i0,i1,i2,m;
    double det=0;
    int k, // порядок минора и его дополнения, равный p/2;
        mnr[mn][k], // массив учитываемых миноров
        mnr_[mn][k], // и дополнений миноров
        mn; // число миноров и дополнений
    int cm[p], // переход от порядкового номера строки минора
        cmk[p], // и дополнения минора к их первому элементу в матрице X
```

```

cmb[k], // текущее сочетание минора
cmb_[k], // текущее сочетание дополнения минора
cmb0[k], // предыдущее сочетание минора
cmb0_[k], // предыдущее сочетание дополнения минора
sgn0=0, // инициализация постоянной составляющей знака минора
sgn, // переменная знака минора
sn[k]; // вектор знаков минора
int V, // значения текущих подвыражений минора
V_; // и дополнения минора для текущего блока;
na, // переменные номера подвыражений минора
nb, // и дополнения минора для текущего блока;
nu; // переменная количества слагаемых текущего блока;
k=p/2; // размерность минора и дополнения минора
for (i=0;i<k;i++) sgn0+=i; // постоянная составляющая знака
for (i=0;i<p;i++) {cm[i]=i*p; // переход от номера строки минора и
cmk[i]=cm[i]+k;} // дополнения минора к номерам элементов матрицы
cmb0[0]=50; cmb0_[0]=50; // начальное значение строки минора
for (i2=0;i2<mn;i2++) { // обновление текущего сочетания cmb
for (m=0;m<k;m++) cmb[m]=mnr[i2][m]; // очередного минора из mnr[mn]
if (cmb[0]!=cmb0[0]) // проверка отличия от предыдущего минора cmb0
{sn[0]=sgn0+cmb[0]; // учет переменной составляющей знака
cmb0[0]=cmb[0]; // обновление первого элемента сочетания
// нахождение номера первого элемента строки cmb[0] в матрице X
j1=cm[cmb[0]];
for (m=0;m<k;m++) V[m]=X[j1+m].val; v=1;} // занесение первой строки
else for (v=1;v<k;v++) if (cmb[v]!=cmb0[v]) break; // минора
na=N[v]; nu=M[v-1];
for (;v<k;v++)
{
v2=2*(v+1); sn[v]=sn[v-1]+cmb[v];
cmb0[v]=cmb[v]; // обновление v-го элемента сочетания
// нахождение номера первого элемента строки cmb[v] в матрице X
j1=cm[cmb[v]]; // для минора
for (;nu<M[v];nu+=v2) { v3=nu+v2; V[++na]=0.;
for (j=nu;j<v3;j+=4) // суммирование слагаемых подвыражения на блока v
{V[na]+=V[P[j]]*X[j1+P[j+1]].val;
if (j+2<v3) V[na]-=V[P[j+2]]*X[j1+P[j+3]].val;}
}}
if (sn[k1]%2) V[na]=-V[na]; // учет знака минора
// обновление текущего сочетания cmb_[m]

```

```

for (m=0;m<k;m++) cmb_[m]=mnr_[i2][m]; // очередного минора из mnr_[mn]
if (cmb_[0]!=cmb0_[0]) // проверка отличия от предыдущего минора cmb0
{cmb0_[0]=cmb_[0]; // обновление первого элемента сочетания
// нахождение номера первого элемента строки cmb_[0] в матрице X
j1=cmk[cmb_[0]]; // для дополнения минора
for (m=0;m<k;m++) V_[m]=X[j1+m].val; v=1;} // занесение первой строки
else for (v=1;v<k;v++) if (cmb_[v]!=cmb0_[v]) break; // дополнения минора
nb=N[v]; nu=M[v-1];
for (;v<k;v++)
{
cmb0_[v]=cmb_[v]; v2=2*(v+1);
// нахождение номера первого элемента строки cmb_[v] в матрице X
j1=cmk[cmb_[v]]; // для дополнения минора
for (;nu<M[v];nu+=v2) {v3=nu+v2; V_[++nb]=0.;
for (j=nu;j<v3;j+=4) // суммирование слагаемых подвыражения nb блока v
{V_[nb]+=V_[P[j]]*X[j1+P[j+1]].val;
if (j+2<v3) V_[nb]-=V_[P[j+2]]*X[j1+P[j+3]].val;}
}}
det+=V[na]*V_[nb]; // получение слагаемого определителя
} // for (i2=0;i2<mn;i2++)
fprintf(out,"det=%f\n",det); // искомое значение определителя
det=1.; for (i=0;i<p-1;i++) det=det*(p+1); // проверка по формуле Кэли
fprintf(out,"DET=%f",det);
}

```

В операциях функции **pattern** используются минор и его дополнение (взаимно дополнительный минор). Двойственные массивы соответствующих переменных имеют одинаковые обозначения, но после дополнения минора указывается знак дополнения – подчеркивание «_».

Учет одинаковых подвыражений в следующих один за другим минорах и взаимно дополнительных минорах. Такой учет реализован представленной выше функции путем сохранения предыдущего минора и взаимно дополнительного минора в векторах cmb0[k], cmb0_[k], sn[k] для последующего их сравнения с текущими значениями. Это осуществляется сравнением элементов вектора текущего сочетания и вектора предыдущего сочетания, на который указывает символом «0» в сочетании, как можно понять из комментариев в тексте функции **pattern**. Таким образом, удастся предотвратить повторное нахождение одинаковых подвыражений при

вычислении последовательности миноров и увеличить предельный порядок рассматриваемых матриц.

В этом, как показали эксперименты с программой **HalfSec** [8], проявляется преимущество сквозной нумерации подвыражений по сравнению с их локальной нумерацией (внутри каждого блока). Локальная нумерация делает неэффективным учет предыстории при вычислении миноров и взаимно дополнительных миноров, хотя позволяет экономить память для хранения векторов V и V_{-} с элементами по 8 и более байтов.

Выводы: 1. Предложен алгоритм формирования последовательных выражений определителя полной матрицы, позволяющий выполнять вычисления в ходе генерации выражения, минуя его хранение на жестком диске и интерпретацию. Теперь можно формировать не выражение, а шаблон определителя, хранящий только номера предыдущих подвыражений. Символьные шаблоны нужных порядков хранятся на диске, потом вычисляются за время, сопоставимое с временем численного метода вычислений. 2. Вместо хранения последовательного выражения целиком в долговременной памяти хранится целочисленный вектор с номерами, идентифицирующими пары сомножителей, которые образуют слагаемые подвыражений. Этот шаблон получается один раз, например, *за минуты*, а вычисляется многократно *за секунды*. Компактный шаблон определителя полной матрицы эффективен при многовариантном расчете определителей или вычислении пар сомножителей – взаимно дополнительных миноров при половинном делении матрицы [8].

Список литературы

1. Shi G. Computational complexity analysis of determinant decision diagram // IEEE Trans. on Circuits and Syst. II: Express briefs.– 2010.– Vol. 57, no. 10.– P. 828–832.
2. Недорезов М.В., Филаретов В.В. Минимальные формулы определителей полных матриц на основе их половинного деления // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. научн. труд. – Ульяновск: УлГТУ, 2020.– Вып. 16. – С. 124–144.
3. Курганов Д.С., Тимофеев В.Ф., Филаретов В.В. Разложение символьных определителей полных матриц высокого порядка // Синтез,

анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. научн. труд. – Ульяновск: УлГТУ, 2020.– Вып. 16.– 145–152.

4. Недорезов М.В., Тимофеев В.Ф., Филаретов В.В. Вычисление символьных определителей полных матриц на основе их половинного деления и наращивания строк // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. научн. труд. – Ульяновск: УлГТУ, 2022.– Вып. 17. – С. 120–134.

5. Кузьмин Н.П., Курганов Д.С., Филаретов В.В. Параллельный расчет символьных определителей полных матриц высокого порядка при произвольном числе процессоров // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. труд. – Ульяновск: УлГТУ, 2022.– Вып. 17.– С.135–141.

6. Королев Ф.А., Филаретов В.В. Сравнение способов наращивания и половинного деления при символьном раскрытии матричных определителей // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2009.– Вып. 7.– С. 183–193.

7. Филаретов В.В. Генерация компактных формул для матричных определителей // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2012.– Вып. 10.– С. 120–133.

8. Курганов Д.С., Филаретов В.В. Исключение нулевых миноров в разложении определителя на основе половинного деления полной матрицы // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. труд. – Ульяновск: УлГТУ, 2024.– Вып. 18.

ИСКЛЮЧЕНИЕ НУЛЕВЫХ МИНОРОВ В РАЗЛОЖЕНИИ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ НА ОСНОВЕ ПОЛОВИННОГО ДЕЛЕНИЯ ПОЛНОЙ МАТРИЦЫ

Д. С. Курганов, В. В. Филаретов

О матричном и схемном подходе. Рассматриваются полные матрицы, в которых элементы, стоящие вне главной диагонали, имеют одинаковые значения. Показано, что при половинном делении таких матриц взаимно дополнительные миноры половинного порядка преимущественно равны нулю вследствие линейной зависимости их строк или столбцов. Для эффективного вычисления определителя такой матрицы используется его код в виде последовательного выражения, который генерируется один раз, а затем вычисляется при различных значениях элементов, обеспечивая ускорение расчета в сотни раз.

Матричный анализ является одним из самых распространенных математических аппаратов, совершенствование его алгоритмов продолжает привлекать исследователей актуальностью и непреходящей нехваткой вычислительных ресурсов. Получение решения в аналитическом (символьном) виде сопряжено с особенно большими сложностями, ограничивающими время вычислений и порядок матрицы [1–12]. Для повышения эффективности вычислений приходится решать задачу по частям, затем объединять частичные решения. Хорошо разработанным и эффективным является подход, предусматривающий отображение матрицы схемой [1], которую можно разделить на две части, близкие по числу элементов [2,3]. При таком делении проявляется аналогия с быстрым поиском корня нелинейного уравнения половинным делением отрезка.

Для объединения подсхем применяется метод двоичных векторов [4]. На матричном уровне это соответствует представлению определителя в виде суммы произведений всех возможных пар миноров и взаимно дополнительного миноров подматрицы пересечения диагональных блоков, отображающих подсхемы. Преимуществом схемного подхода является возможность произвольного разбиения матрицы на части-подсхемы. Например, в матрицах Гильберта к подсхемам можно отнести побочные диагонали с одинаковыми элементами [5].

Принципиальное различие матричного и схемного подхода заключается в способе определения знака, стоящего перед произведением алгебраического дополнения и минора или произведением параметров подсхем. В схемном подходе используется топологическое определение знака, не требующее порядковой нумерации узлов. Подобное правило можно использовать в рамках матричного подхода, если вместо операции сложения номеров строки и столбца использовать операцию их сравнения (совпадения) [6]. При этом вместо схемы используется матрица как таблица элементов с произвольными метками строк и столбцов.

Целесообразность использования того или иного подхода обусловлена тем, в каком виде ставится задача. Если дана схема с параметрами элементов, то её матрица является промежуточной моделью, в известной степени, замедляющей получение решения. В противном случае, когда искомым является определитель собственно матрицы, не окупится её схемное отображение. Действительно, в отображающей схеме узлов больше на единицу, чем порядок матрицы. Матрицу четного порядка можно разделить по вертикали или по горизонтали на равные части. Такое деление можно считать оптимальным (половинным) и при нечетном порядке [7].

Одной из самых сложных задач матричной алгебры является разложение в символьном виде и вычисление определителя матрицы, в которой все элементы имеют ненулевые значения (полные матрицы). Десятилетием ранее предельным порядком такой матрицы считался порядок 18 [8]. Теперь символьное вычисление доведено до порядка 34, раскрытие которого на современных персональных компьютерах требует несколько часов [9–11]. В настоящей работе эта «планка» значительно поднимается совершенствованием алгоритма половинного деления матрицы [12] путем учета строк из одинаковых элементов в половинных минорах.

Обобщение матриц Кирхгофа. Существует класс полных матриц, у которых вне главной диагонали располагаются одинаковые по значению элементы. К таким матрицам относится, например, матрицы Кирхгофа [13,14], которые являются узловыми матрицами полных схем с единичными проводимостями [15]. Матрица Кирхгофа 4-го порядка,

определитель которой равен числу деревьев полной схемы с пятью узлами, имеет вид:

4	-1	-1	-1
-1	4	-1	-1
-1	-1	4	-1
-1	-1	-1	4

(1)

Матрица (1) является также матрицей узловых проводимостей для полной схемы с пятью узлами, у которой между каждой парой узлов включена единичная проводимость.

Пронумеруем, начиная с нуля, строки и столбцы обобщенной полной матрицы 4-го порядка, в которой на главной диагонали могут находиться произвольные по значению элементы, а вне ее – элементы с произвольным, но одинаковым значением:

<i>0_0</i>	<i>0_1</i>	<i>0_2</i>	<i>0_3</i>
<i>1_0</i>	<i>1_1</i>	<i>1_2</i>	<i>1_3</i>
<i>2_0</i>	<i>2_1</i>	<i>2_2</i>	<i>2_3</i>
<i>3_0</i>	<i>3_1</i>	<i>3_2</i>	<i>3_3</i>

При половинном делении такой матрицы по вертикали образуются подматрицы, миноры которых являются преимущественно нулевыми вследствие линейной зависимости двух одинаковых строк, выделенных жирным шрифтом. Если пронумеровать строки левой подматрицы, выделенной курсивом: 0, 1, 2, 3, то ее ненулевые миноры будут соответствовать парам строк; 01, 02, 03, 12, 13. Сочетание 23 не вошло в этот перечень, поскольку строки 2 и 3 одинаковые.

Для матрицы Кирхгофа 5-го порядка

<i>0_0</i>	<i>0_1</i>	<i>0_2</i>	<i>0_3</i>	<i>0_4</i>
<i>1_0</i>	<i>1_1</i>	<i>1_2</i>	<i>1_3</i>	<i>1_4</i>
<i>2_0</i>	<i>2_1</i>	<i>2_2</i>	<i>2_3</i>	<i>2_4</i>
<i>3_0</i>	<i>3_1</i>	<i>3_2</i>	<i>3_3</i>	<i>3_4</i>
<i>4_0</i>	<i>4_1</i>	<i>4_2</i>	<i>4_3</i>	<i>4_4</i>

Число пар строк первой подматрицы, соответствующих ненулевым минорам: 01, 02, 03, 04, 12, 13, 14. В этот список не вошли три сочетания по два из трех одинаковых строк: 23, 24, 34.

Для матрицы Кирхгофа 6-го порядка

<i>0_0</i>	<i>0_1</i>	<i>0_2</i>	<i>0_3</i>	<i>0_4</i>	<i>0_5</i>
<i>1_0</i>	<i>1_1</i>	<i>1_2</i>	<i>1_3</i>	<i>1_4</i>	<i>1_5</i>
<i>2_0</i>	<i>2_1</i>	<i>2_2</i>	<i>2_3</i>	<i>2_4</i>	<i>2_5</i>
3_0	3_1	3_2	<i>3_3</i>	<i>3_4</i>	<i>3_5</i>
4_0	4_1	4_2	<i>4_3</i>	<i>4_4</i>	<i>4_5</i>
5_0	5_1	5_2	<i>5_3</i>	<i>5_4</i>	<i>5_5</i>

число пар строк первой подматрицы, соответствующих ненулевым минорам: 0 1 2, 0 1 3, 0 1 4, 0 1 5, 0 2 3, 0 2 4, 0 2 5, 1 2 3, 1 2 4, 1 2 5. Всего $6!/(3!3!)=20$ сочетаний из 6 элементов по 3. В список 10 сочетаний не вошли сочетания, в которых участвуют две одинаковых строки (три сочетания) и одна из трех первых строк (три сочетания) первой половины матрицы (выделена курсивом), а также сочетание из трех одинаковых строк, выделенных жирным шрифтом. Получается $3*3=9$ сочетаний.

Таким образом, доля ненулевых миноров с увеличением порядка матрицы возрастает. Поэтому при разложении полных матриц с одинаковыми элементами вне главной диагонали (справа, слева или по обеим сторонам) можно отказаться от перечисления всех сочетаний половинных миноров [11], и находить только те сочетания строк, которые соответствуют ненулевым минорам.

Нетрудно убедиться, что при переборе сочетаний в лексикографическом порядке имеющие значение сочетания подразделяются на потоки, начинающиеся с некоторого сочетания (начального вектора потока). Искомые сочетания для матрицы 4-го порядка 01, 02, 03, 12, 13 делятся на три потока, начинающихся векторами 01, 02, 12 и содержащими по 1, 2, 2 сочетания. Заключим объемы этих потоков в фигурные скобки: {1,2,2}. В случае матрицы 5-го порядка (на 1 большего четного порядка 4) число потоков и их векторы остаются теми же: 01, 02, 12, но объемы второго и третьего потока изменяются (увеличиваются на единицу): {1,3,3}.

Аналогичные закономерности проявляются для следующей пары матриц 6-го и 7-го порядков. Для матрицы 6-го порядка образуется четыре потока: {1,3,3,3}, начинающиеся векторами: 012, 013, 023, 123 соответственно. Число потоков и начальные векторы такие же для матрицы 7-го порядка, но объемы потоков другие: {1,4,4,4}.

На основе установленной закономерности число потоков m выражается через порядок матрицы p по формуле

$$m = p \% 2 + 1, \quad (1)$$

где % – знак деления нацело, дробная часть отбрасывается.

Итак, для матрицы произвольного порядка все потоки начинаются с потока из одного сочетания (начального вектора). Число сочетаний (объем) V остальных из m потоков одинаков и зависит от четности порядка матрицы, поскольку находится по формулам

$$V = m \quad \text{и} \quad V = m - 1 \quad (2), (3)$$

для четного и нечетного порядка соответственно, где m получается из формулы (1). Например, для матрицы 6-го и 7-го порядка число потоков одинаково $m=4$, а объемы потоков, кроме первого, для этих матриц различные, поскольку равны, соответственно, 3 и 4.

Для матрицы 8-го порядка объем неединичного потока остается, как у матрицы 7-го порядка, но число потоков увеличивается на 1: {1,4,4,4,4}. При переходе к следующей нечетной матрице 9-го порядка число потоков сохраняется, но объем неединичного потока увеличивается на единицу: {1,5,5,5,5}. Возвращаясь к началу рассуждений, замечаем, что начальные векторы потоков сочетаний для матриц 8-го и 9-го порядков одинаковы: 0123, 0124, 0134, 0234, 1234 .

Формулы (1)–(3) позволяют найти объемы и начальные векторы потоков сочетаний для матрицы произвольного порядка непосредственно, минуя последовательное нахождение от простейших матриц. Начальные векторы для матрицы порядка p соответствуют сочетаниям из элементов: {0,1,2, ..., $p \% 2 + 1$ } по $p \% 2$. Например, приведенные выше начальные векторы потоков для матриц 8-го или 9-го порядка найдены как $p \% 2 + 1 = 5$ сочетаний в лексикографическом порядке из 5 элементов {0,1,2,3,4} по 4.

Найдем подобные характеристики для полной матрицы высокого порядка – порядка 40, который пока является запредельным для существующих программ на основе половинного деления матрицы [7,9–11]. При $p=40$ число потоков сочетаний, найденное по (1), равно $m=40 \% 2 + 1 = 21$. Объемы двадцати неединичных потоков $V=m-1=20$. Сумма количества учитываемых сочетаний, получаемая при сложении следующих объемов потоков

$$\{1, 20\},$$

равна $m * V + 1 = 401$, что является «бесконечно малой» величиной по сравнению с числом сочетаний из 40 строк по 20, которые потребуется

сгенерировать без учета линейной зависимости строк в минорах половинного порядка. При записи этого числа не хватает стандартных средств программирования.

Для многовариантных вычислений целесообразно реализовать подход, предусматривающий использование «шаблона» полной матрицы для быстрого вычисления определителей одного порядка, но с произвольными значениями элементов [12]. Важно, чтобы формирование такого шаблона занимало, например, часы, а вычисления по нему (с обновленным списком значений элементов) – секунды. Это возможно только для класса полных матриц с учетом линейной зависимости строк.

В общем случае полной матрицы количество сочетаний даже при половинном делении таково, что формирование шаблона занимает «бесконечно малое» время. Положение меняется, когда объем рассматриваемых сочетаний радикально сокращается путем учета линейной зависимости строк. Это подтверждается данными табл. 1, полученными путем реализации в программе HalfSec [12] предложенной выше методики получения ненулевых пар миноров путем учета одинаковых строк в подматрицах при половинном делении матрицы.

Таблица 1. Показатели сложности и затраты времени
для разложения определителей полных матриц с порядками 30 – 40

Р	Число			Затраты времени на	
	пар миноров	подформул в миноре	операций умножения	генерацию, мин., сек.	вычисление, сек.
30	226	32765	491490	4.31 сек.	00.80
32	257	65533	1048544	17 сек.	00.56
34	290	131069	2228190	1 мин. 16 сек.	00.46
36	325	262141	4718556	1 мин. 26 сек.	01.11
38	362	524285	9961434	19 мин. 49 сек.	07.56
40	401	1048573	20971480	80 мин. 19 сек.	17.57

Выводы: 1. Предложено учитывать одинаковые строки подматриц при образовании сочетаний взаимно дополняющих миноров в разложении определителя матрицы на основе половинного деления. Это позволяет избежать рассмотрения пар слагаемых с нулевыми минорами, число которых может многократно превышать число пар миноров, требуемых учета. **2.** Учет одинаковых строк миноров половинного порядка, реализованный в программе HalfSec, позволил многократно сократить как

объем вычислений по шаблону полной матрицы [12], так и время вычисления определителя по сформированному ранее шаблону (табл. 1). Теперь ограничение порядка обусловлено не приемлемыми затратами времени вычислений, а оперативной памятью, необходимой для воспроизведения строки шаблона, хранящейся на жестком диске. 3. После сокращения числа пар рассматриваемых миноров: 1) время вычисления шаблона стало сопоставимым со временем, затрачиваемым численными методами; 2) предельный порядок полной матрицы был увеличен с 34-го до 44-го; 3) обеспечивается эффективность многовариантных вычислений по единожды сформированному шаблону.

Список литературы

1. Филаретов В.В. Схемное отображение матрицы для символьного решения систем линейных алгебраических уравнений // Логико-алгебраические методы, модели, прикладные применения: Тр. международ. конф.— Ульяновск: Ульян. гос. техн. ун-т, 2001.— С. 13–15.
2. Филаретов В.В. Метод двоичных векторов для топологического анализа электронных схем по частям // Электричество. 2001.— №8.— С. 33–42.
3. Филаретов В.В. Программа символьного анализа CIRSYM: история создания, структура и функции // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. научн. труд. — Ульяновск: УлГТУ, 2012.— Вып. 10.— С. 158–171.
4. Filaretov V., Gorshkov K. Efficient generation of compact symbolic network functions in a nested rational form // International Journal of Circuit Theory and Applications: Research articles. — May 2020.— P. 1–25.
5. Недорезов М.В., Филаретов В.В. Разложение определителей матриц с одинаковыми элементами в символьном виде // In memoriam: Султан Галимзянович Валеев: сб. памяти С. Г. Валеева. — Ульяновск: УлГТУ, 2016.— С. 104–114.
6. Недорезов М.В., Филаретов В.В. Эффективные алгоритмы разложения матричных определителей // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: международ. сб. науч. тр. — Ульяновск: УлГТУ, 2015. — Вып. 12. — С. 195–215.
7. Недорезов М.В., Филаретов В.В. Минимальные формулы определителей полных матриц на основе их половинного деления // Синтез,

анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. труд. – Ульяновск: УлГТУ, 2020.– Вып. 16. – С. 124–144.

8. Shi G. Computational complexity analysis of determinant decision diagram // IEEE Trans. on Circuits and Syst. II: Express briefs.– 2010.– Vol. 57, no. 10.– P. 828–832.

9. Курганов Д.С., Тимофеев В.Ф., Филаретов В.В. Разложение символьных определителей полных матриц высокого порядка // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. труд. – Ульяновск: УлГТУ, 2020.– Вып. 16.– 145–152.

10. Кузьмин Н.П., Курганов Д.С., Филаретов В.В. Параллельный расчет символьных определителей полных матриц высокого порядка при произвольном числе процессоров // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. труд. – Ульяновск: УлГТУ, 2022.– Вып. 17.– С.135–141.

11. Недорезов М.В., Тимофеев В.Ф., Филаретов В.В. Вычисление символьных определителей полных матриц на основе их половинного деления и наращивания строк // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. труд. – Ульяновск: УлГТУ, 2022.– Вып. 17. – С. 120–134.

12. Филаретов В.В. Преобразование выражения определителя полной матрицы в последовательную формулу на основе генерации сочетаний // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. труд. – Ульяновск: УлГТУ, 2024.– Вып. 18. – С.

13. Kirchhoff G. R. Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Vertheilung galvanischer Ströme geführt wird // Annalen der Physik. – 1847.– Bd. 72.– S. 498–508.

14. Кирхгоф Г. О решении уравнений, к которым приводит изучение линейного распределения гальванических токов. – Кирхгоф Г. Избранные труды. – М.: Наука, 1988. – С. 170–178.

15. Trent H.M. A note on the enumeration and listing of all maximal trees of a connected linear graph // Proceedings of the National Academy of Sciences USA. – 1954.– Vol. 40.– 1004–1007.

Курганов Дмитрий Сергеевич – инженер ООО «Телеком.ру». Ульяновская обл., Ульяновск, 432013, Россия. E-mail: kds_ul@mail.ru.

СТРУКТУРНЫЙ СИНТЕЗ

ВЫЯВЛЕНИЕ СИММЕТРИЙ КОРНЕВЫХ ДЕРЕВЬЕВ НА ОСНОВЕ ИХ СВЕРТКИ

Э. А. Свирщёва

Рассмотрено представление корневого дерева в виде алгебраического выражения свернутого множества путей из корня. Введено понятие структурного кода дерева, представляющего собой последовательность знаков операций и скобок, имеющих в его свертке. Показано, что свертка дерева удобна для исследования его симметрий, в том числе проверки каноничности добавления вершины при рекурсивной генерации корневых деревьев. Рассмотрены алгоритмы построения свертки дерева и генерации неизоморфных корневых деревьев.

A representation of the root tree in the form of a collapsed set of paths from the root is proposed. It is shown that convolution of a tree is convenient for studying its symmetries, including checking the canonicity of vertex addition during recursive generation of root trees. Algorithms for constructing tree convolution and generating non-isomorphic root trees are considered.

Введение. Корневые деревья [1] являются наиболее часто используемым в приложениях видом деревьев [2–11]. Их перечисление следует выполнять таким образом, чтобы отбраковывались или не генерировались изоморфные варианты [12,13]. Известны два класса алгоритмов генерации корневых деревьев, отличающихся порядком их следования [14]: 1) алгоритмы с частично лексикографическим порядком, предусматривающим перечисление деревьев по увеличению высоты (порядок Оттера [1]); 2) алгоритмы с полностью лексикографическим порядком. Появление нового класса алгоритмов с лексикографическим упорядочением (ЛГ-порядком) оказалось возможным в результате исследования примера перечисления деревьев с четырьмя вершинами из

монографии [15] и введения нового способа кодирования корневых деревьев вектором начальных вершин (ВНВ) [16].

Одним из первых, реализованных в программе, был нерекурсивный алгоритм [17] перечисления в порядке Оттера. В дальнейшем для этого порядка перечисления получили распространение преимущественно рекурсивные алгоритмы, по которым перечисление корневых деревьев выполняется рекурсивно (наращиванием) – от минимального до заданного числа вершин [18,19]. После открытия второго направления перечисления – ЛГ-порядка – был разработан единый подход к рекурсивной генерации корневых деревьев [20], выделены общие и специфические блоки на структурных схемах алгоритмов обоих направлений. Все известные алгоритмы с ЛГ-порядком перечисления являются рекурсивными [21–24] и строятся по одной структурной схеме [20]. Следует отметить, что в случае работы на одном процессоре затраты времени для порядка Оттера и ЛГ-порядка примерно одинаковые во всем диапазоне числа вершин [14]. Однако при параллельной работе процессоров, ЛГ-алгоритмы оказываются многократно эффективнее, поскольку обеспечивают равномерную загрузку процессоров [25]. Данная статья посвящена развитию ранее предложенных алгоритмов этого класса.

Известно [15], что появление изоморфных вариантов корневых деревьев в процессе построения обусловлено их симметриями. Отсюда следует, что возможен структурный синтез неизоморфных корневых деревьев в виде управляемого вычислительного процесса, в котором в качестве управляющего фактора, не допускающего построения изоморфных вариантов, используется информация о симметриях деревьев и их составных частей (поддеревьев).

В работе [15] рассмотрен канонический [12,13] структурный синтез корневых деревьев, в котором используются их ЛГ-упорядочение. Такое упорядочение позволяет исключить без рассмотрения подавляющее большинство изоморфных вариантов синтезируемых деревьев, но не все. Покажем, что исключение оставшихся изоморфных вариантов возможно с применением информации о симметриях корневых деревьев (поддеревьев). Составной частью такого синтеза является распознавание симметрий корневых деревьев, которое позволяет обойти построение изоморфных

деревьев. Но средства выявления симметрий, примененные в работах [15,23], трудоемки и плохо поддаются автоматизации.

В настоящей статье приведены алгоритмы построения свертки корневого дерева и получения списка ЛГ-старших вершин, допустимых для наращивания неизоморфных корневых деревьев, путем выявления симметрий. Для распознавания симметрий применены математическая модели корневого дерева в виде свертки и его структуры в виде символьного кода, которые были введены в работах [23,24].

Представление корневого дерева соединением множеств исходящих дуг. Каждое ребро корневого дерева имеет начальную и конечную вершину, то есть является дугой. Представим каноническое корневое дерево в виде таблицы из двух строк. В столбцах верхней строки перечислены номера его начальных (корневых) вершин, упорядоченных лексикографически (лг) в алфавите $(0,1,\dots, N)$. В столбцах нижней строки такой таблицы перечислены номера вершин, являющихся конечными вершинами соответствующих дуги, инцидентных вершинам верхней строки. Отсутствие исходящих дуг у вершины с номером n обозначено равенством $m(n) = \emptyset$ (пусто).

Номера вершин в столбцах нижней строки также лг упорядочены. Например, для дерева на рис.1 такая таблица приведена ниже.

Таблица 1. Множества исходящих дуг (вершин)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$m(n)$	1– 6	7	8	9	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	10– 12	13	14	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

Построение таблицы исхода вершин можно рассматривать как разложение корневого дерева на элементарные поддеревья, какими являются множества дуг, исходящих из корневой вершины и других вершин, не являющихся концевыми (или висячими [26]). Чтобы не вводить нумерацию дуг, удобно рассматривать соответствующие исходящим дугам множества конечных вершин, относящихся к начальной вершине, номер которой присваивается номеру сформированного множества m . Множества исходящих дуг или вершин будем называть для краткости «множествами исхода». Каждому множеству исхода соответствует один столбец в табл. 1 в ЛГ-порядке. Как видно, множество исхода может содержать одну,

несколько вершин или быть пустым. Тогда любое корневое дерево можно считать составленным из множеств исхода, соединяющихся между собой общими вершинами.

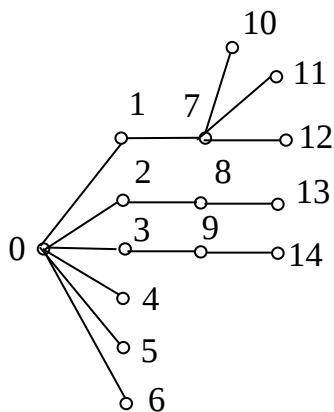


Рис. 1

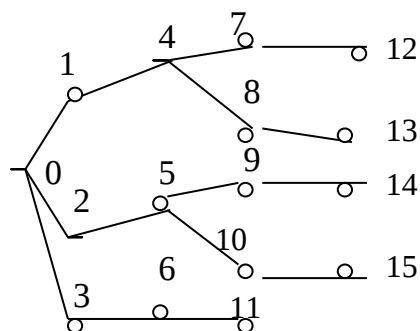


Рис. 2

Для дерева, которое представлено соединением множеств исхода в [26] используется название «дерево с висячими корнями». В таком дереве одна и та же вершина может быть одновременно корневой для одного поддерева и концевой для другого. В дереве на рис.1, например, такой является вершина с номером 7.

К множествам исхода можно применить алгебраические операции на множествах – композицию и объединение [27–29]. Первая из этих операций здесь обозначена жирной точкой «.», вторая – жирной запятой «,» между объединяемыми элементами множества. Для обозначения начала и конца множества используются жирные круглые скобки: «(» и «)». Знак «0» играет роль нуля в операциях над множествами.

Операция «объединение» выражает действие над номерами вершин, которые принадлежат общему ярусу дерева и связаны дугой с общей начальной вершиной, идентифицирующей соответствующее множество исхода. Примеры объединения вершин в множествах исхода дерева на рис.1 – это (1,2,3,4,5,6) или (10,11,12).

Операция «композиция» выражает действие над номерами вершин, которые принадлежат путям в дереве [23]. Примеры композиции вершин в дереве на рис.1 – это 0.1.7.10 или 0.2.8.13.

Алгебраическая свертка дерева. От представления множествами исхода перейдем к представлению дерева и его поддеревьев свертками.

Свертка [23] – это представление корневого дерева (поддерева) алгебраическим выражением (моделью), охватывающим все его вершины. Для построения свертки корневого дерева также можно использовать операции композиции и объединения.

Композиция $n.m(n)$ – это свертка n -го множества исхода. Например, в соответствии с табл. 1 свертки множества исхода равны $0.(1,2,3,4,5,6)$ при $n=0$ и $m(n)=1,2,3,4,5,6$; 1.7 при $n=1$ и $m(n)=7$; 2.8 при $n=2$ и $m(n)=8$.

Свертка пары множеств исхода возможна, если они соединены между собой. Соединение возможно при выполнении двух условий: 1) оба множества содержат одну общую вершину; 2) эта вершина в ЛГ старшего из множеств является концевой (конечной), а ЛГ младшего множества – корневой (начальной). Например, сверткой пары множеств исхода $0.(1,2,3,4,5,6)$ и 1.7 является выражение $0.(1.7,2,3,4,5,6)$.

Это свойство общих вершин сохраняется и после соединения множеств исхода. Покажем это на примере свертки $0.(1.7,2,3,4,5,6)$. В ней 1 (единица) является номером соединяющей вершины. По отношению к вершине 0 вершина 1 является концевой, а по отношению к вершине 7 – корневой.

Свертка дерева (поддерева) меняется с изменением количества соединяемых в нем множеств исхода с номерами $n \in \{0,1,2,\dots, N\}$ их корневых вершин. Условимся свертку обозначать R_n , учитывая эту зависимость. Свертки с номерами соединяющих вершин $n \neq 1$ строятся по аналогии с $R_1 = 0.(1.7,2,3,4,5,6)$.

Ниже приведен рекурсивный алгоритм построения свертки дерева (поддерева) с использованием разложения его на множества исхода. Данные для работы алгоритма: число вершин дерева N , таблица множеств исхода (табл. 1) и первоначальная свертка дерева при $n=0$. Например, для дерева на рис.1 $R_n = R_0 = 0.m(0) = 0.(1,2,3,4,5,6)$.

Алгоритм построения свертки дерева.

1. $n=1$.
2. Если $m(n) = \emptyset$, то $R_n = R_{(n-1)}$, идти к 4.
3. Определить свертку R_n путем замены номера n в свертке $R_{(n-1)}$ композицией $n.m(n)$.
4. $n=n+1$.

5. Если $n < N$, идти к шагу 2.

Работу алгоритма 1 покажем на примерах корневых деревьев, представленных на рис.1 и 2. В табл. 2 и 3 соответственно приведены результаты действия алгоритма на каждом шаге его работы. Найденные свертки в табл. 2 и 3 выделены жирно.

Будем рассматривать свертку дерева с корнем 0 как объединение сверток его поддеревьев с корневыми вершинами $1, 2, \dots, n$.

Например, такой список сверток поддеревьев для дерева на рис.1 – это 1.7.(1.0,11,12), 2.8.13, 3.9.14, 4, 5, 6,

а для дерева рис.2

1.4.(7.12,8.13), 2.5.(9.14,10.15), 3.6.11.

Здесь свертки каждого поддерева выделены подчеркиванием. Объединением соответствующих поддеревьев может быть представлено дерево, номера вершин которого совпадают с номерами корневых вершин его поддеревьев (дерево с висячими корнями). В свертке дерева отображены не только связи между его вершинами, но и между вершинами каждого из его поддеревьев. Заметим, что поддерева каждого из рассмотренных деревьев между собой лг упорядочены по убыванию.

Применение свертки для выявления симметричных вершин корневых деревьев. В свертке отражены особенности структуры дерева: номера вершин ветвления дерева – это множители перед скобками, а образы вершины ветвления – это выражения в скобках.

Последовательность знаков «.», «,», «Ø», «(» и «)», которая обозначает порядок операций над вершинами дерева (поддерева), будем рассматривать как кодовое слово, содержащее информацию о структуре этого дерева, подразумевая при этом, что каждый из знаков «.» и «,» относится к номеру вершины, которому он предшествует. Условимся называть такую последовательность знаков структурным кодом соответствующего дерева. Этот код определяется по свертке дерева посредством простого удаления из нее всех цифр. Он представляет собой упорядоченное множество символов операций над множеством вершин дерева (поддерева).

Очевидно следующее.

Утверждение. Для того, чтобы два канонических корневых дерева (поддерева) были симметричными, необходимо и достаточно, чтобы совпадали их структурные коды.

Таблица 2. Получение свертки дерева на рис. 1

N	$m(n)$	R_n
0	1,2,3,4,5,6	0.(1,2,3,4,5,6)
1	7	0.(1.7,2,3,4,5,6)
2	8	0.(1.7,2.8,3,4,5,6)
3	9	0.(1.7,2.8,3.9,4,5,6)
4–6	Ø	-«-
7	10, 11, 12	0.(1.7.(10,11,12),2.8,3.9,4,5,6)
8	13	0.(1.7.(10,11,12),2.8.13,3.9,4,5,6)
9	14	0.(1.7.(10,11,12),2.8.13,3.9.14,4,5,6)
10–14	Ø	-«-

Таблица 3. Получение свертки дерева на рис. 2

n	$m(n)$	R_n
0	1,2,3	0.(1,2,3)
1	4	0.(1.4,2,3)
2	5	0.(1.4,2.5,3)
3	6	0.(1.4,2.5,3.6)
4	7,8	0.(1.4.(7,8),2.5,3.6)
5	9,10	0.(1.4.(7,8),2.5.(9,10),3.6)
6	11	0.(1.4.(7,8),2.5.(9,10),3.6.11)
7	12	0.(1.4.(7.12,8),2.5.(9,10),3.6.11)
8	13	0.(1.4.(7.12,8.13),2.5.(9,10),3.6.11)
9	14	0.(1.4.(7.12,8.13),2.5.(9.14,10),3.6.11)
10	15	0.(1.4.(7.12,8.13),2.5.(9.14,10.15),3.6.11)
11–15	Ø	-«-

В примерах канонических деревьев, приведенных на рис.1 и 2, структурные коды – это $.(.(.,),.,.,.,.,.)$ и $.(.(.,),..(.,),..)$ соответственно. Они не совпадают. Это достаточный формальный признак отсутствия симметричности соответствующих деревьев. Указанный признак симметричности корневых деревьев был применен впервые в работе [23].

О генерировании неизоморфных корневых деревьев. В основу предлагаемого рекурсивного алгоритма структурного синтеза неизоморфных корневых деревьев положен метод перехода от канонического дерева T_q с q вершинами к вариантам канонического дерева $T_{(q+1)}$ с $(q+1)$ вершинами. Рекурсивное перечисление в порядке Оттера с реализацией в программах представлено в работах, использующих для кодирования деревьев уровневый (ярусный) [19] и генеалогический [18] коды. В отличие от этого порядка, известного за рубежом, для лексикографического порядка до сих пор не разработаны нерекурсивные

алгоритмы. Например, в основу предлагаемого здесь алгоритма положены работы [15,21,23,24], в которых для рекурсивного перечисления корневых деревьев используются различные математические модели дерева.

Множество номеров вершин канонического дерева T_q обозначим J_q . Для отбора допустимых вариантов присоединения дополнительных ребер к вершинам дерева T_q необходимо осуществить попарное сравнение деревьев (поддеревьев) исходного дерева T_q , имеющих общую корневую вершину $n \in \{0,1,2,\dots, N\}$. Признаком симметричности сопоставляемой пары деревьев (поддеревьев) является совпадение их структурных кодов, которые определяются по сверткам.

Если два дерева (поддерева) симметричны, необходимо исключить из множества J_q номер младшей из двух симметричных вершин дерева T_q .

Такое исключение необходимо повторять для каждой пары симметричных деревьев (поддеревьев). Для перебора может быть использован один из известных алгоритмов генерирования сочетаний, например, из работы [30]. Назовем число поддеревьев, исходящих из одной вершины $n \in \{0,1,2,\dots, N\}$, степень исхода этой вершины d_n . Свертку дерева T_q с корневой вершиной $n=N$ обозначим R_N .

Исходные данные для работы алгоритма: 1) число вершин дерева N ; 2) свертка R_N дерева T_q ; 3) множество J_q , 4) список степеней исхода d_n корневых вершин поддеревьев дерева T_q .

Алгоритм получения списка ЛГ-старших вершин, допустимых для наращивания неизоморфных корневых деревьев.

1. $n = 0$.
2. По свертке R_n дерева с корневой вершиной n определить свертки его поддеревьев и их количество d_n .
3. Если $d_n > 1$, присвоить номера k_1 и k_2 , которые соответствуют ЛГ-старшему сочетанию из d_n по 2, поддеревьям и их сверткам.
4. По сверткам поддеревьев с номерами k_1 и k_2 определить их коды.
5. Если коды совпадают, из множества J_q исключить номера вершин k_2 -го (т.е. ЛГ-младшего) из соответствующих симметричных поддеревьев дерева T_q при условии, что они еще не исключены.
6. Если варианты сочетания из d_n по 2 не исчерпаны, взять очередное сочетание k_1, k_2 . Идти к 4.
7. $n = n + 1$. Если $n = N$, то идти к 9.

8. Если $d_n=1$ или $d_n=0$ или n относится к младшему из симметричных поддеревьев, то идти к 7. Иначе идти к 2.

Предложенный алгоритм позволяет полностью исключить влияние симметрий дерева T_q на формирование дерева $T_{(q+1)}$. Покажем работу алгоритма 2 на примерах деревьев, приведенных на рис.1 и рис.2.

Исходные данные для дерева T_q на рис.1: $N=15$,

Свертка дерева $R_N = 0.(1.7.(10,11,12), 2.8.13, 3.9.14,4,5,6)$,

$J_q = (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14)$,

$d_0=6, d_7=3, d_1=d_2=d_3=d_8=d_9=1, d_4=d_5=d_6=d_{10}=d_{11}=d_{12}=d_{13}=d_{14}=0$.

1. $n = 0$. 2. 1.7.(10,11,12), 2.8.13, 3.9.14, 4, 5, 6, $d_0=6$.

3. Так как $d_0 > 1$, то $k_1=1, k_2=2$, идти к 4. 4. ..(,,) и ... 5. Не совпадают.

6. Не исчерпаны. $k_1=1, k_2=3$, идти к 4. 4. ..(,,) и ... 5. Не совпадают.

6. Не исчерпаны. $k_1=1, k_2=4$, идти к 4. 4. ..(,,) и $\emptyset$. 5. Не совпадают.

6. Не исчерпаны. $k_1=1, k_2=5$, идти к 4.

4. ..(,,) и $\emptyset$. 5. Не совпадают. 6. Не исчерпаны. $k_1=1, k_2=6$, идти к 4.

4. ..(,,) и $\emptyset$. 5. Не совпадают. 6. Не исчерпаны. $k_1=2, k_2=3$, идти к 4.

4. .. и ... 5. Совпадают. Исключаем номера вершин 3,9,14 из множества

$J_q = (0,1,2,4,5,6,7,8,10,11,12,13)$.

6. Не исчерпаны. $k_1=2, k_2=4$, идти к 4.

4. .. и $\emptyset$. 5. Не совпадают. 6. Не исчерпаны. $k_1=2, k_2=5$, идти к 4.

4. .. и $\emptyset$. 5. Не совпадают. 6. Не исчерпаны. $k_1=2, k_2=6$, идти к 4.

4. .. и $\emptyset$. 5. Не совпадают. 6. Не исчерпаны. $k_1=3, k_2=4$, идти к 4.

4. .. и $\emptyset$. 5. Не совпадают. 6. Не исчерпаны. $k_1=3, k_2=5$, идти к 4.

4. .. и $\emptyset$. 5. Не совпадают. 6. Не исчерпаны. $k_1=3, k_2=6$, идти к 4.

4. .. и $\emptyset$. 5. Не совпадают. 6. Не исчерпаны. $k_1=4$ и $k_2=5$, идти к 4.

4. $\emptyset$ и $\emptyset$. 5. Совпадают. Исключаем номер вершины 5 из множества

$J_q = (0,1,2,4,6,7,8,10,11,12,13)$.

6. Не исчерпаны. $k_1=4, k_2=6$, идти к 4. 4. $\emptyset$ и $\emptyset$.

5. Совпадают. Исключаем номер вершины 6 из множества

$J_q = (0,1,2,4,7,8,10,11,12,13)$.

6. Не исчерпаны. $k_1=5, k_2=6$, идти к 4.

4. $\emptyset$ и $\emptyset$. 5. Совпадают. В множестве J_q вершина 6 исключена.

6. Исчерпаны. 7. $n = 1$. 8. Так как $d_1=1$, идти к 7. 7. $n = 2$.

8. Так как $d_2=1$, идти к 7. 7. $n = 3$. 8. Так как $d_3=1$, идти к 7.

7. $n = 4$. 8. Так как $d_4=0$, идти к 7. 7. $n = 5$.

Так как $d_5 = 0$, идти к 7. 7. $n = 6$. 8. Так как $d_6 = 0$, идти к 7.

7. $n = 7$. 8. Так как $d_7 > 1$, идти к 2. 2. 10,11,12. $d_7 = 3$.

Шаг 3. Так как $d_7 > 1$, $k_1=1$, $k_2= 2$, идти к 4.

4. $\emptyset$ и $\emptyset$. 5. Совпадают. Из множества J_q исключаем вершину поддерева с номером $k_2=11$, $J_q = (0,1,2,4,7,8,10,12,13)$. 6. Не исчерпаны. $k_1=1$, $k_2= 3$, идти к 4. 4. $\emptyset$ и $\emptyset$. 5. Совпадают. Из множества J_q исключаем вершину поддерева с номером $k_2=12$: $J_q = (0,1,2,4,7,8,10,13)$.

Шаг 6. Не исчерпаны. $k_1=2$, $k_2= 3$, идти к 4. 4. $\emptyset$ и $\emptyset$.

5. Совпадают. В множестве J_q вершина 12 исключена.

7. $n = 8$. 8. $d_8= 1$. 7. $n = 9$. 8. $d_9 = 1$. 7. $n = 10$. 8. $d_{10}=0$.

7. $n = 11$. 8. $d_{11} = 0$. 7. $n = 12$. 8. $d_{12} = 0$. 7. $n = 13$. 8. $d_{13}=0$.

7. $n = 14$. 8. $d_{14}= 0$. 7. $n = 15=N$. Так как $n=N$, конец.

Исходные данные для дерева T_q на рис 2: $N=16$.

Свертка дерева R_N : 0.(1.4.(7.12,8.13), 2.5.(9.14,10.15), 3.6.11).

$J_q = (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15)$.

$d_0=3$, $d_4=d_5=2$, $d_1=d_2=d_3=d_6=d_7=d_8=d_9=d_{10}=1$, $d_{11}=d_{12}=d_{13}=d_{14}=d_{15}=0$.

1. $n = 0$. 2. 1.4.(7.12, 8.13), 2.5.(9.14,10.15), 3.6.11, $d_0=3$.

3. Так как $d_0 > 1$, $k_1=1$, $k_2=2$. 4. $..(.,.)$ и $..(.,.)$.

5. Совпадают. Из множества J_q исключаем номера вершин лг младшего из симметричных поддеревьев 2,5,9,10,14,15: $J_q = (0,1,3,4,6,7,8,11,12,13)$.

6. Не исчерпаны. $k_1=1$, $k_2=3$, идти к 4.

4. $..(.,.)$ и $..$. 5. Не совпадают. 6. Не исчерпаны. $k_1=2$, $k_2=3$.

4. $..(.,.)$ и $..$. 5. Не совпадают. 6. Исчерпаны. 7. $n = 1$. 8. Так как $d_1=1$, идти к 7. 7. $n = 2$. 8. Так как $d_2=1$, идти к 7. 7. $n = 3$.

8. Так как $d_3=1$, идти к 7. 7. $n=4 \neq N$. 8. Так как $n \neq N$, идти к 2.

2. 7.12, 8.13, $d_4=2$. 3. Так как $d_4 > 1$, $k_1=1$, $k_2=2$. 4. $..$ и $..$.

5. Совпадают. Из множества J_q исключаем номера вершин 8,13:

$J_q = (0,1,3,4,6,7,11,12)$.

6. Сочетания из d_4 по 2 исчерпаны. 7. $n = 5$.

8. Так как номер 5 относится к младшему из симметричных поддеревьев, идти к 7. 7. $n = 6$. 11. Так как $d_6=1$, идти к 7. 7. $n = 7$.

Шаг 8. Так как $d_7=1$, идти к 7. 7. $n = 8$.

8. Так как $d_8=1$, идти к 7. 9. $n = 9$. 8. Так как $d_9=1$, идти к 7.

7. $n = 10$. 8. Так как $d_{10}=1$, идти к 7. 7. $n = 11$.

8. Так как $d_{11}=0$, идти к 7. 7. $n = 12$. 8. Так как $d_{12}=0$, идти к 7.

7. $n = 13$. 8. Так как $d_{13}=0$, идти к 7. 7. $n = 14$. 8. Так как $d_{14}=0$, идти к 7.
7. $n = 15$. 8. Так как $d_{15}=0$, идти к 7. 7. $n=16=N$. Конец.

Выводы: 1. Предложен и применен более эффективный алгоритм построения свертки дерева, чем [23]. 2. Показано, что переход от представления дерева сверткой к символьному коду повышает наглядность выявления симметрий, их учета при структурном синтезе неизоморфных корневых деревьев. 3. Разработанная алгебра свертки корневых деревьев может быть полезна в анализе других симметрий.

Список литературы

1. Otter R. The Number of Trees // The Annals of Mathematics (2nd Ser.). – 1948.– Vol. 49 (3). – P. 583–599.
2. Miyahara T., Shoudai T., Uchida T., Takahashi K., Ueda H. Discovery of Frequent Tree Structured Patterns in Semistructured Web Documents // Proc. of 5th Pacific-Asia Conference on Knowledge Discovery and Data Mining (PAKDD–2001).– Hong Kong, China, 2001.– P. 47–52.
3. Hosseini M., Georganas N.D. End System Multicast routing for multi-party videoconferencing applications // Computer Communications.– 2006.–Vol. 29.– P. 2046–2065.
4. Fujiwara H., Wang J., Zhao L., Nagamochi H., Akutsu T. Enumerating Treelike Chemical Graphs with Given Path Frequency // Journal of Chemical Information and Modeling. – 2008.– 48.– P. 1345–1357.
5. Shimizu M., Nagamochi H., Akutsu T. Enumerating tree-like chemical graphs with given upper and lower bounds on path frequencies // BMC Bioinformatics. – 2011.– Vol. 12 (Suppl 14): S3.– P. 1–9.
6. Schutte M., Dehmer M. Large-scale analysis of structural branching measures // Journal of Mathematical Chemistry. – 2014.– Vol. 52.– P. 805–819.
7. Suzuki M., Nagamochi H., Akutsu T. Efficient enumeration of monocyclic chemical graphs with given path frequencies // Journal of Cheminformatics. – 2014.– No. 6 (31). – P. 1–18.
8. Hayashida M., Jindalertudomdee J., Zhao Y., Akutsu T. Parallelization of enumerating tree-like chemical compounds by breadth-first search order // BMC Medical Genomics.– 2015.– Vol. 8 (Suppl 2):S15.– P. 1–7.
9. Gupta S., Roy S. Stable Matching Games: Manipulation via Subgraph Isomorphism // Algorithmica. – 2018.– Vol. 80 (9). – P. 2551–2573.

10. Chen I.-M., Burdick J.W. Enumerating the Non-Isomorphic Assembly Configurations of Modular Robotic Systems // The International Journal of Robotics Research. – 1998.– Vol.17 (7). – P. 702–719.
11. Bonnans J.F., Laurent-Varin J. Computation of order conditions for symplectic partitioned Runge-Kutta schemes with application to optimal control // Numer. Math. – 2006.– Vol. 103.– P. 1–10.
12. Фараджев И.А. Конструктивное перечисление комбинаторных объектов. // Алгебраические исследования в комбинаторике. – М., Наука, 1978.– С.3–11.
13. McKay Brendan D. Isomorph-Free Exhaustive Generation / Computer Science Department, Australian National University. – Canberra, ACT 0200, Australia, 1997.– 19 с.
14. Недорезов П.В., Филаретов В.В. Генерация неизоморфных корневых деревьев в частичном и полном лексикографическом порядке // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2022. – Вып. 17.– С. 164–190.
15. Свирщёва Э.А. Структурный синтез неизоморфных систем с однородными компонентами. – Харьков, 1998. – 256 с. (Переработанный в 2005г. вариант находится на сайте электронной технической библиотеки).
16. Недорезов М.В., Недорезов П.В., Филаретов В.В. Алгоритм и программа генерации неизоморфных корневых деревьев на основе векторов начальных вершин // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2016. – Вып. 13.– С. 149–162.
17. Beyer T., Hedetniemi S.M. Constant time generation of rooted trees // Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics: Computation 9.– 1980.– No. 4.– P.706–712.
18. Li G., Ruskey F. The advantages of forward thinking in generating rooted and free trees // Proceedings of ACM–SIAM symposium on Discrete algorithms. – 1999.– P. 939–940.
19. Nakano S.I., Uno T., Efficient generation of rooted trees / National Institute of Informatics: Technical Report: NII-2003-005E.– 2003.– 9 p.
20. Филаретов В.В. Единый подход к синтезу неизоморфных корневых деревьев // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.–Ульяновск: УлГТУ, 2017.– Вып.14.–С. 177–194.

21. Свирщёва Э.А. Симметрии и построение неизоморфных корневых деревьев. Синтез, анализ, диагностика электронных цепей: международ. сб. науч. тр.— Ульяновск: УлГТУ, 2016. – Вып.13. С. 125–149.
22. Недорезов М.В., Недорезов П.В., Филаретов В.В. Алгоритм синтеза неизоморфных корневых деревьев в лексикографическом порядке // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.— Ульяновск: УлГТУ, 2017. – Вып. 14.— С. 204–214.
23. Свирщёва. Э.А. Представление корневых деревьев для их синтеза без изоморфных вариантов. Синтез, анализ, диагностика электронных цепей: международн. сб. науч. тр. – Ульяновск: УлГТУ, 2017. – Вып.14. С. 186–203.
24. Свирщёва. Э.А. Алгоритм отбора вершин для наращивания неизоморфных корневых деревьев. Синтез, анализ, диагностика электронных цепей: международн. сб. науч. тр. – Ульяновск: УлГТУ, 2018. – Вып.15. С. 147–160.
25. Горшков К.С., Недорезов П.В., Филаретов В.В. Параллельная генерация неизоморфных корневых деревьев с равномерной загрузкой процессоров // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.— Ульяновск: УлГТУ, 2022.—Вып. 17.— С. 191–212.
26. Харари Ф. Теория графов. М.: Мир, 1973. – 301 с.
27. Сигорский В.П. Математический аппарат инженера.— «Техніка», Киев, 1975.— 768 с.
28. Математическая энциклопедия. Редколлегия: И.М. Виноградов (гл. ред.). М.: Сов. Энциклопедия, 1982.— Т.3.— 1184 стб.
29. Математическая энциклопедия. Редколлегия: И.М. Виноградов (гл. ред.). М.: Сов. Энциклопедия, 1979.— Т.2.— 1104 стб.
30. Недорезов М.В., Тимофеев В.Ф., Филаретов В.В. Вычисление символьных определителей полных матриц на основе их половинного деления и наращивания строк // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. труд. – Ульяновск: УлГТУ, 2022.— Вып. 17.— С.158–171.

Свирщёва Эльвира Александровна – канд. техн. наук.
г. Харьков. E-mail: svirshchieva@mail.ru; olel@kharkov.ukrtel.net

ИЗ ОПЫТА РАБОТЫ

ОЦЕНКА ТЕХНИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ ОБЪЕКТА ИСПЫТАНИЙ

Д. С. Александров, Исави Сайф

Работа посвящена определению критерия принятия решения по объекту при наличии любого сочетания разных типов и количества дефектов, выявленных в процессе испытаний. Действие дефектов на объект можно охарактеризовать вероятностью $q(m)$ нарушения технического состояния при условии появления определенного числа m дефектов. Дефекты рассматриваемых объектов неоднородны по своей значимости и подразделяются на критические дефекты (m_0), значительные дефекты (m_1) и малозначительные дефекты (m_2). Дискретную функцию распределения $q(m)$ можно аппроксимировать для дефектов типа (m_1) или (m_2) непрерывной экспоненциальной функцией, что даёт возможность сформулировать правило принятия решения, позволяющее значительно упростить определение технического состояние испытываемого объекта.

The work is devoted to determining the criterion for making a decision on an object in the presence of any combination of different types and numbers of defects identified during the testing process. The effect of defects on an object can be characterized by the probability $q(m)$ of a violation of the technical condition under the condition of the appearance of a certain number m of defects. The defects of the objects under consideration are heterogeneous in their significance and are divided into critical defects (m_0), significant defects (m_1) and minor defects (m_2). The discrete distribution function $q(m)$ can be approximated for defects of type (m_1) or (m_2) by a continuous exponential function, which makes it possible to formulate a decision rule that can significantly simplify the determination of the technical condition of the test object.

Введение в эксплуатацию и текущая эксплуатация таких объектов испытания (далее объект), например, как электрооборудование и электроустановки связано с определением технической готовности к эксплуатации, которая зависит от перечня и характера дефектов. Наличие определённого перечня разных типов и количества дефектов, выявленных в результате испытаний, приводит к переходу объекта из исправного в неисправное или работоспособного в неработоспособное техническое состояние. Поэтому возникает потребность в оценке технического состояния посредством проведения испытаний с целью обнаружения дефектов. Выполнение поставленной задачи возможно, если выработаны обоснованные критерии возможности эксплуатации объекта в части перечня и допустимого количества дефектов, выявленных в процессе испытаний.

Данная тема актуальна, поскольку в практической деятельности электрических лабораторий решение о технической готовности объекта к эксплуатации принимается интуитивно, без опоры на объективные критерии. Такое положение дел обусловлено отсутствием теоретической проработки данного вопроса в доступных источниках информации.

Целью работы является определение критерия принятия решения по объекту при наличии любого сочетания разных типов и количества дефектов. Кроме того, критерий принятия решения должен удовлетворять условию наглядности и простоты практического применения.

В качестве методов исследования использовались: метод соответствия; вероятностно-статистический метод; метод теории массового обслуживания. В данной задаче считается, что соответствие характеристик свойств объекта испытания установленным требованиям, приведённых в нормативной и технической документации, предполагает либо отсутствие дефектов, либо наличия некоторого количества малозначительных и значительных дефектов.

При этом можно использовать некоторые аналогии с теорией стрельбы [1–3]. Дефекты, обнаруженные при испытании объекта, можно рассматривать как аналоги снарядов, которые могут попасть или не попасть в цель, а испытуемый объект – как аналог цели, которая может быть повреждена или не повреждена. Так как дефекты независимы друг от друга и накопление ущерба отсутствует, то действие дефектов на объект можно

охарактеризовать законом технического состояния объекта. Под упомянутым «накоплением ущерба» понимается явление, когда дефекты «помогают друг другу» обеспечить несоответствие установленным требованиям испытуемым объектом. То есть, когда испытуемый объект будет не соответствовать требованиям при совместном действии нескольких дефектов, поскольку ни один из них, взятый в отдельности, не мог бы привести объект к неработоспособному техническому состоянию.

В соответствии с [4] дефекты подразделяются на критические, значительные и малозначительные дефекты. Критический дефект – это дефект, при наличии которого дальнейшая эксплуатация недопустима. Значительный дефект – это дефект, наличие которого оказывает существенного влияния на возможность эксплуатации и(или) на его долговечность, но не является критическим. Малозначительный дефект – это дефект, наличие которого не оказывает существенного влияния на возможность эксплуатации объекта и его долговечность.

Действие дефектов на объект можно охарактеризовать вероятностью $q(m)$ нарушения технического состояния при условии появления определенного числа m дефектов. Дефекты рассматриваемых объектов, как указано выше, неоднородны по своей значимости и подразделяются на критические дефекты (m_0), значительные дефекты (m_1) и малозначительные дефекты (m_2).

Если нарушение технического состояния имеет место в случае появления, хотя бы одного критического дефекта $m_0 \geq 1$ (рис.1), то

$$q(m_0) = \begin{cases} 0, & \text{если } m_0 < 1; \\ 1, & \text{если } m_0 \geq 1. \end{cases} \quad (1)$$

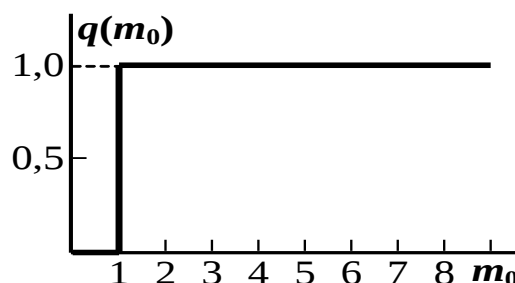


Рис. 1. Зависимость изменения вероятности нарушения состояния

Если нарушение технического состояния имеет место при появлении значительных дефектов m_1 или малозначительных дефектов m_2 при допустимых значениях N и M соответственно, а при меньшем числе дефектов нарушение технического состояния не происходит, что имеет место в случае значительных или малозначительных дефектов *по отдельности*, то

$$q(m_1) \text{ или } q(m_2) = \begin{cases} 0, & \text{если } m_1 \text{ или } m_2 < N \text{ и } M \text{ соответственно;} \\ 1, & \text{если } m_1 \text{ или } m_2 \geq N \text{ и } M \text{ соответственно.} \end{cases} \quad (2)$$

Дискретную функцию распределения $q(m)$ в соответствии с [1, 2] можно аппроксимировать для дефектов типа m_1 или m_2 *непрерывной* экспоненциальной функцией следующего вида

$$q(m_i) = 1 - e^{-\beta_i \cdot m_i}. \quad (3)$$

где $q(m_i)$ – вероятность несоответствия объекта установленным требованиям либо при количестве m_1 ($i = 1$) значительных дефектов, либо при количестве m_2 малозначительных дефектов ($i = 2$); β_i – коэффициент, значение которого зависящий от типа дефектов – m_1 или m_2 представляемых в формуле (3).

Выражение (3) представляет собой экспоненциальный закон несоответствия установленным требованиям объекта испытания в целом. Фактически функция $q(m_i)$ является ступенчатой в силу дискретных и целочисленных значений, которые могут принимать значительные дефекты в количестве m_1 , или малозначительные дефекты в количестве m_2 . Формула (3) описывает зависимость, проходящую по внешним выступам отдельных ступеней реальной ступенчатой зависимости [1, 2]. То есть выражение (3) позволяет установить несоответствие установленным требованиям объекта испытания с некоторым запасом.

Как отмечено выше, значение коэффициента β_i , зависит от типа дефектов. Руководствуясь правилом Парето [5], можно определить приближённое значение коэффициентов β_1 и β_2 , если принять $\beta_1 = 0,8$ для значительных дефектов и для $\beta_2 = 0,2$ для малозначительных дефектов. Тогда для значительных дефектов выражение (3) примет вид

$$q(m_1) = 1 - e^{-0,8 \cdot m_1}, \quad (4)$$

а для малозначительных дефектов формула (3) примет вид

$$q(m_2) = 1 - e^{-0,2 \cdot m_2} \quad (5)$$

Для иллюстрации идеи решения задачи на рис. 2, а и б представлены реальные дискретные функции распределения дефектов (ступенчатые линии) и функции распределения показательного закона (плавная кривая). функциональные зависимости, соответствующие выражениям (4) и (5). Как видно на рис. 2, а и б, непрерывное экспоненциальное распределение хорошо соответствует характеру нарастания функции распределения для дискретного случая.

Если нарушение состояния имеет место при одновременном появлении значительных и малозначительных дефектов $m_1 + m_2$ при допустимом значении $N_{(m_1+m_2)}$ дефектов, а при меньшем числе дефектов нарушение состояния не происходит, то

$$q(m_1, m_2) = \begin{cases} 0, & \text{если } m_1 + m_2 < N_{(m_1+m_2)}; \\ 1, & \text{если } m_1 + m_2 \geq N_{(m_1+m_2)}. \end{cases} \quad (6)$$

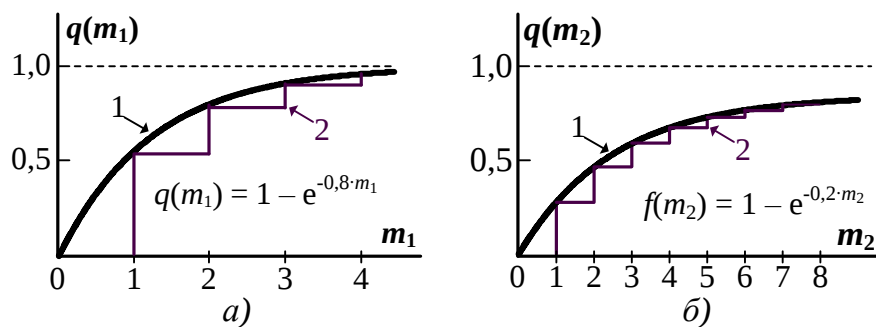


Рис. 2. Одномерные функции распределения нарушения технического состояния объекта из-за наличия значительных m_1 (а) или малозначительных m_2 (б) дефектов:

1 – непрерывная аппроксимирующая функция распределения экспоненциального закона $q(m_i) = 1 - e^{-\beta_i \cdot m_i}$;

2 – реальная ступенчатая функция распределения нарушения технического состояния.

Вероятность $q(m_1, m_2)$ нарушения состояния объекта при принятых допущениях и выполнении перечисленных условий может быть аппроксимирована показательной двумерной непрерывной функцией распределения

$$q(m_1, m_2) = 1 - e^{-(\gamma \cdot m_1 + \delta \cdot m_2)}, \quad (7)$$

где γ, δ – соответственно коэффициенты интенсивности перехода состояния объекта при наличии значительных или малозначительных дефектов, зависящих от типа дефектов; m_1, m_2 – количество значительных и малозначительных дефектов.

Выражение в числителе является приведённым к определенному количеству одного типа дефектов к другому типа дефектов в зависимости от того какой тип дефектов принят за базисный тип. Логично, в качестве базисного типа дефектов принять значительные дефекты m_1 в связи с более значительным влиянием, чем малозначительные дефекты на значение вероятность $q(m_1, m_2)$ нарушения состояния объекта.

Руководствуясь правилом Парето [5] можно принять те же значения приближённых коэффициентов, зависящих от типа дефектов – m_1 или m_2 . Итак: принимаем $\gamma = 0,8$ для значительных дефектов m_1 и для $\delta_2 = 0,2$ для малозначительных дефектов m_2 . Тогда выражение (4) вероятности $q(m_1, m_2)$ нарушения технического состояния объекта при совокупном действии значительных дефектов m_1 и малозначительных дефектов m_2 примет вид

$$q(m_1, m_2) = 1 - e^{-(0,8 \cdot m_1 + 0,2 \cdot m_2)}, \quad (8)$$

На рис. 3 представлена функциональная зависимость, соответствующая выражению (5).

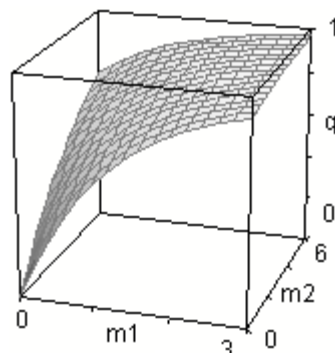


Рис. 3. Двухмерная функция распределения нарушения технического состояния объекта:

$$q(m_1, m_2) = 1 - e^{-(0,8 \cdot m_1 + 0,2 \cdot m_2)}.$$

Непрерывные функции распределения (рис. 2 и 3) позволяют определить вероятность нарушения технического состояния при наличии значительных m_1 или(и) малозначительных дефектов m_2 , при которых нарушается техническое состояния объекта. Контрольные испытания предполагают получение решения по объекту в части технической готовности к эксплуатации. Для чего необходимы контрольные нормативы вероятности нарушения технического состояния $q_{\text{кн}}$.

Выбор выражений (1) или (2), определяющих вероятность нарушения технического состояния объекта, зависит от приписываемого для конкретного объекта исходных требований технического состояния.

Например, техническое состояния испытуемых средств защиты характеризуется следующим образом: исправное техническое состояние или неисправное техническое состояние, так как связано с обеспечением условий безопасности при проведении работ на действующих объектах. Поэтому все неустраняемые дефекты средств защиты относятся к группе критических дефектов m_0 . Следовательно, такой объект даже при наличии одного неустраняемого дефекта $m_0 = 1$, независимо от «веса» контролируемой характеристики свойств объекта испытаний, считается находящимся в неисправном техническом состоянии и, соответственно, непригодным к эксплуатации. Поэтому зависимость $q(m_0)$, определяющая изменение вероятности нарушения технического состояния объекта испытания, должна соответствовать (1), которое представлено на рис. 1.

Остальные испытуемые объекты, например, электрооборудование, характеризуется другим образом: работоспособное или неработоспособное техническое состояние. Особенность оценки технического состояния такого объекта заключается в возможности допуска к эксплуатации при наличии некоторого количества значительных m_1 или(и) малозначительных дефектов m_2 , но при условии не нарушения выполнения объектом своего функционального назначения, а также с последующим устранением дефектов. Следовательно, зависимости $q(m_1)$, $q(m_2)$, $q(m_1+m_2)$, определяющие изменение вероятности нарушения технического состояния объекта испытания, должны соответствовать выражениям (4, 5, 8), показанным на рис. 2 и рис. 3.

Контрольные нормативы вероятности нарушения работоспособного технического состояния $q_{\text{кн}}$ приведены в [6]. Представленные односторонние доверительные вероятности риска потребителя, которые можно использовать в качестве контрольных нормативов $q_{\text{кн}}$ нарушения технического состояния испытуемых объектов. Их выбирают из ряда в зависимости от требуемой степени достоверности результатов испытаний:

$q_{\text{кн}} \rightarrow$	0,80;	0,90;	0,95;	0,99.
-----------------------------	-------	-------	-------	-------

Если рассматривается функция несоответствия объекта испытания установленным требованиям (4) или (5), значение $q_{\text{кн}}$ выбирается одинаковым или различным для значительных или малозначительных дефектов.

Поскольку объективно существуют не только явные дефекты, но ещё и скрытые дефекты, а испытания в условиях конкретной программой

испытания позволяют выявить только явные дефекты, то возникает задача приближённого учёта скрытых дефектов. В случае необходимости их можно учесть посредством введения поправочного коэффициента ε в контрольный норматив $q_{\text{кн}}$. В инженерных расчётах можно принять минимальное значение поправочного коэффициента [3] примерно равным $\varepsilon = 0,9$. Тогда $q_{\text{кн.с}} = \varepsilon \cdot q_{\text{кн}}$, где $q_{\text{кн.с}}$ – скорректированное значение вероятности нарушения работоспособного технического состояния.

Решающее правило принятия решения о техническом состоянии объекта, если учитываются значительные m_1 или m_2 малозначительные дефекты, определяемые следующими выражениями

$$q(m_1) \text{ или } q(m_2) \leq q_{\text{кн.с}},$$

где m_1, m_2 – количество значительных или малозначительных дефектов.

На рис. 4 наглядно представлено применение решающего правила – линия 3.

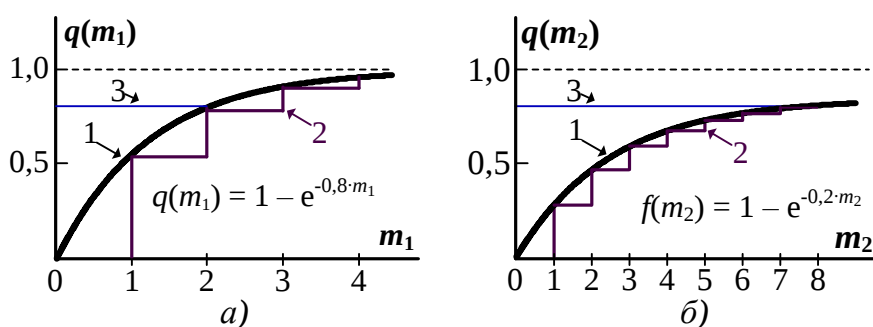


Рис. 4. Одномерная функция распределения нарушения технического состояния объекта (1) и контрольный норматив вероятности нарушения работоспособного технического состояния при $q_{\text{кн}} = 0,8$ – линия (3):

1 – непрерывная аппроксимирующая функция распределения экспоненциального закона $q(m_i) = 1 - e^{-\beta_i \cdot m_i}$;

2 – реальная ступенчатая функция распределения нарушения технического состояния.

Решающее правило принятия решения о техническом состоянии объекта, если совокупно учитываются значительные m_1 и малозначительные дефекты m_2 , определяемые следующим выражением

$$q(m_1, m_2) \leq q_{\text{кн.с}},$$

где m_1, m_2 – количество значительных или малозначительных дефектов. На рис. 5 наглядно представлено применение решающего правила.

Выводы. Предлагаемые критерии оценки технического состояния объекта наглядны и просты в применении, особенно в случае отдельного или совокупного учета значительных или малозначительных дефектов.

Открывается возможность *объективного* подхода к решению вопроса о технической готовности объекта к эксплуатации после испытаний.

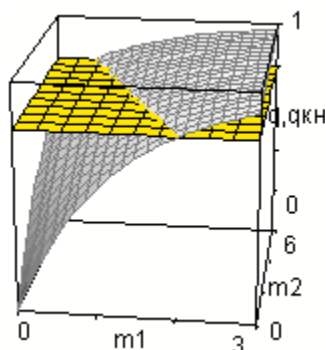


Рис. 5. Двухмерная функция распределения нарушения технического состояния объекта (серый цвет) и контрольный норматив вероятности нарушения работоспособного технического состояния (жёлтый) цвет:

$$q(m_1, m_2) = 1 - e^{-(0,8 \cdot m_1 + 0,2 \cdot m_2)}; q_{\text{кн}} = 0,8.$$

Список литературы

1. Основы исследования операций в военной технике / Ю. В. Чуев и др.; под ред. Ю. В. Чуева. – Москва: Советское радио, 1965. – 591 с.
2. Вентцель Е. С. Теория вероятностей / Е. С. Вентцель. – Изд. 4-е, стереотип. – Москва: «Наука», 1964. – 391 с.
3. Дружинин Г. В. Методы оценки и прогнозирования качества: межиздательская серия: Надежность и качество. / Г. В. Дружинин. – Москва: Радио и связь, 1982. – 160 с.
4. ГОСТ 15467–79. Управление качеством продукции. Основные понятия. Термины и определения – Москва: Изд-во стандартов, 1980.
5. Мильграмм Ю.Г. Исследование операций и алгоритмизация боевых действий / Ю. Г. Мильграмм. – Москва: Типография ВВИА, 1968. – 428 с.
6. ГОСТ 17510–79. Надежность в технике. Система сбора и обработки информации. Планирование наблюдений. – М.: Изд-во стандартов, 1980.

Александров Дмитрий Степанович – канд. техн. наук, доцент кафедры «Электроснабжение» Ульяновский государственный технический университет (УлГТУ). Адрес: г. Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32. Служебный телефон (8–8422) 77–82–32. E-mail: <mailto:mailtoAleksDS@gmail.com>.

Исави Сайф Эдин Фадхил Абдул Захра – магистрант гр. ЭЭМв–31 УлГТУ. E-mail: s.babli@mail.ru.

В ПОРЯДКЕ ОБСУЖДЕНИЯ

ИНДЕКС, ПРИСУЩИЙ СОЗНАНИЮ МАТЕМАТИКА

Р. И. Березуев

Обсуждается необычное для математики понятие, которое не может быть абстракцией и определение которого нарушает традиционные представления о строгости. Это понятие названо значением – индексом авторства, который зависит от сознания математика. Рассмотрено свойство авторства, как физическое свойство, измеряемое в процессе совместного решения математической задачи.

An unusual concept for mathematics is discussed, which cannot be an abstraction and the definition of which violates traditional notions of rigor. This concept is called the value – the index of authorship, which depends on the consciousness of the mathematician. The authorship property is considered as a physical property measured in the process of solving a mathematical problem together.

Формальные системы и неразрешимая задача. Многие считают, что абстракции в математике существуют вне зависимости от их создателей и физического представления. Однако развитие теоретической и экспериментальной физики ставит вопросы, на которые не находится ответ в рамках традиционной математики [1–5]. Излагаемый здесь подход предлагает новый взгляд на математику, придающий ей свойства, ранее не рассматриваемые. Обсуждается необычное для математики понятие, не являющееся абстракцией, определение которого нарушает традиционные представления о строгости [6,7]. Можно назвать это понятие индексом авторства (ИА), который зависит от сознания математика.

В настоящее время математика не может предложить формальную систему, в рамках которой можно описать одновременно, например, начало

и конец эксперимента. Принадлежность символа некоторой формальной системе нельзя выяснить в рамках традиционной математики.

Утверждение 1. Принадлежность построений к определенной формальной системе зависит от неких внешних физических факторов. (1)

Это неразрешимая математическая задача. Ее решают за пределами математики (в основном неявно), и уже известное решение привлекают как априорное знание. Неясно, откуда появляется априорное знание, почему такое, а не другое. Если можно измерить ИА, то можно узнать к какой формальной системе его отнести. Если нельзя измерить ИА, то не существует способа это узнать. Рассмотрим задачу, в которой менять формальную систему приходится на каждом шаге.

Установление авторства символов при совместном решении задачи. Пусть несколько коллег решают вместе математическую задачу. Результатом будет некоторая цепочка символов. Принадлежность символа выражается через уникальный индекс каждого участника. Требуется определить автора каждого символа, выяснив, кто его добавил. Начнем с того, что ИА можно рассматривать в качестве объекта относительной математики [6,7], которая, кроме обычных функций, измеряет физические свойства у символов. ИА (мере измерения) присваивается номер, идентифицирующий символ, а значит, и автора.

Поставим эксперимент, в котором коллеги общаются через электронную почту в процессе итеративной доработки статьи. Всё, что пишут в письмах, будет объектом для измерения ИА. Присваиваем номера – значения ИА – по порядку всем авторам. Символы в письмах получают соответствующие номера. Неважно, о чем содержание письма с доказательствами или алгоритмами, ИА одинаков для всех символов одного автора. В этом состоит универсальность измерения ИА в рамках данного эксперимента и его независимость от смысла символов.

Абстракции и физические свойства. Математика не связана с физическим миром. Любой символ, например, число, не имеет никаких физических свойств, в том числе и таких как, кто его создал и каким цветом его написали на доске. Любое математическое понятие можно представить символами различной физической природы, их свойства не учитываются в математике. ИА оценивает именно эти свойства, а не абстрактную идею, заложенную в символах.

Следовательно, символы математики могут быть восприняты как физические объекты со своими особенностями, зависящими от того, кто их создал, каким инструментом и каким образом. В математике удобно рассматривать символы как абстракции, не зависящие от физических свойств, что обеспечивает справедливость математических концепций, независимо от того, кто их создает или применяет.

Утверждение 2. Не существует формальных правил одновременного получения цепочки символов и значения ИА. (2)

Если утверждение (2) верно, то ИА можно постулировать. При любом добавлении (изменении) символа потребуется расширять (изменять) совокупность исходных постулатов на протяжении всего рассуждения, то есть нельзя все значения ИА задать с самого начала. Эти соображения открывают особый вид задач, когда формальные правила зависят от значений указанных ИА, например, «нельзя использовать подряд более 20 символов одного автора» и т.д. Достигнуть строгости в указанных условиях невозможно, так как аксиомы, предпосылки и постулаты не заданы в начале, а могут меняться во время коллективного рассуждения.

Нельзя разделить исходную задачу на подзадачи, например: 1) доказательство теоремы; 2) измерение значений ИА, поскольку требуется одновременное решение. Рассмотрим (2) как постановку задачи для физического эксперимента по правилам экспериментальной физики. В каждый момент времени будем знать автора каждого символа этого доказательства. Контроль версий математической конструкции недостаточен, ведь другой автор может заменить символ тем же самым.

Об относительности математики. Истинность (2) делает математику предельно абстрактной дисциплиной. Приведем тезис Маршала Стоуна [5, с.344]: «Математика не имеет ни одной обязательной связи с физическим миром, помимо той смутной и загадочной, что неявно содержится в утверждении о том, что процесс мышления происходит в мозгу».

Именно эта оставшаяся связь с реальностью является целью измерения в нашем физическом эксперименте. Математик вынужден выразить свои идеи каким-либо образом, чтобы передать их другим. Эти символы, начерченные на песке, высказанные вслух или введенные с помощью компьютера, достаточны для вычисления их создателя.

Утверждение 3. У каждого символа один и только один автор. (3)

Утверждение (3) устанавливает физический закон для свойства авторства, которое является измеряемым физическим свойством. ИА получается интерпретацией результатов измерения в одном и только одном эксперименте. Нельзя распространять эти результаты на другие эксперименты. Можно повторить такой же эксперимент и получить другие выводы об ИА или разные выводы в разных частях эксперимента.

Кроме физических свойств символа, присутствует свойство авторства с мерой измерения в виде значения ИА. Переход от физических свойств множества представлений некоторой абстракции, к свойству самой абстракции возможен, если некоторое свойство присутствует во всех таких представлениях без исключения, и его можно измерить.

Если свойство измеримо, то любой физический способ представления символа можно обсуждать в контексте его абстрактного понятия. До сих пор математики такие свойства не учитывали, но, очевидно, запрещать не будут, поскольку вынуждены использовать представление абстракций в виде символов с реальными физическими свойствами.

При повторном проведении эксперимента ИА могут различаться, даже если доказательства окажутся идентичными. Математик является единственной связью с реальностью, от которой нельзя избавиться, но которую можно проигнорировать после окончания всех построений. Этот физический факт задает своего рода некую «систему координат», поскольку всегда можно получить информацию об авторстве.

Утрата абстрактности и непредсказуемость сознания. В формулировке (2) подразумевается независимость цепочки символов (доказательства теоремы) от измерения каких-либо физических свойств. Всегда можно рассматривать абстракцию независимо от любого физического содержания. Но из этого не следует, что (2) можно разбить на две независимые задачи и каждую из них решать отдельно.

Можно ли провести необходимые измерения за год до доказательства математиками теоремы? Нельзя, поскольку еще нечего измерять, а через год после окончания доказательства также нельзя, поскольку данные утеряны. Требуется, чтобы все измерения проводились во время доказательства, и каждый символ связывался с сопутствующей физической информацией. Нарушение этого правила делает вычисление ИА невозможным. Раздельное рассмотрение не подразумевает, что один из

процессов можно остановить или даже перенести на другое время без корректировки связанного с ним процесса. Соблюдение строгости при сохранении абстрактности возможно после окончания эксперимента.

Формальной системе принадлежат только те построения, которые успел сделать участник эксперимента. Произошла полная остановка любых построений, начиная с определенного временного момента в эксперименте. Это подразумевает представления об относительной формальной системе, хотя математики не ограничивают свои построения.

Часто теоретики и практики рассуждают во время выполнения эксперимента и даже до его начала. Однако в указанных условиях соблюсти строгость, сохранив абстрактность, можно только после окончания эксперимента. Так, если мы в цепочке рассуждений на разных участках привлекаем разные математические модели для описания явления (например, для волны или для частицы [2]), то формальное построение не может быть одновременно и строгим, и абстрактным.

Можно вычислить авторство символов, соблюдая дополнительные правила. Например, подписывать символы уникальным ИА, либо использовать символы только из заданного подмножества. Тогда без измерений получается требуемый результат – каждый символ каждого математика связан с нужным ИА. В подобных случаях неявно привлекаются физические соображения: 1) нельзя включить такие правила в формальную систему – правила различаются от математика к математику; 2) при постановке эксперимента на основе утверждения (2) возникает вопрос о фальсификации. Вдруг участник подписался чужим ИА или использовал символ не своего подмножества? Выявляются такие ошибки физическим способом – протоколированием действий участников.

Различие между формальными системами. Усложним эксперимент – пусть каждый участник доказывает разные теоремы, для разных формальных систем. Разместим построения по разным файлам, предоставив доступ к каждому файлу только одному участнику, чтобы каждый вносил изменения только в один файл. Если мы знаем, кто автор символов, то известно, какой системе принадлежит цепочка символов. Обратное утверждение: если известна принадлежность символов формальной системе (определенному файлу), то известно, кто автор символов, не может быть проверено без физических соображений.

Физический объект – объект исследования независимо от того, куда, как и зачем его приспособливают. Любое математическое представление является таким объектом, хотя результаты абстрактного построения не зависят от физических свойств. Эти свойства могут измеряться независимо от того, как их используют, и потому, что свойство авторства инвариантно к возможным представлениям.

Утверждение 4. Если ИА измерен, то можно узнать, какой формальной системе принадлежит символ. (4)

Правильность этого утверждения в частных случаях доказывается через неверность обратного утверждения: если свойство авторства проявляется в любом представлении абстракции, то можно говорить об этом как о свойстве самой абстракции. В общем случае необходимо учитывать детали постановки эксперимента, когда принадлежность формальной системе эквивалентна принадлежности автору, то есть значению ИА. Не всегда эти два разных свойства связаны. Возможны эксперименты, в которых знание о принадлежности к формальной системе дает представление об ИА и, наоборот, знание об ИА дает представление, о какой формальной системе идет речь.

Относительные объекты исследования. Рассмотрим точку зрения на относительную строгость [3, 4]. Предполагается существование нетеоретических понятий, которые нельзя определить. Можно уточнить, что существуют, кроме этого, «нематематические понятия», когда информация о значении ИА поступает извне математики и превращается в ИА, который уже принадлежит математике.

Также существуют «неэкспериментальные понятия» о субъективных действиях участников, по которым понятно, что будет измеряться и как. В случае ИА это разные физические свойства, которые зависят от субъективных действий. Отсюда получается, что эксперимент можно поставить, только учитывая «неэкспериментальные события». Интерпретировать в теоретическом плане измеренные значения можно, только привлекая нетеоретические соображения, значение ИА оказывается интерпретацией измерения, что находится вне математики.

Здесь наблюдается сложная взаимосвязь. Уровни рассмотрения (математический, теоретический, экспериментальный, действия оператора) согласованы между собой, и по отдельности рассматриваться не могут. Это

и означает, что ИА не является абстракцией, ведь математические объекты не изменяются в процессе использования и требуют, чтобы всё «лишнее» не учитывалось. Изменения в относительных объектах не всегда связаны с действиями оператора.

Следовательно, любой вывод, не распространяется на другие похожие эксперименты, на повторение текущего эксперимента и на все части проводимого в данный момент эксперимента. Выводы правильны в узком временном промежутке, пока все уровни рассмотрения согласованы. Как только что-то меняется на любом уровне рассмотрения, выводы теряют корректность, если они не построены на основе относительных понятий с большей абстрактностью и обобщающей способностью.

Итак, любая математическая абстракция требует, чтобы эксперименты, где она применяется, не изменялись, теоретические описания не требовали её замены в результате теоретических построений, методы измерений не претерпевали изменений во время эксперимента. Это ограничивает применимость описаний обычной математики, на что часто не обращают внимание. Если что-то не получается, винят теоретиков, не доопределивших какие-то понятия, вольности экспериментаторов, но не абстракции с ограниченным применением.

Работа научных коллективов требует учета вклада каждого участника. В простейшем случае ИА является индивидуальный номер автора. Сложнее идентифицировать коллегу по стилю изложения текста, его лексическому составу или используемым операторам в исходном коде программы, но это может позволить эксперту выявить плагиат с помощью искусственного интеллекта. ИА является результатом прямого измерения, то есть не может быть темой предположений. Тем не менее, если плагиат установлен, можно правильно вычислить ИА.

Научные приоритеты: два типа плагиата. Понятие приоритета является центральным в научной деятельности, ведь желание быть первым побуждает к творчеству [8]. Воздание должного предшественникам на научной стезе является неотъемлемым элементом этики ученого. Обычно под плагиатом понимают недобросовестное заимствование, когда некто сознательно публикует чужой материал под своим именем, не делая ссылок на первоисточник [9]. Предшествующее появление первоисточника делает

бессмысленным оспаривание авторства, чем, естественно, плагиатор не занимается.

Поэтому существование первоисточника плагиаторы, как правило, стремятся сохранить в тайне. Случаи цитирования первоисточников с последующим повторением известного и выдачей их за свои результаты в данном обсуждении также встречаются. Недобросовестные авторы рассчитывают, что их читатели поленятся разбираться в «хитросплетениях» оригинала. Однако это может быть свидетельством научного непрофессионализма, а не предмета плагиата.

Не у всех хватает терпения раскопать научную область настолько, чтобы обнаружить источник, опровергающий первенство новоявленного автора. Строго говоря, это не заимствование чужого материала, а независимое его воспроизведение. О степени новизны можно судить по признакам отличия от оригинала. Такие случаи наиболее распространены, как и самоплагиат, относятся к плагиатам первого типа.

Второй тип плагиата. Этот тип плагиата является обратной стороной первого, когда псевдоплагиатор обвиняется в недобросовестном заимствовании якобы ущемленным псевдоавтором. Этой формой плагиата являются беспочвенные притязания на авторство, когда по каким-то внешним признакам начинают утверждать, что та или иная публикация другого лица или лиц является плагиатом на некоторое произведение или ряд произведений научного творчества.

Распознавание плагиата второго типа. Характерным для второго типа плагиата является то, что плагиаторы, претендуя на авторство чужих произведений, выставляют в качестве прототипа, точнее, объекта заимствования, свои результаты, которые были опубликованы раньше. Таким образом, в случае второго типа плагиата научная общественность заинтересованным лицом заранее осведомляется о существовании, как предполагаемого объекта заимствования (первоисточника), так и предполагаемого плагиата – вторичного источника.

Распознать плагиат первого типа обычно бывает просто, поскольку плагиатором осуществляется прямое заимствование интеллектуальной собственности – с сохранением формы изложения (текста, формул, рисунков и т.д.). Причиной возникновения плагиата второго типа является либо нежелание объективно и глубоко разбираться в тонкостях

нововведений, голословно рассматриваемых как плагиат, либо некомпетентность лиц, приписывающих те или иные результаты себе.

Для распознавания плагиата второго типа могут потребоваться серьезные интеллектуальные усилия, нередко стать арбитрами, то есть выяснить «откуда растут ноги» того или иного научного результата, могут только узкие специалисты, работающие в данной области.

Установление приоритета на получаемые результаты является одним из основных стимулов к научной деятельности и важнейшим элементом этики ученого, поэтому «клеймо плагиатора» считается самым неприятным для исследователя.

Плагиат второго типа может выступать в виде заведомо ложного обвинения в научной недобросовестности. Если не принимать во внимание возможность клеветы, то плагиатор второго типа является псевдоплагиатором, поскольку псевдоавтор либо кривит душой, либо искренне заблуждается в том, что его результаты были кем-то воспроизведены заново без ссылки.

Признаки несовершенства известных научных результатов. Обвинения авторов в недобросовестном заимствовании могут быть построены на недостатках сложившейся терминологии. Бывает так, что один автор не придавал какому-то своему результату значения, не указав в выводах, а глубоко «запратав» его в тексте как вспомогательный материал, не осознав или посчитав бесперспективным дальнейшее развитие. Через годы этот частный случай кем-то обобщается и применяется даже не в анализе, а синтезе электронных цепей, и псевдоавтор выражает свою обиду, претендуя на авторство.

«Плагиаторы» второго типа на самом деле являются новаторами. Однако защитить научные результаты от интеллектуальных притязаний бывает не просто. Арбитрами в спорах авторов обычно являются авторитетные журналы, публикующие критические статьи.

Мнимые «приоритеты» – псевдоприоритеты. Понятийный аппарат – фундамент любой области науки. Погрешности терминологии препятствуют взаимодействию ученых, вызывая споры на пустом месте. Типичный пример – полувековая дискуссия вокруг работ Габриэля Крона, касающихся анализа сложных электрических цепей [10]. По сложности

восприятия линейные цепи с сосредоточенными параметрами не могут порождать парадоксы, как в случае квантовой механики [1–5].

Человеку не свойственно сразу получать простые решения – хочется пойти в обход, используя промежуточные модели, вносящие дополнительные сложности, зато увеличивающие «наукоемкость». Поэтому продукция ученых обычно нуждается в авторской «шлифовке». Бесплодно обсуждать «полуфабрикаты» приходится до сих пор [11].

Обвинения в научной недобросовестности не должны строиться на заимствовании тривиальных и очевидных положений. Научный термин не является объектом авторского права, а использование термина не равнозначно недобросовестному заимствованию.

Научные положения в ранге псевдоприоритетов составляют фундамент исследований и почву научной коммуникации, не могут быть объектами заимствования и иметь правообладателей. Обвинения в недобросовестном заимствовании псевдоприоритетов являются противоправными. «Правообладание» истца-псевдоавтора абсурдно. Логика развития науки диктует неизбежность обесценения любых идей и даже теорий, претендующих на общность. Они развиваются, дополняются и обобщаются в ходе последующих исследований.

Законченность той или иной научной продукции – понятие относительное. Абсурдно обвинять в научной недобросовестности того, кто развивает и углубляет ваши результаты, дает им новые приложения, усматривает несовершенства в известных результатах, вскрывает недостатки существующей терминологии. При распознавании плагиата не стоит ограничиваться формальными признаками сходства, проявлять «посягательство на псевдоприоритет», подчиняясь авторским эмоциям.

Выводы: 1. Индекс авторства – тип математического объекта, который измеряет, кто создал математический символ, отражает физические свойства символов, связывая их с действиями создателей, и не является абстракцией. 2. Относительная математика учитывает физические свойства символов и допускает, что математические объекты изменяются рядом факторов, включая творцов и плагиаторов.

Список литературы

1. Bohr N. Atomic Theory and the Description of Nature: Four Essays with an Introductory Survey, Vol. 1. – Cambridge University Press. – 2011.– 128 p.

2. Клышко Д.Н. Основные понятия квантовой физики с операциональной точки зрения // Успехи физических наук. – 1998.– Т. 168.– №9.– С. 975–1015.
3. Клышко Д.Н., Липкин А.И. О «коллапсе волновой функции», «квантовой теории измерений» и «непонимаемости» квантовой механики» // Исследовано в России: электронный журнал. –2000.–Вып.53.–С. 736–785.
4. Солоневич Ю. «Квантованный человек». – Екатеринбург: Издательские решения, 2019.– По лицензии Ridero 2019г. ISBN 978–5–4496–2732–2.
5. Клайн М. Математика. Утрата определенности. –М.:Мир,1984.–446 с.
6. Березуев Р.И. Об утрате определенности в математике, механике и электротехнике: дисциплина обсуждений // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. труд. – Ульяновск: УлГТУ, 2024.– Вып. 18.– С. 204–216.
7. Березуев Р.И. Относительная математика
<https://relativemathematics.blogspot.com/>
8. Филаретов В.В. Приоритеты в науке, или еще об одном слагаемом успеха // Электричество. – 1994.– № 12.– С. 63–64.
9. Филаретов В.В. Плагиат как беспочвенные притязания на авторство // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. труд. – Ульяновск: УлГТУ, 2012.– Вып. 10.– С. 265–271.
10. Березуев Р.И. Инвариант мощности электрической цепи и геометрия Крона // Схемно-топологические модели активных электрических цепей: синтез, анализ, диагностика: Тр. Международ. конф. «Континуальные алгебраические логики, исчисления и нейроинформатика в науке и технике». – Ульяновск: УлГТУ, 2004. – Т. 4.– С. 11–16.
11. Ерохов И.В. Критические замечания к работам Габриэля Крона // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. труд. – Ульяновск: УлГТУ, 2024.– Вып. 18.– С. 225–230.

Березуев Роман Иванович – ведущий инженер-программист, разработчик графического интерфейса SCAD к программе CirSym для символьного анализа и диагностики электронных цепей. Украина, Киев. E-mail: berezuev@ukr.net .

ИЗ ИСТОРИИ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

ПЕРВОЕ ОБРАЩЕНИЕ К СТРУКТУРЕ ПРИ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ЦЕПИ

И. В. Ерохов

Рассмотрена система зависимых контуров и система уравнений этих контуров, охватывающих все пути, возможные для прохождения искомого тока. Предложено альтернативное топологическому методу Кирхгофа представление выражения для искомого тока в виде суммы частичных (уточняющих) решений на основе алгебры структурных чисел.

A system of dependent circuits and a system of equations of these circuits covering all paths possible for the passage of the desired current are considered. An alternative representation of the expression for the desired current in the form of a sum of partial (clarifying) solutions based on the algebra of structural numbers is proposed to Kirchhoff's topological method.

«Математика ... есть знание как бы одномерное ...;
философия же ... перестраивает этот математический план, ...
понимая числа как **понятия**
и этим перекрывая **числовую структуру** логической» [1].

В статье [2] Г. Кирхгоф ставит задачу электрического расчета системы проводников, заданной в самом общем виде. Прошло два года после публикации его уравнений, и он стремится применить их для решения практической задачи. К расчету предлагается система проводников, размер которой ученый преднамеренно не ограничил, чтобы продемонстрировать реальные возможности своих уравнений. В то же время, Кирхгоф в полной мере сознавал сложность поставленной задачи, и поэтому предложил метод расчета, который, по его убеждению, должен был упростить процесс определения значений токов в любом элементе системы. Он считал, что на

первом этапе задачу надо максимально упростить и проще всего это сделать, радикально изменив структуру.

Для решения алгебраической системы уравнений ученый применил универсальный метод Г. Крамера, в котором любая переменная находится как отношение определителей матрицы системы уравнений:

$$I_{\lambda} = \frac{\Delta_{\lambda}}{\Delta}, \quad (1)$$

где Δ – определитель системы уравнений; Δ_{λ} – определитель, у которого вместо столбца λ поставлен столбец правых частей системы уравнений.

Получать численные значения определителей Кирхгоф не собирался, так как понимал, что в случае большого числа уравнений это практически невозможно. Однако он внимательно изучил возможный процесс решения, исследовал слагаемые небольших определителей и дал им схемную трактовку. Слагаемые определителей формулы (1) Кирхгоф предложил рассматривать как сочетания параметров ветвей схемы.

На первом этапе расчета он предложил упростить исходный граф системы до одного контура, который содержит ветвь с током, выбранным для определения его численного значения. Естественно, что для описания этого контура он использует одно из своих уравнений. Знаменатель формулы (1) упрощается, и мы легко получаем приближенное значение тока интересующей нас ветви. В сложном графе таких контуров несколько, и каждый контур дает свое приближенное значение искомого тока. Другими словами, следует определить все приближенные значения тока одной ветви, входящей в систему **зависимых** контуров.

На упрощение структуры Кирхгоф соглашался потому, что процедура восстановления исходного графа представлялась ему легкой и очевидной. Надо просто поочередно добавлять к упрощенному графу удаленные ранее ветви. Конечно, с восстановлением структуры графа будут уточняться и алгебраические выражения решений, полученные из упрощенных систем уравнений.

В своей статье Кирхгоф описывает процесс упрощения структуры следующим образом [2]:

«Пусть $1, 2, \dots, \mu-1, \mu$ – такие μ проводники, после изъятия которых не остается замкнутых фигур. Тогда после исключения $\mu-1$ из них остается

только одна замкнутая фигура. К замкнутым фигурам, остающимся после изъятия по порядку проводников

$$\begin{array}{cccccc} & 2, & 3, & \dots & \mu-1, & \mu \\ 1, & & 3, & \dots & \mu-1, & \mu \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1, & 2, & 3, & \dots & \mu-1 & \end{array}$$

применим теорему 1».

В приведенной цитате под теоремой под номером 1 ученый понимает формулировку второго закона своего имени. В полной мере понять приведенную цитату (на любом языке) очень сложно, поэтому будем стараться трактовать ее, исходя из текста всей статьи. Предположим, что Кирхгоф хотел перечислить ветви-связи, удаляя которые граф упрощается до одного контура. Обязательным условием процесса упрощения он считал вхождение в контур ветви, содержащей искомый ток (в примере это ветвь 1). Отметим, что вследствие реализации этого требования возникает новое ограничение – ветвь с искомым током не может входить в список связей.

Для электрической цепи рис.1 список ветвей связи, которые поочередно следует удалять из графа в процессе упрощения структуры, будет выглядеть следующим образом: 2, 3; 2, 4; 2, 5; 3, 4; 3, 6; 4, 5; 4, 6; 5, 6.

Каждый элемент перечня связей содержит только две ветви, как того требует приведенная выше цитата из статьи Кирхгофа. Это количество связей, удаляемых из графа, зависит от числа независимых контуров μ :

$$(\mu - 1) = 3 - 1 = 2.$$

После поочередного удаления из исходного графа каждой пары ветвей связи мы получаем упрощенные графы. Число упрощенных графов вычисляется с помощью формулы сочетаний (из пяти по два), что равно 10. Два сочетания ветвей 2, 6 и 3, 5 опускаются, поскольку в контурах, оставшихся после удаления каждой из этих пар связей, нет ветви 1.

На графе электрической цепи рис.1 с помощью списка ветвей-связей можно найти восемь контуров, содержащих ветвь 1. Естественно, что упрощенные графы содержат не только контуры с ветвью 1, но и некоторые отдельные, «лишние» ветви. Именно наличие «лишних» ветвей не позволяет нам отождествлять упрощенные графы с одинаковыми контурами (рис. 2). Отметим, что почти в каждый из восьми упрощенных графов входят «лишние» ветви, которые не включены в список удаляемых

ветвей связи. Например, упрощенные графы под номером 2, 3, 6, 4, 5, 7 (рис.2) содержат «лишние» ветви. Только два графа не содержат «лишних» ветвей – номера 1 и 8 упрощенных графов на рис.2.

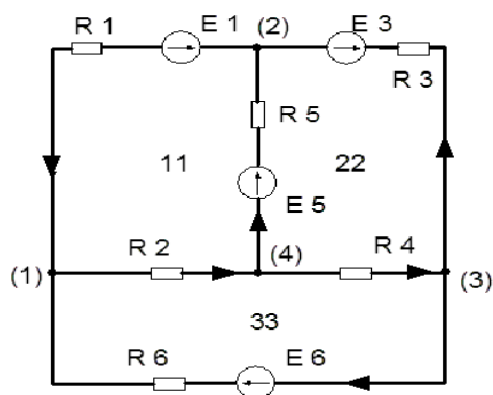


Рис. 1. Простая электрическая цепь.

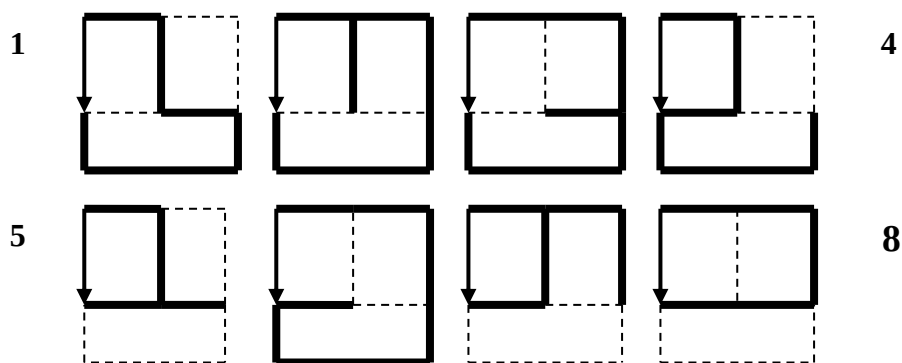


Рис. 2. Контур схемы, содержащие ветвь 1.

Как следует из приведенной цитаты, контур каждого из восьми упрощенных графов описывается по второму закону Кирхгофа, и эти уравнения используются при нахождении первых приближенных значений тока ветви 1. Второе приближение значений тока ветви 1 получаем после добавления по одной ветви связи в каждый упрощенный граф (рис.2), что приводит к восстановлению еще одного контура (рис. 3).

Одновременно необходимо уточнить алгебраические выражения числителя и знаменателя для искомого тока, то есть слагаемые числителя и знаменателя формулы для первого приближения тока умножаются на параметр добавленной ветви. В результате первого уточнения величины тока длина «комбинации» параметров слагаемого определителей знаменателя и числителя увеличивается на единицу. Этим действиям соответствуют результаты упрощений графа рис. 1, приведенные ниже:

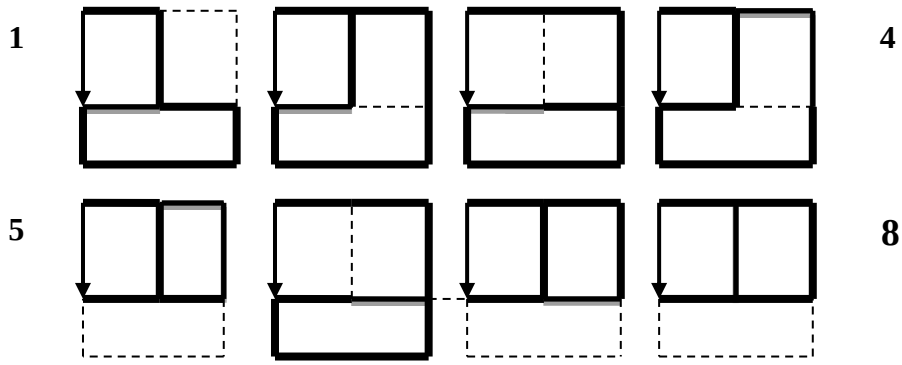


Рис. 3. Добавление в контур по одной ветви-связи.

$$\begin{aligned}
 \frac{\{1,4,5,6\}}{\{2,3\}}; \quad I_1' &= \frac{-E_1 + E_5 - E_6}{R_1 + R_4 + R_5 + R_6} \Rightarrow \frac{-E_1 R_2 + E_5 R_2 - E_6 R_2}{R_1 R_2 + R_4 R_2 + R_5 R_2 + R_6 R_2}; \\
 \frac{\{1,3,6\}}{\{2,4\}}; \quad I_1' &= \frac{-E_1 - E_3 - E_6}{R_1 + R_3 + R_6} \Rightarrow \frac{-E_1 R_2 - E_3 R_2 - E_6 R_2}{R_1 R_2 + R_3 R_2 + R_6 R_2}; \\
 \frac{\{1,3,6\}}{\{2,5\}}; \quad I_1' &= \frac{-E_1 - E_3 - E_6}{R_1 + R_3 + R_6} \Rightarrow \frac{-E_1 R_2 - E_3 R_2 - E_6 R_2}{R_1 R_2 + R_3 R_2 + R_6 R_2}; \\
 \frac{\{1,2,5\}}{\{3,4\}}; \quad I_1' &= \frac{-E_1 + E_5}{R_1 + R_2 + R_5} \Rightarrow \frac{-E_1 R_3 + E_5 R_3}{R_1 R_3 + R_2 R_3 + R_5 R_3}; \\
 \frac{\{1,2,5\}}{\{3,6\}}; \quad I_1' &= \frac{-E_1 + E_5}{R_1 + R_2 + R_5} \Rightarrow \frac{-E_1 R_3 + E_5 R_3}{R_1 R_3 + R_2 R_3 + R_5 R_3}; \\
 \frac{\{1,3,6\}}{\{4,5\}}; \quad I_1' &= \frac{-E_1 - E_3 - E_6}{R_1 + R_3 + R_6} \Rightarrow \frac{-E_1 R_4 - E_3 R_4 - E_6 R_4}{R_1 R_4 + R_3 R_4 + R_6 R_4}; \\
 \frac{\{1,2,5\}}{\{4,6\}}; \quad I_1' &= \frac{-E_1 + E_5}{R_1 + R_2 + R_5} \Rightarrow \frac{-E_1 R_4 + E_5 R_4}{R_1 R_4 + R_2 R_4 + R_5 R_4}; \\
 \frac{\{1,2,3,4\}}{\{5,6\}}; \quad I_1' &= \frac{-E_1 - E_3}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} \Rightarrow \frac{-E_1 R_5 - E_3 R_5}{R_1 R_5 + R_2 R_5 + R_3 R_5 + R_4 R_5}. \quad (2)
 \end{aligned}$$

Перед каждым выражением частичного тока в строках выражений (2) приведена условная дробь, в числителе которой указаны ветви одного из восьми контуров, а в знаменателе – удаленные ветви связи (рис. 2). Частичные токи являются приближениями значений искомого тока, найденные из уравнений контуров. За стрелкой приводятся уточненные выражения значений искомого тока после восстановления в каждом из графов по одной ветви связи.

Подключение последних ветвей связи в каждом из графов рис.3 дает нам возможность получить исходный граф цепи. Одновременно с этим проходит второй этап уточнения выражений для искомого тока. После этого слагаемые числителя и знаменателя каждого из восьми выражений будут содержать по три сомножителя, как и слагаемые определителей точного решения (1). Сознвая масштаб проблемы, ученые считали, что эту задачу, прежде всего, должны рассмотреть математики [3].

На последнем этапе преобразования графа и уточнений алгебраических выражений получаются следующие выражения для искомого тока восьми контуров [4]:

$$\begin{aligned}
 \frac{\{1,4,5,6\}}{\{2,3\}}; I'_1 &= \frac{-E_1 + E_5 - E_6}{R_1 + R_4 + R_5 + R_6} \Rightarrow \frac{-E_1 R_2 R_3 + E_5 R_2 R_3 - E_6 R_2 R_3}{R_1 R_2 R_3 + R_4 R_2 R_3 + R_5 R_2 R_3 + R_6 R_2 R_3}; \\
 \frac{\{1,3,6\}}{\{2,4\}}; I'_1 &= \frac{-E_1 - E_3 - E_6}{R_1 + R_3 + R_6} \Rightarrow \frac{-E_1 R_2 R_4 - E_3 R_2 R_4 - E_6 R_2 R_4}{R_1 R_2 R_4 + R_3 R_2 R_4 + R_6 R_2 R_4}; \\
 \frac{\{1,3,6\}}{\{2,5\}}; I'_1 &= \frac{-E_1 - E_3 - E_6}{R_1 + R_3 + R_6} \Rightarrow \frac{-E_1 R_2 R_5 - E_3 R_2 R_5 - E_6 R_2 R_5}{R_1 R_2 R_5 + R_3 R_2 R_5 + R_6 R_2 R_5}; \\
 \frac{\{1,2,5\}}{\{3,4\}}; I'_1 &= \frac{-E_1 + E_5}{R_1 + R_2 + R_5} \Rightarrow \frac{-E_1 R_3 R_4 + E_5 R_3 R_4}{R_1 R_3 R_4 + R_2 R_3 R_4 + R_5 R_3 R_4}; \\
 \frac{\{1,2,5\}}{\{3,6\}}; I'_1 &= \frac{-E_1 + E_5}{R_1 + R_2 + R_5} \Rightarrow \frac{-E_1 R_3 R_6 + E_5 R_3 R_6}{R_1 R_3 R_6 + R_2 R_3 R_6 + R_5 R_3 R_6}; \\
 \frac{\{1,3,6\}}{\{4,5\}}; I'_1 &= \frac{-E_1 - E_3 - E_6}{R_1 + R_3 + R_6} \Rightarrow \frac{-E_1 R_4 R_5 - E_3 R_4 R_5 - E_6 R_4 R_5}{R_1 R_4 R_5 + R_3 R_4 R_5 + R_6 R_4 R_5}; \\
 \frac{\{1,2,5\}}{\{4,6\}}; I'_1 &= \frac{-E_1 + E_5}{R_1 + R_2 + R_5} \Rightarrow \frac{-E_1 R_4 R_6 + E_5 R_4 R_6}{R_1 R_4 R_6 + R_2 R_4 R_6 + R_5 R_4 R_6}; \\
 \frac{\{1,2,3,4\}}{\{5,6\}}; I'_1 &= \frac{-E_1 - E_3}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} \Rightarrow \frac{-E_1 R_5 R_6 - E_3 R_5 R_6}{R_1 R_5 R_6 + R_2 R_5 R_6 + R_3 R_5 R_6 + R_4 R_5 R_6}. \quad (3)
 \end{aligned}$$

Следующим этапом процесса восстановления исходного графа цепи является операция объединения восьми одинаковых изображений исходного графа, полученных в результате восстановления структуры. После объединения графов естественно распространить эту операцию на элементы числителей и знаменателей восьми выражений (3). Конечно, операция объединения должна производиться отдельно как для элементов числителей, так и для элементов знаменателей восьми выражений.

В результате объединения слагаемых числителей из выражений (3) получаем числитель (4) формулы (1):

$$\Delta_1 = -E_1(R_2R_3 + R_2R_4 + R_2R_5 + R_3R_4 + R_3R_6 + R_4R_5 + R_4R_6 + R_5R_6) - \\ -E_3(R_2R_4 + R_2R_5 + R_4R_5 + R_5R_6) + \\ +E_5(R_2R_3 + R_3R_4 + R_3R_6 + R_4R_6) - \\ -E_6(R_2R_3 + R_2R_4 + R_2R_5 + R_4R_5), \quad (4)$$

Объединение слагаемых знаменателей из выражений (3) дает знаменатель (5) формулы (1):

$$\Delta = R_1R_2R_3 + R_1R_2R_4 + R_1R_2R_5 + R_1R_3R_4 + R_1R_3R_6 + R_1R_4R_5 + \\ + R_1R_4R_6 + R_1R_5R_6 + R_2R_3R_4 + R_2R_3R_5 + R_2R_3R_6 + R_2R_4R_6 + \\ + R_2R_5R_6 + R_3R_4R_5 + R_3R_5R_6 + R_4R_5R_6. \quad (5)$$

Очевидно, что определители (4), (5) можно получить из системы уравнений (6) при нахождении первого контурного тока по формуле (1).

$$\begin{bmatrix} (R_1 + R_2 + R_5) & -R_5 & -R_2 \\ -R_5 & (R_3 + R_4 + R_5) & -R_4 \\ -R_2 & -R_4 & (R_2 + R_4 + R_6) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \\ I_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E_1 + E_5 \\ -E_3 - E_5 \\ -E_6 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

Любой читатель с помощью карандаша и бумаги может найти оба определителя формулы (6), так как размер матрицы системы уравнений (6) небольшой – число **независимых** контуров равно трем. Отметим, что материал, используемый при решении, взят из работ [3,4], где более подробно изложена реконструкция метода Кирхгофа [2]. Попробуем осмыслить метод решения, предложенный Кирхгофом.

Упрощая исходный граф электрической цепи до одного контура, ученый вводит в рассмотрение систему **зависимых** контуров, а также систему уравнений этих контуров для того, чтобы охватить все пути в графе электрической цепи, возможные для искомого тока [2]. В статье предлагается уравнение для контура каждого из упрощенных графов:

«Пусть остающаяся фигура содержит проводники $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_v$. Тогда, если проводник λ не встречается среди них, то:

$$I'_\lambda = 0,$$

и в случае наличия λ :

$$I'_\lambda = \frac{E_{\lambda 1} + E_{\lambda 2} + \dots + E_{\lambda v}}{w_{\lambda 1} + w_{\lambda 2} + \dots + w_{\lambda v}},$$

где $E_{\lambda 1}, E_{\lambda 2}, \dots$ считаются положительными, если направление I_{λ} считается положительным». Обозначение I'_{λ} соответствует приближенному значению тока ветви в оставшемся контуре. Именно эти выражения содержатся в выражении (2) перед стрелкой.

Конечно, Кирхгоф не называл оставшиеся контура **зависимыми** (рис.2), хотя понимал, что они объединены одной ветвью, содержащей искомый ток. Он упрощал граф настолько уверенно, что создавалось впечатление, что ему известны эти понятия, просто не хочет тратить время на составление определений. Завершить алгоритм уточнения алгебраических выражений для значений искомого тока Кирхгофу не удалось – он ограничился точным комбинаторным решением, но без строгого доказательства.

Для поиска «комбинаций ветвей» Кирхгоф возвращается к языку теории графов, и предлагает строить дерево путей в графе. Порядок построения дерева путей показан на рис.4.

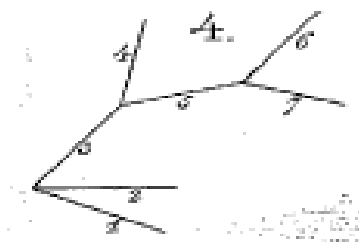


Рис.4. Дерево путей в графе схемы, в оригинале *Fig.4, Taf.V* .

Надо думать, что рис.4 представляет только начало процесса построения дерева путей в графе, и оно может быть продолжено, если выделить три узловых схемных множества: (1, 2, 3); (3, 4, 5); (1, 5, 6). На рис.4 множества связаны между собой смежными ветвями, т.е. дан только принцип построения дерева путей графа. Сам Кирхгоф надеялся с помощью этого дерева определять «некорректные» комбинации ветвей, например, контур (1, 3, 5). Если восстановить граф электрической цепи по узловым схемным множествам, то получим схему моста Уинстона с плечами (1, 3, 4, 6) и диагоналями (2, 5).

Завершим процесс решения, альтернативный комбинаторным правилам Кирхгофа. Начнем с получения (в символьной форме) слагаемых знаменателя формулы (1) в результате декартового умножения контурных

схемных множеств [4]. Контурные схемные множества определяем по графу электрической цепи рис.1:

$$(1,2,5), (3,4,5), (2,4,6).$$

Результат декартового умножения схемных множеств записываем в виде матричного структурного числа:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 3 & 3 & 3 & 4 & 5 & 4 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 4 & 6 & 5 & 6 & 6 & 4 & 5 & 6 & 6 & 6 & 5 & 6 & 6 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Каждый столбец структурного числа содержит номера ветвей, составляющих слагаемое знаменателя формулы (1). Конечно, в структурном числе (7) есть столбцы, соответствующие контурным множествам декартового умножения, а также контура (1, 3, 6).

Теория структурных чисел [5], наряду с простыми операциями, использует, например, алгебраическую производную, действие которой покажем на примере числа (7). Продифференцируем структурное число по символу ветви 2, для чего на первом этапе отбираем все столбцы, содержащие символ 2 (8):

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 4 & 5 & 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Удаляем символ аргумента дифференцирования из матричного числа A' . В результате получаем выражение для алгебраической производной (9):

$$\frac{dA}{d2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 4 & 5 & 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Можно еще раз продифференцировать выражение (9) по символу ветви 3:

$$A'' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{d^2 A}{d2 \cdot d3} = [1 \ 4 \ 5 \ 6]. \quad (10)$$

Выражение (10) представляет собой схемное множество ветвей упрощенного графа под номером 1, рис.2.

Ветви связи 2, 3 являются первой парой в списке, составленном для получения упрощенных графов, рис. 2. Понятно, что вернуть ветвь – аргумент дифференцирования можно почти так же, как ее удаляли. Надо только изменить последовательность действий. Например, если умножить

выражение (10) на символ ветви 3, то мы получим число A'' – половину столбцов матричного числа (9). А если после этого матричное число A'' умножить на символ 2, то мы получим четверть структурного числа (7):

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Вот откуда возникает необходимость применения операции объединения слагаемых числителей и знаменателей всех выражений (3).

Выводы. В работе [2] Кирхгофа впервые показано, что численные значения переменных электрической цепи обладают структурой, что можно использовать в анализе. Установлено, что ток ветви формируется множеством путей, вносящих вклад в величину тока. Показана роль связности элементов цепи, что порождает взаимовлияние режимов, структура цепи отображается на алгебраические выражения решений, что часто остается незамеченным, так как нас интересует, прежде всего, численный результат. Работу [2] можно считать первой и удачной попыткой создания топологического метода расчета электрических цепей.

Список литературы

1. Лосев А.Ф. Хаос и структура. – М.: Мысль, 1997. – 831 с.
2. Кирхгоф Г. О решении уравнений, к которым приводит изучение линейного распределения гальванических токов // Избранные труды. Г. Кирхгоф. – М.: Наука, 1988. – с. 170 – 178.
3. Ерохов И.В. Реконструкция первого топологического метода расчета, созданного Г. Кирхгофом. / Тр. международ. конференции «Континуальные алгебраические логики, исчисления и нейроинформатика в науке, технике и экономике (КЛИН–2006)». – Ульяновск: УлГТУ, 2006. – Т. 3. – С. 76–83.
4. Ерохов И. В. Теоретико-множественное обоснование топологического метода, созданного Г.Кирхгофом // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Междунар. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2011. – Вып. 9. – С.56–63.
5. Беллерт С., Возняцки Г. Анализ и синтез электрических цепей методом структурных чисел. – М.: Мир, 1972.– 334 с.

ПРОСТЕЙШИЙ АЛГОРИТМ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО РАСЧЕТА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПО КИРХГОФУ

В. В. Филаретов

О «реконструкции» топологического метода Кирхгофа. В первой статье по теории электрических цепей [1,2] были предложены основы не только численного, но и символьно-топологического анализа электрических цепей. Эта статья Кирхгофа, окончившего годом спустя Кёнигсбергский университет, до сих пор является предметом обсуждения и порождения новых идей в области топологического анализа [3]. Сейчас трудно сказать, был ли сам Кирхгоф доволен своими доказательствами трех топологических правил – двух для числителей и одного для знаменателей отклика [4]? Приоритетную статью Кирхгофа характеризуют как весьма запутанную и сложную для понимания [5].

В справедливости правил никто не сомневается, но некоторых не устраивает строгость выводов [6,7], другие пытаются усовершенствовать эти топологические правила, а третьи, невнимательно прочитавшие статью в оригинале или переводе, открывают их заново [4,8].

Кирхгоф первым пришел к обоим принципам наложения независимых воздействий – явному и неявному [9]. В первом случае для нахождения частичного вклада в отклик в схеме оставляется один источник (остальные нейтрализуются), перечисляются все контуры, содержащие этот источник и ветвь отклика. Во втором случае одновременно учитываются все источники, входящие в так называемый активный контур [10]. В случае неявного наложения влияние оставшихся источников нейтрализуется не искусственно (принудительно), а естественно, поскольку активный контур является «сверхпроводящим», и поэтому не зависит от элементов схемы, не входящих в него.

Кирхгоф показал, что различие в вариантах наложения источников заключается в различных способах группировки слагаемых одного и того же выражения числителя. Предложил правило для выражения параметров источников эдс в конце статьи [2, с. 177], и оно до сих пор обойдено вниманием некоторых исследователей [4,8].

Так сложилось, что до сих пор наиболее часто, прежде всего, на бытовом уровне рассматриваются электрические схемы, состоящие из сопротивлений и независимых источников напряжения. Несмотря на вековые споры вокруг знаменитой работы Кирхгофа, его топологическая методика для нахождения токов в именно в таких схемах содержит минимальное число понятий и формул, что облегчает освоение. В данной работе показано, как топологические правила Кирхгофа формализовать и записать в виде алгоритма.

Метод Кирхгофа предназначен для нахождения тока в I_λ в схеме с m узлами, образованной n сопротивлениями $w_1, w_2, \dots, w_\lambda, \dots, w_n$ и содержащей источники эдс $E_1, E_2, \dots, E_n$. Ключевой константой метода является число независимых контуров схемы, которое рассчитывается по формуле $\mu = n - m + 1$. Контур Кирхгоф называл «замкнутой фигурой». В оригинале [1] правила не нумеруются, но здесь нумерация необходима для обсуждения. Емкая формулировка правила 1 не нуждается в какой-либо редакции:

Правило I (для знаменателя). «Общий знаменатель всех величин I равен сумме сочетаний из $w_1, w_2, \dots, w_n$ по μ элементов $w_{k1}, w_{k2}, \dots, w_{k\mu}$, обладающих тем свойством, что после размыкания проводников $k_1, k_2, \dots, k_\mu$ в сочетаниях не остается ни одного контура» [2, с. 177].

В соответствии с правилом 1 в знаменатель отклика тока образован суммами произведений сопротивлений ветвей, удаление которых приводит к образованию деревьев схемы, состоящих из оставшихся сопротивлений.

Рассмотрим самую, пожалуй, популярную схему в истории электротехники [1,2], поместив независимые источники напряжения в четыре ветви (рис. 1), чтобы сравнить решение с решением из работы, помещенной первой в этот раздел настоящего сборника [3]. В схеме на рис. 1 имеется шесть ветвей $n=6$ и четыре узла, поэтому число независимых контуров $m=6-4+1=3$.

Знаменатель тока I_1 находится по приведенному выше правилу 1 Кирхгофа. Слагаемые знаменателя соответствуют сочетаниям из n ветвей по m таких, удаление которых из схемы не приводит к образованию контуров. Из 20 сочетаний оставляется 16. Сочетания: 126, 135, 245, 346 пропускаются. Сопротивления резисторов для краткости обозначаются номерами ветвей.

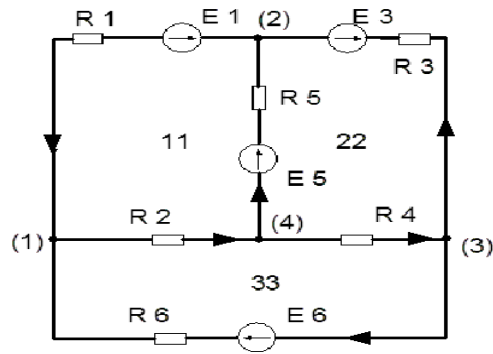


Рис. 1. Полная схема с четырьмя узлами и четырьмя источниками эдс [3]

Отсюда:

$$D = 123 + 124 + 125 + 134 + 136 + 145 + 146 + 156 + 234 + \\ 235 + 236 + 246 + 256 + 345 + 356 + 456.$$

По правилу 2 Кирхгофа [2,4] слагаемые знаменателя, включающие ветвь 1 с искомым откликом, используются для получения числителя без этой ветви. Удаление этих пар ветвей: 23, 24, 25, 34, 36, 45, 46, 56 (показаны штриховыми линиями) приводит к восьми подсхемам с единственным контуром, проходящим через ветвь 1 (рис. 2). Ветви этих подсхем выделены жирными линиями на рис. 2.

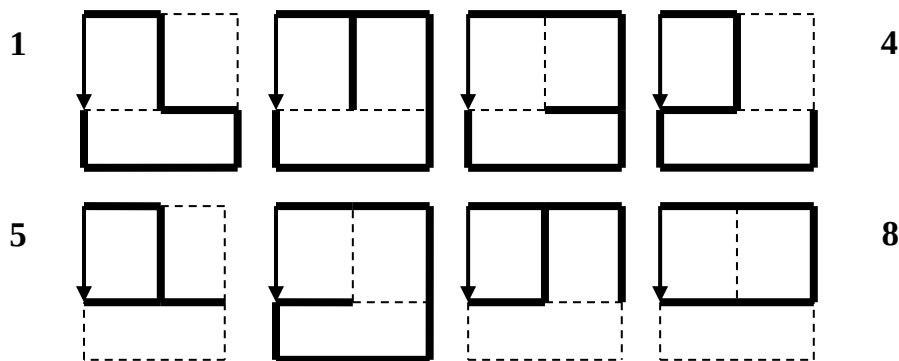


Рис. 2. Подсхемы схемы на рис. 1, содержащие контур с искомым током

Каждая из 8 схем на рис. 2 делает свой вклад в отклик тока I_1 сообразно одному из четырех видов активных контуров, показанных на рис. 3. Однако нет необходимости рассматривать эти 8 схем по отдельности, как сделано в [3]. Только две схемы – первая и восьмая (рис. 2) – характеризуется уникальными контурами – первым и четвертым (рис. 3). Оставшиеся две триады схем: 2, 3, 6 и 4, 5, 7 на рис. 2 порождены активными контурами – вторым и третьим (рис. 3).

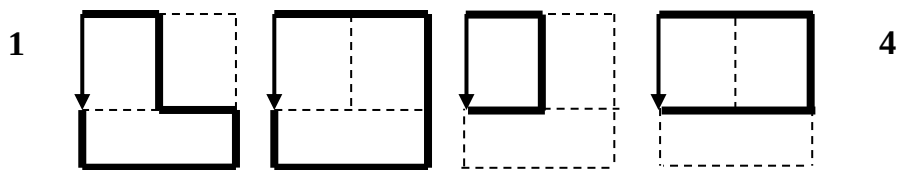


Рис. 3. Активные контуры в подсхемах на рис. 1

Неслучайно Кирхгоф в разделе 4 возвращается к выражению тока, который течет в контуре, оставшемся после удаления μ ветвей-связей [2]. Приведем эту формулу в оригинальном виде:

$$I'_{\lambda} = \frac{E_{\lambda 1} + E_{\lambda 2} + \dots + E_{\lambda \nu}}{w_{\lambda 1} + w_{\lambda 2} + \dots + w_{\lambda \nu}}. \quad (1)$$

Ток контура определяется как частное от деления «суммы ЭДС контура» на «собственное сопротивление» контура. Этот ток помечен штрихом как частичный ток. Далее в [2] следует подробное доказательство выражения (1). Отсюда нетрудно прийти к значению полного тока через слагаемые частичных токов, если опираться на схемное мышление [11–14], а не на алгебру структурных чисел [15], как предлагается в [3]. Покажем это.

Сначала посмотрим на выражение (1) с позиций схемного подхода. В числителе выражения тока активного контура содержится сумма входящих в этот контур эдс с соответствующими знаками. Это означает, что сопротивления активного контура заменены идеальными проводниками (стянуты в узел). В схеме числителя остались только источники эдс и ветвь с искомым током. Определитель такой схемы, как следует из (1), равен сумме эдс с соответствующими знаками.

В знаменателе выражения тока активного контура (1) содержится сумма учитываемых в этом контуре сопротивлений. Поэтому в схеме знаменателя эдс, включенные последовательно с этими сопротивлениями, стягиваются, что соответствует приравнению значений эдс к нулю для получения схемы знаменателя. Определитель схемы-контура, состоящего из сопротивлений, по правилу 1 Кирхгофа равен сумме сочетаний из числа этих сопротивлений по одному, то есть сумме всех сопротивлений контура. Это соответствует выражению знаменателя в формуле (1).

Таким образом, доказав формулу (1), Кирхгоф тем самым доказывает и простейший случай топологического правила 1. Рассмотрим активный контур в произвольной схеме. Сомножитель при сумме эдс в схеме-контуре равен 1. Это означает, что соответствующая единственному узлу схема не содержит элементов. При наличии других элементов сопротивления, их узлы на схеме числителя, которые подсоединены к активному контуру, объединятся в один узел (замкнутся). Определители образованной при этом схемы, полученные по правилу 1, будут сомножителями при соответствующей сумме эдс для получения частичного отклика тока I_1 , например, от каждого из четырех активных контуров на рис. 3.

Покажем, что знаменатель частичного отклика от каждого активного контура один и тот же, то есть является знаменателем полного тока при решении системы уравнений схемы по правилу Крамера. Схема знаменателя каждого частичного отклика получается стягиванием источников эдс в этом контуре. Оставшиеся вне контура источники эдс стягиваются аналогично. Следовательно, для всех частичных откликов активных контуров схемы знаменателей будут одинаковыми. В рассматриваемом примере схемы на рис. 1 это влечет получение одной и той же схемы знаменателя после стягивания эдс в каждом из четырех активных контуров на рис. 3.

Если частичные отклики, соответствующие токам активных контуров на рис. 3, имеют общий знаменатель, равный D , то числитель полного тока образован суммой числителей частичных токов. Отсюда получается формула для искомого тока [10]:

$$X = \sum_{k=1}^n \frac{\Delta_k a_k}{\Delta} A_k, \quad (2)$$

где X – искомый отклик тока, Δ – определитель схемы, найденный по правилу 1; A_k – сумма эдс k -го активного контура; Δ_k – определитель схемы, полученной в результате стягивания элементов контура, найденный по правилу 1; a_k – вес k -го активного контура.

Кирхгофу нечего не мешало привести эту формулу (2) в обсуждаемой статье [1,2], как это сделал спустя полвека Фойснер [12]. Кирхгоф это не сделал, возможно, потому что посчитал свои правила достаточными для формализации хода расчета электрической цепи. Ведь контуры, параметры которых используются в формуле (1), все равно приходится находить по

правилам 2 или 3 через сочетания ветвей. Более эффективный алгоритм поиска контуров будет удобнее для компьютера, чем для человека.

Представляется, что Кирхгоф посчитал бы приведенное здесь доказательство топологических правил очевидным после доказательства выражения (1) для активного контура. Перед правилом 3 Кирхгоф скромно написал: «Да позволено мне будет сделать несколько замечаний по поводу доказанной теоремы» [2, с. 177]. Но на самом деле правило 3 является более совершенным, чем правило 2 для числителя, поскольку ограничивает перебор сочетаний сочетаниями, использованными при нахождении знаменателя! Однако является спорным вопрос, что проще, независимо перебирать сочетания ветвей для поиска активных контуров или выбирать такие сочетания из знаменателя? Поэтому Кирхгоф оставил в статье оба правила.

Взыскательный рецензент предложил бы следующую редакцию формулировке правила 2 в оригинале [1] и переводе [2]:

Правило II (для числителя). «Числитель величины I_λ равен сумме сочетаний из $n-1$ сопротивлений схемы (за вычетом ветви λ) по $\mu-1$ элементов $w_{k1}, w_{k2}, \dots, w_{\mu-1}$, обладающих тем свойством, что после исключения проводников $k_1, k_2, \dots, k_{\mu-1}$ остается один контур; каждое сочетание умножается на сумму электродвижущих сил, которые приложены к проводникам, образующим контур, проходящий через ветвь λ . При этом эдс считаются положительными в направлении тока I_λ .

Предложенная редакция правила 2 позволяет найти пары ветвей: 23, 24, 25, 34, 36, 45, 46, 56, удаление которых приводит к образованию контура, проходящего через ветвь $\lambda=1$, перебирая сочетания из меньшего числа ветвей. Например, для рассматриваемого примера требуется перебор сочетаний из 5 (вместо 6) сопротивлений с номерами 2. 3. 4. 5. 6, всего 10 сочетаний. Из них два сочетания: 26 и 35 пропускаются, поскольку удаление этих пар ветвей приводит к образованию контуров: 345 и 246 соответственно. Как видно, по исходному правилу 2 требовался перебор 20 сочетаний (из 6 элементов по 2). При таком сокращении трудоемкости перебор сочетаний оказывается предпочтительнее их поиска в знаменателе, и правило 3 [2,4] теряет практическую значимость.

Может возникнуть вопрос, не противоречит ли правило 2 получению числителя в формуле (2), которая основывается на выражении (1)? Ведь это

выражение (1) записано для активного контура, к узлам которого не подключаются отдельные ветви (рис. 2) или более сложные структуры, не содержащие контуров. Противоречия здесь нет, поскольку удаление ветвей, которое привело к образованию такого контура, приводит к схеме-дереву, как в случае стягивания всех ветвей контура, так и оставления в производной схеме для сомножителя Δ_k «лишних» ветвей.

Например, один и тот же активный контур 136 (рис. 1) имеется в подсхемах 2, 3 и 6 с подсоединенными ветвями 5, 4 и 2, соответственно (рис. 2). При стягивании активного контура согласно формуле () без лишней ветви в этих схемах образуется параллельное соединение двух ветвей, показанных штриховыми линиями и лишней ветви активного контура. Если стянуть ветви активного контура вместе с лишней ветвью, то образуется схема в виде двух петель из ветвей, обозначенных штриховыми линиями. В обоих вариантах схем при удалении пар сопротивлений 24, 25 или 45 получается схема без контуров, в первом случае в виде разомкнутой ветви, а во втором случае – в виде одного узла. Отсюда вытекает, что определители стягивания активного контура, неважно с лишними ветвями или без них, одинаковы, и формула для тока ветви () справедлива и при повторном использовании активных контуров (по Кирхгофу) при условии, что «лишние» ветви контуров, как образующие контур их ветви будут стягиваться.

Физические основы топологических правил. Фундаментальным является утверждение, что только активные контуры в схемах с источниками напряжения делают вклад в отклик. В этом заключается физический смысл топологических правил Кирхгофа. Назначение оставшейся части схемы состоит в создании условий для образования активных контуров. Формально такие условия создаются удалением и стягиванием элементов сопротивления в соответствии с формулой выделения Вильгельма Фойснера – ученика Густава Кирхгофа. Для создания активного контура необходимо придать его сопротивлениям значения, равные нулю. Параметры этих сопротивлений не входят в выражение числителя формулы (2).

Чтобы работа активного контура не нарушалась, его узлы не должны замыкаться накоротко другими ветвями схемы. Это значит, что оставшаяся часть схемы не может образовывать деревьев, поскольку в них имеются

пути между каждой парой узлов. Поэтому сомножителем при весе некоторого контура является определитель схемы, полученной в результате короткого замыкания этого контура, то есть удаления его ветвей и объединения соответствующих узлов в один узел.

Число активных контуров равно числу составляющих отклика при неявном наложении источников напряжения и нахождение отклика начинается с перечисления активных контуров в схеме. Множители в виде дроби при параметрах A_k в выражении (2) отражают вклад того или иного активного контура или сечения в искомое значение, что может быть использовано для решения задач диагностики цепи, например, для выявления существенных или несущественных активных контуров и сечений. Из преобладающих (доминирующих) слагаемых может быть сформировано упрощенное выражение, удобное для оценочных расчетов. Выражение вида (2), как никакое другое выражение, позволяет наглядно представить работу электрической цепи или энергетической системы, обнаружить критические контуры и сформулировать требования, выполнение которых обеспечивает повышение надежности системы.

Алгоритм Кирхгофа. Применение топологических правил Кирхгофа не требует дополнительных познаний и формул, достаточно умения упорядоченного (во избежание пропуска) перебора сочетаний по возрастанию номеров. Именно в таком порядке перечислены сочетания для числителя и знаменателя рассмотренного примера. Сам Кирхгоф, судя по его примеру перебора [1,2], использовал обратный порядок следования сочетаний. Выражение тока по правилам 1 и 2 будет получено и вычислено после задания параметрам значений.

Кирхгоф не использовал понятие активного контура для применения формулы (1), хотя схем с единственным контуром, которые остаются после удаления сочетаний ветвей, встречается во много раз больше, чем активных контуров. Например, в два раза, что показывает сравнение рис. 2 и 3.

Но такая задача Кирхгофом, в отличие от Фойснера [11,12], не ставилась. Несомненным достоинством первого топологического метода анализа электрических цепей [1,2] является наименьшая сложность в реализации программы автоматизации их расчета. Нужны две подпрограммы: генерации сочетаний и проверки связности схемы, оставшейся после удаления выбранных сочетаний ветвей. Вторая

подпрограмма используется для проверки сочетаний, образующих знаменатель и числитель. Например, сочетания, перечисляемые при нахождении знаменателя: 126, 135, 245, 346 пропускаются, потому что после их удаления образуется контур, и схема становится несвязной – появляется изолированный узел. Сочетания 26 и 35 пропускаются в числителе, поскольку удаление этих пар ветвей в схеме без ветви 1 приводит к изоляции узла, к которому присоединялась эта ветвь.

Как было известно уже Кирхгофу, число ветвей в дереве схемы на единицу меньше числа узлов, а наличие связности эквивалентно отсутствию контуров. Очевидно, Кирхгоф полагал, что проверка наличия контура визуально выполняется нагляднее, чем отсутствие связности. Однако алгоритм установления несвязности проще алгоритма нахождения одного из контуров.

Выводы. Показано, что топологические правила Кирхгофа [1,2] для нахождения токов в электрической цепи с источниками эдс являются простым для реализации алгоритмом, который сводится к перебору сочетаний из сопротивлений, чему можно научить ребёнка. Результатом могут быть не только значения тока, но и причины его отсутствия.

Список литературы

1. Kirchhoff G. R. Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Vertheilung galvanischer Ströme geführt wird // Annalen der Physik. – 1847.– Bd. 72.– S. 498–508.

2. Кирхгоф Г. О решении уравнений, к которым приводит изучение линейного распределения гальванических токов. – Кирхгоф Г. Избранные труды. – М.: Наука, 1988. – С. 170–178.

3. Ерохов И.В. Первое обращение к структуре при решении уравнений цепи // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2008. – Вып. 18. – С.

4. Филаретов В.В. Три топологических правила Кирхгофа (по поводу статьи Халютина С.П. и Титова А.А. — Электричество, 2011, № 6) // Электричество. – 2012.– № 8.– С. 65–70.

5. Ерохов И.В. Подробный анализ первой работы по теории электрических цепей // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.–Ульяновск: УлГТУ, 2013.–Вып.11.–С. 273–290.
6. Ерохов И.В. Реконструкция первого топологического метода расчета, созданного Г.Кирхгофом // Тр. международ. конф. «Континуальные алгебраические логики, исчисления и нейроинформатика в науке, технике и экономике». –Ульяновск: УлГТУ, 2006.–Т. 3. – С. 76–83.
7. Ерохов И.В. Теоретико-множественное обоснование топологического метода, созданного Г.Кирхгофом // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2011.– Вып. 9.– С. 236.
8. Миланцей Т., Филаретов В. В. Правило Кирхгофа для нахождения числителя и знаменателя схемной функции по ее знаменателю (по поводу статьи Г.А. Белова и В.Г. Захарова в журнале «Электричество») // Схемно-алгебраические модели активных электрических цепей: Синтез, анализ, диагностика: Тр. международ. конф. КЛИН–2005. – Ульяновск: УлГТУ, 2005. – Т. 3. – С. 217–220.
9. Курганов С.А., Филаретов В.В. Неявный принцип наложения воздействий в линейных электрических цепях // Электричество. – 2005.– № 1.– С. 32–43.
10. Филаретов В.В. Наложение воздействий активных контуров и сечений в электрических цепях // Международ. сб. науч. тр. «Синтез, анализ и диагностика электронных цепей» – Ульяновск: УлГТУ, 2010, вып. 8.
11. Feussner W. Ueber Stromverzweigung in netzformigen Leitern // Annalen der Physik. – 1902.– Bd 9, N 13.– S. 1304–1329.
12. Feussner W. Zur Berechnung der Stromstarke in netzformigen Leitern // Annalen der Physik. – 1904.– Bd 15, N 12.– S. 385–394.
13. Филаретов В.В. Исследования Вильгельма Фойснера в области теоретической электротехники // Электричество. – 1992.– № 9.– С. 64–67.
14. Филаретов В.В. Топологический анализ электронных схем методом выделения параметров. – Электричество, 1998, № 5.– С. 43–52.
15. Bellert S. Woźniacki H. Analiza i synteza układów elektrycznych metodą liczb strukturalnych. – Warszawa : Wydaw. Naukowo-techniczne, 1968. – 306 с.

П. А. ЩУРКЕВИЧ: ПЕРВЫЙ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЙ УЧЕБНИК ЛЕНИНГРАДСКОЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ

В. В. Панкин, Е. Б. Соловьева, М. С. Портной

Описаны основные вехи творческого пути автора первого фундаментального учебника петроградской (в последствии ленинградской) электротехнической школы в первом электротехническом вузе России – Санкт-Петербургском государственном электротехническом университете «ЛЭТИ». Отмечены заслуги первых профессоров электротехники в России – предшественников профессора П. А. Щуркевича.

The main milestones of the creative path of the author of the first fundamental textbook for the Petrograd (later Leningrad) scientific school of electrical engineering at the first Electrotechnical Institute in Russia, now Saint Petersburg Electrotechnical University “LETI” are described. The merits of the predecessors of Professor P. A. Shchurkevich – the first professor of electrical engineering in Russian – are highlighted.

Кафедра теоретических основ электротехники (ТОЭ) первого в России высшего электротехнического учебного заведения (Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета «ЛЭТИ», СПбГЭТУ) достойно представлена на топонимической карте Санкт-Петербурга именами своих преподавателей и сотрудников (улицы Шателена, Гаккелевская, Лодыгина и Яблочкова). Есть и мемориальные доски, а если учитывать и студентов, то появятся и памятники.

Щуркевич Пантелеймон Антонович – пятый заведующий первой кафедрой электротехники в России [1, 2]. Родился в 1873 году в городе Каменец-Подольске [3–5] (сейчас историко-архитектурный заповедник – седьмое чудо Украины). Еще живы четверо лицеистов пушкинского выпуска. Он был младшим современником Ф. М. Достоевского, А. П. Чехова, А. И. Куприна и В. И. Ульянова (Ленина), а также Д. И. Менделеева, А. С. Попова и И. П. Павлова. Был одноклассником М. М. Пришвина и В. Я. Брюсова. В год его рождения в Германии родился термин

«электротехника». П. А. Щуркевич был старшим современником А. А. Блока, Н. С. Гумилева и своих земляков С. П. Королева и Л. Д. Троцкого. Все названные жили здесь же, рядом с ним, в Петербурге–Петрограде–Ленинграде, на Васильевском острове, Петроградской стороне, в Литейной и Адмиралтейской части. В судьбе П. А. Щуркевича и всех названных его современников много похожих событий, может быть только разной тональности и напряжения, не отставали от ритмов эпохи.

«...Пантелеймон Антонович Щуркевичъ, мещанинъ, вероисповедания православного, родившийся 30 мая 1873 года, по удовлетворительном выдержании в ИМПЕРАТОРСКОМЪ С.-Петербургском университете полукурсового испытания и по зачете определенного уставом числа полугодий по Математическому разряду Физико-Математического факультета ... 5 июня 1899 года удостоен диплома первой степени...» [3].

После получения 27 сентября 1899 года первого диплома 26-летний математик успешно поступает на учебу в самый передовой ВУЗ империи – Электротехнический Институт (ЭТИ) ИМПЕРАТОРА АЛЕКСАНДРА III. Инженеры-электрики рубежа XX века – это как космонавты через 60 лет и у нас в стране, и во всем мире. Авторитет электротехников настолько значимый, что первый заведующий кафедрой электротехники профессор Иван Иванович Боргман работал в Зимнем и Аничковом дворце преподавателем и воспитателем всех наследников российского престола: Георгия и Михаила Александровичей, а также будущего императора Николая II, а также его сестер – великих княгинь Ксении и Ольги Александровны. И.И. Боргман, статский генерал, был членом Государственного Совета и не изображен на знаменитой картине И.Е. Репина «Торжественное заседание Государственного совета 7 мая 1901 года в день столетия со дня его утверждения» потому, что отсутствовал.

П. А. Щуркевич поступает в ЭТИ императора Александра III в качестве студента через три года после первой, в 1896 году, радиопередачи А. С. Попова. Ещё через три года А. С. Попов начнет работу в ЭТИ в качестве ординарного профессора физики. Ещё через три года А. С. Попов станет директором института (на несколько месяцев). П. А. Щуркевич станет директором ЭТИ через 37 лет (также на несколько месяцев).

Беспроволочный телеграф, так называли радио в России до 1910 года, изобрёл и внедрял директор ЭТИ А. С. Попов. Примерно в это же время, в

1898 году, главная телефонная линия в России между Петербургом и Москвой (в то время самая протяженная в Европе) была спроектирована и проложена под руководством П. Д. Войнаровского, профессора кафедры электротехники, преемника А. С. Попова в 1906 году.

Диплом инженера-электрика первого разряда П. А. Щуркевич получит 15 мая 1902 года за подписью министра внутренних дел Статс-Секретаря В. К. фон Плеве, начальника Главного управления почт и телеграфов генерала-от-инфантерии Н. И. Петрова и Председателя Совета, Директора ЭТИ профессора Н. Н. Качалова, предшественника А. С. Попова на этом посту [2, 3].



Рис.1

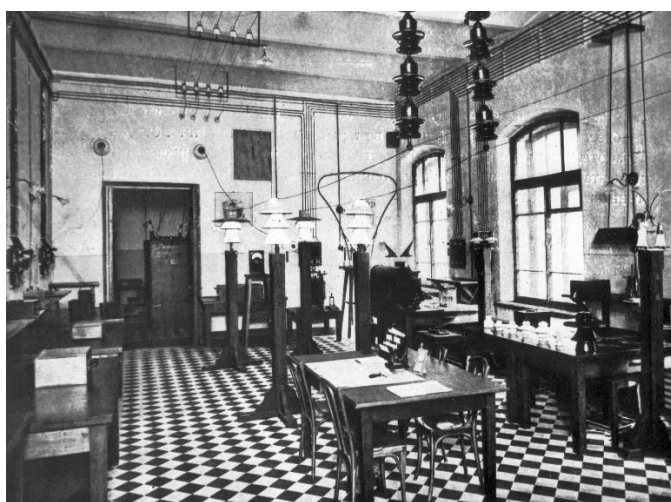


Рис.2

После окончания ЭТИ, с 1 ноября 1902 Пантелеймон Антонович – младший лаборант кафедры общей электротехники (Рис. 1). Впоследствии, преподаватель, приват-доцент и с 1918 года профессор этой кафедры [3]. В дореволюционный период он опубликовал несколько учебных и научных работ. Среди них наиболее значимые: «Измерение переменных токов» и «Теория круговых диаграмм» опубликованы в 1910-11 годах. На кафедре сотрудничал с известными или в будущем известными учёными и педагогами: И. И. Боргманом, М. А. Шателеном, П. Д. Войнаровским, В. Ф. Миткевичем (будущим академиком и первым лауреатом Ленинской премии среди физиков и электротехников), а также профессорами А. А. Петровским и С. И. Покровским [4, 5].

С 1918 года Пантелеймон Антонович руководит кафедрой теории переменных токов (Рис. 2). По архивным данным с зарплатой 200 рублей, в

этом же году – две научные командировки в Киев и одна в Москву. В 1922 – две научные командировки в Москву. Опубликовал ряд учебников и учебных пособий. Учебное пособие «Переменные электрические токи и теория круговых диаграмм» [6] включало весь курс теории переменных токов и являлось основным учебным пособием для студентов.

Ранее учебником служил отпечатанный курс физики И. И. Боргмана, в котором только часть была посвящена электротехнике. Первым учебником электротехники следует считать учебник профессора П. Д. Войнаровского [7], но это был уже прошлый, девятнадцатый век. Фундаментальным учебником нового времени на кафедре стал учебник П. А. Щуркевича «Теория переменных токов» в двух томах с атласом круговых диаграмм [8].

В 1933 году учебник был издан и в 1940 году переиздан. П. А. Щуркевич исследовал вопросы, относящиеся к переходным процессам многофазных систем. Отмененные в 1917 году ученые степени и звания, в 1934 году были восстановлены в новом статусе. В 1938 степень кандидата технических наук без защиты диссертации (*honoris causa*) присуждается П. А. Щуркевичу. Одновременно эта степень присуждена его ученику с 1920-х годов, тогда еще студенту, земляку-каменцу (жителю Каменец-Подольска) А. В. Берендееву. Совместно они занимались работой по исследованию и созданию методов расчета электрических цепей с переменными параметрами с применением «тензорного исчисления Г. Крона». Сразу после Великой Отечественной войны А. В. Берендеев примет руководство кафедрой и продолжит работы учителя.

В 1940 году П. А. Щуркевич станет доктором технических наук, также *honoris causa* (без защиты диссертации). Его научная биография и круг научных интересов были во многом схожи с биографией основателя московской электротехнической школы ровесника и земляка Карла Адольфовича Круга (1873–1952), труды которого Щуркевич высоко ценил и рекомендовал. Каждый из них написал первый фундаментальный учебник по электротехнике, в рамках ленинградской и московской электротехнической школы.

В 1920-е годы под руководством Пантелеймона Антоновича создана новая лаборатория электрических цепей и написано руководство по переменным токам, содержащее 12 лабораторных работ по однофазным и 17 работ по трехфазным переменным токам [9].

В сфере общественной деятельности, до революции 1917 года П.А. Щуркевич курировал вопросы электрификации города в Петроградской Городской думе и сотрудничал, в этих рамках, с кадетской фракцией думы. В советское время такое сотрудничество отразилось на его судьбе. В 1921 году после Кронштадтского восстания, П. А. Щуркевич был арестован по делу «Петроградской боевой организации» (ПБО). После обращения М. Горького и распоряжения В. И. Ленина профессор П. А. Щуркевич был освобожден и полностью реабилитирован [4, 5].

По архивным данным за 1920–1930 годы профессор П. А. Щуркевич активно участвовал в общественной и административной работе вуза. Получал благодарности за выполнение плана, успехи в социалистическом соревновании и экономию фонда зарплаты. В 1939 году утвержден в звании ударника. Несколько раз исполнял обязанности заместителя директора по учебной работе, а в 1937 – обязанности директора ЛЭТИ [2].

В годы блокады продолжал исполнять обязанности заведующего кафедрой. После самой тяжёлой зимы 1941–42 года умирает вдова Д. И. Менделеева. В начале марта 1942 года 69-летний профессор эвакуирован из блокадного Ленинграда по льду Ладожского озера. На последней странице личного дела в архиве приложен документ: «Справка. Профессор Щуркевич П.А. во время эвакуации ин-та из г. Ленинграда 13/III-42г. по дороге заболел и умер в поезде 18/III-42г. Тело вынесли в Рязани на платформу». Место захоронения неизвестно [4, 5].

Пантелеймон Антонович был достойным продолжателем развития электротехники в России. Период его творческой жизни совпал с трудным периодом в общественной жизни страны. Профессор П. А. Щуркевич достойно вышел из всех испытаний, живя в ногу со временем, сохранил лидирующие позиции петроградской, а затем ленинградской электротехнической школы в традиционном направлении «сильных токов». Он успел издать фундаментальные труды в электротехнической области и трагически скончался на своем посту.

Список литературы

1. Панкин В.В., Соловьева Е.Б. Первая в России кафедра электротехники: от технического училища до электротехнического университета // In memoriam: Василий Андреевич Андреев: сб. памяти В.А. Андреева. – Ульяновск: УлГТУ, 2018. – С.138–153.

2. Выдающиеся выпускники и деятели Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета «ЛЭТИ» имени В.И.Ульянова (Ленина). 1886–2006: биографический справочник / под ред. Д.П.Пузанкова. – СПб.: изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ» им. В.И.Ульянова (Ленина), 2006.– 350 с.

3. Архив Государственного Электротехнического университета (ЛЭТИ). Папка «Личное дело П. А. Щуркевича».

4. Панкин В.В., Соловьева Е.Б. К 125-летию первой в России кафедры электротехники // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: международ. сб. науч. тр.–Ульяновск: УлГТУ, 2016. – Вып. 13.– С.247–259.

5. Панкин В.В., Соловьева Е.Б. 130 лет развития кафедры Теоретических основ электротехники // Control Engineering Россия.– 2021.– Т. 91, №1.– С.73–77.

6. Щуркевич П.А. Переменные электрические токи и теория круговых диаграмм: Ч.1: Однофазный ток. –Ленинград: Кубуч,1930.–363 с.

7. Войнаровский П.Д. Теоретический и практический курс электротехники: Ч. I: Основные сведения из высшей математики, необходимые электротехнику.–С.-Петербург: Изд. К.Л. Риккера,1897.192 с.

8. Щуркевич П.А. Теория переменных токов. Ленинград: Судпромгиз, 1941.– 652 с.

9. Щуркевич П.А. Переменный ток: пособие к лабораторным занятиям. – Ленинград: Кубуч, 1928.– 181 с.

Панкин Валерий Васильевич – доцент кафедры ТОЭ,
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет
(СПБГЭТУ – ЛЭТИ им. В.И. Ленина).
Тел.: (812) 346–17–96. E-mail: pankin.valeriy@mail.ru

Соловьева Елена Борисовна – д.т.н., профессор, зав. кафедрой ТОЭ,
СПБГЭТУ – ЛЭТИ им. В.И. Ленина.
Тел.: (812) 346–17–96. E-mail: selenab1@yandex.ru

Портной Марк Саулович – доцент кафедры ТОЭ,
СПБГЭТУ – ЛЭТИ им. В.И. Ленина.
Тел.: (812) 346–17–96. E-mail: yontrop@mail.ru
Адрес: 197022, Россия, г. Санкт-Петербург,
ул. Проф. Попова, д. 5 литера Ф, СПБГЭТУ, кафедра ТОЭ.

ЗАЩИТЫ ДИССЕРТАЦИЙ

Лернер Илья Михайлович, член редколлегии нашего сборника 3-го апреля 2024 года защитил докторскую диссертацию:

«Модели и методы повышения пропускной способности радиотехнических систем передачи информации в частотно-селективных каналах связи с межсимвольными искажениями»

по специальности: 2.2.13. Радиотехника, в том числе системы и устройства телевидения; 2.2.15. Системы, сети и устройства телекоммуникаций в Санкт-Петербургском государственном университете телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч-Бруевича.

Работа выполнена в «Казанском национальном исследовательском техническом университете им. А. Н. Туполева–КАИ» на кафедре электронных и квантовых средств передачи информации и кафедре нанотехнологий в электронике.

Научные консультанты:

доктор технических наук, профессор **Ильин Герман Иванович**

доктор технических наук, доцент **Файзуллин Рашид Робертович**

Официальные оппоненты:

Хворенков Владимир Викторович,

доктор технических наук, профессор,

Ижевский государственный технический университет имени М.Т. Калашникова, кафедра радиотехники, заведующий кафедрой

Воловач Владимир Иванович, доктор технических наук, доцент,

Поволжский государственный университет сервиса, Высшая школа передовых производственных технологий, и.о. директора

Сороцкий Владимир Александрович,

доктор технических наук, доцент,

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Высшая школа прикладной физики и космических технологий

Ведущая организация:

Акционерное общество «Концерн «Созвездие», г. Воронеж.

Для краткого ознакомления приведем Заключение из диссертации и ссылки на основные статьи:

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Ниже приведены основные результаты, являющиеся решением задач и достижением цели диссертационного исследования:

1. Проведен ретроспективный обзор разделов теории приема сигналов фазовыми радиотехническими системами передачи информации (ФРСПИ) с последовательной передачей информации (ФРСПИ ППИ) для частотно-селективных каналов связи (ЧСКС), методов оценки их пропускной способности и анализа переходных процессов в схемах замещения полосовых фильтров. В результате исследования: выделен класс методов приема и обработки ФМн-п- и АФМн-Н- сигналов в ЧСКС, позволяющих повысить пропускную способность ФРСПИ ППИ и выявлен подход к оценке пропускной способности (методы теории разрешающего времени). В качестве предпочтительного для анализа переходного процесса выбран метод медленно меняющихся амплитуд и намечены возможности его развития для установления свойств и явлений, позволяющих повысить пропускную способность ФРСПИ ППИ. Сформулированы требования, предъявляемые к математическим моделям теории разрешающего времени для ФРСПИ ППИ, функционирующих в ЧСКС при межсимвольных искажениях (МСИ), в том числе для ионосферных ЧСКС.

2. С целью повышения удельной пропускной способности развит метод медленно меняющихся амплитуд для узкополосных линейных систем путем учёта произвольного изменения скачка фазы и мгновенной фазы выходного процесса по четвертям комплексной плоскости, а также постоянного фазового сдвига узкополосной линейной системы. Среди обнаруженных физических свойств и явлений: а) время наибольшего установления фазы достигается при скачке фазы близком к $\pm 90^\circ$, степень близости определяется ошибкой установления; б) при наличии затухающих колебаний в процессе установления возможно увеличение скорости передачи, если моменты времени достижения стационарного значения мало отличаются при передаче последовательности символов.

3. Предложен подход к оценке пропускной способности ФРСПИ ППИ в ЧСКС введением системного параметра – разрешающего времени, что привело к теории разрешающего времени для ФРСПИ ППИ, позволившей повысить эффективность. Эта теория служит основой методам обработки

сигналов и управления режимами работы ФРСПИ ППИ в ЧСКС с МСИ, включает математические модели ЧСКС с системным параметром разрешающего времени. Предложенные модели учитывают: расстройку по частоте, вызванную движением среды распространения и/или неточностью настройки частоты передатчика; ошибки измерений и влияния пороговой подсистемы шумоподавления для ФМн-п-сигнала (ограничение по наименьшей амплитуде принимаемого сигнала в момент съема информации о канальном символе); ошибки восстановления начальной фазы несущего колебания и правила его компенсации; учёт набегу фазы из малого доплеровского расширения спектра; ошибки измерений или ошибки вследствие гауссовского флуктуационного шума.

4. Теория разрешающего времени позволила: а) получить оценку потенциальной пропускной способности в замкнутой форме для ЧСКС с комплексной частотной характеристикой резонансного фильтра; б) разработать высокоскоростные и высокоточные методы оценки разрешающего времени и пропускной способности для создаваемых моделей; в) реализовать алгоритмы, работающие в реальном масштабе времени. Это подтверждено результатами численного моделирования на универсальной вычислительной платформе с производительностью FP64 – 212 ГФлопс/с (среднее время выполнения разработанных алгоритмов на одну конфигурацию сигнального созвездия для алгоритма на базе аналитического метода для ФМн-п-сигнала – 39,7 мс, а для АФМнN-сигнала – 152,9 мс, а для алгоритма на базе численного метода – 1,65 с).

5. Созданы методы оценки помехоустойчивости для ФРСПИ ППИ на базе телерадиовещания для среднеширотных ионосферных декаметровых каналов связи, в том числе с учетом дестабилизирующих факторов, обусловленных работой подсистем ФРСПИ.

6. Разработаны; а) структурная схема ФРСПИ ППИ, обобщающая управление режимами работы синтезированных алгоритмов на основе предложенных методов обработки сигналов; б) функциональная схема ФРСПИ ППИ для парциального 3 кГц декаметрового ионосферного ЧСКС. Временные диаграммы функционирования доказывают практическую реализуемость на базе отечественной универсальной вычислительной платформы Эльбрус и возможность снижения среднего времени выполнения разработанных алгоритмов на одну конфигурацию

сигнального созвездия до 38 значений – 2,7785 и 10,7010 мс при использовании ФМн-п-сигнала и АФМн-N-сигнала, соответственно (при аналитическом алгоритме). В случае алгоритма на базе численного метода достигается снижение до 115,5 мс. Выигрыш по пропускной способности в сравнении со STANAG 4539 при этом типе сигнала и скорости передачи 3200 бит/с составляет 25,8%, а по помехоустойчивости – 5,93 дБ в канале с задержкой между лучами 185 мкс и доплеровским расширением спектра 0,5 Гц на среднеширотной трассе при использовании ФМн-4-сигнала.

7. Созданы инженерные методы для оценки эффективности ФРСПИ ППИ. Это позволило без сложных расчетов повысить пропускную способность за счёт режима «окон прозрачности» в среднем в 1,2...1,9 раза по отношению к случаю, когда «окна прозрачности» не используются при заданной конфигурации сигнального созвездия, что характерно для ЧСКС с большой неравномерностью в полосе пропускания. Результаты, полученные с помощью инженерных методов, показывают возможность достижения значений удельной пропускной способности в 9 бит/ Гц*с при использовании ФМн-4-сигнала в ЧСКС с комплексной частотной характеристикой резонансного фильтра, отсутствии ошибок измерений и ограничений со стороны подсистемы шумоподавления. При значительных ошибках измерений (четверть шага между ближайшими точками сигнального созвездия по информативным параметрам) и настройке на среднюю частоту ЧСКС удельная пропускная способность достигает значений: 1) от 2,07 до 2,799 бит/Гц*с для ФМн-4-сигнала при минимальной амплитуде принимаемого сигнала в 0,9 от её стационарного значения при изменении формы амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) ЧСКС канала от максимально гладкой в полосе пропускания до значительных (до 3 дБ) неравномерностей в полосе пропускания; 2) 5,72 бит/Гц*с для ЧСКС канала связи с АЧХ, удовлетворяющей АЧХ СТКС.

8. Полученные в диссертации результаты могут найти следующие приложения: 1) разработка протоколов для передачи сервисной информации, уменьшающих временные задержки между формированием информационного кадра и процессом передачи информации; 2) синтез помехоустойчивых кодов, учитывающих частотно-селективные свойства канала на базе телерадиовещания. Дальнейшее развитие телерадиовещания

целесообразно проводить путем подавления внутрисистемных помех и снижения сложности алгоритмов.

1. Lerner I.M., Il'in G.I. Transient Process in an Oscillatory Circuit Caused by Stepwise Phase Changes // Journal of Communications Technology and Electronics, 2010. – Vol. 55, no. 12.– P. 1385–1390.

2. Lerner I.M., Il'in G.I., Chernyavskii S.M. Transient Processes in a Bandpass Filter Caused by Stepwise Phase Variations // Journal of Communications Technology and Electronics. –2011.–Vol.56, no.3.–P.320–325.

3. Lerner I.M., Il'in G.I. The Analysis of the Transient Process Caused by a Jump in the Amplitude and Phase of Radio Pulse at the Input of Narrowband Linear System / Journal of Communications Technology and Electronics. – 2012.–Vol.57, no. 2.–P. 174–188.

4. Лернер И.М. Аналитическая оценка пропускной способности канала связи с частотной характеристикой резонансного фильтра при наличии межсимвольных искажений и использовании многопозиционного фазоманипулированного сигнала // Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт.– 2017.– Т. 11, № 9.– С. 65–73.

5. Лернер И.М. Метод оценки пропускной способности реальных каналов связи с многопозиционными фазоманипулированными сигналами при наличии межсимвольных искажений и его применение // Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт.– 2017.– Том 11, № 8.– С. 52–58.

6. Лернер И. М., Камалетдинов Н. Н. К вопросу увеличения скорости передачи в фазовых радиотехнических системах передачи информации, работающих при сильных межсимвольных искажениях в линейном радиотракте // Научные технологии в космических исследованиях Земли. – 2017.– Т. 9, № 5.– С. 92–104.

7. Lerner I.M., Faizullin R.R., Chernyavskii S.M. To Matter of Increasing the Spectral Efficiency of Phase Radio-Technical Data Transmission Systems Operating under Strong Intersymbol Interference // Russian Aeronautics. – 2018.– Vol.61, no.1.– P.120–126.

8. Лернер И.М., Фатыхов М.М., Ильин Г.И. Особенности функционирования каналов связи с АФМн-N-сигналами при использовании взаимно коррелированными символами // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. – 2019.– Т.22, № 1. С.36–49.

9. Лернер И.М. К вопросу оптимизации амплитудно-частотных характеристик каналов связи с ФМН-п-сигналами, построенных на основе теории разрешающего времени // Т-Сomm: Телекоммуникации и транспорт. – 2019.– Т. 13, № 9.– С. 36–49.

10. Лернер И.М. О влиянии формы амплитудно-частотной характеристики на пропускную способность канала связи с памятью, использующего принципы теории разрешающего времени, с АФМН-N-сигналами // Т-Сomm: Телекоммуникации и транспорт. – 2019. – Т. 13. № 10.– С. 45–59.

11. Лернер И.М. К вопросу о выборе метода анализа переходных процессов для развития теории временного разрешения. Ретроспективный аналитический обзор // Т-Сomm: Телекоммуникации и транспорт. – 2021. Т. 15, № 8.– С. 62–70.

12. Лернер И.М., Файзуллин Р.Р., Рябов И.В. Высокопроизводительный алгоритм оценки пропускной способности каналов связи, функционирующих на базе теории разрешающего времени // Радиотехника. – 2022.– Т.86, № 4.– С.91–109.

ИНЖЕНЕР, УЧЕНЫЙ, ПЕДАГОГ

Ерохов Игорь Васильевич



12 августа 1939 – 11 мая 2021

Образование и работа в космической промышленности. Игорь Васильевич родился 12 августа 1939 года в г. Кривой Рог (УССР). После восьми классов средней школы родного города завершил получение среднего образования в Днепропетровске. В 1961 году окончил Днепропетровский металлургический институт по направлению «электрификация и автоматизация металлургического оборудования». Проходил практику в электрослужбе Запорожстали. Первое место работы – Запорожский филиал института автоматики Госплана УССР, младший научный сотрудник. Затем была работа в Запорожском филиале КБ Электроприборостроения. Год провел в командировке в Харьковской ведущей организации в теоретическом комплексе – осваивал автоматические системы ракет и спутников.

С 1970 года И. В. Ерохов занимался машинным проектированием, а затем разрабатывал охранную сигнализацию, у которой сейсмический сигнал был основным. Защитил проект первой стадии управления ракетными войсками. Оформил карточку ВПК и проект совместного решения на заказ разгонного блока, который выводит спутник на стационарную орбиту.

Летние школы и семинары в СССР. Работа в промышленности была связана с расчетами и машинным проектированием, поэтому требовала углубления подготовки в области математики и теории электрических цепей. Игорь Васильевич начал принимать участие в семинарах и летних школах, организуемых Львовским университетом и Киевским политехническим институтом [1]. Его результаты в теории ветвящихся цепных дробей получили признание [2]. Научную специализацию И. В. Ерохова определило знакомство на одном из семинаров с Элизаром Вульфовичем Зеляхом [3] – одним из столпов теоретической электротехники в Советском Союзе. Кафедра Одесского электротехнического института связи в то время была одной из ведущих в стране. Игорь Васильевич подготовил и защитил кандидатскую диссертацию [4].

Становление Игоря Васильевича как специалиста в области теоретической электротехники продолжилось в 1980 году, когда он пришел на кафедру электротехники Запорожского индустриального института. Многолетняя практика научных школ, семинаров, конференций уже сформировала И. В. Ерохова как преподавателя. Недаром в электронной книге «Ностальгия», опубликованной коллегой из Таллина – Эдгаром Альфредовичем Лаксбергом, Игорь Васильевич охарактеризован как «лучший рассказчик анекдотов». Владеть аудиторией, безупречно писать и говорить – всё это было ему присуще.

Знатор начал теории электрических цепей. Научной «нишей» Игоря Васильевича были истоки развития электрических цепей, где ему не было равных даже среди маститых специалистов. Он первым дал развернутый комментарий [5] на страницах «Электричества» – старейшего журнала страны (издаётся в 1880г.) – в связи с выходом избранных трудов Г. Р. Кирхгофа [6]. За полвека своей научной работы Игорь Васильевич приобрел уникальную квалификацию по основаниям теоретической электротехники и истории открытий. До последних дней жизни И. В. Ерохов не оставлял без внимания «загадки», которые оставил своим последователям Кирхгоф, являющийся не только создателем теории электрических цепей, но и автором первого топологического метода их анализа.

Двухтомник Максвелла [7] Игорю Васильевичу приобрести не удалось, пришлось использовать присланные мной копии. Я удивлялся этому, поскольку сам купил эти книги в УССР, в Харькове. На что был ответ: «Запорожье – не Харьков». Максвелл, равняясь на Кирхгофа, не мог оставить без внимания символично-аналитический анализ электрических цепей, поэтому разработал топологический метод, дуальный методу Кирхгофа [7]. Работы Вильгельма Фойснера – очного ученика Кирхгофа – Игорю Васильевичу пришлось читать на языке оригинала в «Annalen der Physik» [8,9]. Жаль, что ему не довелось подержать в руках эти тисненные золотом переплеты в фундаментальной библиотеке Ленинградского политехнического института. Фойснер довел до совершенства топологический анализ электрических цепей без активных элементов (электронная лампа еще не была изобретена).

И. В. Ерохов разобрался в наследии Бернарда Теллегена, вклад которого в 20-м веке [10] соизмерим со значением работ Кирхгофа и Максвелла, заключается в разработке теоремы виртуального энергетического баланса и первых моделей активных элементов – гиратора и нуллора [11]. Был установлен отечественный приоритет, поскольку теорему Теллегена правильнее назвать теоремой Зеляха–Теллегена [12] или теоремой Зеляха [13], который сформулировал её раньше [14].

Супруга – коллега. 50 лет научной работы И. В. Ерохова не случайно совпали с 50-летием семейной жизни с Валентиной Михайловной Мордовкиной. Она окончила Харьковский политехнический институт, получила квалификацию «инженера-схемотехника». Уже семьей они работали в одном научно-исследовательском институте в г. Запорожье (объединение Хартрон). После перехода Игоря Васильевича в Запорожский индустриальный институт Валентина Михайловна продолжила работу в космической промышленности. Участвовала в разработке прибора, который собирал информацию со всех датчиков космического корабля многоразового использования советского проекта «Энергия-Буран», шифровал и передавал на землю. Автор изобретений и патентов в области автоматики и вычислительной техники [15,16].

По воспоминаниям дочери Елены. *«Папа хорошо знал русскую поэзию, особенно Маяковского и Тютчева. Любил художественную литературу: Чехова, Гашика, Чапека, Твена, Ильфа и Петрова. Читал*

научные статьи по биологии и по философии. Наиболее ярким, наверное, было то, когда мы шли по городу, куда угодно – в магазин, на пляж, постоянно к нему подходили бывшие студенты и благодарили. Он не просто отрабатывал программу вуза, он помогал им советом. Всю жизнь занимался наукой, учил студентов, но не был оторван от жизни – участвовал в общественной деятельности по ЖКХ.

Папа преподавал «Теоретические основы электротехники» в Запорожье около 40 лет. Когда он шёл по миллионному городу, в любом районе, в любой день, ему радостно навстречу бросались здороваться бывшие студенты. Он всегда давал на лекциях больше, чем в учебнике. На лекции к нему ходили массово, записывали. На семинарах и лабораторных, после распада СССР, когда школьное образование «просело», он помогал студентам дойти до понимания, дотягивал знания школьных основ. На последнем месте работы – в Приватном классическом университете на кафедре информатики и электроники – преподавал метрологию, системный анализ, прикладные компьютерные программы.

Студенты ценили то, что он относился к ним с уважением, как к равным себе, или к нему за жизненными советами. Одному студенту подсказал перевестись на другую специальность, заметил способности. Мы потом как-то встретили этого студента в городе, он в 90-е годы по другой специальности небольшое производство открыл, благодарил папу при встрече.

Однажды, уже примерно в 2012 году, встретили бывшую студентку в троллейбусе, тоже подошла, благодарила. Оказывается, она в 90-е годы работала на рынке, а после, в 2000-е смогла устроиться в электрическую службу Абразивного завода. Она сказала, что Игорь Васильевич так её хорошо научил, что она с перерывом 10 лет смогла вспомнить и применяет в работе. У папы были способности к обобщению и синтезу знаний из разных областей, диссертация его на стыке электротехники и математики. Люди помнят за то, как он с ними работал, что посоветовал, чему научил.

В отличие от меня мама хорошо понимает в папиной предметной области. Они всегда обсуждали его научные интересы. Папа рассказывал, что пишет, и зачитывал. Схемотехникам известны графы, которые и папа использовал при моделировании. Поэтому у них с мамой смежные

области. Она понимала его выкладки по ветвящимся цепным дробям и матрицам. Я, конечно, нет».

Постоянный автор сборника «Синтез, анализ и диагностика электронных цепей». Теперь понятен уровень постижения работ Игоря Васильевича его супругой. Безусловно, наличие жены-коллеги способствовало не только созданию благоприятной обстановки, но и самой научной работе, первичной «обкатке» материалов. Эта творческая атмосфера объясняет активное участие И. В. Ерохова в международном коллективе авторов нашего сборника. 20 лет, начиная с 2004 года, Игорь Васильевич постоянный автор. До последних дней жизни присылал статьи, дорабатывал их, участвовал в заочных обсуждениях по различным темам, и не забывал поздравлять с Советскими праздниками. Значение такого коллеги по-настоящему осознаешь только после его утраты.

Последняя книга – пример служения науке. 1-го мая 2021 года – за 10 дней до смерти – И. В. Ерохов закончил книгу и отправил её файлами по главам дочери для верстки. По словам Елены, он хотел, чтобы мы её прочитали. Полный текст книги «Структура графа электрической цепи и ее использование при моделировании схем» размещен на сайте <http://intersyn.net>. 6-я глава опубликована в настоящем выпуске [17].

Список литературы

1. Ерохов И.В. Школа-семинар по теоретической электротехнике и электронике // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.–Ульяновск: УлГТУ, 2015.– Вып. 12.– С.316–320.
2. Ерохов И.В. Возможность применения аппарата цепных ветвящихся дробей для электротехнических расчетов // Теоретическая электротехника. – Львов, 1977.– Вып. 24.
3. Ерохов И.В., Арбузников В.А. Элизар Вольфович Зелях (21.04.1904–03.02.1991) // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ.сб.науч.тр.–Ульяновск: УлГТУ, 2008.– Вып.6. –С.88–97.
4. Ерохов И.В. Машинное моделирование и анализ радиоэлектронных цепей на основе ветвящихся цепных дробей // Автореф. дис. канд. техн. наук. – Одесса: ОЭИС, 1982.– 23 с.
5. Ерохов И.В. Кирхгоф Г. Избранные труды // Электричество. – 1990, №7.– С. 91–92.

6. Кирхгоф Г.Р. Избранные труды. – М.: Наука, 1988.– 428 с.
7. Максвелл Д.К. Трактат об электричестве и магнетизме. В 2-х т. Т. 1.– М.: Наука, 1989.– 416 с.
8. Feussner W. Ueber Stromverzweigung in netzformigen Leitern // Annalen der Physik. – 1902.– Bd 9, N 13.– S. 1304–1329.
9. Feussner W. Zur Berechnung der Stromstarke in netzformigen Leitern // Annalen der Physik. – 1904.– Bd 15, N 12.– S. 385–394.
10. Tellegen B.D.H. La recherche pour una sèrie complète d'èlèments de circuit ideaux nonlinèaires. – Rendiconti del seminario matematico e fisico di Milano, Sotto gli auspice dell'università e del politecnico. – Milano, 1955, vol. 25.
11. Ерохов И.В., Филаретов В.В. Бернард Теллеген: Гиратор, нулор, теорема виртуального баланса // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2010. – Вып. 8.– С. 212.
12. Ерохов И.В., Филаретов В.В. Теорема Зеляха-Теллегена // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр. – Ульяновск: УлГТУ, 2008.– Вып. 6.– С. 6–14.
13. Ерохов И.В. О теореме Зеляха // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2012. – Вып. 10.– С. 280.
14. Зелях Э.В. Основы общей теории линейных электрических схем. – М.: Изд. АН СССР, 1951. – 334 с.
15. Бормот В.Г., Воробьева Е.И., Мордовкина В.М. Устройство для контроля блоков передачи информации: Авторское свидетельство СССР SU584323A1.– 1975.
16. Васильев В.М., Воробьева Е.И., Мордовкина В.М., Скотаренко Г.А. Устройство сопряжения: Авторское свидетельство СССР SU1019428A.– 1982.
17. Ерохов И.В. Первое обращение к структуре при решении уравнений цепи // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.–Ульяновск: УлГТУ, 2015.– Вып. 12. – С.

В. В. Филаретов

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Синтез электронных цепей</i>		
Курганов С. А., Филаретов В. В.	Синтез электронных цепей с отрицательной групповой задержкой на конверторах сопротивлений	4
<i>Анализ электрических и электронных цепей</i>		
Курганов С. А., Митяев А. А.	Численно-символьные формулы для токов источников гармоник в распределительных электрических сетях	16
Шушпанов Д. В.	Анализ резистивных схем с идеальными диодами методом схемных определителей	28
Шушпанов Д. В.	Определение моментов переключения идеальных диодов в нелинейной цепи методом схемных определителей	49
<i>Новые схемные элементы</i>		
Соловьева Е. Б., Смирнов В. А.	Оконные функции в модели линейного дрейфа ионов для мемристоров	74
Шушпанов Д. В.	Индуктивности и емкости с прямоугольными характеристиками	79
<i>Моделирование электромагнитных устройств</i>		
Борисов Ю. С., Соломин Б. А.	Метод определения присоединенных параметров жидкости в низкочастотных вибровискозиметрах	82
Маринов Н. И., Канов Л. Н.	Оптимальное управление электроприводом постоянного тока в условиях переменной нагрузки	93
Свиридов Ю. П., Алексеев А. А.	Исследование характеристик малой гидроэлектростанции	100
<i>Теория электромагнитного поля</i>		
Меньшов Е. Н.	Электромагнитные микротоки в электродинамике	107
<i>Системы автоматизированного проектирования</i>		
Кожевников В.В.	Когнитивные вычисления на основе матричных уравнений цифровых автоматов	119

Кузьмин Н. П.	Анализ теплового режима электронных цепей на основе схемных определителей	129
<i>Матричный анализ</i>		
Недорезов П. В., Филаретов В. В.	Интерпретатор для расчета сложных численно-символьных выражений матричных определителей	139
Филаретов В. В.	Преобразование выражения определителя полной матрицы в последовательную формулу на основе генерации сочетаний	150
Курганов Д. С., Филаретов В. В.	Исключение нулевых миноров в разложении определителя на основе половинного деления полной матрицы	163
<i>Структурный синтез</i>		
Свирищева Э. А.	Выявление симметрий корневых деревьев на основе их свертки	171
<i>Из опыта работы</i>		
Александров Д. С., Сайф Исави	Оценка технического состояния объекта испытаний	184
<i>В порядке обсуждения</i>		
Березуев Р. И.	Индекс, присущий сознанию математика	193
<i>Из истории электротехники</i>		
Ерохов И. В.	Первое обращение к структуре при решении уравнений цепи	204
Филаретов В. В.	Простейший алгоритм топологического расчета электрических цепей по Кирхгофу	214
Панкин В. В., Соловьева Е. Б., Портной М. С.	Первый фундаментальный учебник ленинградской электротехнической школы	224
<i>Защиты диссертаций</i>		
Лернер И. М.		230
<i>Инженер, ученый, педагог</i>		
Филаретов В. В.	Ерохов Игорь Васильевич	236

TABLE OF CONTENTS

<i>Synthesis of electronic circuits</i>		
Kurganov S. A., Filaretov V. V.	Synthesis of electric circuits with negative group delay on resistance converters	4
<i>Analysis of electrical and electronic circuits</i>		
Kurganov S. A., Mityaev A. A.	Numerical and symbolic formulas for harmonic source currents in electrical distribution networks	16
Shushpanov D. V.	Analysis of resistive circuits with ideal diodes by the method of circuit determinants	28
Shushpanov D. V.	Determination of switching moments of ideal diodes in a nonlinear circuit by the method of circuit determinants	49
<i>Новые схемные элементы</i>		
Solovyova E. B., Smirnov V. A.	Window functions in the model linear ion drift for memristors	74
Shushpanov D. V.	Inductance and capacitance with rectangular characteristics	79
<i>Modeling of electromagnetic devices</i>		
Borisov Y. S., Solomin B. A.	A method for determining the attached parameters of a liquid in low-frequency vibrating viscometers	82
Marinov N. I., Kanov L. N.	Optimal control of a DC electric drive under variable load conditions	93
Sviridov Yu. P., Alekseev A. A.	Investigation of the characteristics of a small hydroelectric power plant	100
<i>Electromagnetic field theory</i>		
Menshov E. N.	Electromagnetic microcurrents in electrodynamics	107
<i>Computer-aided design systems</i>		
Kozhevnikov V.V.	Cognitive computing based on matrix equations digital vending machines	119

Kuzmin N.P.	Analysis of the thermal regime of electronic circuits based on circuit determinants	129
<i>Matrix analysis</i>		
Nedorezov P. V., Filaretov V. V.	An interpreter for calculating complex numerical and symbolic expressions of matrix determinants	139
Filaretov V. V.	Transformation of the expression of the determinant of the complete matrix into a sequential formula based on the generation of combinations	150
Kurganov D. S., Filaretov V. V.	The exclusion of zero minors in the decomposition of the determinant based on the half division of the full matrix	163
<i>Structural synthesis</i>		
Svirshchova E. A.	Identification of root tree symmetries based on their convolution	171
<i>From work experience</i>		
Alexandrov D. S., Saif Isavi	Assessment of the technical condition the test object	184
<i>In the order of discussion</i>		
Berezuev R. I.	The index inherent in the mind of a mathematician	193
<i>From the history of electrical engineering</i>		
Yerokhov I. V.	The first reference to the structure in solving the equations of the chain	204
Filaretov V. V.	The simplest algorithm for the topological calculation of electric circuits according to Kirchhoff	214
Pankin V. V., Solovyeva E. B., Portnoy M. S.	The first fundamental textbook of the Leningrad Electrotechnical school	224
<i>Defense of dissertations</i>		
Lerner I. M.		230
<i>Engineer, scientist, teacher</i>		
Filaretov V. V.	Yerokhov Igor Vasilyevich	236

Synthesis, analysis and diagnosis of electronic networks: The international scientific transactions. – Issue 18 / under edition V.V. Filaretov. – Ulyanovsk: Ulyanovsk state technical university, 2024. – 247 p.

The collection continues a series of specialized collections published at Ulyanovsk State Technical University (UlSTU) within the framework of international conferences: «Continuum logical-algebraic calculus and Neuromathematics», «Conference on Logic, Computer Science, Science Studies», «Volginsky Readings», «Synthesis, analysis and diagnostics of electronic circuits». This issue is compiled from the reports of the Fifth International Conference «Synthesis, Analysis and Diagnostics of Electronic Circuits», held at UlSTU on May 23–25, 2024.

The articles consider theoretical issues and practical applications of the modern theory of electrical networks and electronic circuits, including: analysis of circuits with ideal diodes by the method of circuit determinants. Modeling issues from the perspective of circuit algebra, matrix analysis, graph theory, digital automata and symbolic computing are discussed.

It is recommended for specialists in the field of analog and digital circuit engineering, applied mathematics and computer science, undergraduates and postgraduates of relevant fields and specialties.

Научное издание

**СИНТЕЗ, АНАЛИЗ И ДИАГНОСТИКА
ЭЛЕКТРОННЫХ ЦЕПЕЙ**

Международный сборник научных трудов
Выпуск 18

Под редакцией В. В. Филаретова

Компьютерная верстка В. В. Филаретов

ЛР № 020640 от 22.10.97.

Подписано в печать 01.07.2024. Формат 60×84/16.

Усл. печ. л. 15,11. Тираж 50 экз. Заказ 67.

Ульяновский государственный технический университет
432027, Ульяновск, Северный Венец, 32.

ИПК «Венец» УлГТУ 432027, Ульяновск, Северный Венец, 32.