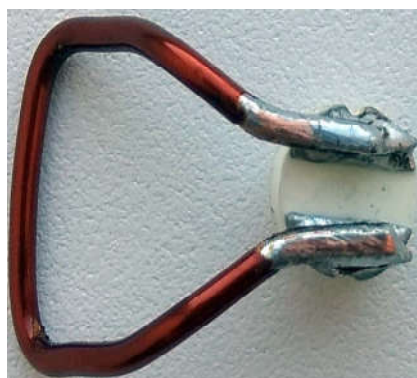


СИНТЕЗ, АНАЛИЗ И ДИАГНОСТИКА ЭЛЕКТРОННЫХ ЦЕПЕЙ

САД-2022



Ульяновск 2022

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE
OF THE RUSSIAN FEDERATION

ULYANOVSK STATE TECHNICAL UNIVERSITY

**SYNTHESIS, ANALYSIS
AND DIAGNOSIS
OF ELECTRONIC NETWORKS**

SAD–2022

Ulyanovsk 2022

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«УЛЬЯНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

СИНТЕЗ, АНАЛИЗ И ДИАГНОСТИКА ЭЛЕКТРОННЫХ ЦЕПЕЙ

Международный сборник научных трудов

Вып. 17

Подготовлен из докладов
Четвертой международной конференции
«Синтез, анализ и диагностика электронных цепей»
(Ульяновск, 23–26 мая 2022 года)

Ульяновск
УлГТУ
2022

УДК 516.7.24/25+519.873
ББК 32.85
С38

УДК 516.7.24/25+519.873

Синтез, анализ и диагностика электронных цепей : Международный сборник научных трудов. – Вып. 17 / под ред. В. В. Филаретова. – Ульяновск : УлГТУ, 2022. – 256 с.

Сборник продолжает серию специализированных сборников, изданных в Ульяновском государственном техническом университете (УлГТУ) в рамках международных конференций: «Континуальные логико-алгебраические исчисления и нейроматематика», «Конференция по логике, информатике, науковедению», «Волгинские чтения», «Синтез, анализ и диагностика электронных цепей».

Данный выпуск составлен из докладов Четвертой международной конференции «Синтез, анализ и диагностика электронных цепей», проходившей в УлГТУ 23–26 мая 2022 года.

В докладах рассматриваются теоретические вопросы и практические приложения современной теории электрических и электронных цепей, в том числе: синтез схем замещения пассивных компонентов, автоматизация структурного синтеза и диагностики. Обсуждается моделирование электронных цепей и электроэнергетических систем с позиций схемной алгебры, матричного анализа, теории графов и символьных вычислений.

Рекомендуется для специалистов в области аналоговой и цифровой схемотехники, прикладной математики и информатики, магистрантов и аспирантов соответствующих направлений и специальностей.

Редакционная коллегия:

Горшков К. С., канд. техн. наук (ответственный секретарь);
Курганов С. А., д-р техн. наук (зам. ответственного редактора);
Канов Л. Н., канд. техн. наук, Севастопольский госуниверситет;
Соловьева Е. Б., д-р техн. наук, СПбГЭТУ – ЛЭТИ им. В.И. Ленина;
Филаретов В. В., д-р техн. наук (ответственный редактор);

ISBN 978-5-9795-1381-2

© Коллектив авторов, 2022
© Оформление. УлГТУ, 2022

Четвертая международная научно-техническая конференция «Синтез, анализ и диагностика электронных цепей» (САД-2022)
Ульяновск: УлГТУ, 23–26 мая 2022 года.

Организационный комитет:

Председатель оргкомитета – д.т.н. **Филаретов В.В.**

Зам председателя – профессор кафедры «Электроснабжение», д.т.н. **Курганов С.А.**

Ответственный секретарь –
ст. преподаватель кафедры «Электроснабжение» **Ребровская Д.А.**

Члены оргкомитета: **Дубов А.Л.** – декан энергетического факультета;

Кузнецов А.В. – зав кафедрой «Электроснабжение»;

Тронин В.Г. – начальник НИО.

Первая конференция (САД–2015) была посвящена памяти **Леонида Ивановича Волгина** – основателя сборника «Синтез, анализ и диагностика электронных цепей (САД)». Предыдущие конференции с другими названиями также служили для апробации и публикации материалов нашего сборника. Первые выпуски, начиная с 2003 года, издавались в виде четвертого тома трудов разноименных конференций под общей редакцией Л. И. Волгина. Уже тогда мы отказались от «бумагооборота» между авторами и редколлегией, принимая электронные версии статей. Процесс подготовки выпусков теперь отличается активное взаимодействие с авторами по электронной почте. Оно служит доработке и развитию статей, заказу материалов, повышению научного уровня разделов сборника. Такое взаимодействие не знает границ и не сопряжено со значительными материальными затратами для авторов.

Конференция предполагает интенсификацию взаимного обсуждения докладов участниками конференции и читателями по электронной почте в течение отведенного времени и за его пределами. Это определяет актуальные темы для будущих выпусков, ориентирует авторов статей и читателей на незамедлительную подготовку новых материалов.

Данный выпуск отличается значительным объемом материала, в котором обсуждаются вопросы синтеза электрических и электронных цепей, предлагаются новые схемные решения. Синтез корневых деревьев не стоит особняком, а примыкает к схемному структурному синтезу, как и генерация формул матричных или схемных определителей. Выясняется, что структуру компактно свернутых выражений можно использовать для отбраковки изоморфных вариантов схем.

СИНТЕЗ ЭЛЕКТРОННЫХ ЦЕПЕЙ

ЭКВИВАЛЕНТНАЯ СХЕМА ЗАМЕЩЕНИЯ ДИЭЛЕКТРИКА В ШИРОКОМ ДИАПАЗОНЕ ЧАСТОТ (0 ГЦ – 500 МГЦ)

В. Ф. Дмитриков, Д. В. Шушпанов

Реализована эквивалентная схема замещения диэлектрика, работающая в широком диапазоне частот (0 Гц – 500 МГц). Для синтеза были измерены частотные характеристики сопротивлений диэлектриков и учтены физические процессы, протекающие в диэлектрике.

An equivalent dielectric replacement circuit is implemented, operating in a wide frequency range (0 Hz – 500 MHz). For the synthesis, the frequency characteristics of the resistances of dielectrics were measured and the physical processes occurring in the dielectric were taken into account.

Введение. Любая радиоэлектронная аппаратура (РЭА) не обходится без конденсаторов. Они находят широкое применение в каждой функциональной части РЭА (управление, силовая часть, фильтры и т.д.). Ещё сравнительно недавно при разработке РЭА конденсаторы считались идеальной емкостью [1]. В [2 – 4] было показано как влияет эквивалентное последовательное сопротивление конденсатора на корректность результатов моделирования импульсного преобразователя напряжения. Это позволяет учесть влияние «паразитных» параметров конденсаторов до 100 кГц [5, 6], чего во многих практических применениях было достаточно.

Современные преобразователи напряжения уже работают на частотах единицы и даже десятки МГц, что накладывает более жесткие требования к «паразитным» параметрам пассивных элементов (конденсаторов, дросселей, трансформаторов). Это всё более ужесточает требования к уровню электромагнитных помех (ЭМП), производимых

преобразователями, что требует создания фильтров радиопомех (ФРП) с достаточно широкой полосой подавления ЭМП (до 100 МГц).

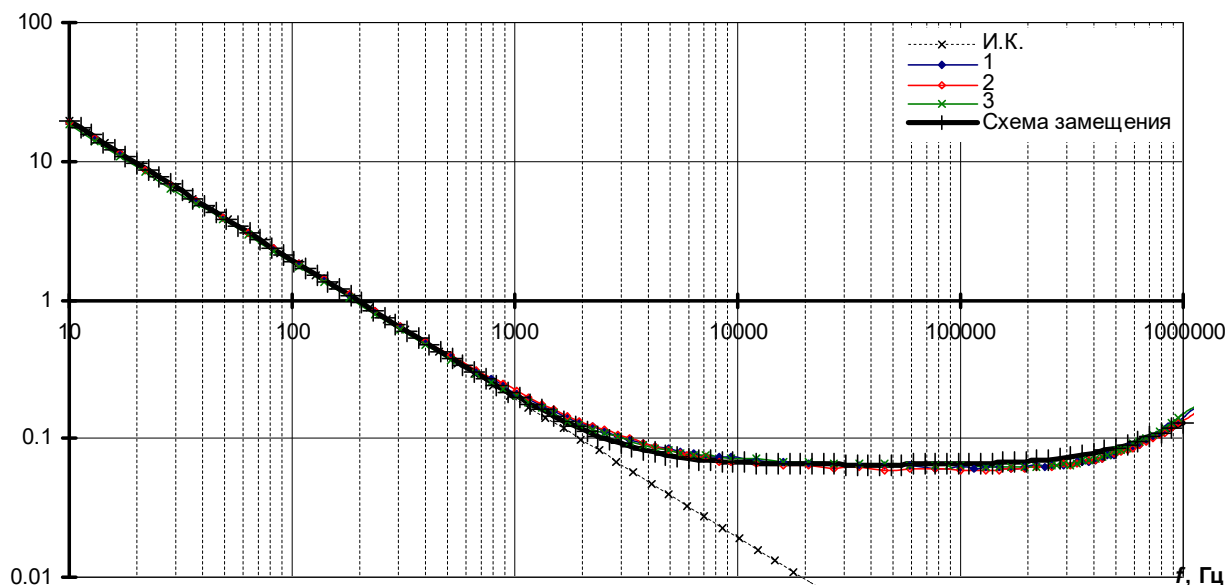
К сожалению, ВЧ поведенческой модели конденсатора ни один производитель конденсаторов ни отечественный, ни зарубежный не дает. Работ в этом направлении значительно меньше, чем работ по схемам замещения дросселя, т.е. они практически отсутствуют. В лучшем случае в качестве модели конденсатора используется последовательный RLC-контур [7]. Знание ВЧ поведенческой модели конденсатора позволяет корректно и грамотно спроектировать ФРП с требуемым ослаблением ЭМП в требуемом частотном диапазоне (150 кГц – 30 МГц или 9 кГц – 100 МГц), т.к. «паразитные» параметры конденсатора на высоких частотах (десятки МГц) могут по полю взаимодействовать с «паразитными» параметрами соседних пассивных элементов: конденсаторов [8], дросселей [9]. Поэтому в статье рассматривается синтез электрических эквивалентных схем замещения конденсаторов в диапазоне частот до 500 МГц.

Измерения комплексного сопротивления конденсаторов. В [5, 6] были проведены измерения модуля и фазы полного (комплексного) сопротивления отечественных алюминиевых оксидно-электролитических, танталовых оксидно-полупроводниковых, танталовых объемно пористых конденсаторов и зарубежных алюминиевых оксидно-электролитических конденсаторов в широком диапазоне частот от 10 Гц до 1 МГц. По результатам измерений были составлены схемы замещения конденсаторов. Схемы замещения конденсаторов получились как простейший последовательный RLC-контур (рис. 1), так и более сложный – последовательно-параллельный контур (рис. 2). Последовательная индуктивность была объяснена как «паразитная» индуктивность проводов. Но в некоторых более сложных схемах замещения присутствовала ещё одна индуктивность (рис. 2), причина появления которой не была объяснена. Для устранения влияния проводов конденсатора были проведены измерения комплексного сопротивления керамического диэлектрика [10, 11]. Керамические диэлектрики были выполнены в форме дисков (диаметр 11,8 мм, толщина 1,4 мм), по торцам которых нанесена тонкая металлизация из серебра [10, 11]. На рис. 3, 4 представлены измеренные модуль и фаза комплексного сопротивления измеренных диэлектриков: первая цифра в названии диэлектрика – группа

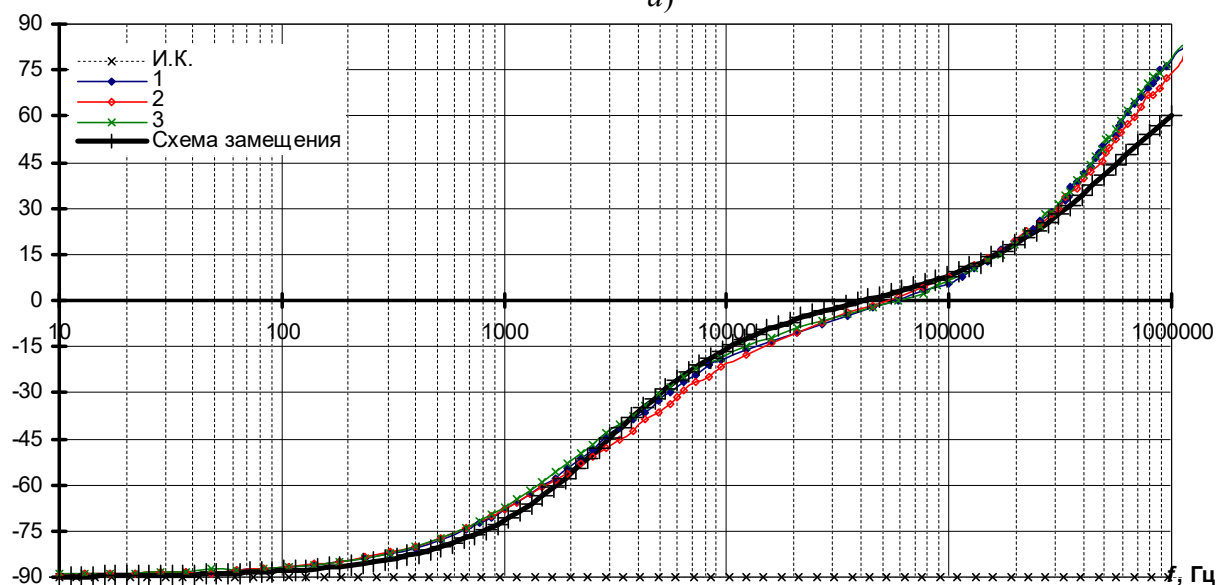
исполнения (процент отклонения), а вторая цифра — диэлектрическая

проницаемость. Из рис. 3, 4 следует, что основной вклад в комплексное

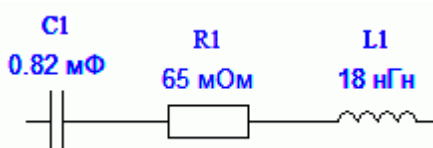
сопротивление конденсатора оказывает диэлектрик конденсатора. Кроме



а)



б)



в)

Рис. 1. Конденсатор К50-17 820 мкФ × 400 В (алюминиевый оксидно-электролитический):
а) модуль полного сопротивления; б) фаза полного сопротивления; в) схема замещения

того, из рис. 3, 4 видно, что характер изменения модуля и фазы

комплексного сопротивления диэлектриков очень похож, что позволяет

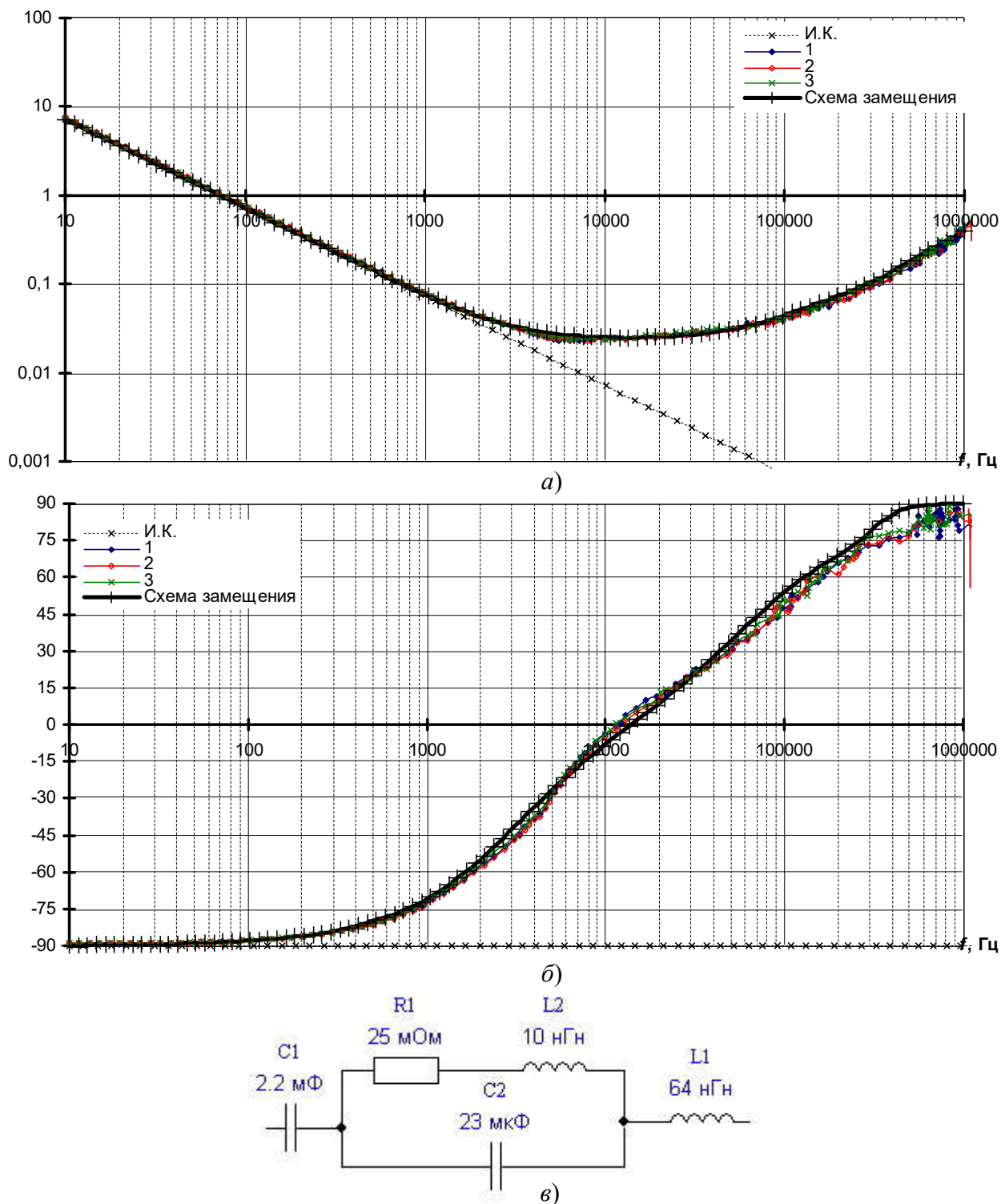


Рис. 2. Конденсатор Hitano EHP 2200 мкФ × 63 В (алюминиевый оксидно-электролитический): а) модуль полного сопротивления; б) фаза полного сопротивления; в) схема замещения

описать их одной схемой замещения с различными параметрами. Для понимания синтеза схемы замещения диэлектрика, модуль и фаза его измеренного комплексного сопротивления были разбиты на 3 характерных участка (рис. 5), в которых проявляются различные физические явления диэлектрика. Рассмотрим их подробнее.

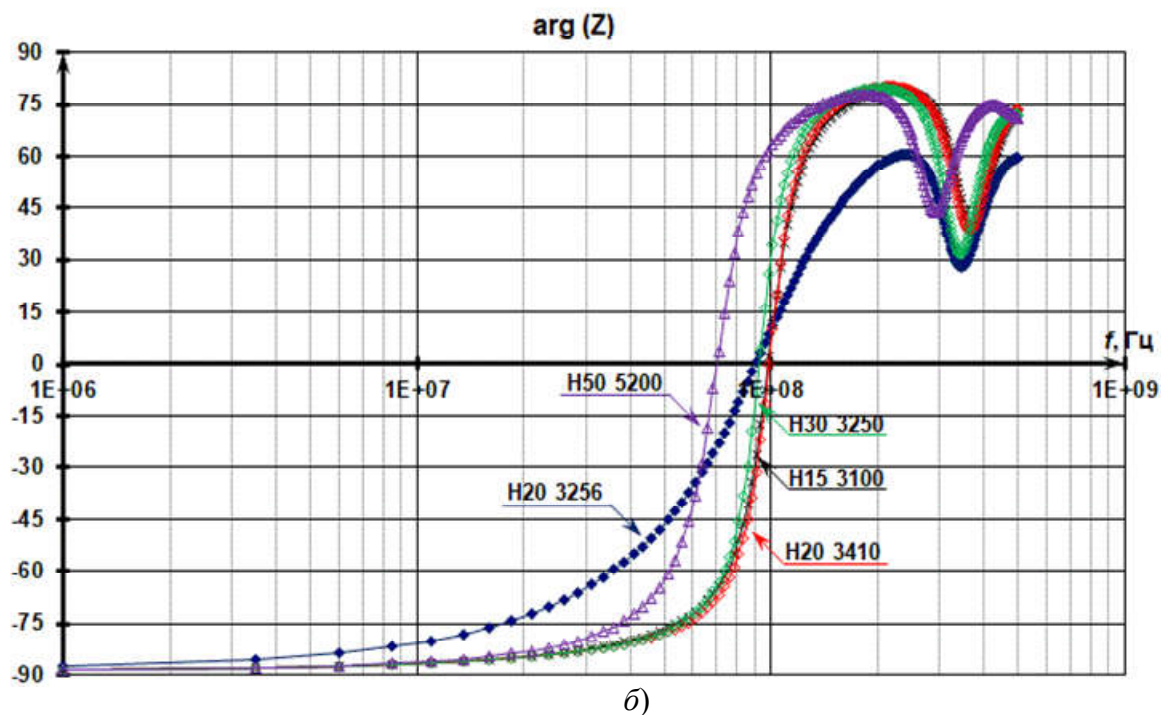
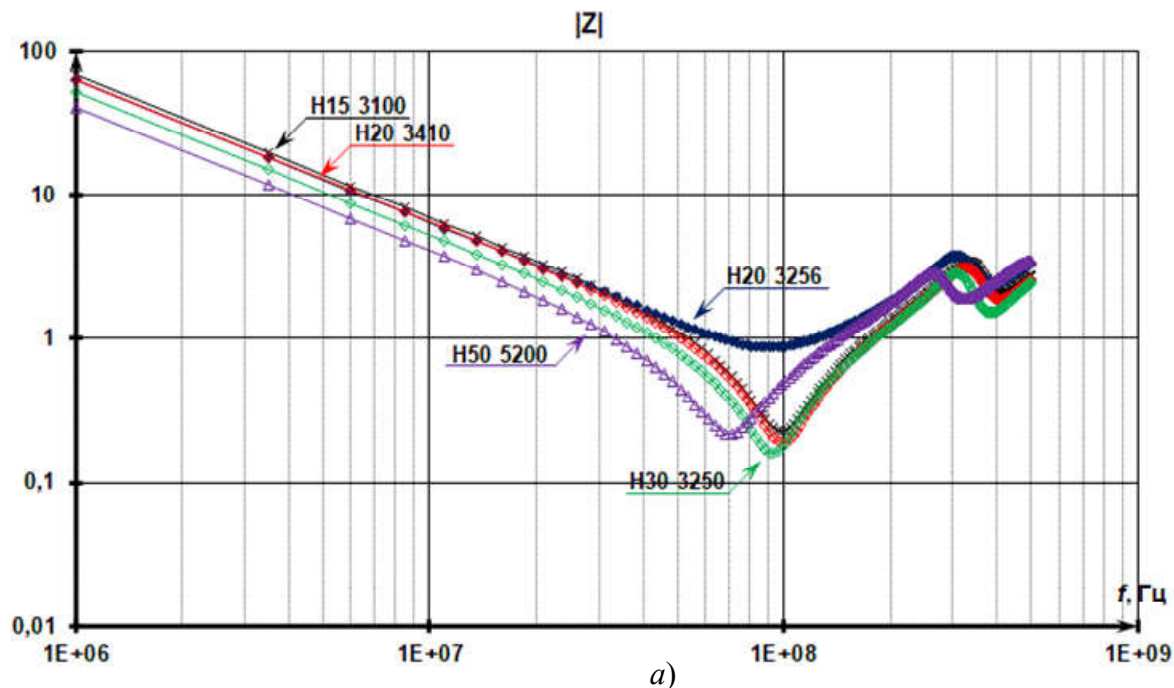


Рис. 3. Измеренные модуль (а) и фаза (б) комплексного диэлектрика разных групп исполнения (Н15 – Н50) с различной диэлектрической проницаемостью ϵ

Низкочастотная область (участок 1 на рис. 5). В данной частотной области реальный диэлектрик можно рассматривать как идеальный диэлектрик. В этом случае емкость конденсатора с таким идеальным диэлектриком определяется классической формулой

$$C = \epsilon_0 \epsilon \frac{S}{d}, \quad (1)$$

где $\varepsilon_0 = 8,854187817 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная, ε – относительная диэлектрическая проницаемость диэлектрика, расположенного между обкладками конденсатора, S – площадь обкладки конденсатора, d – расстояние между обкладками.

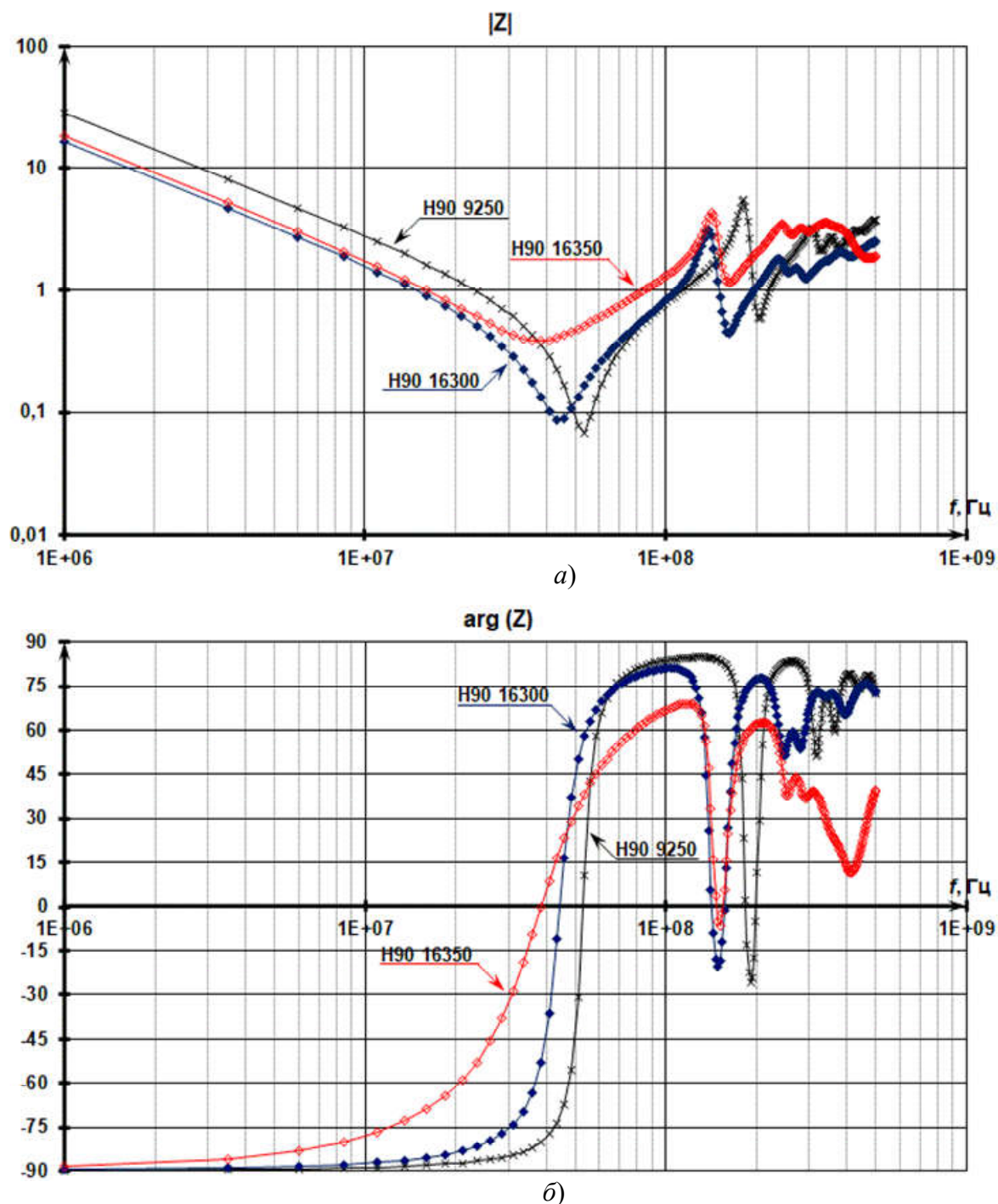


Рис. 4. Измеренные модуль (а) и фаза (б) комплексного диэлектрика группы исполнения Н90 с различной диэлектрической проницаемостью ε

Резонанс диэлектрика (участок 2 на рис. 5). В данной частотной области модуль и фаза комплексного сопротивления реального диэлектрика показывают резонансный характер (рис. 5). Такое поведение

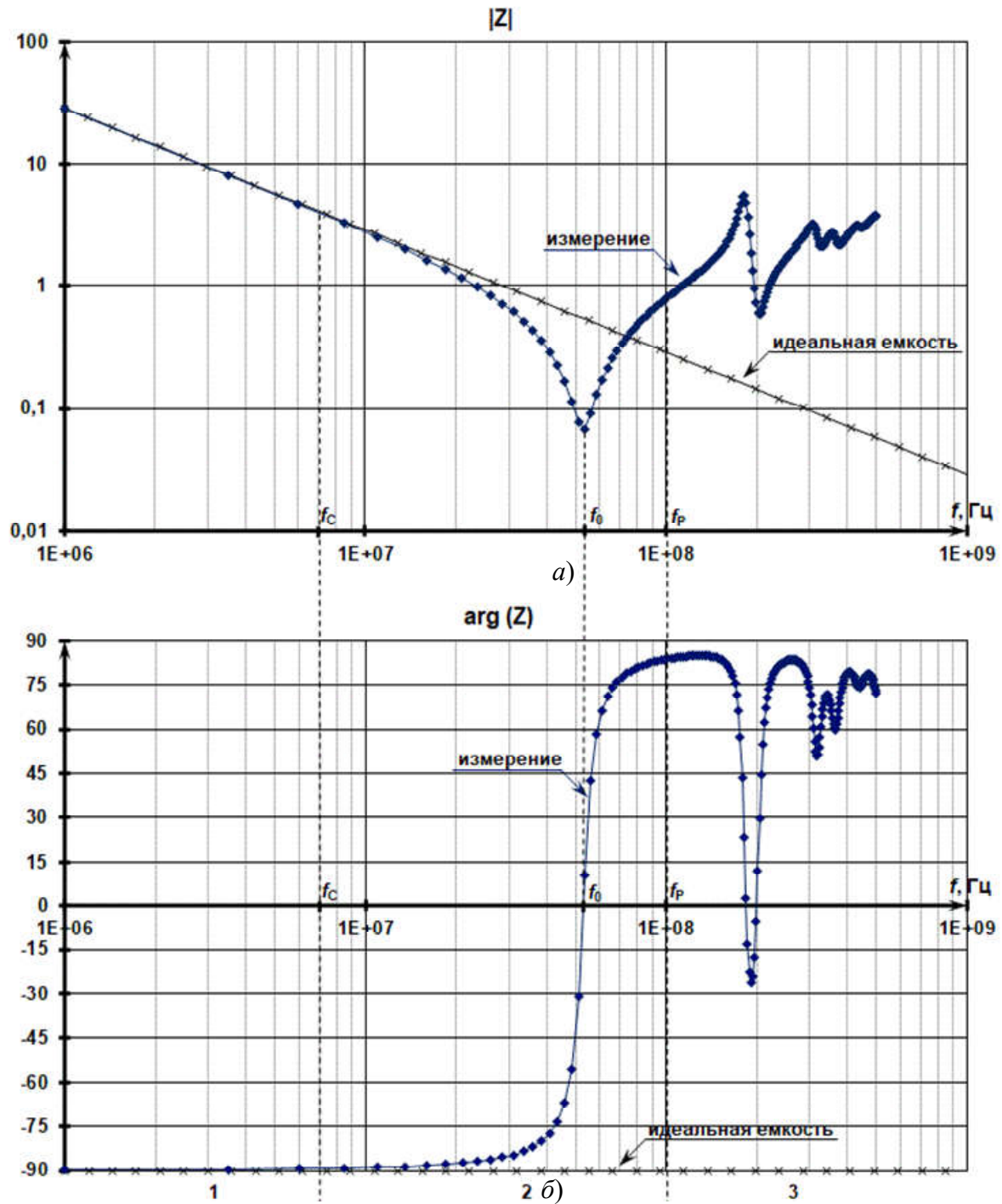


Рис. 5. Разбивка на области модуля (а) и фазы (б) комплексного сопротивления диэлектрика модуля и фазы комплексного сопротивления близко к поведению входного сопротивления последовательного RLC-контура (рис. 6)

$$Z_C = R_C + j\omega L_C - j\frac{1}{\omega C} = \sqrt{R_C^2 + \rho_C^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2} e^{j \arctg \left(Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right)}, \quad (2)$$

где $\omega_0 = 1/\sqrt{L_C C}$ – резонансная частота контура, $\rho_C = \sqrt{L_C/C}$ – характеристическое сопротивление контура, $Q = \rho_C/R_C$ – добротность контура.

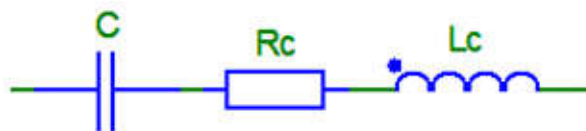


Рис. 6. Схема замещения диэлектрика для участка 2 (рис. 5)

Определим граничную частоту f_c (рис. 5), до которой включительно реальный диэлектрик можно считать идеальным конденсатором. Из выражения (2) следует, что это будет при условии $\omega \ll \omega_0$. Но лучше всего определить частоту f_c из требования по фазе – она должна не больше -89° . Тогда из выражения (2) получаем условие $\arctg(Q(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)) \leq -89^\circ$, из которого получаем следующее неравенство:

$$\frac{Q}{\omega_0} \omega^2 + 57\omega - Q\omega_0 \leq 0, \quad (3)$$

решая которое, определяем граничную частоту f_c :

$$f_c \leq f_0 \left(-\frac{28,5}{Q} + \sqrt{1 + \left(\frac{28,5}{Q} \right)^2} \right). \quad (4)$$

На рис. 7 приведены модуль и фаза измеренного сопротивления диэлектрика, а также модуль и фаза предложенной схемы замещения (рис. 6), которые показывают хорошее совпадение для участков 1 и 2 (рис. 5). Получившиеся параметры схемы замещения (рис. 6) для рассматриваемого диэлектрика (Н90 9250): $C = 5,55$ нФ, $L_c = 1,6$ нГн, $R_c = 70$ мОм.

Наличие индуктивности в схеме замещения диэлектрика. Наличие сопротивления в схеме замещения диэлектрика (и, следовательно, конденсатора) связывают с тем, что относительная диэлектрическая проницаемость диэлектрика не является величиной постоянной, а является частотно-зависимой комплексной величиной [12 – 14]:

$$\hat{\varepsilon}(\omega) = \varepsilon'(\omega) - j\varepsilon''(\omega). \quad (5)$$

Тогда комплексная проводимость конденсатора, исходя из (1) и (5) будет равна

$$Y_c = j\omega C = j\omega \varepsilon_0 \hat{\varepsilon}(\omega) \frac{S}{d}. \quad (6)$$

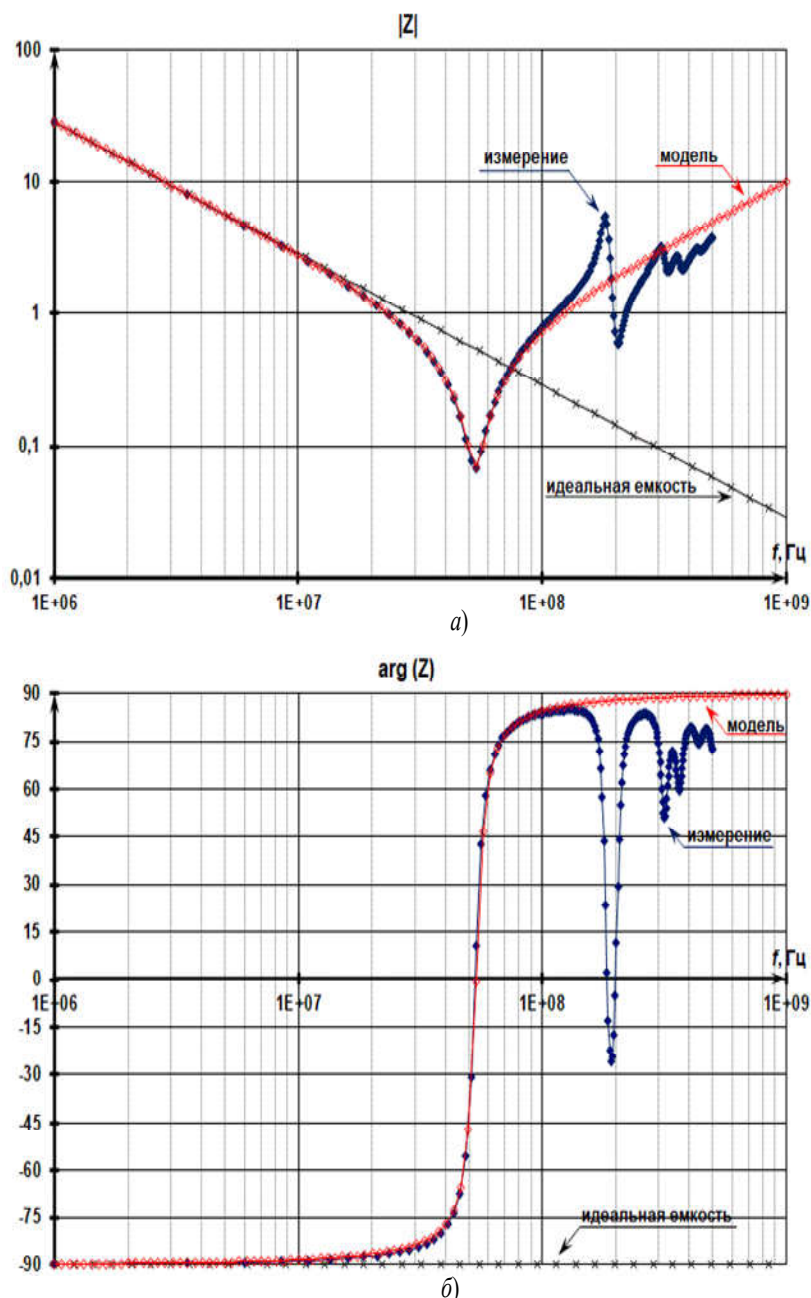


Рис. 7. Модуль (а) и фаза (б) комплексного сопротивления измеренного диэлектрика и схемы замещения диэлектрика (рис. 6)

К сожалению, производители диэлектриков практически не дают информации о комплексной диэлектрической проницаемости $\hat{\epsilon}$ конкретного диэлектрика, по которым можно определить физику процессов, протекающих в диэлектрике, и понять структуру схемы замещения диэлектрика. Она (измеренная частотная характеристика комплексной диэлектрической проницаемости) также не приводится ни в учебных пособиях, ни в монографиях, ни в большинстве статей. Вместо них приводятся лишь теоретические сугубо общие (и поэтому расплывчатые) представления о характере комплексной диэлектрической проницаемости $\hat{\epsilon}$. Поэтому разберем сначала их («классические»

представления о диэлектрике), а потом перейдем к измеренным частотным характеристикам сопротивления диэлектрика.

Главное свойство диэлектрика, которое определяет особенное поведение диэлектрика в электрическом поле и других внешних воздействиях, – это поляризация, или смещение связанных электрических зарядов [12, 13]. Но, кроме поляризации диэлектрик обладает весьма малой (по сравнению с явлением поляризации) электропроводностью, т.е. в диэлектриках возникает и существует сравнительно устойчивое состояние с чрезвычайно малой электронной проводимостью [12, 13]. Т.е. уравнение (5) можно переписать в следующем виде [12, 13]:

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon + j \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega}. \quad (7)$$

Выражение (7) описывает случай безынерционной электропроводности и безынерционной поляризации. В реальных диэлектриках электропроводность запаздывает, и/или запаздывает поляризация диэлектрика [12, 13].

Поляризацию в диэлектрике обычно разделяют на следующие виды [12]: 1) упругая (деформационная), при которой сила, стремящаяся возвратить смещенные электрическим полем частицы, носит квазиупругий характер; 2) тепловая (прыжковая), когда электроны, ионы или диполи при своем смещении в электрическом поле за счет энергии теплового движения преодолевают потенциальные барьеры; 3) объемнозарядовая (миграционная), при которой электроны или ионы перемещаются в диэлектрике на большие расстояния и накапливаются на границе неоднородностей, к этому же механизму относится переориентация макродиполей.

Объемнозарядовая поляризация приводит к нестабильности ε и потерям на инфранизких (меньше 16 Гц) частотах [12]. Желательные для технического применения диэлектриков (диапазон частот 50 – 10¹⁰ Гц) частотные и температурные нестабильности ε , а также диэлектрические потери в большинстве случаев обусловлены именно тепловой поляризацией [12].

Тепловая поляризация приводит к потерям в диэлектрике в большинстве случаев технического использования диэлектриков [12, 13],

поэтому рассмотрим ее вначале. Она даёт вклад в диэлектрическую проницаемость и описывается уравнением Дебая [12–14]:

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon' - j\varepsilon'' = \varepsilon(\infty) + \frac{\varepsilon(0) - \varepsilon(\infty)}{1 + j\omega\tau}, \quad (8)$$

из которого можно выделить вещественную и мнимую составляющие диэлектрической составляющей [12–14]:

$$\varepsilon' = \varepsilon(\infty) + \frac{\varepsilon(0) - \varepsilon(\infty)}{1 + \omega^2\tau^2}, \quad \varepsilon'' = \frac{(\varepsilon(0) - \varepsilon(\infty))\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2}. \quad (9)$$

где $\varepsilon(0)$ и $\varepsilon(\infty)$ – значение относительной диэлектрической составляющей на постоянном токе и бесконечно большой частоте соответственно, τ – постоянная времени (рис. 8).

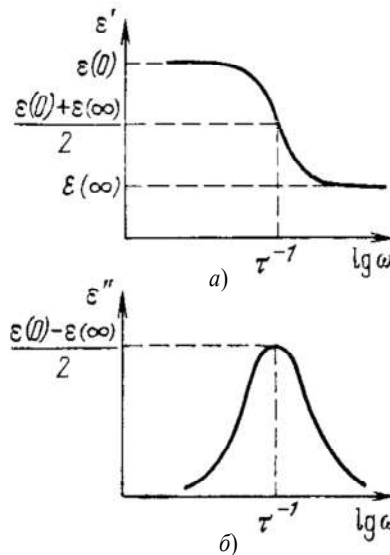


Рис. 8. Частотные зависимости ε' (а) и ε'' (б) при тепловой поляризации [12, 13]

На рис. 8 представлены графики ε' и ε'' согласно выражениям (9). Как видно из рис. 8, ε'' имеет резонансный характер. Определим полное (комплексное) сопротивление конденсатора с таким диэлектриком:

$$\begin{aligned} Z_C &= \frac{1 + j\omega\tau}{j\omega\varepsilon(0) - \omega^2\tau\varepsilon(\infty)} \cdot \frac{d}{\varepsilon_0 S} = \\ &= \left(\frac{\tau(\varepsilon(0) - \varepsilon(\infty))}{\varepsilon^2(0) + \omega^2\tau^2\varepsilon^2(\infty)} - j \frac{\varepsilon(0)/\omega + \omega\tau^2\varepsilon(\infty)}{\varepsilon^2(0) + \omega^2\tau^2\varepsilon^2(\infty)} \right) \cdot \frac{d}{\varepsilon_0 S}. \end{aligned} \quad (10)$$

Хотя в выражении (10) присутствует квадратичная зависимость от частоты ω , но $\varepsilon(0)/\omega \gg \omega\tau^2\varepsilon(\infty)$. К тому же $\varepsilon(0)/\omega$ быстрее падает до

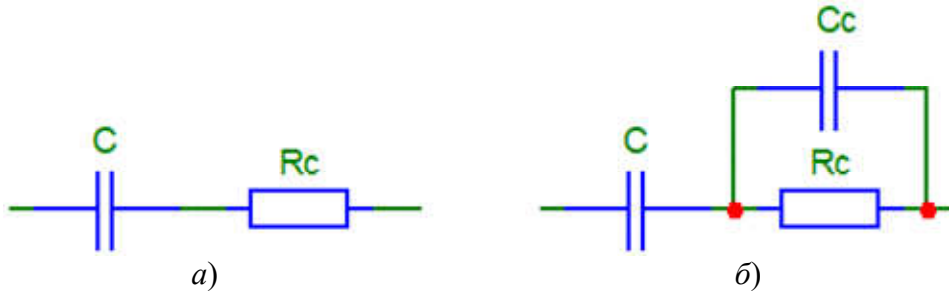


Рис. 9. Схемы замещения диэлектрика согласно тепловой поляризации

бесконечной малой, чем $1/(\varepsilon^2(0) + \omega^2 \tau^2 \varepsilon^2(\infty))$ начинает уменьшаться от константы $\varepsilon^2(0)$. Таким образом, уравнение (10) хорошо упрощается до

$$Z_c \approx \left(\frac{\varepsilon(0) - \varepsilon(\infty)}{\varepsilon^2(0)} \tau - j \frac{1}{\omega \varepsilon(0)} \right) \cdot \frac{d}{\varepsilon_0 S} = R_c - j \frac{1}{\omega C}, \quad (11)$$

что соответствует схеме замещения, изображенной на рис. 9а. Ошибка использования (11) вместо (10) заключается в определении вещественной составляющей полного сопротивления конденсатора. В (10) вещественная составляющая меняется при увеличении частоты от $(\varepsilon(0) - \varepsilon(\infty)) \tau / \varepsilon^2(0)$ до нуля, а в (11) является константой $(\varepsilon(0) - \varepsilon(\infty)) \tau / \varepsilon^2(0)$.

Можно получить схему замещения для выражения (10), не упрощая его. В этом случае получаем схему замещения, изображенную на рис. 9б, параметры которой определяются по формулам:

$$C = \varepsilon(0) \cdot \frac{\varepsilon_0 S}{d}, \quad C_c = \frac{\varepsilon(0) \varepsilon(\infty)}{\varepsilon(0) - \varepsilon(\infty)} \cdot \frac{\varepsilon_0 S}{d}, \quad R_c = \frac{\varepsilon(0) - \varepsilon(\infty)}{\varepsilon^2(0)} \tau \cdot \frac{d}{\varepsilon_0 S}. \quad (12)$$

Из (12) видно, что при $\varepsilon(0) \gg \varepsilon(\infty)$ схема замещения диэлектрика (рис. 9а) превращается в обычный RC-контур (рис. 9б), что ещё раз доказывает корректность перехода от (10) к (11). Таким образом, согласно «классических» представлений о диэлектрике [12–14] в случае тепловой поляризации схема замещения конденсатора является схемой 1-го порядка (рис. 9). Поэтому наличие тепловой поляризации не может привести к появлению индуктивности в схеме замещения диэлектрика.

В случае упругой поляризации комплексная диэлектрическая проницаемость определяется уравнением Друде-Лорентца [12 – 14]:

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon' - j\varepsilon'' = \varepsilon(\infty) + \frac{\varepsilon(0) - \varepsilon(\infty)}{1 - (\omega/\omega_0)^2 + j\Gamma(\omega/\omega_0)}, \quad (13)$$

где Γ – коэффициент, названный в [12, 13] относительным затуханием.

Уравнение (13) как раз и описывает резонансный характер комплексной диэлектрической проницаемости $\hat{\epsilon}$, т.е. описывает систему с двумя реактивными элементами (последовательный резонансный контур). Это и понятно, т.к. для описания модели упругой поляризации использовалась модель осциллятора (дифференциальное уравнение второго порядка): уравнение движения частицы массой m и зарядом q во внешнем электрическом поле $F = F_0 e^{j\omega t}$ [12, 13]:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + kx = qF, \quad (14)$$

где k – коэффициент упругости, β – коэффициент затухания. Для объяснения появления индуктивности в схеме замещения диэлектрика (рис. 6) в [10, 11] тоже использовалось выражение (14).

На рис. 10 представлены графики ϵ' и ϵ'' согласно (13). Таким образом, из-за упругой поляризации в схеме замещения конденсатора появляется индуктивность. Вследствие малой инерционности упругой поляризации диэлектрическая проницаемость, обусловленная этим механизмом, в диэлектриках с такой поляризацией отсутствует до частоты порядка 10^{12} Гц [12], что также хорошо наблюдается из теоретической частотной зависимости ϵ (рис. 11). Измерения комплексного сопротивления конденсатора показывают резонанс на частотах 10^7 – 10^8 Гц (рис. 3, 4), а это частоты проявления тепловой поляризации, при которой согласно «классической» теории диэлектриков [12, 13], как было показано выше, не возникает резонанса. Кроме того, график фазы сопротивления измеренного диэлектрика (рис. 3, 4) показывает изменение фазы от -90° до 90° . Это означает, что после резонанса преобладает влияние магнитного поля над электрическим полем в диэлектрике.

Большинство диэлектриков представляют из себя диамагнетики ($\mu \lesssim 1$) или парамагнетики ($\mu \gtrsim 1$), т.е. для большинства диэлектриков $\mu \approx 1$ [12]. В [12] описаны различные действия магнитного поля на диэлектрик, но так как считалось в [12], что магнитное поле является внешним, то в [12] не было рассмотрено явление самоиндукции в диэлектрике, которое скорее всего и наблюдается на графике фазы (появляется индуктивная составляющая – фаза растет до 90°) сопротивления измеренного диэлектрика (рис. 3, 4).

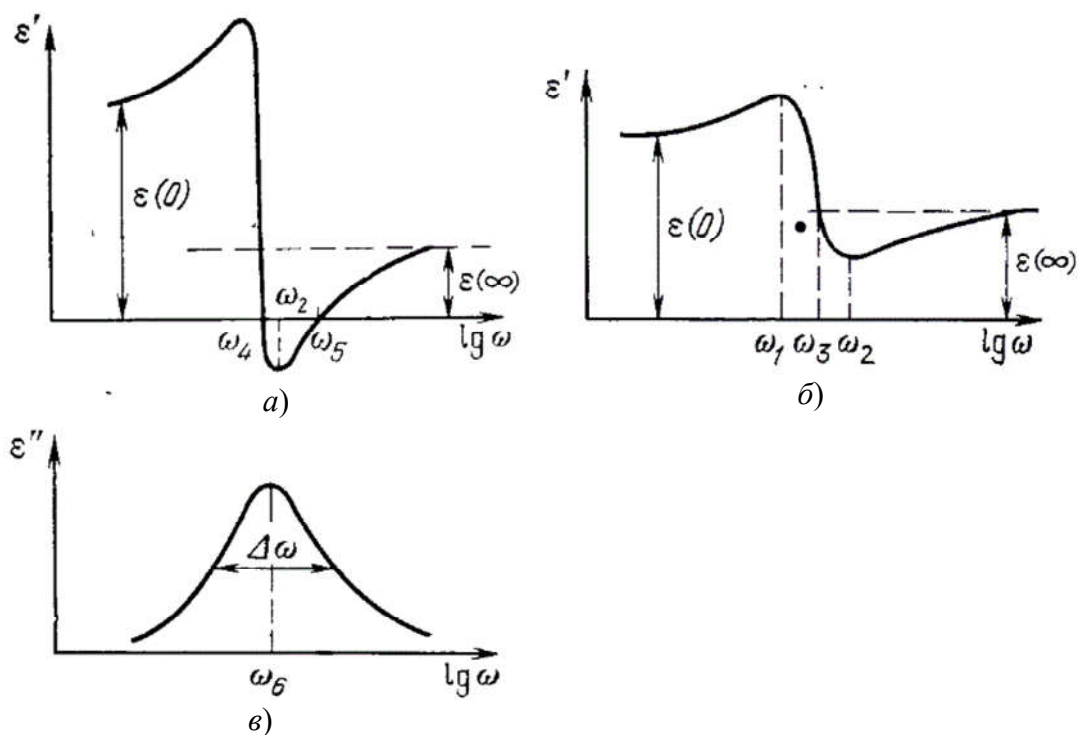


Рис. 10. Частотные зависимости ε' (при различных относительных затуханиях Γ – а) и б)) и ε'' (в) при упругой поляризации [12, 13]

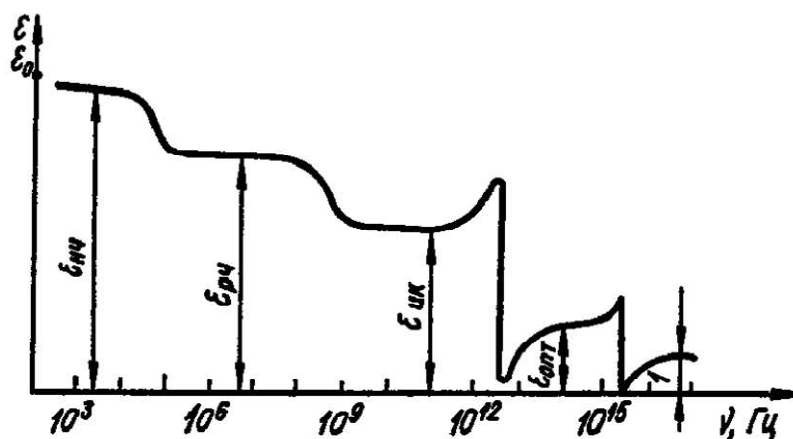


Рис. 11. Теоретическая частотная зависимость ε , характеризующая диэлектрические вклады различных механизмов поляризации и их запаздывание (взято из [12])

Исследуем подробнее данное явление. Из уравнений Максвелла для закона сохранения энергии в веществе было получено [12]:

$$H \frac{\partial B}{\partial t} + E \frac{\partial D}{\partial t} + jE + \operatorname{div}[E \times H] = 0, \quad (15)$$

где H – напряженность магнитного поля, B – магнитная индукция, E – напряженность электрического поля, D – электрическая индукция, j – плотность электрического тока (плотность тока проводимости).

Последний член выражения (15) представляет дивергенцию вектора Умова – Пойтинга и описывает интенсивность потока электромагнитной

волны. Предпоследний член выражения (15) характеризует потери электромагнитной волны за счет тока проводимости. Второй член выражения (15) характеризует плотность электрической энергии, а первый член выражения (15) – плотность магнитной энергии [12].

В силу выражения (15) или закона сохранения энергии, в диэлектрике всегда будет действовать электрическое поле, магнитное поле и проводимость. Важно учитывать, в какой области частот какая величина будет преобладать, и чем можно пренебречь. К сожалению, в [12] про действие и значение **собственного** магнитного поля в диэлектрике не сообщается, считается, что магнитное поле в диэлектрике **внешнее**.

Пренебрежение собственным магнитным полем в диэлектрике связано с тем, что смешивают понятия идеальных элементов электрической цепи и реальных физических приборов. В идеальных элементах каждое явление рассматривается по отдельности: тепловое действие электрического тока, взаимодействие электрического поля и электрического тока, а также взаимодействие магнитного поля и электрического тока [15]. В реальных физических приборах (в данном случае, в диэлектрике) согласно (15) всегда присутствует все эти три явления. Поэтому в схеме замещения любого реального физического элемента всегда будут присутствовать идеальное сопротивление, идеальная емкость, идеальная индуктивность.

Если же оценить эту индуктивность в рассматриваемом диэлектрике с данными размерами (диаметр 11,8 мм, толщина 1,4 мм), например, используя [16] и приняв $\mu = 1$, то она будет порядка 1 нГн, что подтверждается полученными параметрами схем замещения для рассматриваемых диэлектриков (табл. 1).

Таблица 1

	H15 31000	H20 3256	H20 3410	H30 3250	H50 5200	H90 9250	H90 16300	H90 16350
C , нФ	2,324	2,572	2,500	3,094	3,907	5,551	9,610	8,745
L , нГн	1,100	1,200	1,000	0,950	1,400	1,600	1,300	2,000
R_C , мОм	220	870	190	170	200	70	88	390
K	0,410	0,420	0,400	0,400	0,420	0,420	0,410	0,380
C_{C1} , нФ	0,180	0,210	0,220	0,260	0,225	0,470	0,960	0,620
R_{C1} , Ом	20	18	100000	20	18	120	80	100
R_{C2} , Ом	0,250	0,250	0,450	0,160	0,250	0,060	0,060	0,080

Данное подтверждение указывает на то, что необходимо учитывать действие собственного магнитного поля диэлектрика, возникающего при протекании в нём ВЧ электрического тока.

ВЧ-резонанс диэлектрика (участок 3 на рис. 5). Начиная с частоты f_p , фаза сопротивления диэлектрика превышает $75 - 80^\circ$, а модуль сопротивления диэлектрика растет (рис. 5, 7). Диэлектрик ведет себя как дроссель, его можно заменить на последовательный RL-контур, так как емкостная составляющая в схеме замещения (рис. 6) практически не оказывает влияния. Тогда из (2) получаем условие $\arctg(Q(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)) > 80^\circ$, из которого следует неравенство:

$$\frac{Q}{\omega_0} \omega^2 + 5\omega - Q\omega_0 > 0, \quad (16)$$

решая которое, определяем граничную частоту f_p :

$$f_p > f_0 \left(-\frac{5}{Q} + \sqrt{1 + \frac{25}{Q^2}} \right). \quad (17)$$

Следующие ВЧ-резонансы модуля и фазы комплексного сопротивления диэлектрика можно связывать с эффектом длинной линии. Это не может быть длинной линией, ведь данный эффект начинает проявляться при частоте 150 МГц (рис. 7). В этом случае длина волны электромагнитного колебания λ должна быть равна $3 \cdot 10^8 / 1,5 \cdot 10^8 = 2$ м, что значительно больше толщины диэлектрика (1,4 мм). Разница составляет 3 порядка.

Поскольку, начиная с частоты f_p , фаза сопротивления диэлектрика больше 80° (рис. 5), диэлектрик является не конденсатором, а представляет на этих частотах дроссель (последовательный RL-контур). В дросселе данное явление, не являющееся эффектом длинных линий, — подъем, спад и следующий подъем модуля сопротивления (рис. 12) хорошо моделируется добавлением в схему замещения трансформатора [17]. Тогда для диэлектрика схема замещения усложнится (рис. 13), что приводит к хорошему совпадению измеренного сопротивления диэлектрика с входным сопротивлением схемы замещения (рис. 14).

В полученной схеме замещения (рис. 13) элементы C_{C1} , R_{C1} и R_{C2} определяют ВЧ-резонанс (частоту и добротность резонанса), а коэффициент связи K определяет частоту ВЧ-антирезонанса (рис. 14).

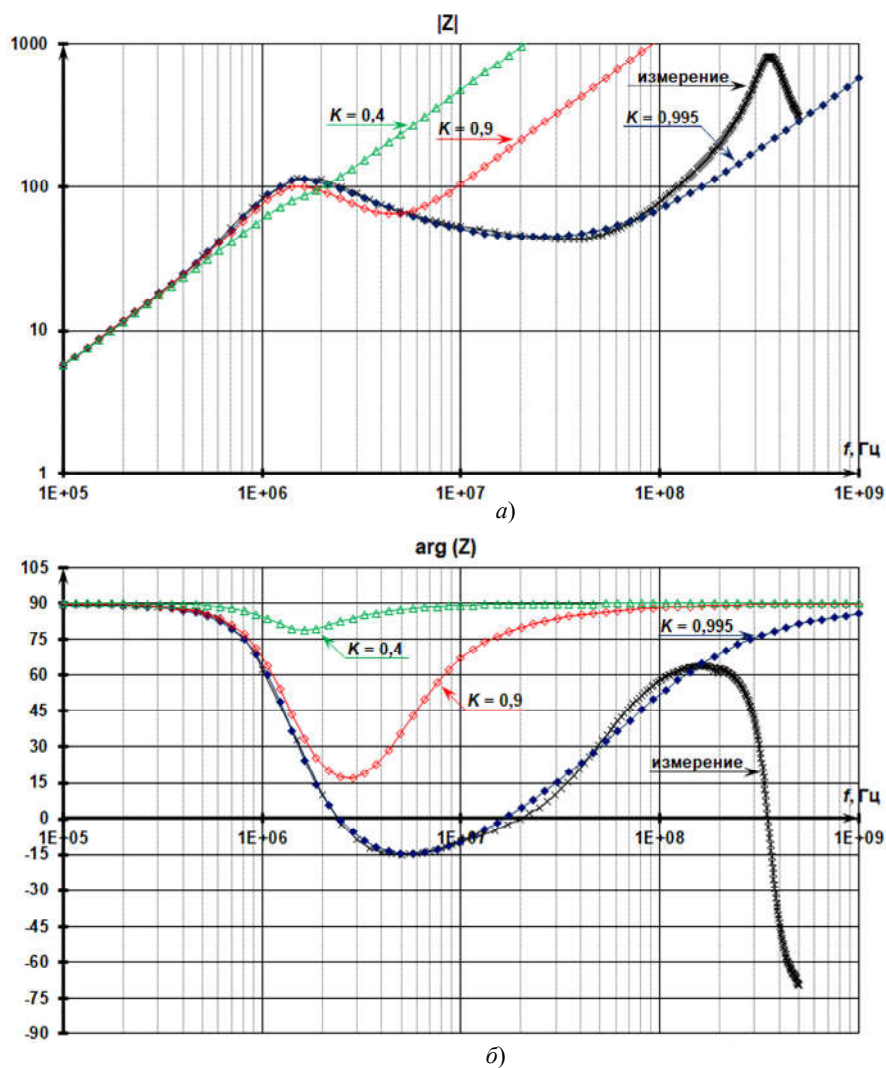


Рис. 12. Модуль (а) и фазы (б) комплексного сопротивления дросселя: измеренное значение в сравнении с различным коэффициентом связи в схеме замещения (взято из [10])

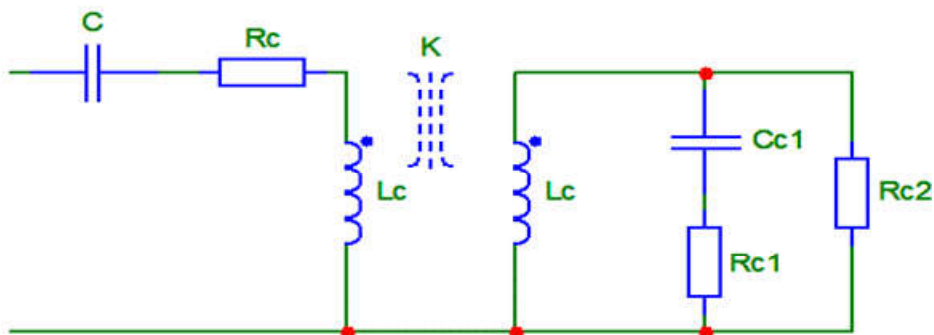


Рис. 13. Схема замещения диэлектрика

С физической точки зрения наличие трансформатора в схеме замещения дросселя объяснялось наличием магнитных полей в проводе и сердечнике дросселя и их взаимным влиянием (не все линии магнитного поля провода пронизывают сердечник) [17]. Как же тогда объяснить похожий эффект в диэлектрике без системы «провод-сердечник»?

Похожий эффект (появление двух источников магнитного потока) объясняется так: хотя магнитная проницаемость диэлектрика и близка к магнитной проницаемости воздуха [12], но по торцам диэлектрика нанесена тонкая металлизация из серебра, поэтому возникает граница сред из-за разности магнитной проницаемости, часть магнитного потока отражается от границы и складывается с магнитным потоком диэлектрика.

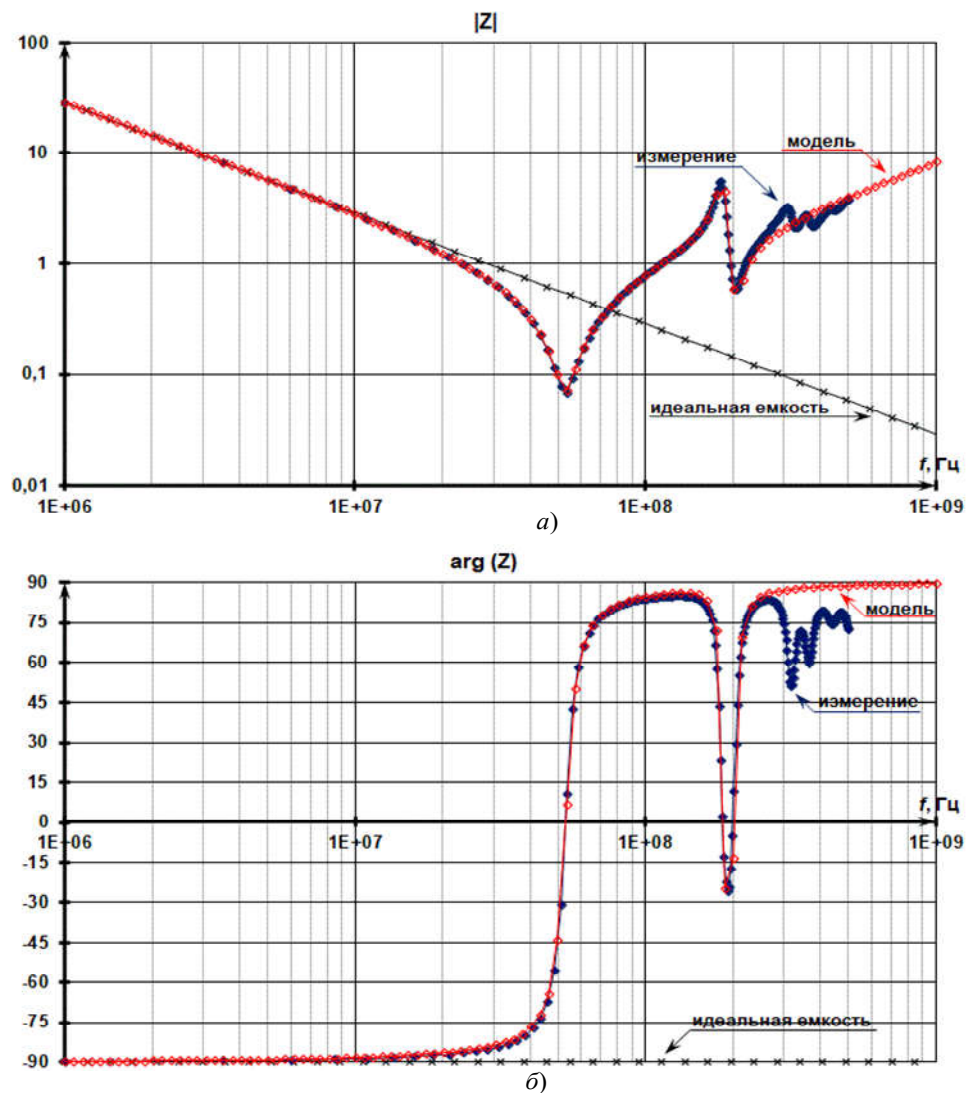


Рис. 14. Модуль (а) и фаза (б) комплексного сопротивления измеренного диэлектрика и схемы замещения диэлектрика (рис. 12)

Таким образом, возникают два магнитных потока (собственный и отраженный), они влияют друг на друга, как в случае с трансформатором. В некоторых диэлектриках эффект (подъем / спад / подъем модуля сопротивления) в области частот (до 500 МГц) может возникать несколько раз (рис. 14). Это может быть связано с тем, что диэлектрик неоднороден, и эти резонансы/антрирезонансы в модуле сопротивления – следствия отражений магнитного потока от границ неоднородностей в самом диэлектрике. Дальнейшие эксперименты требуются для создания диэлектриков и фильтров на их основе с лучшими характеристиками.

Выводы

1. Предложена новая схема замещения диэлектрика (рис. 13), частотные характеристики которой близки к характеристикам реального диэлектрика в широкой полосе частот (от 0 до 500 МГц). Схемная модель может быть использована при проектировании высокочастотных фильтров радиопомех, а также при исследовании электромагнитных помех в импульсных преобразователях напряжения модуляционного типа с ШИМ, ЧИМ и ФИМ. 2. Дан вариант объяснения физических явлений, которые влияют на частотные характеристики сопротивления диэлектрика. Объяснено наличие индуктивности в схеме замещения диэлектрика и ВЧ-всплесков в модуле комплексного сопротивления диэлектрика, которые не могут рассматриваться с позиции длинных линий из-за малости размера диэлектрика. 3. Найдены параметры схемы замещения диэлектрика по измеренным частотным характеристикам сопротивления (табл. 1). Показано, что для построения схемы замещения и нахождения её параметров одного модуля сопротивления диэлектрика недостаточно – требуется учет фазовых соотношений.

Список литературы

1. Мелешин В.И. Транзисторная преобразовательная техника / М.: Техносфера, 2005.– 632 с.
2. Дмитриков В.Ф., Сергеев В.В., Самылин И.Н. Исследование переходных процессов в импульсных регуляторах напряжения с различными фильтрующими цепями. // Тр. учеб. заведений связи. / СПбГУТ. СПб, 2001.– №167.– С. 72–78.

3. Смирнов В.С. Эквивалентные частотные характеристики транзисторных ключевых устройств с отрицательной обратной связью. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. Специальность: 05.12.04 – «Радиотехника, в том числе системы и устройства телевидения».— СПб., 2007.— 261 с.

4. Дмитриков В.Ф., Шушпанов Д.В. Устойчивость и электромагнитная совместимость устройств и систем электропитания.— М.: Горячая линия – Телеком, 2018.— 540 с.

5. Дмитриков В.Ф., Шушпанов Д.В., Кобелянский А.Е., Иванов С.Л. Исследование комплексного сопротивления и структурно-параметрический синтез схем замещения конденсаторов // Приложение к журналу «Физика волновых процессов и радиотехнические системы»: Тез. и докл. конф. «Физика и технические приложения волновых процессов».— Самара, 2008.— С. 366–368.

6. Кобелянский А.Е. Исследование и разработка высокоэффективных импульсных преобразователей напряжения с ШИМ и систем электропитания на их основе: Дис. канд. техн. наук: 05.12.04 – «Радиотехника, в том числе системы и устройства телевидения».— СПбГУТ им. проф. М.А. Бонч-Бруевича, 2010.— 217 с.

7. Векслер Г.С., Недочетов В.С., Пилинский В.В., Родионова М.В., Темников В.А. Подавление электромагнитных помех в цепях электропитания.— Киев: Техніка, 1990.— 167 с.

8. Taylor L., Tan W., Margueron X., Idir N. Reducing of parasitic inductive coupling effects in EMI filters // 15th European Conference on Power Electronics and Applications (EPE).— 2013.

9. Cuellar C., Idir N. Reduction of the parasitic coupling in the EMI filters to improve the high frequency insertion loss // 44th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society (IECON–2018).— 2018.— P. 5766–5771.

10. Dmitrikov V.F., Frid L.E., Belyaev A.E., Petrochenko A.Y., Zaytseva Z.V. Synthesis of Equivalent Circuits for Chokes and Capacitors in a Wide Range of Frequencies Taking into Account Dynamic Processes in Dielectric and Magnetic Materials // 20th International Conference of Young Specialists on Micro/Nanotechnologies and Electron Devices (EDM–2019).— Novosibirsk State Technical University, IEEE Russia Siberia Section.— 2019.— С. 532–540.

11. Дмитриков В.Ф., Петроченко А.Ю., Фрид Л.Е., Беляев А.Е., Зайцева З.В. Разработка высокочастотных электрических схем замещения

конденсаторов и дросселей с учетом частотных свойств диэлектрической и магнитной проницаемости диэлектриков и магнетиков // Физика волновых процессов и радиотехнические системы.— 2020.— Т. 23, №2.— С. 55–69.

12. Поплавко Ю.М. Физика диэлектриков: учеб. пособие для вузов.— Киев: Вища школа. Головное изд-во, 1980.— 400 с.

13. Рез И.С., Поплавко Ю.М. Диэлектрики: основные свойства и применения в электронике.— М.: Радио и связь, 1989.— 288 с.

14. Гусев Ю.А. Основы диэлектрической спектроскопии: Учебное пособие.— Казань, 2008.— 112 с.

15. Белецкий А.Ф. Теория линейных электрических цепей: Учебник. 2-е изд., стер.— СПб.: «Лань», 2009.— 544 с.

16. Калантаров П.Л., Цейтлин Л.А. Расчет индуктивностей: Справочная книга / 3-е изд., перераб. и доп.— Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1986.— 488 с.

17. Дмитриков В.Ф., Шушпанов Д.В. Эквивалентная схема замещения дросселя, намотанного на феррите, в широком диапазоне частот (0 Гц — 500 МГц) // Физика волновых процессов и радиотехнические системы,— 2021.— Т. 24, №4.— С. 25–45.

Дмитриков Владимир Федорович – Заслуженный деятель науки РФ, д.т.н., профессор кафедры теоретических основ телекоммуникаций Санкт-Петербургского государственного университета телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч-Бруевича.
E-mail: Dmitrikov_VF@mail.ru.

Шушпанов Дмитрий Викторович – к.т.н., доцент кафедры теоретических основ телекоммуникаций Санкт-Петербургского государственного университета телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч-Бруевича.
E-mail: dimasf@inbox.ru.

ЭКВИВАЛЕНТНАЯ СХЕМА ЗАМЕЩЕНИЯ ДРОССЕЛЯ НА НАНОКРИСТАЛЛИЧЕСКОМ СЕРДЕЧНИКЕ С БОЛЬШОЙ МАГНИТНОЙ ПРОНИЦАЕМОСТЬЮ

В. Ф. Дмитриков, Д. В. Шушпанов, Э. А. Фоченков

На основе тороидального сердечника, навитого из тонкой (18 мкм) нанокристаллической ленты, с разным количеством витков обмотки реализована эквивалентная схема замещения дросселя в широком диапазоне частот (0 Гц–500 МГц). Для синтеза были измерены частотные характеристики сопротивления дросселя и учтены физические процессы, протекающие в магнетике.

An equivalent replacement circuit for inductor coil has been synthesized in a wide frequency range (0 Hz–500 MHz) based on a toroidal core wound from a thin (18 microns) nanocrystalline tape with a different number of winding turns. For synthesis, the frequency characteristics of the resistance of inductor coil were measured and the physical processes occurring in the magnetic were taken into account.

Введение. Наиболее сложными в расчете и производстве реактивных элементов являются дроссели. Они являются частью сглаживающего фильтра и фильтра радиопомех (ФРП) в импульсных источниках электропитания. Разработчикам РЭА требуются частотные характеристики комплексных сопротивлений дросселей, а также их точные высокочастотные эквивалентные структурно-параметрические схемы замещения (поведенческие модели) в диапазоне частот до 100 МГц и выше для программ схемотехнического моделирования.

Современное развитие измерительной техники позволило измерять комплексное сопротивление дросселя в широкой области частот (больше 10 МГц). Но данные измерения комплексного сопротивления дросселя стали проводить сравнительно недавно [2, 3]. Измерение частотных характеристик комплексного сопротивления реального дросселя в широком диапазоне частот (до 500 МГц) [4–7] позволило увидеть, что реальный дроссель в широкой области частот представляет собой сложное

устройство, и использование «старых» НЧ схем замещения не всегда корректно при проектировании РЭА.

В [1] была построена схема замещения дросселя с тороидальным ферритовым сердечником, т.к. именно этот материал наиболее часто используется в силовой электронике. Данная схема замещения была построена с учетом физических эффектов (влияние сопротивления провода и материала сердечника, взаимное влияние провода и материала сердечника). Требовалось объяснение, почему частотные характеристики (модуль и фаза) комплексного сопротивления так ведут себя в широкой полосе частот (до 500 МГц). Эта схема отличается от схемы замещения, предложенной в [2, 3], тем, что: является более высокочастотной и при её расчете учитывалась фаза комплексного сопротивления дросселя, что позволило лучше объяснить физические процессы, протекающие в дросселе.

Аморфные сплавы производятся по технологии сверхбыстрого охлаждения расплава со скоростью охлаждения более миллиона градусов Цельсия в секунду. За счет высокой скорости охлаждения в металле не успевает сформироваться кристаллическая решётка, и он застывает в виде ленты с аморфной внутренней структурой, характерной стеклу и жидкостям. Аморфная структура сплава обеспечивает хорошую подвижность магнитных доменов, не связанных кристаллической решеткой, что определяет отличные магнитомягкие свойства.

Структура аморфных сплавов имеет ближний порядок, т.е. состоит из упорядоченных микрогруппировок атомов. Другим представителем нового класса метастабильных быстро охлаждённых сплавов и активным соперником аморфных сплавов являются нанокристаллические сплавы. «Материнской» основой нанокристаллического сплава является исходный аморфный сплав определенного состава (Fe-Cu-Nb-Si-B). Методом получения наноструктуры является прецизионный отжиг – регулируемая кристаллизация из исходного аморфного состояния. Структура нанокристаллического сплава представляет собой двухфазную систему, одной из фаз которой являются нанокристаллы, а другой – остаточная аморфная матрица. Свойства наносплава зависят от состава, размера и количества нанокристаллов, а также их соотношения с аморфной фазой. По своим свойствам нанокристаллический сплав превосходит аморфный сплав на основе кобальта при меньшей цене. Имея высокую индукцию

насыщения (1,2 Тл против 0,6 Тл), высокую температуру Кюри (560°С против 235°С), обеспечивая высокую рабочую температуру (180°С против 100°С), а также хорошую температурную стабильность в широком диапазоне рабочих температур от -60°С до +155°С (изменение проницаемости не более 15%), новый нанокристаллический материал на основе железа представляет большой интерес для различных применений. Одним из самых массовых применений этих материалов являются синфазные дроссели, широко используемые в фильтрах радиопомех и импульсных источниках питания различного назначения. В данном применении высокая проницаемость материала позволяет резко сократить длину провода, собственные характеристики которого на высоких частотах имеют важное значение, что будет показано в данной статье.

В [2, 3] была предложена схема замещения для подобного нанокристаллического дросселя, но она, как и в случае с ферритовым сердечником, имеет те же недостатки: не является достаточно высокочастотной (до 100 МГц) и при её расчете не рассматривалась фаза комплексного сопротивления дросселя. Кроме того, в схеме замещения дросселя, используемой в [2, 3], используется длинная линия, параметры которой неясно как выбирать, и предложенную схему замещения достаточно сложно модернизировать для создания схемы замещения для двух- или трехобмоточного дросселя или трансформатора – приходится с нуля создавать новую схему замещения [8].

В данной статье рассматривается построение схемы замещения дросселя на основе тороидального сердечника, навитого из тонкой (18 мкм) нанокристаллической ленты. Подобные магнитные материалы имеют принципиальные отличия от традиционных ферритов, пермаллоев, магнитодиэлектриков. Синтезируется схема замещения дросселя с учетом физических эффектов (влияние сопротивления провода и материала сердечника, взаимное влияние провода и материала сердечника) в широкой полосе частот (до 1 ГГц).

Как следует из [1] и рис. 1, изменение количества витков (от одного до семи) в дросселе на феррите приводит как к изменению модуля, так и к изменению фазы комплексного сопротивления дросселя. Это обуславливает схему замещения дросселя со сложной зависимостью от количества витков. Это связано с тем [1], что сердечник дросселя после

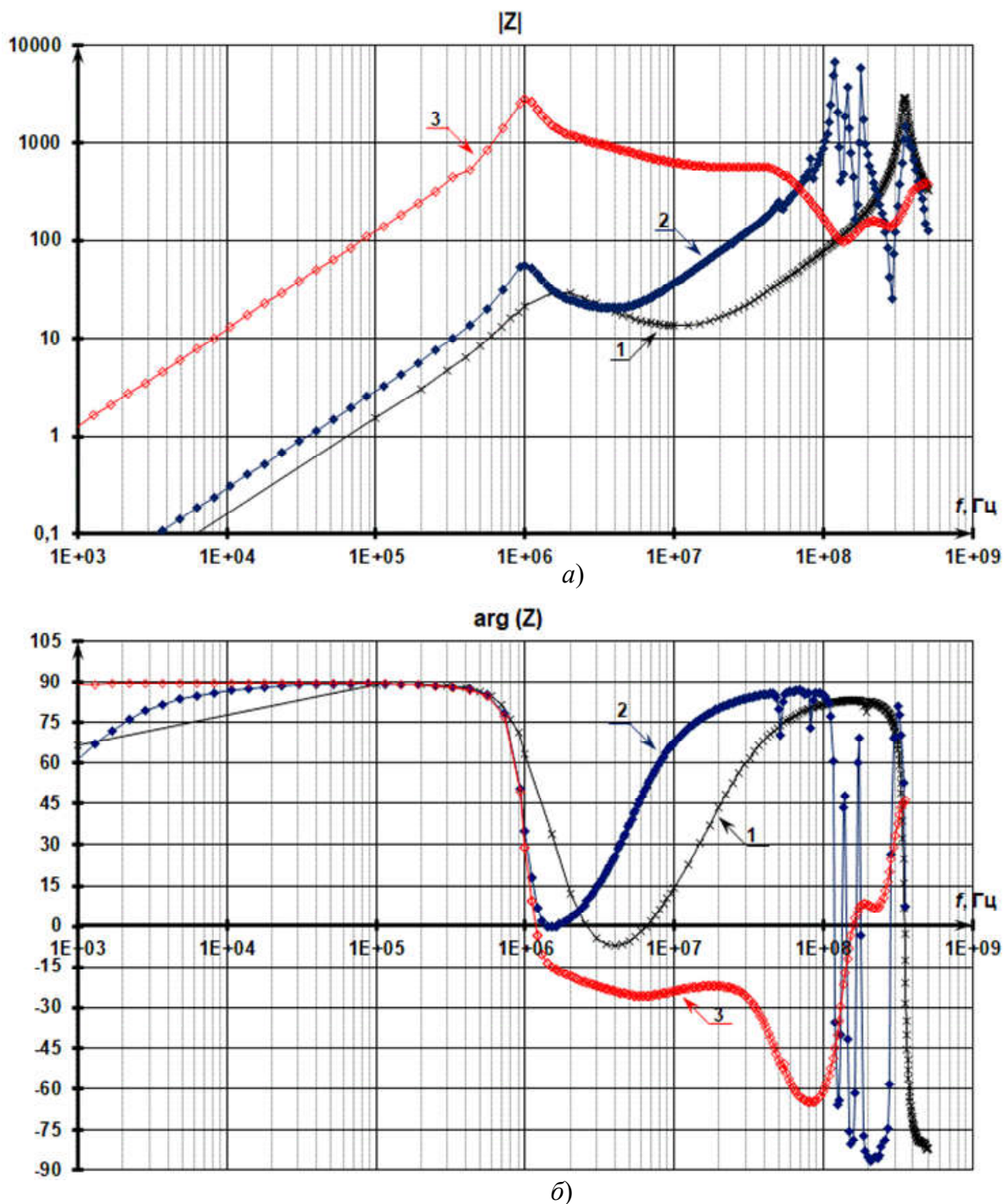


Рис. 1. Измеренные модуль (а) и фаза (б) комплексного сопротивления дросселя (сердечник N87) с различным количеством витков и длиной провода:
1) 1 виток (15 см), 2) 1 виток (60 см), 3) 7 витков (60 см)

частот выше единиц МГц уже не представляет собой магнитный материал, поскольку комплексная магнитная проницаемость (вещественная и мнимая составляющие) резко уменьшаются, а вещественная составляющая становится отрицательной. Кроме того, надо учитывать высокочастотный (сотни МГц) всплеск комплексного сопротивления дросселя (рис. 1), возникающий из-за того, что начинает проявляться эффект длинных линий, т.к. геометрические размеры провода становятся

соизмеримы с длиной волны электромагнитного колебания на частотах в сотни МГц [1].

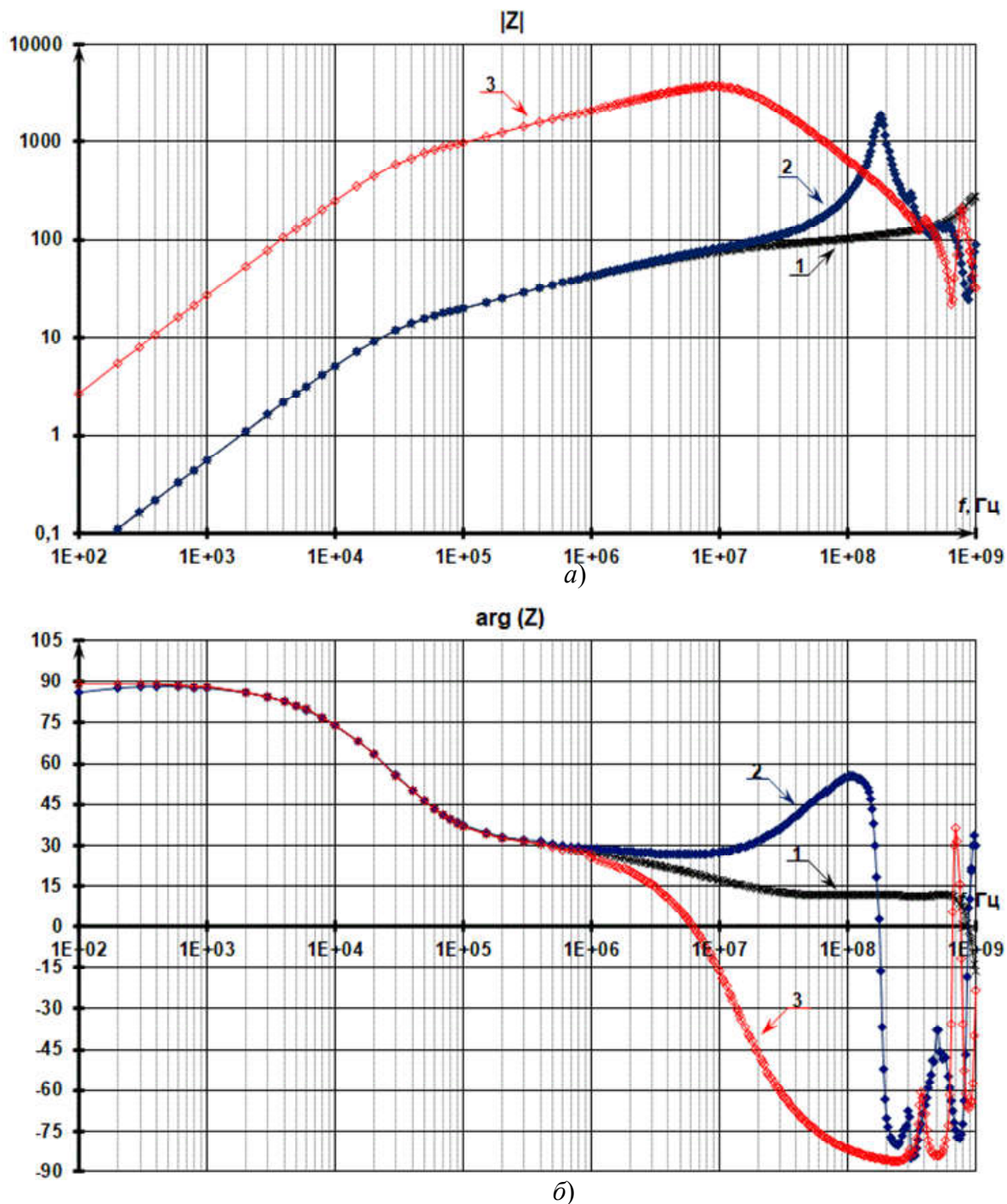


Рис. 2. Измеренные модуль (а) и фаза (б) комплексного сопротивления дросселя (сердечник MSFN-25S-TH) с различным количеством витков и длиной провода:
1) 1 виток (6 см), 2) 1 виток (38 см), 3) 7 витков (38 см)

Комплексное сопротивление дросселя на сердечнике из нанокристаллического сплава. В ПАО «Мстатор» (г. Боровичи) были проведены измерения модуля и фазы комплексного сопротивления дросселей (рис. 2), намотанных на нанокристаллическом кольцевом сердечнике MSFN-25S-TH с разным количеством витков и длиной

провода (рис. 3). Измерения проводились на анализаторах импеданса Keysight E4982A (в диапазоне частот от 1 МГц до 3 ГГц) и Keysight E4980AL (в диапазоне частот 100 Гц до 1 МГц). Кольцевой сердечник, навитый из нанокристаллической ленты АМАГ 200С на основе железа, имел размеры 25×16×10 мм. Для защиты магнитного материала от давления провода и для изоляции использовался пластмассовый контейнер. Размеры в контейнере 27,7×13,8×12,5 мм. Провод был разной длины (6 см и 38 см) и $\varnothing = 1,5$ мм.

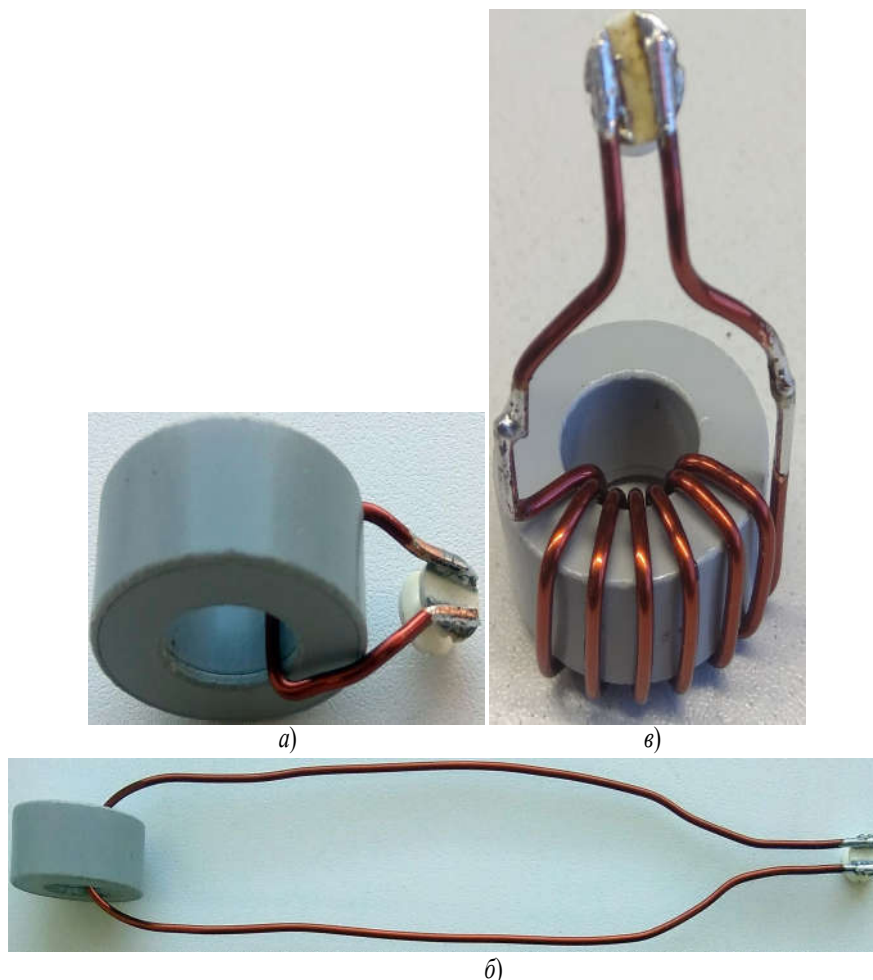


Рис. 3. Дроссель (сердечник MSFN-25S-TH) с различным количеством витков и длиной провода: а) 1 виток (6 см), б) 1 виток (38 см), в) 7 витков (38 см)

Комплексное сопротивление дросселя на феррите. В [1] были проведены измерения модуля и фазы полного (комплексного) сопротивления дросселей с кольцевым сердечником из феррита N87 на анализаторах импеданса Keysight E4982A (в диапазоне частот от 1 МГц до 3 ГГц) и E7-28 (в диапазоне частот 1 кГц до 1 МГц). На рис. 1 (цифра 1) показаны измерения модуля и фазы комплексного сопротивления

дросселя с одним витком. После этого совместно с сотрудниками НТЦ СЗЛ (г. Санкт-Петербург) были измерены модуль и фаза комплексных сопротивлений дросселей, намотанных на том же самом сердечнике, но другой партии, с большим количеством витков. На рис. 1 (цифры 2 и 3) показаны модуль и фаза комплексного сопротивления этих измеренных дросселей с одним и семью витками соответственно. Кольцевой сердечник имел размеры $50 \times 28,6 \times 20,3$ мм. Провод был длиной 60 см и $\varnothing = 0,95$ мм.

Измеренные частотные характеристики комплексного сопротивления дросселя (рис. 2) показывают, что изменение числа витков дросселя с данным типом сердечника приводит лишь к изменению модуля комплексного сопротивления дросселя в отличие от дросселя, с ферритовым сердечником (рис. 1). Изменение фазы комплексного сопротивления дросселя связано с наличием емкости, зависящей лишь от длины провода (рис. 2). Это связано с тем, что начинает проявляться эффект длинных линий, что будет рассмотрено. Таким образом, достаточно сделать схему замещения для одновиткового дросселя, её будет легко масштабировать для любого количества витков и размеров сердечника. По аналогии с [1] для понимания методики синтеза схемы замещения реального дросселя частотные характеристики модуля и фазы его измеренного комплексного сопротивления были разбиты на шесть характерных участков (рис. 4), в которых проявляются различные физические характеристики реального дросселя.

Для данного сердечника (MSFN-25S-TH) по измеренному сопротивлению одновиткового дросселя (рис. 2, кривая 1) была определена комплексная проницаемость материала сердечника (рис. 5)

$$\dot{\mu}(j\omega) = \mu'(j\omega) - j\mu''(j\omega), \quad (1)$$

где μ' , μ'' – вещественная и мнимая составляющие комплексной магнитной проницаемости материала, которые определяются как

$$\mu'(j\omega) = \frac{|Z_L(j\omega)|}{\omega \cdot \mu_0 \cdot K_\Phi \cdot K_{3АП}} \sin(\arg(Z_L(j\omega))), \quad (2)$$

$$\mu''(j\omega) = \frac{|Z_L(j\omega)|}{\omega \cdot \mu_0 \cdot K_\Phi \cdot K_{3АП}} \cos(\arg(Z_L(j\omega))), \quad (3)$$

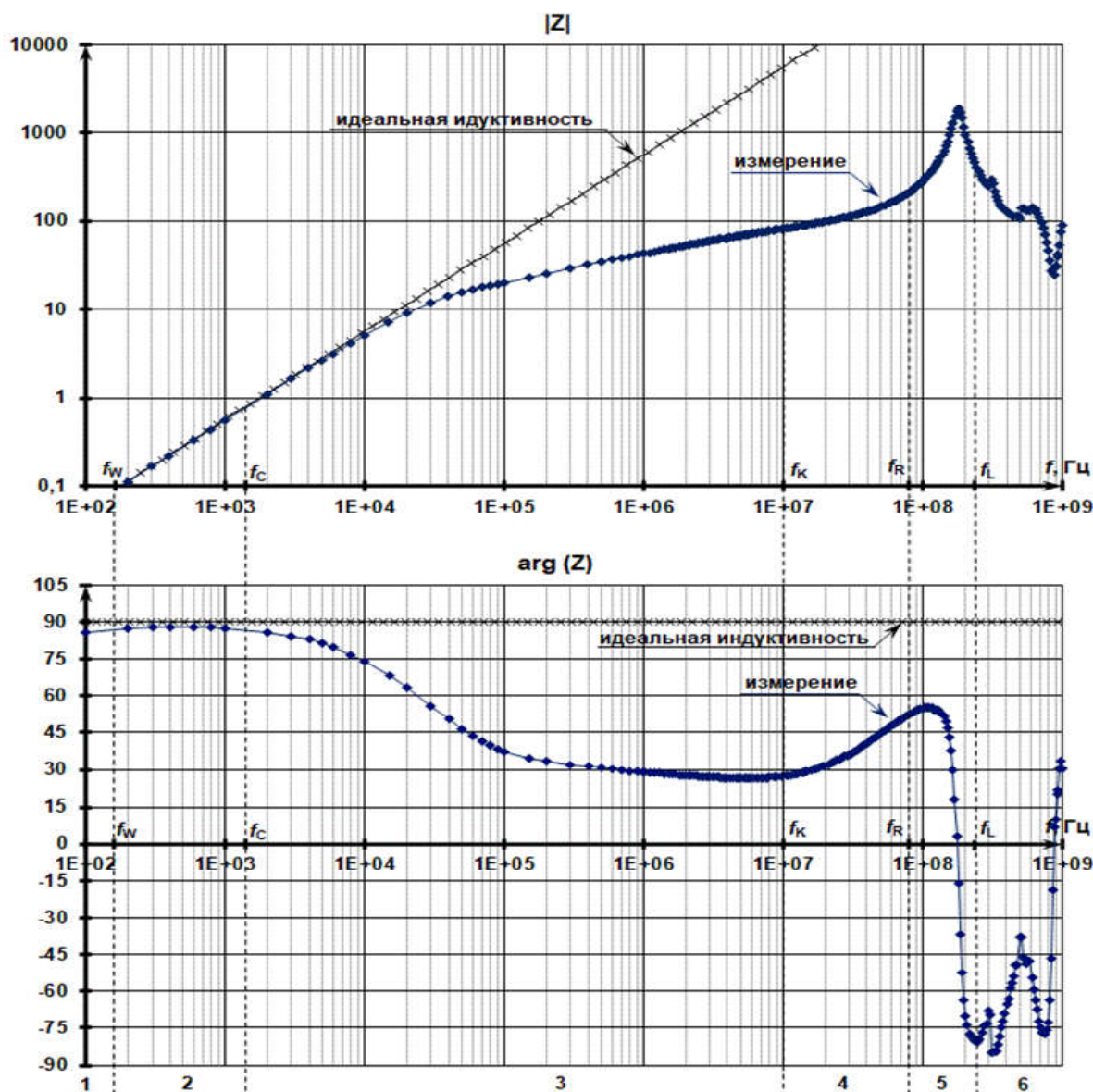


Рис. 4. Разбивка на области модуля и фазы комплексного сопротивления дросселя

где Z_L – измеренное комплексное сопротивление дросселя; $K_\Phi = \frac{h}{2\pi} \ln \frac{R}{r}$ – коэффициент формы, введенный в [1], характеризующий геометрические размеры сердечника: h – высота тороидального сердечника, R – наружный радиус тороидального сердечника, r – внутренний радиус тороидального сердечника; $K_{\text{ЗАП}}$ – коэффициент заполнения тора сердечника материалом (для этого материала по ТУ $K_{\text{ЗАП}} = 0,72$).

Низкочастотная область (участки 1 и 2 на рис. 4). Из измеренных частотных характеристик комплексного сопротивления дросселя можно сделать вывод, что реальный дроссель представляет собой идеальную катушку индуктивности лишь в достаточно узком интервале частот: от 150 Гц – 1,5 кГц (рис. 4). Это соответствует участку 2 на рис. 4, что

хорошо видно по фазе комплексного сопротивления (когда фаза близка 90°). Это также соответствует области частот, в которой магнитная проницаемость материала практически постоянна, т.е. $\dot{\mu}(j\omega) \approx \mu$ (рис. 5). В этом случае индуктивность дросселя с тороидальным сердечником определяется классической формулой [9] с учетом коэффициента заполнения $K_{\text{зап}}$ (особенность витых ленточных магнитопроводов):

$$L = \mu_0 \mu \cdot n^2 \cdot K_\Phi \cdot K_{\text{зап}}, \quad (4)$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная, μ – относительная магнитная проницаемость сердечника, n – количество витков.

Для данного сердечника ($25 \times 16 \times 10$ мм) получаем $K_\Phi = 0,71 \cdot 10^{-3}$. При магнитной проницаемости сердечника $\mu = 1,37 \cdot 10^5$ (рис. 5) и $K_{\text{зап}} = 0,72$ получаем расчетное значение индуктивности одновиткового дросселя $L = 88$ мкГн, практически близко индуктивности $L = 89,2$ мкГн, полученной из частотных характеристик экспериментально измеренного комплексного сопротивления дросселя (рис. 4). Причина такого небольшого различия полученных значений индуктивностей будет рассмотрена далее.

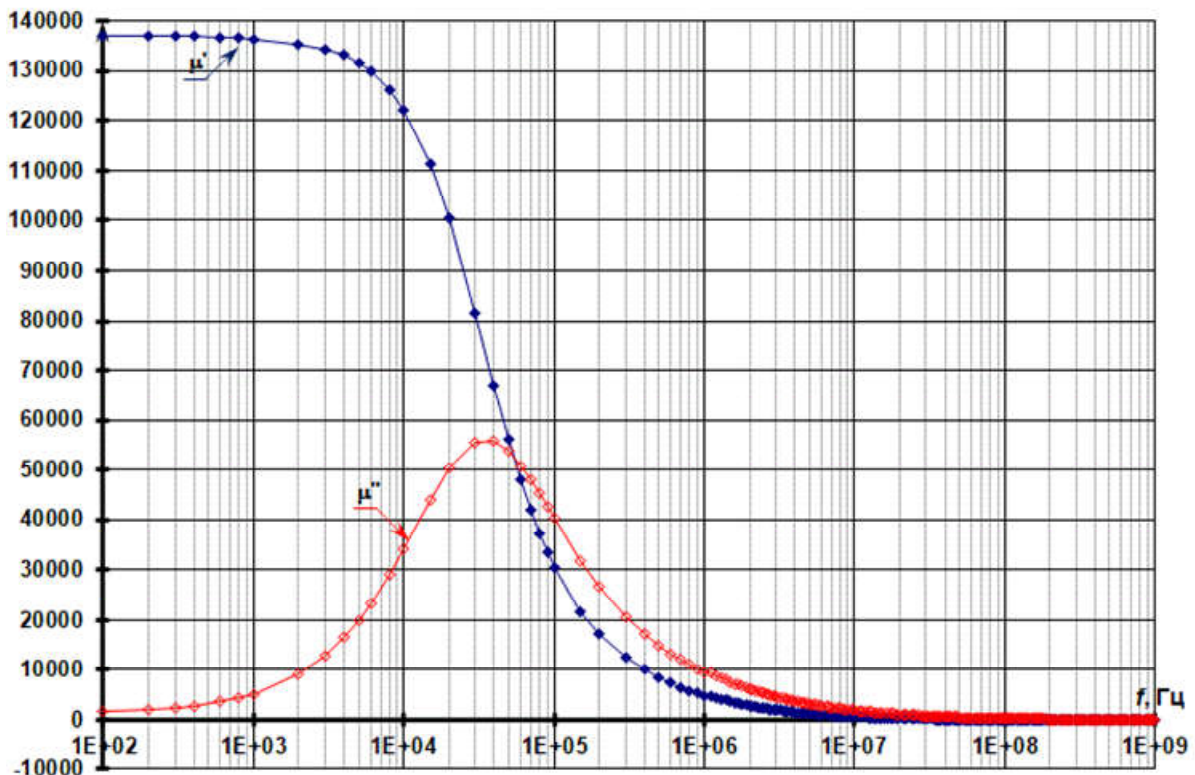


Рис. 5. $\mu'(j\omega)$ и $\mu''(j\omega)$ для сердечника MSFN 25S-TH (из измерения сопротивления дросселя)

На частотах значительно ниже 150 Гц начинает сказываться сопротивление провода (для одновиткового дросселя), и реальный дроссель представляет собой последовательное сопротивление резистора R_w (сопротивление провода) и идеальной катушки индуктивности L (рис. 6). Условие, когда реальный дроссель можно считать идеальной катушкой индуктивности, можно записать следующим образом [1]:

$$f \geq f_w, \text{ где } f_w = (9-10) \frac{R_w}{L}. \quad (5)$$

Сопротивление провода R_w было измерено: 3,2 мОм (для провода 38 см). Тогда, используя (5), получаем частоту f_w порядка 300 Гц (для одновиткового дросселя с длиной провода 38 см). Т.к. частота f_w определялась из условия отличия фазы от 90° на $1-2^\circ$ [1], то во многих практических применениях её можно разделить на 2, что и видно по рис. 4. Таким образом, получаем $f_w = 150$ Гц.

Определение верхней частоты f_c (рис. 4), когда дроссель можно считать ещё идеальным, тоже следует определять по фазе комплексного сопротивления дросселя. Если определять эту частоту по графику модуля, то получим значение порядка 10 – 20 кГц. А на этих частотах фаза уже составляет порядка $75^\circ - 60^\circ$ (рис. 4). Т.е. дроссель представляет собой RL-контур на этих частотах. Таким образом, только фаза комплексного сопротивления позволяет корректно определить, когда реальный дроссель можно считать идеальной индуктивностью, и измерять индуктивность дросселя нужно только в этом диапазоне частот. Измерения на всех остальных частотах будет давать некорректный результат.



Рис. 6. Низкочастотная схема замещения дросселя

Комплексное сопротивление провода. Для используемого провода диаметром 1,5 мм, длиной 6 см и 38 см (рис. 7) было измерено комплексное сопротивление (рис. 8), из которого видно, что провод на частотах выше единиц кГц уже нельзя считать резистором, а начиная с 1 МГц – это уже идеальная индуктивность. Из экспериментально измеренных модуля и фазы комплексного сопротивления провода (рис. 8)

были определены параметры схемы замещения провода (рис. 9): $L_W = 0,27$ мкГн, $R_W = 3,2$ мОм, $C_R = 2,5$ пФ, $R_R = 10$ кОм (для провода длиной 38 см) и $L_W = 0,023$ мкГн, $R_W = 0,4$ мОм, $C_R \approx 0,8$ пФ, $R_R \approx 10$ кОм (для провода длиной 6 см). Измерения проводилось для проводов в виде плоской петли (рис. 7).

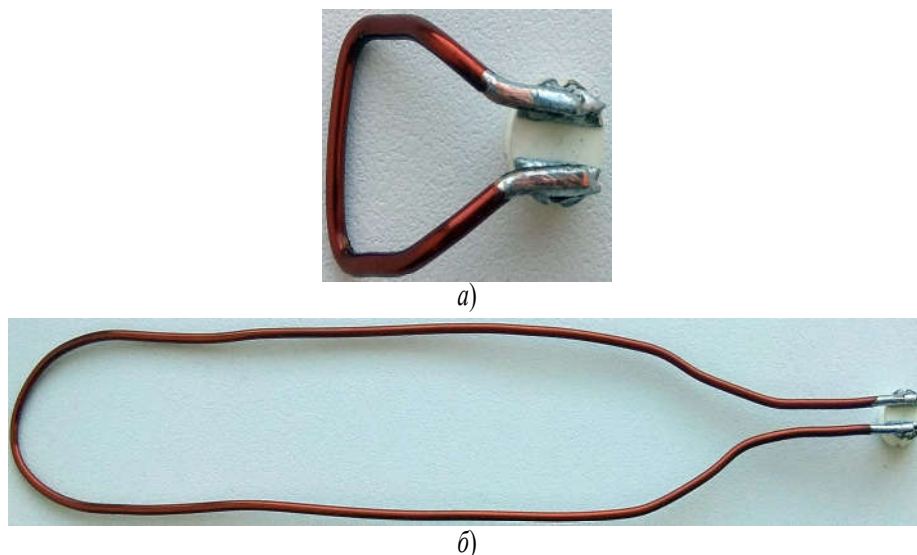


Рис. 7. Провод разной длины: а) 6 см, б) 38 см

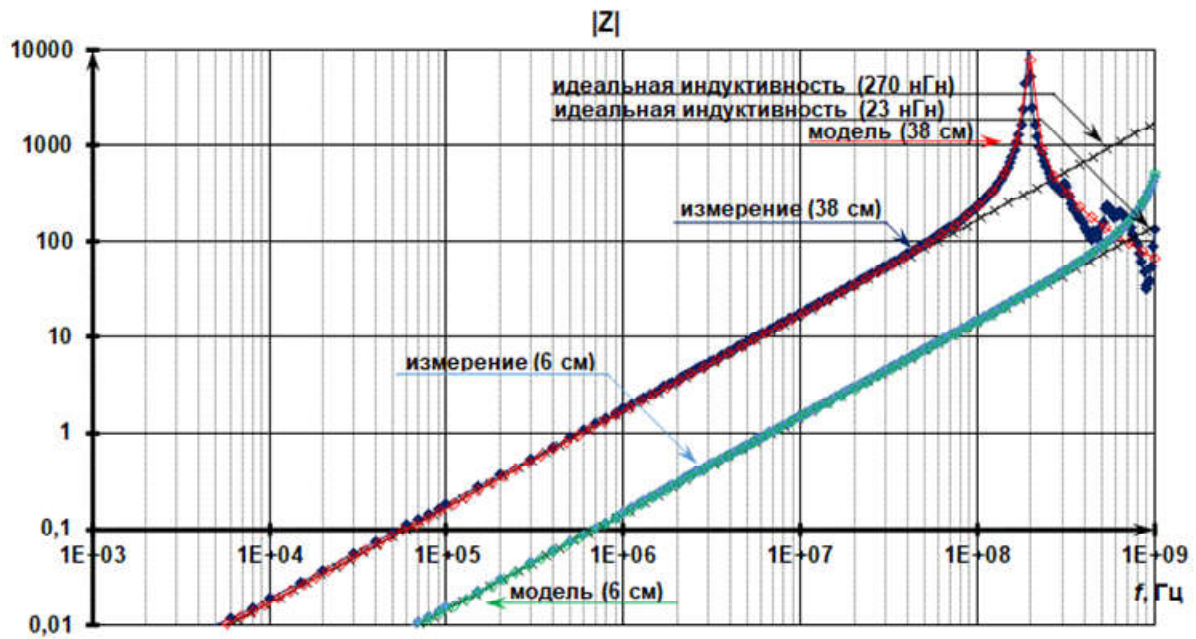
Сопротивление провода можно определить по известной формуле:

$$R_W = \rho \frac{l}{\pi r^2}, \quad (6)$$

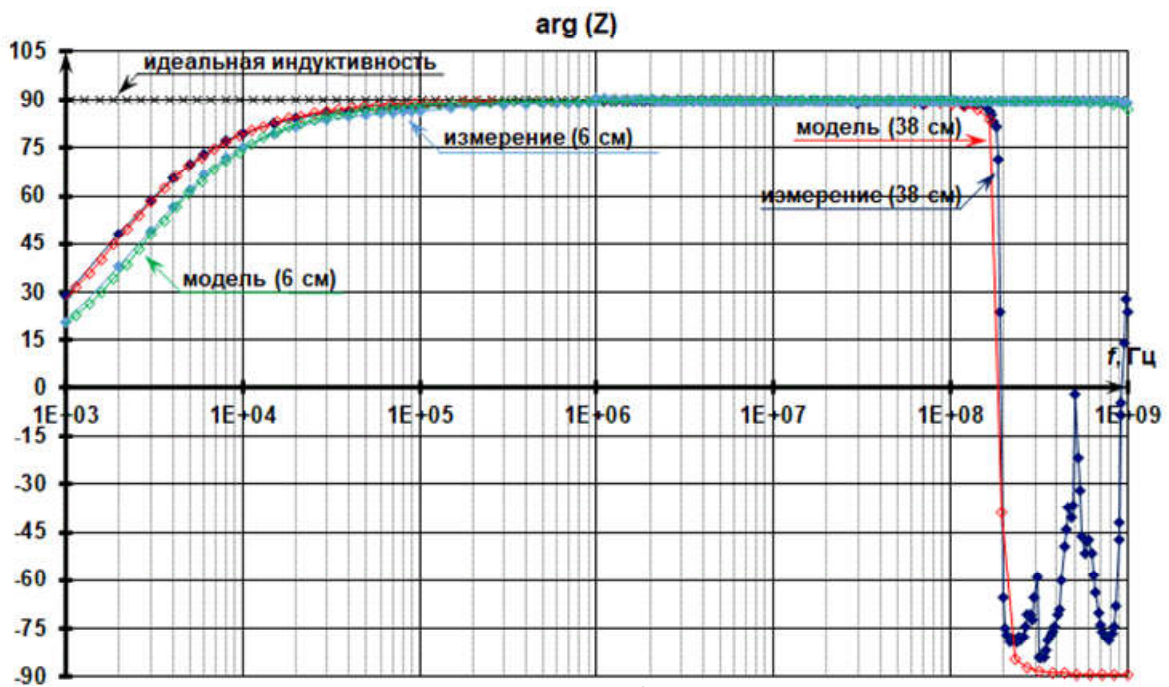
где ρ – удельное сопротивления вещества провода (для меди оно равно $0,0175$ Ом/(мм²·м)), l – длина провода в м, r – радиус поперечного сечения провода в мм.

Для провода диаметром 1,5 мм и длиной 38 см, используя (6), получаем сопротивление 3,76 мОм, что достаточно близко значению, определенному в схеме замещения (3,2 мОм) из условия близости частотных характеристик схемы замещения и экспериментально измеренных частотных характеристикам провода (рис. 8). Аналогично для провода длиной 6 см получаем сопротивление 0,59 мОм. Но оно уже отличается от значения, определенного в схеме замещения (0,4 мОм). Из рис. 8 видно, что при малой длине (6 см) провода получаем ошибку в определении ФЧХ, что говорит о погрешности измерения провода малой длины в этой области частот данным прибором (Keysight E4980AL),

которая и дает ошибку в определении сопротивления провода порядка 30%.



a)



б)

Рис. 8. Модуль (a) и фазы (б) комплексного сопротивления провода ($\varnothing = 1,5$ мм) разной длины (6 см и 38 см): измеренное значение в сравнении со схемой замещения

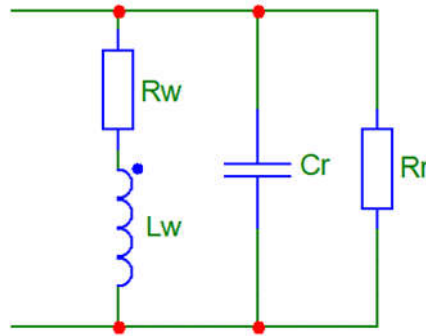


Рис. 9. Схема замещения провода

Индуктивность прямолинейного провода кругового сечения можно определить по следующей формуле [10]:

$$L_w = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left(\ln \left(\frac{2l}{r} \right) - \frac{3}{4} \right), \text{ Гн, или } L_w = 0,2 \cdot l \left(\ln \left(\frac{4l}{d} \right) - \frac{3}{4} \right), \text{ мкГн,} \quad (7)$$

где d – диаметр провода.

Для провода диаметром 1,5 мм и длиной 38 см, используя (7), получаем индуктивность 0,469 мкГн, что значительно расходится с индуктивностью, определенной в схеме замещения (0,27 мкГн). Для провода длиной 6 см, используя (7), получаем индуктивность 0,043 мкГн, что также расходится с индуктивностью, определенной в схеме замещения (0,023 мкГн). Измерения индуктивности провода на приборе Е7-5 (измерительный мост) дали близкие результаты для проводов 38 см и 6 см: 0,27 мкГн и 0,02 мкГн.

Данные различия значений полученных индуктивностей с индуктивностями, рассчитанными по (7), связаны с тем, что измерения проводились для проводов в виде плоской петли (рис. 7), а формула (7) дана для прямолинейного провода. Измерить прямолинейный провод указанных длин на известных приборах невозможно.

Влияние материала сердечника дросселя (участок 3 на рис. 4). На частотах выше 1,5 кГц (рис. 4) характер комплексного сопротивления дросселя зависит от изменения магнитных свойств материала сердечника (рис. 5). Это связано с тем, что относительная магнитная проницаемость материала не является константой μ , а является частотно-зависимой комплексной величиной $\dot{\mu}(j\omega)$ [11–13].

Снижение фазы комплексного сопротивления дросселя начинается с 1 кГц (рис. 4). Это связано с проявлением резистивных потерь в

сердечнике – падением вещественной и увеличением мнимой составляющих комплексной магнитной проницаемости материала (рис. 5). Поэтому на этом участке частот дроссель можно заменить параллельным RL-контуром (рис. 10,а) с сопротивлением:

$$Z_L(j\omega) = \frac{j\omega L}{1 + j\omega L/R_C} = \frac{\omega L}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} e^{j(90^\circ - \arctg \omega \tau)}, \quad (8)$$

где $\tau = L/R_C$ – постоянная времени.

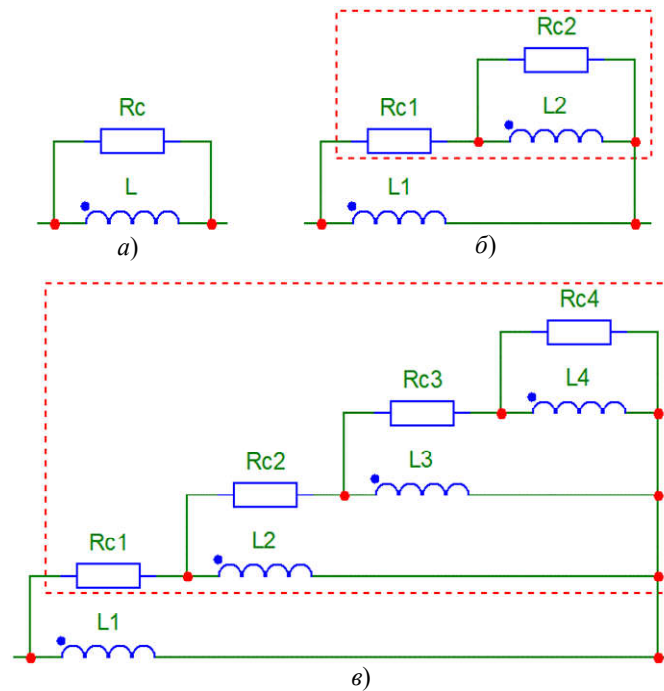


Рис. 10. Схемы замещения дросселя, учитывающие влияния сердечника

Частотные характеристики сопротивления схемы замещения и измеренные имеют хорошее совпадение до 60 кГц (рис. 11, кривая 1). Параметры полученной модели (рис. 10,а): $L = 89,2$ мкГн, $R_C = 22$ Ом. Чтобы получить хорошее совпадение на более высоких частотах (рис. 11, кривая 2) необходимо вместо постоянного сопротивления R_C (рис. 10,а) использовать частотно-зависимое сопротивление, добавив в схему замещения RL-контур (рис. 10,б). Тогда сопротивление дросселя:

$$Z_L(j\omega) = \frac{j\omega L_1 \left(1 + j\omega L_2 \frac{R_{C1} + R_{C2}}{R_{C1} R_{C2}} \right)}{1 - \omega^2 \frac{L_1 L_2}{R_{C1} R_{C2}} + j\omega \left(L_2 \frac{R_{C1} + R_{C2}}{R_{C1} R_{C2}} + \frac{L_1}{R_{C1}} \right)} =$$

$$= \omega L \sqrt{\frac{1 + \omega^2 \tau_0^2}{(1 - \omega^2 \tau_1 \tau_2)^2 + \omega^2 (\tau_1 + \tau_0)^2}} e^{j \left(90^\circ + \arctg \omega \tau_0 - \arctg \frac{\omega (\tau_1 + \tau_0)}{1 - \omega^2 \tau_1 \tau_2} \right)}, \quad (9)$$

где $L = L_1$ – индуктивность дросселя; $\tau_1 = L_1/R_{C1}$, $\tau_2 = L_2/R_{C2}$,
 $\tau_0 = L_2 \left(\frac{1}{R_{C1}} + \frac{1}{R_{C2}} \right)$ – постоянные времени. Частотные характеристики сопротивления схемы замещения и измеренные имеют хорошее совпадение до 600 кГц (рис. 11, кривая 2).

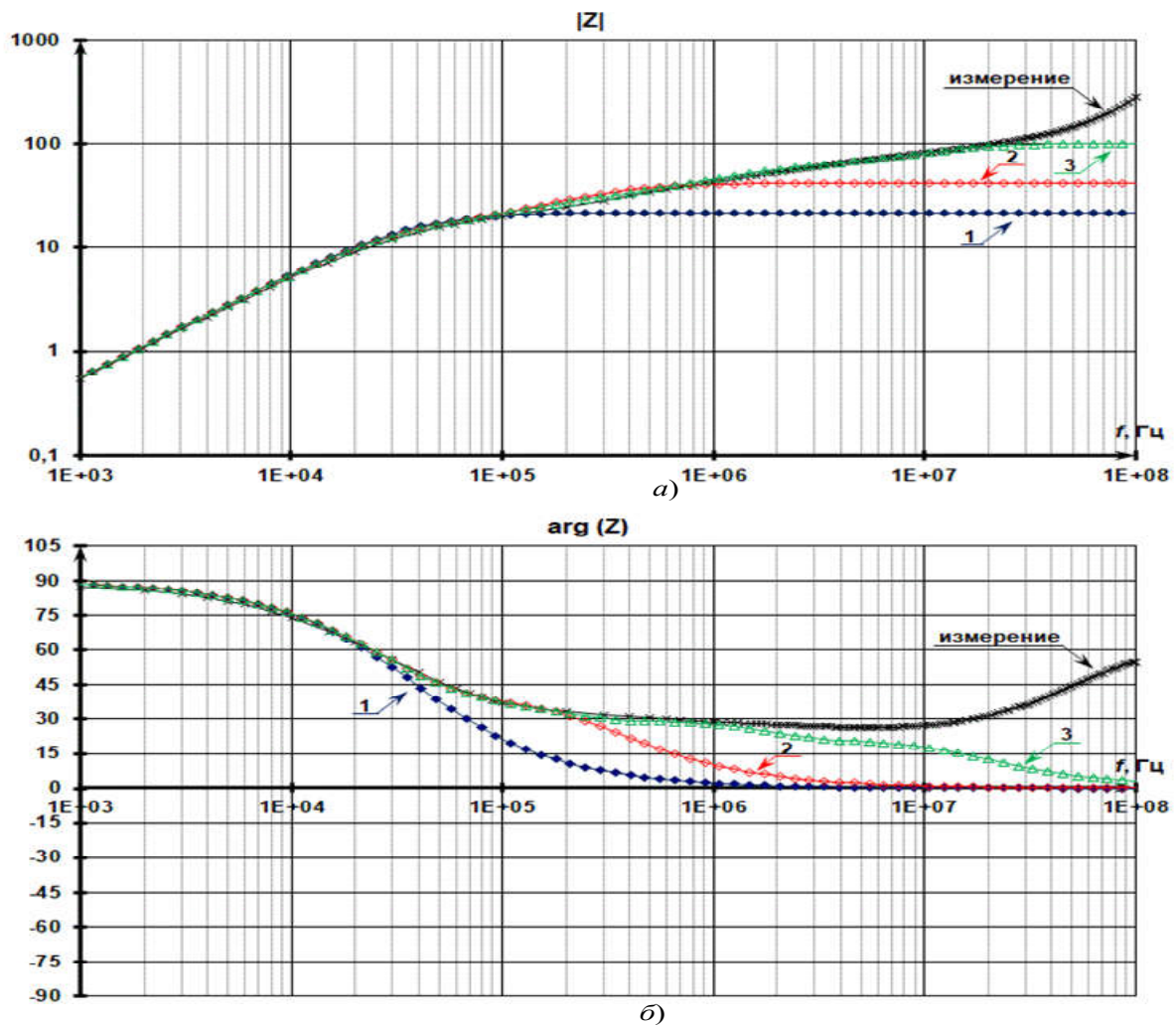


Рис. 11. Модуль (а) и фазы (б) комплексного сопротивления дросселя: измеренное значение в сравнении с различными схемами замещения: 1) рис. 8а, 2) рис. 8б, 3) рис. 8в

Параметры полученной модели (рис. 10б): $L_1 = 89,2$ мкГн, $L_2 = 14$ мкГн, $R_{C1} = 22$ Ом, $R_{C2} = 20$ Ом. Для дальнейшего совпадения частотных характеристик необходимо ещё несколько RL контуров (рис. 10в).

В этом случае получаем достаточно хорошее совпадение частотных характеристик (измеренных и схемы замещения) до 10 МГц. Выше 10 МГц начинается следующий участок (№4) комплексного сопротивления дросселя (рис. 4). Параметры полученной модели (рис. 10в): $L_1 = 89,2$ мкГн, $L_2 = 14$ мкГн, $L_3 = 4$ мкГн, $L_4 = 0,5$ мкГн, $R_{C1} = 22$ Ом, $R_{C2} = 20$ Ом, $R_{C3} = R_{C4} = 30$ Ом.

В [2, 3] такая зависимость модуля и фазы комплексного сопротивления дросселя объяснялась действием скин-эффекта. Однако скин-эффект – это явление при протекании тока в проводнике, а данная характеристика комплексного сопротивления определяется только комплексной магнитной проницаемостью сердечника. При скин-эффекте из-за переменного магнитного поля возникает переменное электрическое поле, выталкивающее электрические заряды из проводника, а на частотных характеристиках комплексного сопротивления дросселя в этой области частот (где фаза больше нуля) наблюдается превосходство действия магнитного поля над действием электрического поля.

Определим частоту f_c (рис. 4), начиная с которой необходимо учитывать влияние изменения магнитных свойств материала сердечника. Для этого воспользуемся фазой комплексного сопротивления дросселя, т.е. $\arg(Z(j\omega_c)) < 89^\circ$. Используя (8), получаем $\arctg \omega \tau > 1^\circ$ или

$$\omega_c L / R_c > 0,0175. \quad (10)$$

Частота, начиная с которой необходимо учитывать влияние изменения магнитных свойств материала сердечника, определяется как

$$f > f_c, \text{ где } f_c = \frac{R_c}{360 \cdot L}, \quad (11)$$

что аналогично формуле, полученной в [1] для ферритового сердечника. В нашем случае ($L = 89,2$ мкГн, $R_c = 22$ Ом) получаем $f_c = 623$ Гц. Т.к. частота f_c определялась из условия отличия фазы от 90° на 1° , то во многих практических применениях её можно увеличить в 2 раза, что и видно по рис. 4, 11. Таким образом, получаем $f_c = 1,2$ кГц.

Высокочастотная область (участки 4 и 5 на рис. 4). После 10 МГц происходит увеличение модуля и фазы комплексного сопротивления дросселя (рис. 4). Это равносильно тому, что в схеме замещения дросселя добавляется последовательно включенная индуктивность L_w (рис. 12).

Величина этой индуктивности равна индуктивности провода

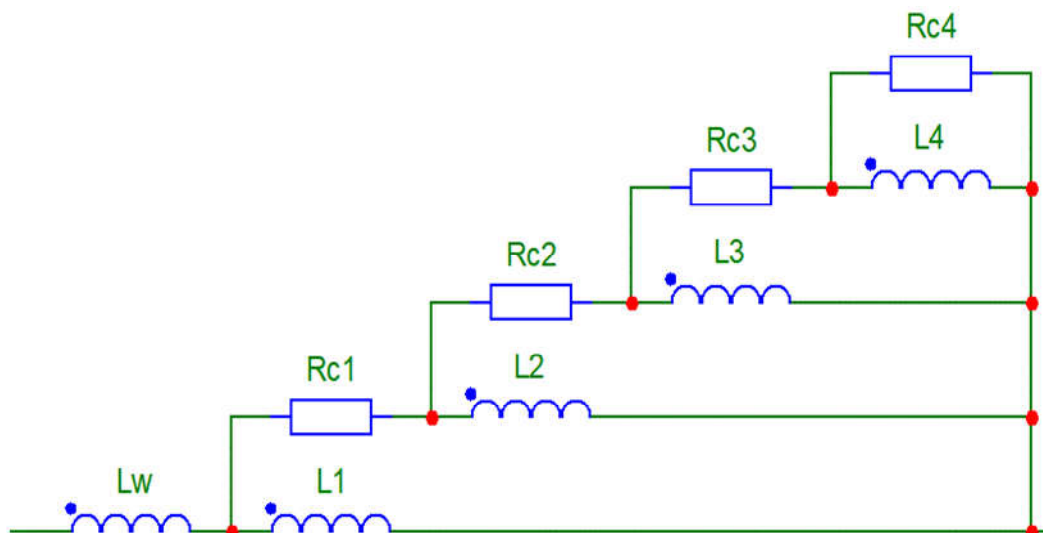


Рис. 12. Схема замещения дросселя с учетом индуктивности провода

$L_w = 0,27$ мкГн. Т.е. в этом диапазоне частот комплексное сопротивление, определяемое сердечником, уже будет соизмеримо с комплексным сопротивлением провода (влияние индуктивности провода). Чтобы суммарная индуктивность не изменилась, необходимо на эту величину уменьшить индуктивность L_1 (рис. 12). В этом случае имеем хорошее совпадение измеренных модуля и фазы комплексного сопротивления дросселя с частотными характеристиками схемы замещения дросселя до 80 – 90 МГц (рис. 13, кривая 1).

При дальнейшем увеличении частоты наблюдается ВЧ-резонанс комплексного сопротивления дросселя на частоте 180 МГц (рис. 4, 13). Данная частота близка частоте ВЧ-резонанса (198 МГц) комплексного сопротивления провода (рис. 8). Из этого следует, что на комплексное сопротивление дросселя на частотах от 10 МГц до 80 – 90 МГц (участок 4 на рис. 4) начинает оказывать влияние индуктивность провода, а на частотах выше 80 – 90 МГц (участок 5 на рис. 4) начинают оказывать влияния параметры схемы замещения провода: $C_R = 2,5$ пФ, $R_R = 10$ кОм. В этом случае схема замещения дросселя (рис. 14) дает частотные характеристики достаточно близкие измеренным частотным

характеристикам комплексного сопротивления дросселя до 400 – 500 МГц (рис. 13, кривая 2).

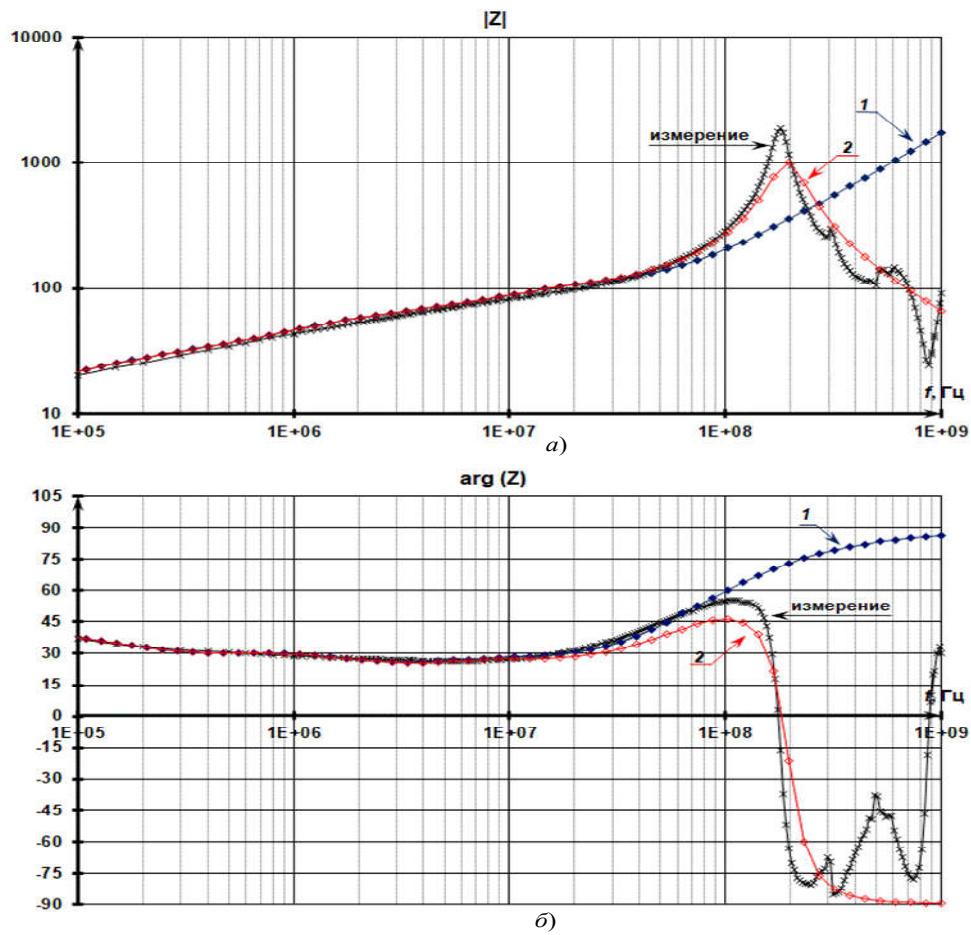


Рис. 13. Модуль (а) и фазы (б) комплексного сопротивления дросселя: измеренное значение в сравнении с различными схемами замещения провода: 1) с учетом только индуктивности провода, 2) с учетом всех параметров провода

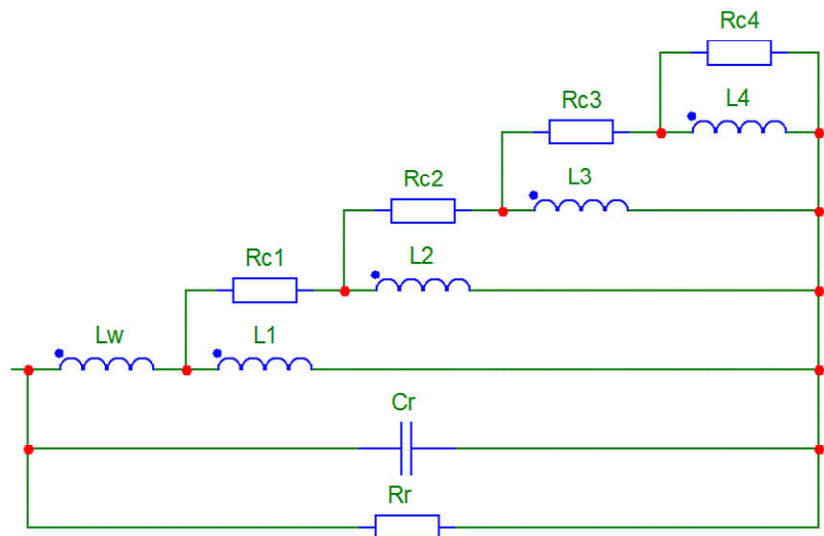


Рис. 14. Схема замещения дросселя с учетом параметров провода

Разделение влияния провода и сердечника в схеме замещения дросселя. Изменение количества витков дросселя с использованием сердечника из нанокристаллического сплава на основе железа приводит лишь к изменению модуля комплексного сопротивления дросселя (рис. 2). Для масштабирования схемы замещения одновиткового дросселя (рис. 14) на любое количество витков разнесем по отдельным схемам влияние сердечника и провода дросселя и свяжем их источником напряжения $E1$, управляемым напряжением сердечника, и источником тока $G1$, управляемым током, протекающим в проводе (рис. 15).

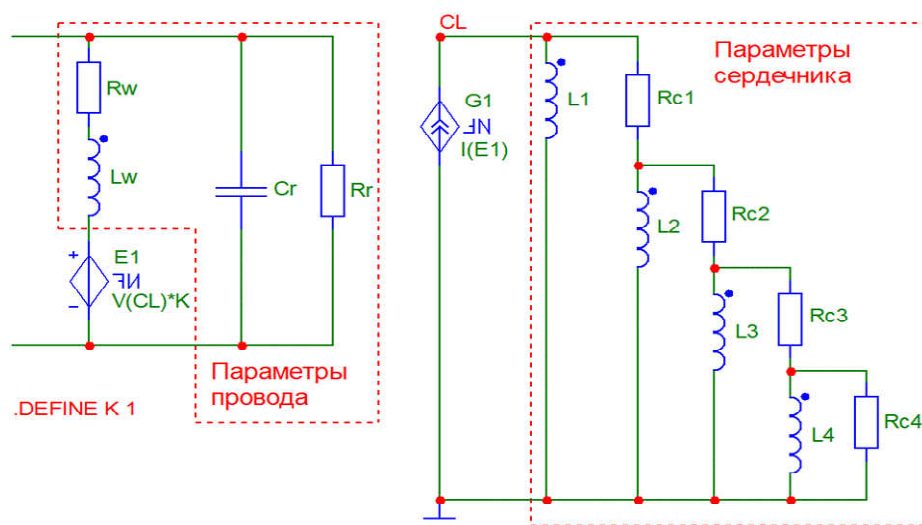


Рис. 15. Схема замещения дросселя с произвольным количеством витков

Уточнение схемы замещения дросселя. До этого момента рассматривалось комплексное сопротивление с разным количеством витков, но с одинаковой длиной провода. В реальности же меньшее количество витков имеет меньшую длину провода. Поэтому скорректируем схему замещения дросселя (рис. 15) для случая одного витка минимальной длины (6 см). На рис. 2, кривая 1 представлены измеренные модуль и фаза комплексного сопротивления этого дросселя.

Для этого случая была скорректирована схема замещения сердечника дросселя: добавлен RL-контур (рис. 16), и были получены частотные характеристики получившейся схемы замещения, которые достаточно близки измеренным модулю и фазе комплексного сопротивления дросселя (рис. 17). Параметры получившейся модели сердечника дросселя: $L_1 = 88,9$ мкГн, $L_2 = 14$ мкГн, $L_3 = 4$ мкГн, $L_4 = 0,5$ мкГн, $L_5 = 0,075$ мкГн, $R_{C1} = 22$ Ом, $R_{C2} = 20$ Ом, $R_{C3} = R_{C4} = 30$ Ом, $R_{C5} = 15$ Ом.

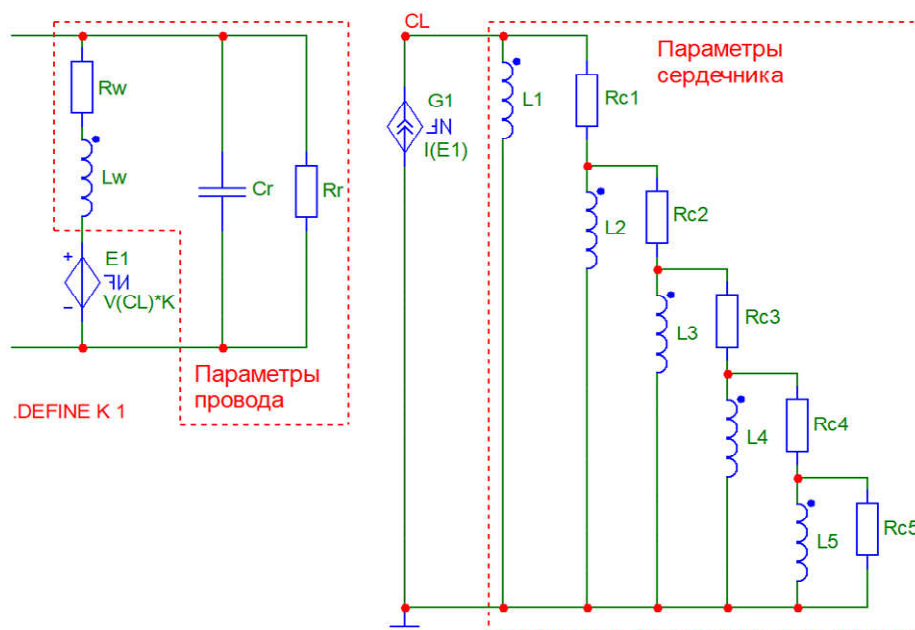


Рис. 16. Схема замещения дросселя

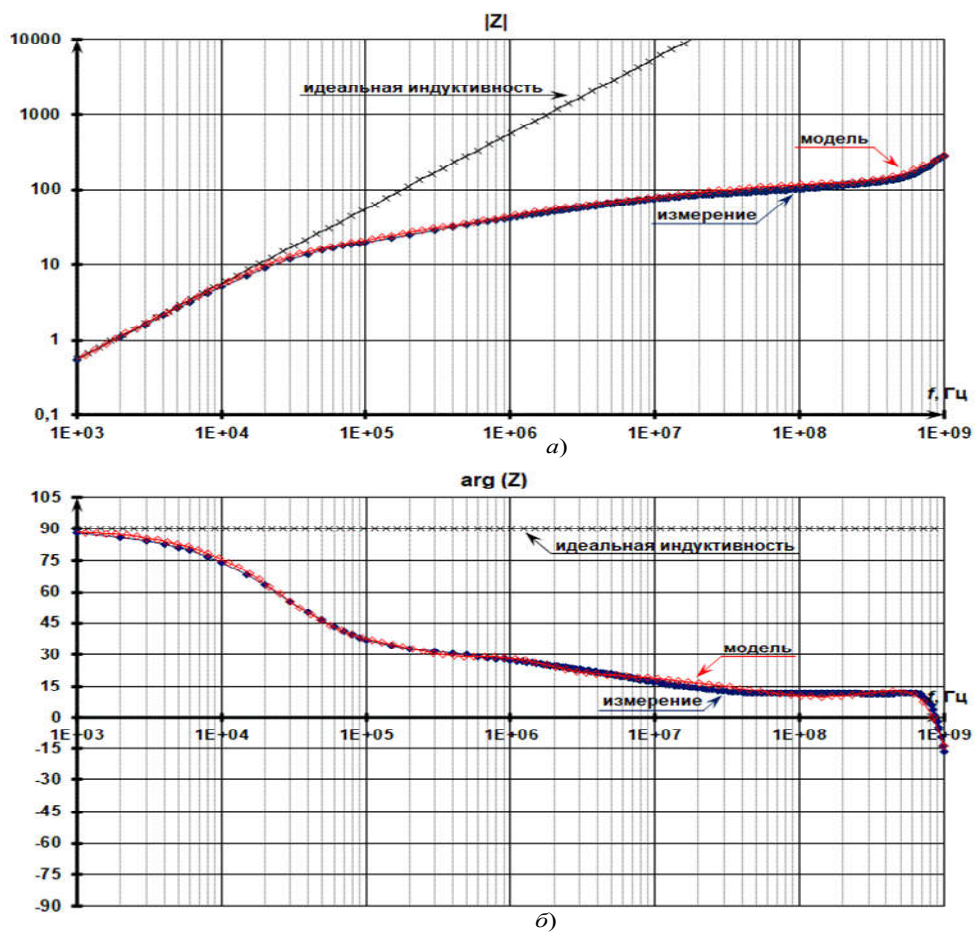


Рис. 17. Модуль (а) и фазы (б) комплексного сопротивления одновиткового дросселя (6 см): измеренное значение в сравнении со схемой замещения (рис. 14)

В этом случае (для одновиткового дросселя) получаем те же самые частотные характеристики комплексного сопротивления (рис. 18, кривые 1, 2).

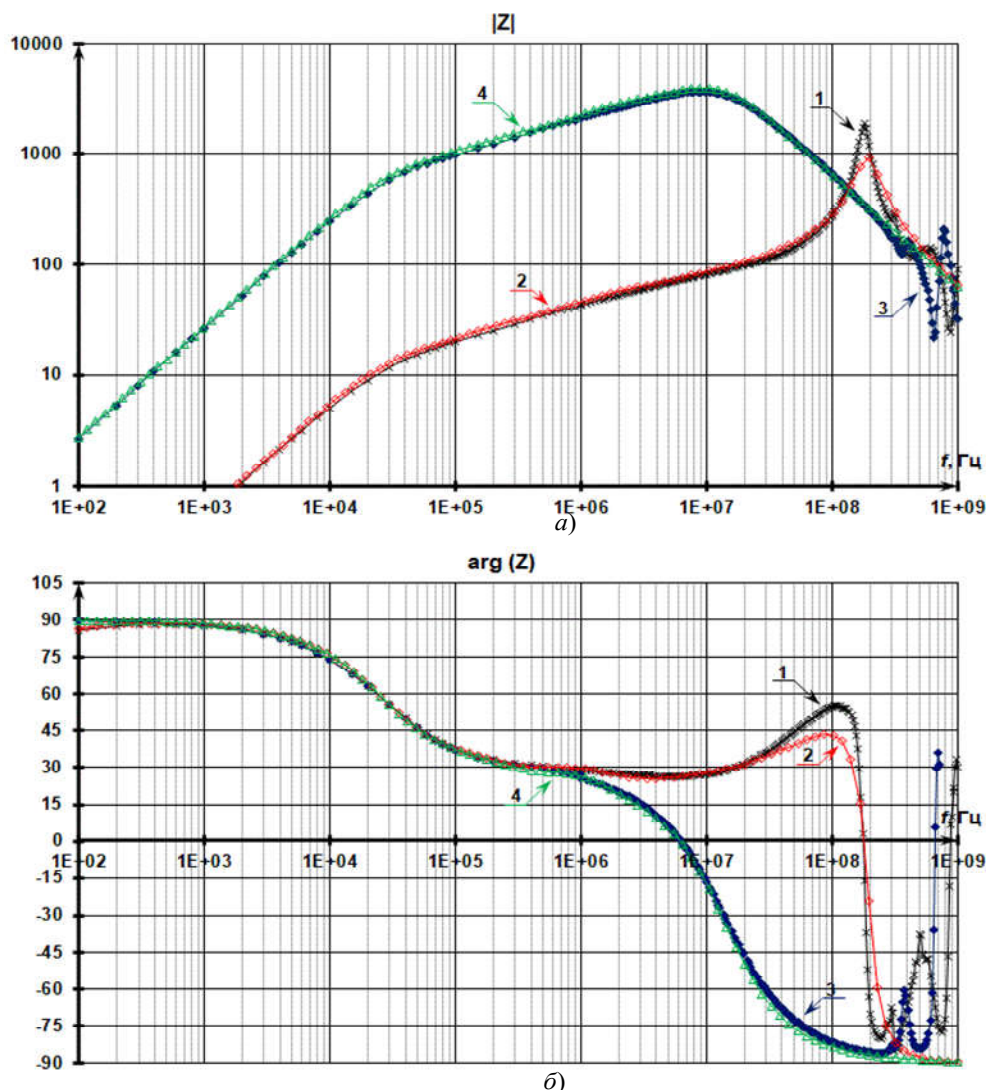


Рис. 18. Модуль (а) и фазы (б) комплексного сопротивления дросселя с разным количеством витков (1 и 7): измеренное значение в сравнении со схемой замещения (рис. 16)

Чтобы получить частотные характеристики для дросселя с 7 витками в схеме замещения на рис. 16, изменяются параметр K с 1 до 49 и значение сопротивления R_R с 10 кОм до 500 кОм. В этом случае частотные характеристики схемы замещения дросселя достаточно близки измеренным характеристикам комплексного сопротивления дросселя с 7-ю витками (рис. 18, кривые 3, 4). Как видно, схема замещения дросселя пересчитывается для любого количества витков (коэффициент K равен квадрату витков обмотки). При использовании сердечника с другими размерами необходимо в коэффициент K добавить множитель, равный

отношению нового коэффициента формы K_Φ к старому коэффициенту формы K_Φ . Для данного сердечника $25 \times 16 \times 10$ мм $K_\Phi = 0,71 \cdot 10^{-3}$.

Определение комплексной магнитной проницаемости материала сердечника. Схема замещения дросселя позволяет учитывать влияние провода и сердечника отдельно, вне зависимости от количества витков. Поэтому можно из схемы замещения рис. 16 определить комплексную проводимость сердечника, поделив напряжение на источнике тока $G1$ на ток через него: $Z_{G1}(j\omega) = \dot{U}_{G1}(j\omega) / \dot{I}_{G1}(j\omega)$. Зависимости $\mu'(j\omega)$ и $\mu''(j\omega)$ будут рассчитываться по (2) и (3), вместо Z_L берется Z_{G1} . Комплексная магнитная проницаемость материала, рассчитанная из схемы замещения и магнитная проницаемость, найденная по измеренному комплексному сопротивлению одновиткового дросселя, показаны на рис. 19.

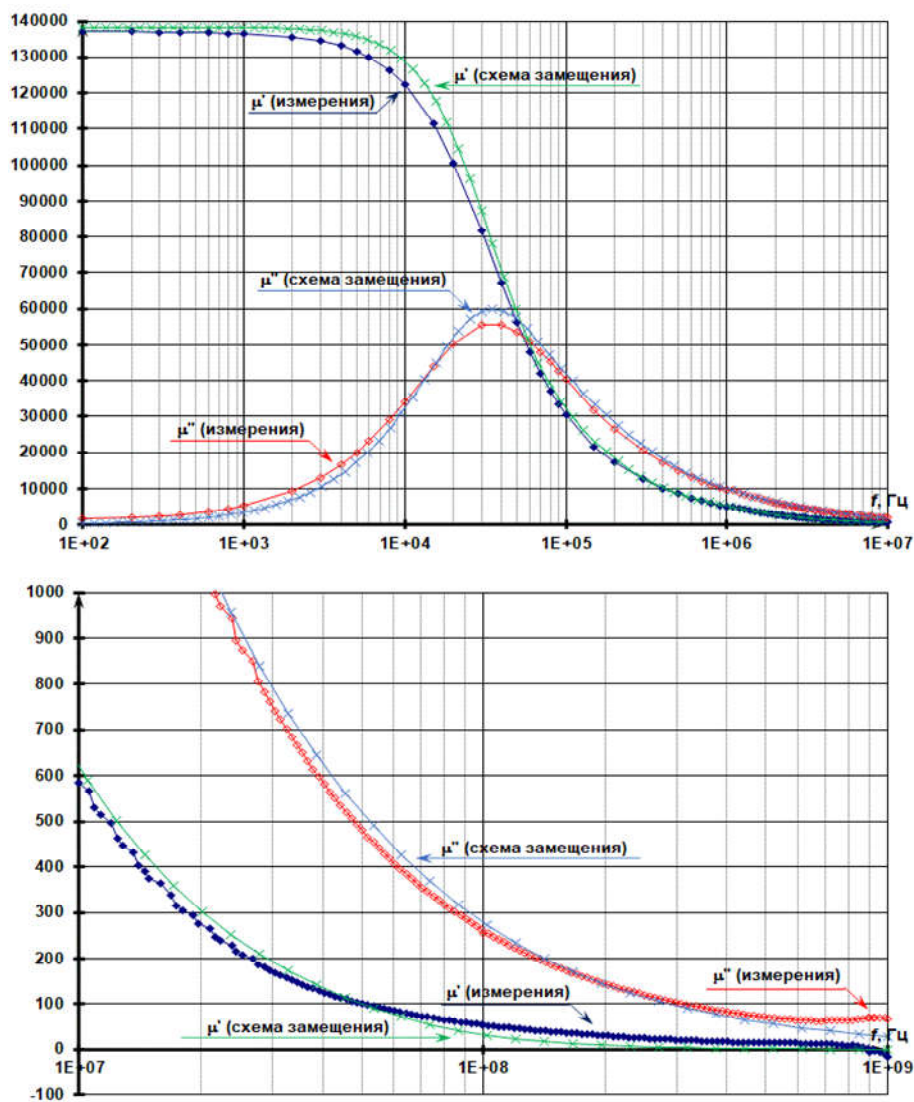


Рис. 19. $\mu'(j\omega)$ и $\mu''(j\omega)$ для сердечника MSFN-25S-TH, рассчитанные разным способом

Отсюда получаем скорректированное значение магнитной проницаемости сердечника $\mu = 1,383 \cdot 10^5$ (рис. 19), дающее расчетное значение индуктивности одновиткового дросселя $L = 88,9$ мкГн, которое на значение индуктивности провода ($L_w = 0,27$ мкГн) меньше полученной индуктивности ($L = 89,2$ мкГн) из измеренных частотных характеристик комплексного сопротивления дросселя. Таким образом, данная схема замещения дросселя (рис. 16) позволяет разделить влияние провода и сердечника. Для более точной модели дросселя необходимо непосредственно измерить комплексную магнитную проницаемость материала сердечника, и уже на основании этих частотных характеристик скорректировать параметры сердечника в модели дросселя (рис. 16).

Различие в определении комплексной магнитной проницаемости можно разделить на 3 участка: низкочастотная область (до единиц кГц) – при вычислении μ' и μ'' из измерения комплексного сопротивления дросселя оказывает влияние индуктивность и сопротивление провода (рис. 19); среднечастотная область (от единиц кГц до 500 МГц) – только погрешность схемы замещения сердечника (рис. 19); высокочастотная область (выше 500 МГц) – при вычислении μ' и μ'' на расчет из измерения комплексного сопротивления дросселя оказывают влияния индуктивность и емкость провода (рис. 19). Как видно из рис. 19, μ' материала сердечника стремится к единице (на частоте 1 ГГц), а μ'' материала сердечника порядка 30 (на частоте 1 ГГц). Поэтому сердечник на этой частоте теряет магнитные свойства и работает только на поглощение (нагрев), а дроссель становится резистором (если не учитывать свойства провода).

Итак, начиная с частот 500–600 МГц, комплексное сопротивление данного дросселя – это сумма комплексного сопротивления провода и небольшого активного сопротивления, характеризующего тепловые потери в сердечнике. Такое разделение в схеме замещения дросселя (рис. 16) позволяет вычислить μ' и μ'' материала сердечника без влияния параметров провода и количества витков. Преимущество предложенного разделения заключается в том, что на основе этой схемы замещения дросселя можно небольшими изменениями сделать схему замещения двух- или трехобмоточного дросселя, а также трансформатора. Для этого необходимо в схему замещения дросселя (рис. 16) добавить параметры

провода каждой новой обмотки, скорректировать коэффициенты в зависимых источниках и добавить влияние индуктивности рассеивания.

Определение ВЧ-емкости (участок 5 на рис. 4). Рассмотрим подробнее эффект ВЧ-емкости в дросселе с одним витком с разной длиной провода (6 и 38 см) и в дросселе с семью витками с длиной провода 38 см (рис. 17, 18). Считается, что в одновитковом дросселе причина возникновения ВЧ-емкости – это емкость в схеме замещения провода, моделирующая первый резонанс сопротивления провода из-за того, что провод на этих частотах (80 – 220 МГц) уже представляет собой длинную линию (рис. 20).

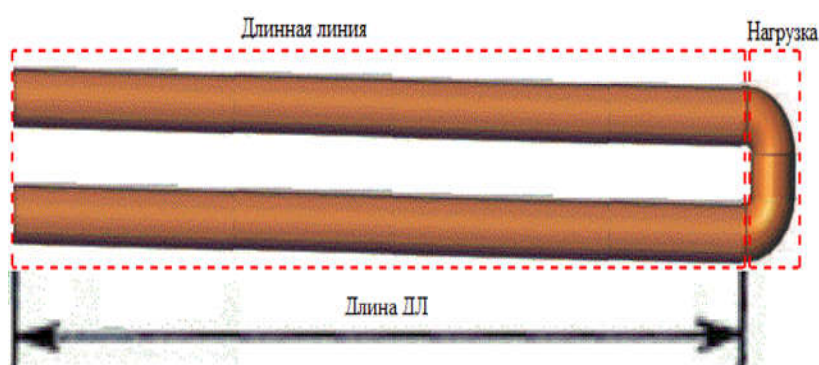


Рис. 20. Представление провода в виде длинной линии

Проверим, так ли это? В общем случае длина волны электромагнитного колебания λ равна

$$\lambda = \frac{C}{f} = \frac{C_0}{\sqrt{\epsilon\mu} \cdot f}, \quad (12)$$

где $C_0 = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0} \approx 3 \cdot 10^8$ м/с – скорость света в вакууме, ϵ и μ – диэлектрическая и магнитная проницаемости материала.

Для провода длиной 38 см наблюдается резонанс комплексного сопротивления на частоте порядка $1,98 \cdot 10^8$ Гц (рис. 8). Поскольку провод находится в воздухе ($\epsilon = \mu = 1$), получаем длину волны $\lambda = 3 \cdot 10^8 / 1,98 \cdot 10^8 = 1,5$ м, то есть на этой частоте в длину провода укладывается $1/4$ длины волны электромагнитного колебания. В то же время провод длиной 38 см можно представить длинной линией, меньшей 19 см, то есть – половиной длины провода (рис. 20). Это означает, что если представить провод длинной линией, то её длина будет составлять $0,13\lambda$, а то и меньше. ВЧ-резонанс сопротивления провода объясняется

эффектом длинной линии лишь с натяжкой. Это граница рассмотрения провода как цепи с сосредоточенными параметрами.

Для одновиткового дросселя с проводом длиной 38 см наблюдается ВЧ-резонанс комплексного сопротивления (рис. 13) на частоте $1,8 \cdot 10^8$ Гц, близкой к резонансной частоте комплексного сопротивления отдельного провода $1,98 \cdot 10^8$ Гц. Кроме того, значение емкости C_R в схеме замещения дросселя (рис. 16) совпадает со значением емкости C_R в схеме замещения провода (рис. 9). Это означает, что в формулу (12) надо вставлять не диэлектрическую и магнитную проницаемости материала сердечника, а ε и μ окружающей среды (воздуха). Получается, что сердечник не влияет на электромагнитное поле, создаваемое проводом, а оказывает влияние только на электромагнитное поле, создаваемое витками провода. Емкость C_R в схеме замещения дросселя – это емкость C_R в схеме замещения провода (2,5 пФ для 38 см и 0,8 пФ для 6 см). Таким образом, ВЧ-резонанс сопротивления дросселя можно объяснить эффектом длинной линии тоже лишь с большой натяжкой. В [1] данный ВЧ-резонанс объяснялся эффектом длинной линии, так как в выражение (12) подставляли ε и μ сердечника, что, как было показано выше, некорректно.

На рис. 21 представлены зависимости индуктивности провода L_w и емкости провода C_R , определенные из измеренных частотных характеристик комплексного сопротивления провода. Измерения проводились при различных длинах провода (6 см, 21 см, 38 см, 69 см) и соответствующим им количестве витков дросселя (1, 3, 7, 14). На рис. 21а: кривая 1 соответствует индуктивности провода, рассчитанной по формуле (7), кривая 2 – измеренной индуктивности провода, кривая 3 – расчетное значение индуктивности провода с учетом взаимной индуктивности разных кусков провода (провод представляет плоскую петлю – рис. 7). Согласно [10] два параллельных провода длиной l , расстояние между которыми h , при протекании через них тока образуют взаимную индуктивность, равную

$$M_w = 0,2 \cdot l \left(\ln \left(\frac{l + \sqrt{l^2 + h^2}}{h} \right) - \frac{\sqrt{l^2 + h^2}}{l} + \frac{h}{l} \right), \text{ мкГн.} \quad (13)$$

В качестве l была взята половина длины провода, а в качестве h было взято 1,3 см (чуть больше высоты контейнера – 12,5 мм). Учет взаимной

индуктивности двух кусков провода дает неплохое совпадение расчетного значения индуктивности провода и измеренного (рис. 21,а). Данные кривые приведены, чтобы показать необходимость более подробно исследовать индуктивность провода в дросселе.

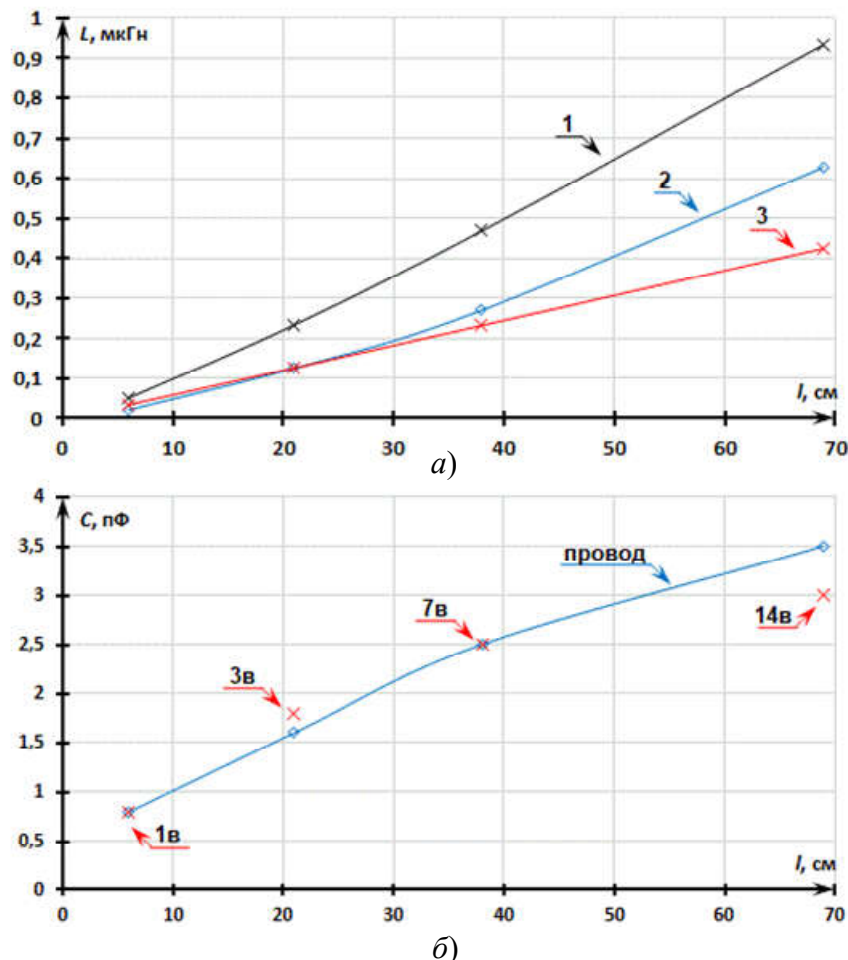


Рис. 21: а) значение L_W , рассчитанное по (7) – «1», полученное из измеренного комплексного сопротивления провода – «2» и рассчитанное используя (7) и (13) – «3»; б) значения C_R , полученные из измеренных комплексных сопротивлений провода различной длины (6 – 69 см) и дросселя с различным количеством витков (1, 3, 7, 14)

Из рис. 21,б видно, что увеличение длины провода приводит к увеличению емкости дросселя, и что емкость провода практически соответствует емкости дросселя. Получается, что межвитковая емкость здесь не причем – влияют только размеры намотки. Чем больше длина провода, тем больше его емкость, причем зависимость практически логарифмическая. Для более подробного определения зависимости этой емкости от длины провода, количества витков, способа намотки (однослойная, многослойная, секционная) требуются исследования.

Причина ВЧ-всплесков (участки 5, 6 на рис. 3). Попробуем понять причину возникновения этой емкости в схеме замещения дросселя. При протекании переменного тока в проводнике всегда образуются: тепло, переменное магнитное поле и переменное электрическое поле. В случае преобладания теплового действия тока имеем только резистор в качестве провода (низкие частоты, до 1 кГц – рис. 8), при преобладании магнитного поля – провод представляет из себя идеальную индуктивность (100 кГц – 100 МГц для провода длиной 38 см – рис. 8), после 180 МГц (для провода длиной 38 см – рис. 8) преобладает действие электрического поля.

Электрическое поле вокруг провода имеется всегда при протекании переменного электрического тока. Наличие его в проводе создает скин-эффект, выталкивающий заряды из проводника. Оценить это электрическое поле можно только на высоких частотах, когда энергия электрического поля будет соизмерима с энергией магнитного поля. Если есть энергия электрического поля, то возникает емкость в схеме замещения провода. Этот эффект возникновения емкости в схеме замещения провода дуален эффекту возникновению индуктивности в схеме замещения диэлектрика, описанному в [14]: электрическое поле заменяется на магнитное поле.

В [14] было объяснено, что дальнейшие ВЧ-резонансы в комплексном сопротивлении диэлектрика (рис. 22) не связаны с эффектом длинных линий (геометрические размеры диэлектрика были достаточно малы), а возникают из-за наличия двух магнитных потоков (собственный и отраженный), которые влияют друг на друга, как в случае с трансформатором. Происходят переотражения магнитных потоков диэлектрика, которые создают всплески комплексного сопротивления диэлектрика. Кроме того, при этих всплесках комплексного сопротивления диэлектрика фаза меняется не на 180° (значительно меньше) – не происходит смена действия магнитного и электрических полей. Это также может быть объяснением того, что здесь не эффект длинных линий, а влияние электрического поля, но с преобладанием магнитного поля.

По аналогии с последующими ВЧ-резонансами в комплексном сопротивлении диэлектрика (рис. 22), последующие ВЧ-резонансы в комплексном сопротивлении провода тоже не могут быть объяснены с помощью эффекта длинных линий, т.к. длина предложенной длинной линии (рис. 20) значительно меньше длины волны, и фаза комплексного сопротивления при этих резонансах не меняется на 180° (рис. 8).

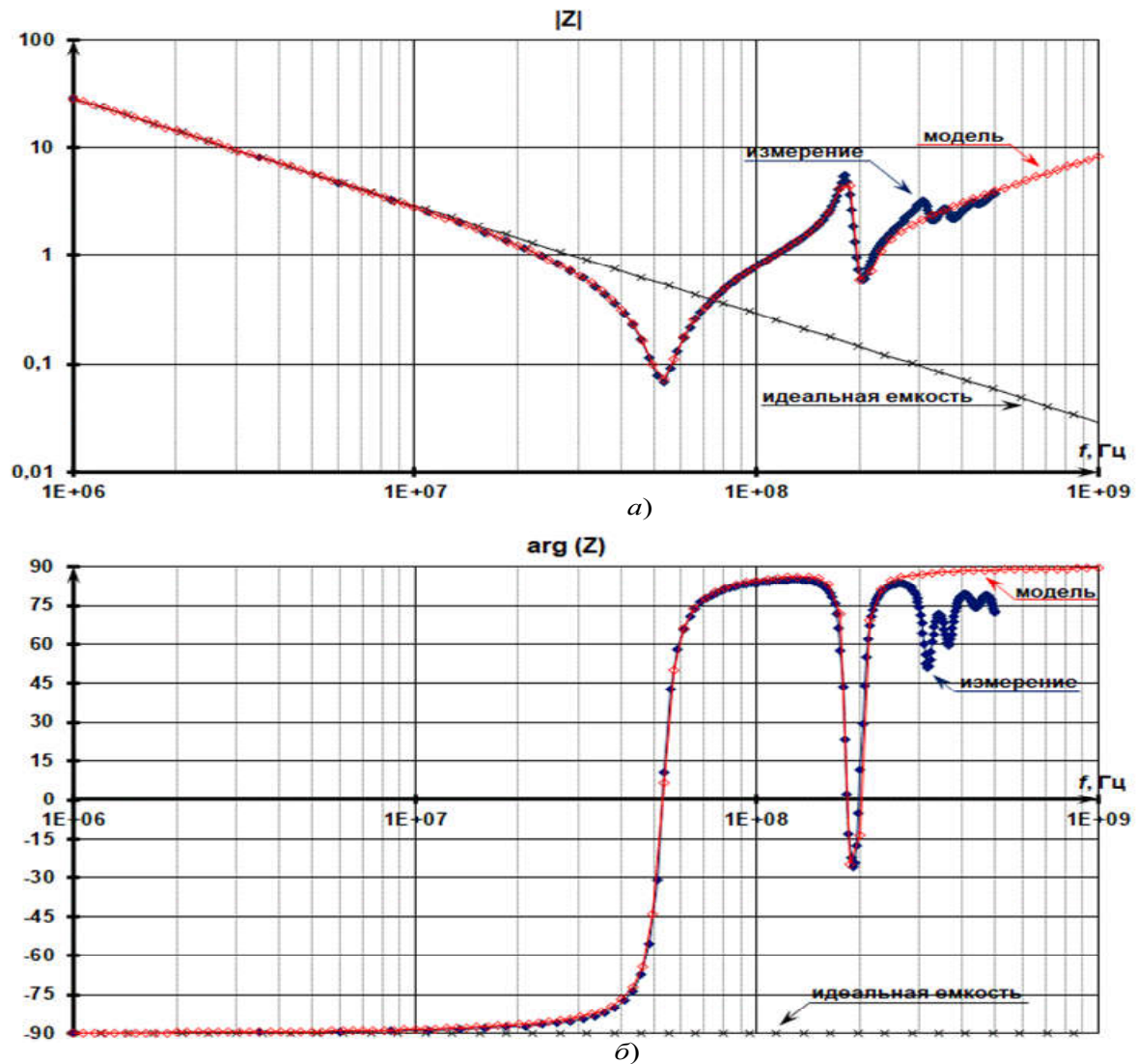


Рис. 22. Модуль (а) и фаза (б) комплексного сопротивления измеренного диэлектрика Н90 9250 и его схемы замещения (взято из [14])

Таким образом, также получаем случай дуальности комплексных сопротивлений провода и диэлектрика – происходят переотражения электрического поля на разных участках провода, что и создает всплески комплексного сопротивления провода. Лишь на частоте более 1 ГГц провод длиной 38 см можно, скорее всего, считать длинной линией (рис. 20), так как теперь в длину этой линии (15 – 19 см) должна укладываться половина длины волны колебания ($\lambda = 30$ см).

Выводы

1. Реализована электрическая структурно-параметрическая схема замещения дросселя (рис. 16) с нанокристаллическим кольцевым сердечником MSFN-25S-TH. Частотные характеристики схемы близки к измеренным частотным характеристикам сопротивления дросселя на частотах до 500 МГц. Это позволяет использовать схему замещения дросселя для проектирования высокочастотных фильтров радиопомех.

2. Предложено разделить учет влияния провода и сердечника на комплексное сопротивление дросселя в схеме замещения, что позволило использовать эту схему при любом числе витков обмотки и проводе обмотки, любой форме и типе сердечника, а также лучше понять протекающие процессы: найти комплексную магнитную проницаемость материала сердечника, отдельно рассмотреть влияние провода и сердечника на комплексное сопротивление дросселя. Разделение учета влияния провода и сердечника позволяет использовать предложенную схему замещения дросселя для различных сердечников, не обладающих собственной резонансной частотой (нанокристаллические и аморфные сплавы с различной проницаемостью, мо-пермаллой и другие магнитодиэлектрики). Синтезированную схему замещения дросселя учетом межвитковой связи, индуктивности рассеивания и т.д. можно модифицировать для двух-, трехобмоточного дросселя и трансформатора.

3. Установлено принципиальное отличие работы нанокристаллического сердечника от ферритового в ВЧ-фильтрах. Отсутствует характерный для ферритов резонанс на частотах 0,5–2 МГц, имеет место «поглощение ВЧ помехи» в отличие от характерного для ферритов отражения помехи, что связано со сменой индуктивного характера ферритового дросселя на емкостный, и может создавать проблемы в работе импульсного преобразователя напряжения.

4. Показано, что для построения схемы замещения (структуры и параметров) измерения только модуля сопротивления дросселя недостаточно, необходимо измерять также фазу его комплексного сопротивления.

5. Рассмотрена возможность определения индуктивности провода, используя (7) и (13). Аргументируется несостоятельность использования понятия межвитковой емкости для определения собственной емкости

дросселя. Замечено, что емкость провода практически соответствует емкости дросселя.

6. Аргументирована несостоятельность использования длинной линии в схеме замещения дросселя. Даны объяснения собственной емкости провода и дросселя, которая создает резонансы при экспериментальном измерении комплексных сопротивлений.

Список литературы

1. Дмитриков В.Ф., Шушпанов Д.В. Эквивалентная схема замещения дросселя, намотанного на феррите, в широком диапазоне частот (0 Гц – 500 МГц) // Физика волновых процессов и радиотехнические системы, 2021.– Т. 24, №4.– С. 25–45.

2. Cuellar C. HF Characterization and Modeling of Magnetic Materials for the Passive Components Used in EMI Filters / PhD Doctoral, Electrical Engineering, University of Lille 1, Lille – France, 2013. 2010 с. URL: <https://pepite-depot.univ-lille.fr/LIBRE/EDSPI/2013/50376-2013-Cuellar.pdf>

3. Cuellar C., Idir N., Benabou A. High Frequency Behavioral Ring Core Inductor Model // IEEE Transactions on Power Electronics.– 2016.– Vol. 31, Issue 5 (May).– С. 3763–3772.

4. Дмитриков В.Ф., Фрид Л.Е., Кушнерев Д.Н., Чмутин Д.С. Синтез эквивалентных частотных схем замещения дросселя // Практическая силовая электроника.– 2017.– №2.– Вып. 66.– С. 5–11.

5. Dmitrikov V.F., Frid L.E., Belyaev A.E., Petrochenko A.Y., Zaytseva Z.V. Synthesis of Equivalent Circuits for Chokes and Capacitors in a Wide Range of Frequencies Taking into Account Dynamic Processes in Dielectric and Magnetic Materials // 20th International Conference of Young Specialists on Micro/Nanotechnologies and Electron Devices (EDM-2019).– Novosibirsk State Technical University, IEEE Russia Siberia Section.– 2019.– С. 532–540.

6. Дмитриков В.Ф., Исаев В.М., Куневич А.В. Разработка поведенческих моделей конденсаторов и дросселей с учетом частотных свойств диэлектрической и магнитной проницаемости диэлектриков и магнетиков // Наноиндустрия.– 2020.– Т. 13.– № S4 (99).– С. 372–373.

7. Дмитриков В.Ф., Петроченко А.Ю., Фрид Л.Е., Беляев А.Е., Зайцева З.В. Разработка высокочастотных электрических схем замещения конденсаторов и дросселей с учетом частотных свойств диэлектрической и магнитной проницаемости диэлектриков и магнетиков // Физика

волновых процессов и радиотехнические системы.— 2020.— Т. 23.— №2.— С. 55–69.

8. Kotny J.-L., Margueron X., and Idir N. High-Frequency Model of the Coupled Inductors Used in EMI Filters // IEEE Transactions on Power Electronics.— 2012.— Vol. 27, no. 6 (June).— С. 2805–2812.

9. Немцов М.В., Шамаев Ю.М. Справочник по расчету параметров катушек индуктивности / М.: Энергоиздат, 1981.— 136 с.

10. Калантаров П.Л., Цейтлин Л.А. Расчет индуктивностей: Справочная книга / 3-е изд., перераб. и доп. Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1986.— 488 с.

11. Аркадьев В.К. Электромагнитные процессы в металлах.— М.—Л.: Главная редакция энергетической литературы, 1936.— 303 с.

12. Стародубцев Ю.Н., Белозеров В.Я. Магнитные свойства аморфных и нанокристаллических сплавов.— Екатеринбург: Изд-во Уральского ин-та, 2002.— 384 с.

13. Филиппов Б.Н., Жаков С.В. Теории динамических свойств ферромагнитных монокристалльных пластин, обладающих доменной структурой // Физика металлов и металловедение.— 1975.— Т. 39, №4.

14. Дмитриков В.Ф., Шушпанов Д.В. Эквивалентная схема замещения диэлектрика в широком диапазоне частот (0 Гц – 500 МГц) // В настоящем сборнике.

Дмитриков Владимир Федорович – Заслуженный деятель науки РФ, д.т.н., профессор кафедры теоретических основ телекоммуникаций Санкт-Петербургского государственного университета телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч-Бруевича. E-mail: Dmitrikov_VF@mail.ru.

Шушпанов Дмитрий Викторович – к.т.н., доцент кафедры теоретических основ телекоммуникаций Санкт-Петербургского государственного университета телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч-Бруевича. E-mail: dimasf@inbox.ru.

Фоченков Эдуард Анатольевич – начальник БМА ПАО «Мстатор» (г. Боровичи, Новгородская область). E-mail: abc2202@gmail.com.

МЕТОДИКА СИНТЕЗА КВАЗИЛЕСТНИЧНЫХ ФИЛЬТРОВ НА ОСНОВЕ РАСШИРЕННОГО КООРДИНАТНОГО БАЗИСА НАПРЯЖЕНИЙ

С. А. Курганов, В. В. Филаретов

Уменьшено число операций в матричном методе синтеза ARC-фильтров, основанном на моделировании лестничных пассивных LC-прототипов с использованием интеграторов на операционных усилителях (ОУ). Для этого применен расширенный токами катушек индуктивности узловый базис напряжений вместо однородного узлового базиса. Предложенная методика содержит меньше операций по сравнению с известной: не требуется введения дополнительных строк в матрицу узловых проводимостей и исключения из этой матрицы отрицательных степеней комплексных операторов. Методика использована при синтезе фильтров нижних частот 2, 3 и 6-го порядка. Функции передачи и чувствительности фильтров получены по программе символьного анализа электрических цепей CirSym.

The number of operations in the matrix method of synthesis of ARC filters based on modeling of ladder passive LC prototypes using integrators on operational amplifiers (op-amps) has been reduced. For this purpose, a nodal voltage basis extended by the currents of the inductors is applied instead of a homogeneous nodal basis. The proposed technique contains fewer operations compared to the known one: it does not require the introduction of additional rows into the matrix of nodal conductivities and the exclusion of negative degrees of complex operators from this matrix. The technique is used in the synthesis of low-pass filters of the 2nd, 3rd and 6th order. The transmission and sensitivity functions of the filters were obtained using the CirSym symbolic analysis program for electrical circuits.

Основным достоинством квазилестничных ARC-фильтров, полученных моделированием пассивных лестничных LC-фильтров, является низкая чувствительность, недостижимая другими методами [1]. Квазилестничные фильтры могут быть получены методами линейных преобразований, сигнального плавающего графа [1] и матричных

преобразований [2]. Все эти методы весьма трудоемки. Целью настоящей статьи является сокращение числа операций матричной методики синтеза квазилестничных фильтров.

Методика синтеза квазилестничных фильтров на основе однородного узлового базиса напряжений [2]. Методика состоит в построении и схемной реализации уравнений состояния (УС) пассивного LC -прототипа с двухсторонней нагрузкой путем их моделирования на интеграторах с операционными усилителями (ОУ). УС формируются в явном виде относительно производных переменных состояния с помощью линейных операций – умножения строк и столбцов на коэффициенты и добавления их к другим строкам и столбцам матрицы УС.

Порядок получения УС следующий: 1) построение матрицы узловых проводимостей схемы LC -прототипа при нумерации узлов нечетными числами $i=1, 3, \dots$; 2) добавление в матрицу дополнительных – четных ($i=2, 4, \dots$) строк и столбцов, содержащих ± 1 и комплексные сопротивления катушек индуктивности pL_i ; 3) исключение из матрицы слагаемых $1/pL_i$ путем деления четных строк на $\pm pL_i$ и добавление их к нечетным строкам; 4) исключение оператора p из недиагональных элементов нечетных строк i , содержащих проводимости pC_i , по формулам

$$Q_i = Q_i + k_i Q_{i+2}; V_i = V_i + k_i V_{i+2}, \quad (1)$$

где Q_i, V_i – строка и столбец с номером i ; $k_i = -a_{i,i+2}/a_{i+2,i+2}$, $i=1, 3, \dots$

5) реализация полученных УС на основе аналоговых интеграторов.

Предлагаемая методика синтеза на основе расширенного координатного базиса. Изложенную выше методику можно сделать более экономичной, если за основу для построения УС взять не однородный, а расширенный токами катушек индуктивности базис напряжений. При этом из методики на основе однородного базиса можно удалить п. 2, поскольку в расширенном базисе не нужно вводить в матрицу дополнительные четные строки и столбцы. Можно исключить и п. 3, так как в расширенном базисе напряжений отсутствуют слагаемые $1/pL_i$ с отрицательной степенью оператора p .

Модифицированная таким образом методика состоит в следующем. **А.** Построение матрицы на основе расширенного токами катушек индуктивности координатного базиса независимых напряжений на конденсаторах. **Б.** Исключение оператора p из недиагональных элементов, содержащих проводимости pC_i , с помощью формул (1). **В.** Реализация

полученных УС методом аналогового моделирования на основе интеграторов.

Для схемы пассивного LC -прототипа на рис. 1 матрица параметров A на основе расширенного базиса независимых напряжений имеет вид

$\underline{U}_1$	$\underline{I}_2$	$\underline{U}_3$	$\underline{I}_4$	$\underline{U}_5$	...	$\underline{U}_{n-2}$	$\underline{I}_{n-1}$	$\underline{U}_n$	$\underline{I}_{n+1}$	
$g_1+p(c_1+c_2)$	1	$-pc_2$								
-1	pL_2	1								
$-pc_2$	-1	$p(c_2+c_3)$								1
...										
0							-1	pL_n	1	0
							$-pc_{2n}$	-1	$p(c_n+c_{n-1})$	1
									-1	$pL_{n+1}+r_2$

(1)

В (1) независимыми напряжениями являются напряжения $\underline{U}_1, \underline{U}_3, \dots, \underline{U}_n$ конденсаторов $c_1, c_3, \dots, c_n$ (рис. 1). Базис напряжений расширяется токами катушек индуктивности $\underline{I}_2, \underline{I}_4, \dots, \underline{I}_{n+1}$. Столбцы матрицы A пронумерованы числами, равными индексам при символах напряжений и токов в (1). Нумерация строк выполнена сверху–вниз и имеет вид 1, 2, ..., $n, n+1$. Нечетные строки соответствуют узловым уравнениям, а нечетные строки – компонентным уравнениям катушек индуктивности.

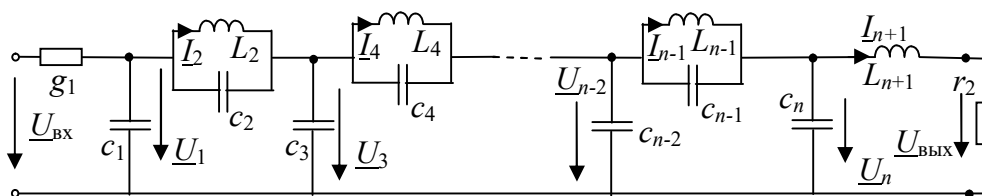


Рис.1. Пассивный LC -прототип ФНЧ $(n+1)$ -го порядка

Активный ФНЧ 2-го порядка. Двусторонне нагруженный пассивный ФНЧ 2-го порядка представлен на рис. 2, а. Матрица параметров по п. А методики в базисе напряжения $\underline{U}_1$ и тока $\underline{I}$ имеет вид

$\underline{U}_1$	$\underline{I}$
pc_1+g_1	1
-1	$pL+r_2$

(2)

В недиагональных элементах матрицы (2) нет оператора p , поэтому не требуется выполнение п. Б методики. В соответствии с п. В на основе матрицы (2) смоделирована схема на инвертирующих интеграторах и инверторах (рис. 2,б), где параметры g_1 и c_1 совпадают с одноименными параметрами на рис. 2,а. Численные значения остальных параметров находятся следующим образом: g_0 выбирается по нагрузочной способности ОУ; $g_3=1$ (нормированное значение); $g_2=1/r_2$; $c_2=L$.

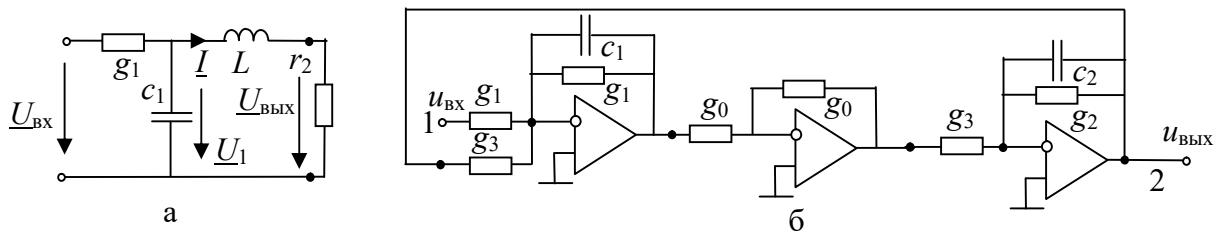


Рис. 2. Пассивный LC -прототип 2-го порядка (а) и его ARC -реализация (б)

Передаточная функция ARC -фильтра (рис. 2,а), полученная по программе символьного анализа CirSym [3], имеет вид

$$K(p)=N/D=-g_1/[p^2c_1c_2+p(c_1g_2+c_2g_1)+g_1g_2+1]. \quad (2)$$

При нормированных значениях параметров пассивного прототипа С02об-10: $c_1 = 0,448339$; $L = 0,448339$; $g_1 = 1$; $r_2 = 1$ [4] кривая затухания $\alpha(\omega)$ представлена на рис. 3,а. Функции чувствительности – относительной в полосе пропускания (рис. 3,б) и полуотносительной в полосе задерживания (рис. 3,в) – при варьировании, например, емкости c_2 (рис. 2) определяются по формулам соответственно

$$S_{\Pi} = \frac{dK}{dc_2} \cdot \frac{c_2}{K} = - \frac{(0.448339p^2+p)c_2}{0.448339p^2c_2+p(c_2+0.448339)+2.0};$$

$$S_3 = \frac{dK}{dc_2} \cdot \frac{c_2}{K_0} = - \frac{2.0(0.448339p^2+p)c_2}{(0.448339p^2c_2+p(c_2+0.448339)+2.0)^2}, \quad (3)$$

где K , K_0 – амплитудно-частотная функция (АЧХ) фильтра и ее номинальное значение при нулевой частоте. Формулы чувствительностей (3) получены схемно-алгебраическим методом, который не требует формирования производных функций [5].

Характеристики полученного активного ФНЧ (рис. 2,б), рассчитанные по графикам на рис. 3,а-в, имеют вид: неравномерность АЧХ в полосе пропускания $\alpha_D=0,0436$ дБ; максимальная чувствительность в полосе пропускания $S_{\Pi}= 0,245$ и задерживания $S_3= 0,650$. Эти значения совпадают с характеристиками пассивного фильтра-прототипа (рис. 3,а).

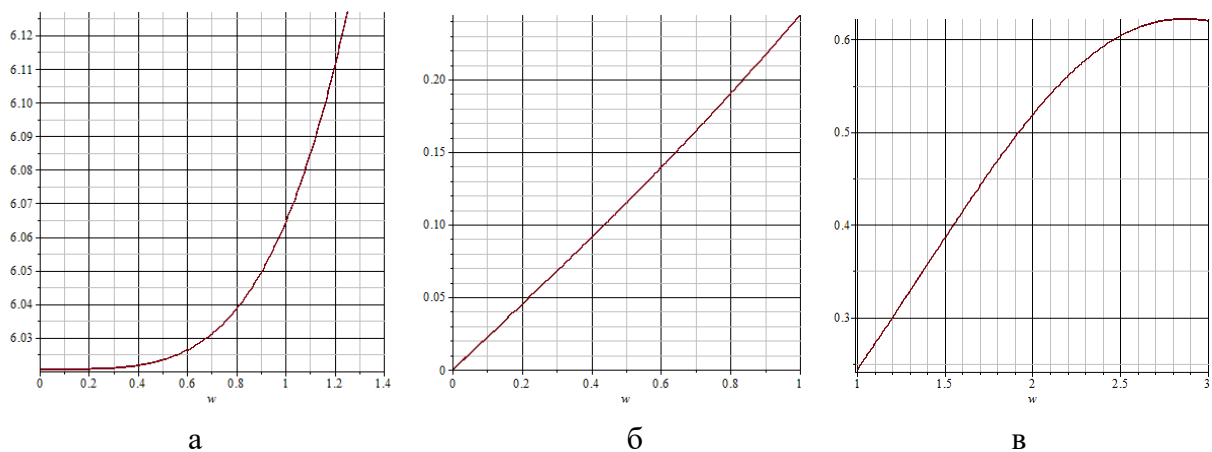


Рис. 3. Характеристики активного ФНЧ 2-го порядка на основе прототипа C02об-10: функция затухания (а); чувствительность в полосе пропускания (б) и задерживания (в)

Активный ФНЧ 3-го порядка. Исходная матрица параметров на основе расширенного базиса напряжений для пассивной LC-схемы 3-го порядка (рис. 4,а) в соответствии с (1) и п. А методики имеет вид

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \underline{U}_1 & \underline{I}_2 & \underline{U}_3 & \underline{I}_4 \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline g_1+p(c_1+c_2) & 1 & -pc_2 & 0 \\ \hline -1 & pL_2 & 1 & 0 \\ \hline -pc_2 & -1 & p(c_2+c_3) & 1 \\ \hline 0 & 0 & -1 & r_2 \\ \hline \end{array} \end{array} . \quad (4)$$

Для исключения по п. Б оператора p из недиагонального элемента a_{13} умножим в (4) строку 3 на коэффициент $k=-a_{13}/a_{33}=c_2/(c_2+c_3)$ и прибавим ее к строке 1, а для исключения p из a_{31} повторим те же операции с одноименными столбцами. В результате получается матрица параметров с оператором p только на диагональных элементах

$$A_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \underline{U}_1 & \underline{I}_2 & \underline{U}_3 & \underline{I}_4 \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline g_1+p[c_1-c_2^2/(c_2+c_3)] & 1-c_2/(c_2+c_3) & 0 & 1+c_2/(c_2+c_3) \\ \hline -1+c_2/(c_2+c_3) & pL_2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & p(c_2+c_3) & 1 \\ \hline -c_2/(c_2+c_3) & 0 & -1 & r_2 \\ \hline \end{array} \end{array} . \quad (5)$$

Следует отметить, что вместо матрицы 4-го порядка (4) нельзя использовать матрицу 3-го порядка, полученную после замены сопротивления r_2 проводимостью $g_2=1/r_2$. Матрица 3-го порядка после

исключения оператора p из недиагональных элементов инвариантна исходной матрице относительно определителя схемы – знаменателя передаточной функции, но неинвариантна по отношению к числителю этой функции. Числитель передаточной функции схемы (рис. 4,а) имеет второй порядок, а при использовании матрицы 3-го порядка после исключения оператора p из недиагональных элементов числитель имеет первый порядок.

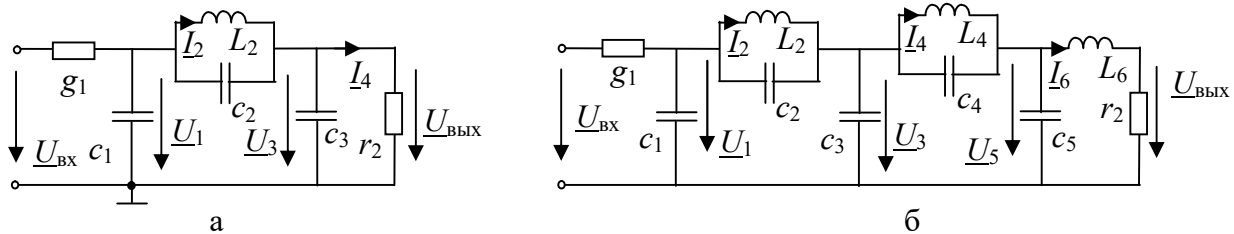


Рис. 4. Пассивные LC -прототипы ФНЧ 3-го (а) и 6-го (б) порядка

ARC -реализация ФНЧ 3-го порядка на основе матрицы (5) с использованием инвертирующих интеграторов и инверторов напряжения на операционных усилителях (ОУ) представлена на рис. 5. Параметры элементов на схеме (рис. 5) имеют вид: $g_{12}=g_{21}=c_3/(c_2+c_3)$; $g_1=g_2=g_{23}=g_{32}=g_{34}=g_{43}=g=1$; $g_{14}=g_{41}=c_2/(c_2+c_3)$; $c_{11}=c_1+c_2c_3/(c_2+c_3)$; $c_{22}=L_2$; $c_{33}=c_2+c_3$.

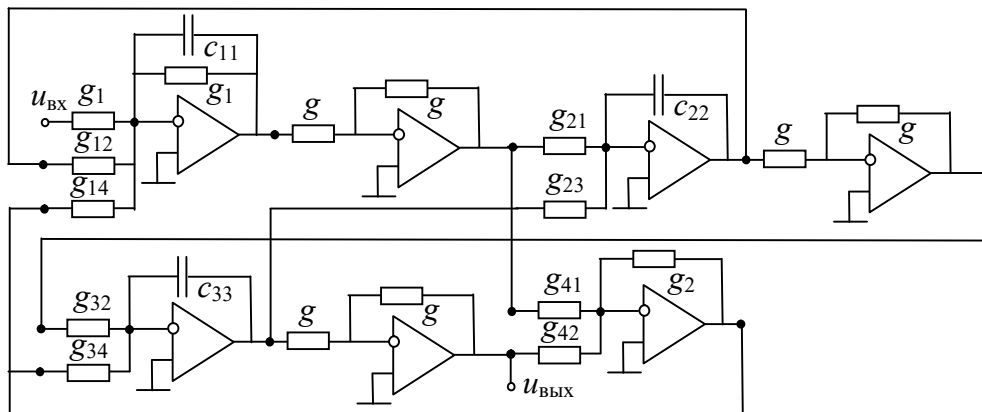


Рис. 5. Активный ФНЧ 3-го порядка на основе LC -прототипа на рис. 4,а

При численных значениях: $c_1 = 1.707485$; $c_2 = 0.804700$; $c_3 = 1.707485$; $L_2 = 0.601849$; $g_1 = 1$; $g_2 = 1$, соответствующих LC -прототипу С0350-50 [4], активный ФНЧ (рис. 5) имеет частотную функцию затухания, представленную на рис. 6,а. На рис. 6,б и 6,в представлены графики чувствительностей в полосе пропускания и задерживания при варьировании емкости c_{33} (рис. 5).

Характеристики активного фильтра, рассчитанные по функции затухания (рис. 6,а) – полоса пропускания $\Delta\omega=1$; неравномерность в полосе пропускания $\alpha_D=1,25$ дБ; переходная полоса частот 0.305; минимальное затухание в полосе задерживания $\alpha_s=21,0$ дБ – с точностью 3-х знаков соответствуют исходному *LC*-прототипу.

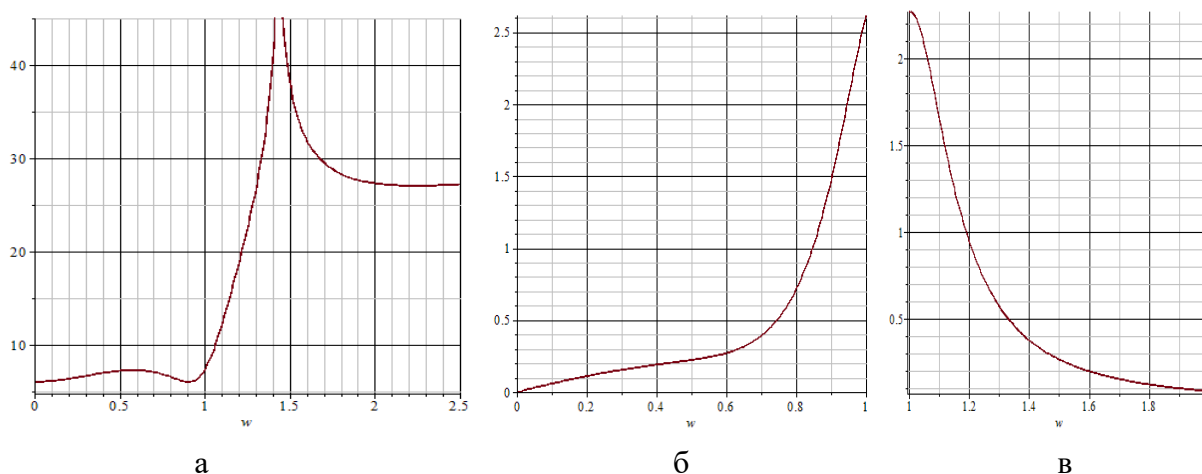


Рис. 6. Характеристики активного ФНЧ 3-го порядка на прототипе С0350-50: затухание (а); чувствительность в полосе пропускания (б) и задерживания (в)

Исследование показало, что максимальная чувствительность фильтра в полосе пропускания и задерживания не превышает 2,6 и 2,3. Соответствующие чувствительности для *LC*-прототипа составляют 1,9 и 2,4. Таким образом, чувствительность активного фильтра в полосе пропускания увеличивается по сравнению с прототипом на треть.

Синтез активного ФНЧ 6-го порядка. Схема *LC*-прототипа представлена на рис. 4,б. Полученная по предложенной методике схема активного ФНЧ 6-го порядка содержит 12 ОУ (рис. 7). Для нормированных параметров пассивного прототипа с0610с-50: $g_1=1$; $r_2=1$; $c_1=0,676732$; $c_2=0,257196$; $c_3=1,2179023$; $c_4=0,477610$; $c_5=1,165090$; $L_2=1,154259$; $L_4=1,067938$; $L_6 = 0,898647$ [4] параметры элементов активной схемы следующие: $g_{12}=0.8628262653$; $g_{14}=0.09729089095$; $g_{16}=0.03988284374$; $c_{11}=0.8986474641$; $g_{21}=0.8628262653$; $g_{23}=1$; $c_{22}=1.154259$; $g_{32}=1$; $g_{34}=0.7092530590$; $g_{36}=0.2907469410$; $c_{33} = 1.874965354$; $g_{41}=0.09729089095$; $g_{43}=0.7092530590$; $g_{45}=1$; $c_{44}=1.067938$; $g_{54}=g_{56}=1$; $c_{55}=1.642700$; $g_{61}=0.03988284374$; $g_{63}=0.2907469410$; $g_{65}=1$; $c_{66}=0.898647$; $g_1=g_2=1$. Проводимость g_0 определяется, как в схемах 2 и 3 порядка, нагрузочной способностью ОУ.

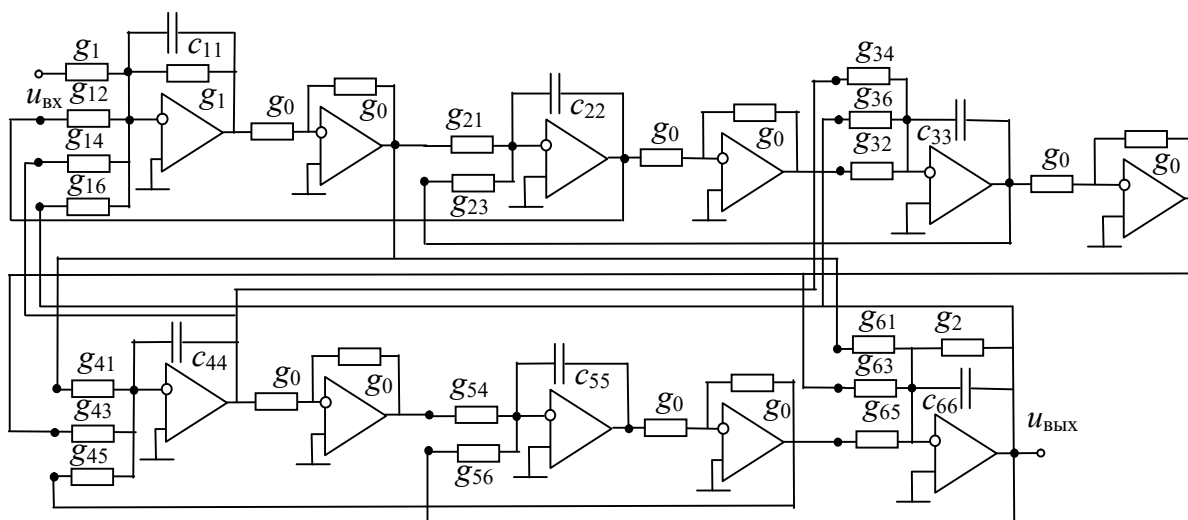


Рис. 7. Активный ФНЧ 6-го порядка на основе LC -прототипа на рис. 4,б

Частотная функция затухания $\alpha(\omega)$, функции чувствительности в полосе пропускания $S_{\text{пп}}$ и полосе задерживания $S_{\text{пз}}$ при варьировании емкости c_{33} (рис. 7) представлены на рис. 8,а, 8,б и 8,с.

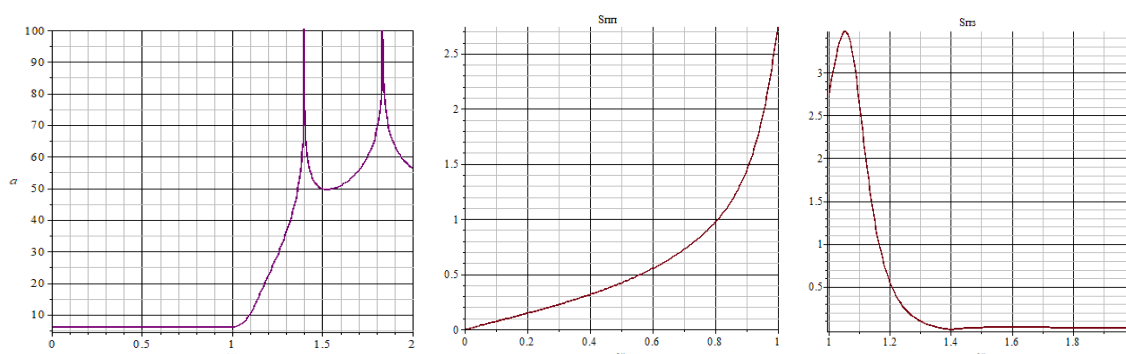


Рис. 8. Характеристики активного ФНЧ 6-го порядка на прототипе С0610с-50: затухание (а); чувствительность в полосе пропускания (б) и задерживания (в)

Основные характеристики полученного активного ФНЧ имеют вид: неравномерность затухания в полосе пропускания $\alpha_D = 0.0436$ дБ; номинальное затухание в полосе задерживания $\alpha_s = 43,6$ дБ; минимальная частота номинального затухания в полосе задерживания $\Omega_s = 1,36$. Данные численные значения совпадают с соответствующими характеристиками LC -прототипа. Максимальная чувствительность в полосе пропускания и задерживания 2,55 и 3,46, у LC -фильтра 1,9 и 2,2 соответственно. Как видно, чувствительность активного ФНЧ в полосе пропускания и задерживания заметно выше, чем у LC -фильтра.

Выводы. 1. Предложена методика синтеза квазилестничных *ARC*-цепей, использующая расширенный (вместо однородного) координатный базис для формирования уравнений состояния *LC*-прототипа и позволяющая тем самым сократить число операций при реализации фильтра. 2. С помощью предложенной методики реализованы активные ФНЧ 2, 3 и 6-го порядка. Показано, что функции затухания реализованных фильтров повторяют функции *LC*-прототипов. В то же время чувствительности у активных фильтров 3 и 6-го порядка на 30–50 процентов больше, чем у соответствующих прототипов.

Список литературы

1. Капустян В.И. Активные *RC*-фильтры высокого порядка. – М.: Радио и связь, 1985. – 248 с.
2. Христич В.В. Синтез квазилестничных фильтров методом матричных преобразований // Радиотехника. 1994.– № 12. С. 23-25.
3. Филаретов В. В. Программа символьного анализа CIRSVM: история создания, структура и функции // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. научн. труд. – Ульяновск: УлГТУ, 2012.– Вып. 10.– С.158–171.
4. Зааль Р. Справочник по расчету фильтров: Пер. с нем.– М.: Радио и связь, 1983. – 752 с.
5. Курганов С.А., Недорезов М.В., Филаретов В.В. Исключение избыточных слагаемых и множителей в разностных выражениях чувствительности для линейных электрических цепей // Электричество.– 2020.– №2. – С. 42–47.

Курганов Сергей Александрович – д.т.н, профессор кафедры «Электроснабжение» Ульяновского государственного технического университета. 432027, Ульяновск, ул. Северный Венец, 32. Тел. 8-8422-77-81-05. E-mail: sak@ulstu.ru.

Филаретов Владимир Валентинович – доктор технических наук, ответственный редактор международного научного сборника «Синтез, анализ и диагностика электронных цепей» Ульяновского государственного технического университета. E-mail: vvfil@mail.ru

ГЕНЕРАЦИЯ СТРУКТУР ЭЛЕКТРОННЫХ СХЕМ ПО ЗАДАННОЙ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ

К. С. Горшков, В. В. Филаретов

Предлагается усечение избыточной схемы не учетом численных значений параметров, а путем перебора сочетаний с заданным числом элементов и последующей проверки совпадения степеней полиномов числителя и знаменателя аппроксимирующим полиномам. Избыточная пассивная подсхема с обобщенными RLC-ветвями строится на внешних узлах выбранной активной подсхемы, что уменьшает сложность комбинаторной задачи, но обеспечивает исчерпание вариантов схемных реализаций. Рассмотрен пример генерации всех работоспособных схем, включая оригинальные, по заданным полиномам схемной функции.

It is proposed to truncate the redundant scheme not by taking into account the numerical values of the parameters, but by iterating through combinations with a given number of elements and then checking the coincidence of the degrees of the numerator and denominator polynomials to the approximating polynomials. A redundant passive subcircuit with generalized RLC branches is built on the external nodes of the selected active subcircuit, which reduces the complexity of the combinatorial problem, but ensures the exhaustion of options for circuit implementations. An example of generating all workable circuits, including the original ones, by given polynomials of the circuit function is considered.

О методике структурного синтеза на основе поэлементного наращивания. Структурный синтез электронных цепей до сих пор остается наименее методически обеспеченным разделом теории электрических цепей и плохо поддается автоматизации [1]. Причиной является не только неоднозначность решения этой задачи, но и порождение преимущественно изоморфных вариантов схем, которые не представляют интереса, но чрезвычайно усложняют выбор оптимальной структуры.

Одним из сравнительно недавних решений в этой области является использование метода схемных определителей (МСО), лишенного

избыточности при образовании слагаемых числителя и знаменателя символьной схемной функции [2]. Это преимущество по сравнению с традиционными методами символьно-топологического анализа делает МСО предпочтительным при выборе метода структурного синтеза [3].

Однако прямой переход при анализе от схемы к схемной функции в случае синтеза также порождает изоморфные варианты схем. Не может утешать то, что изоморфных схем значительно меньше, чем в случае использования матричных или графовых промежуточных моделей. Кроме того, прямому методу синтеза присущи сложности, обусловленные комбинаторной задачей на структуре. Например, при последовательном наращивании схемы по одному элементу до сложности, превышающей несколько узлов, невозможно исчерпать число возможных вариантов решения или хотя бы дать ему оценку.

Новые элементы добавляются в схему «всеми возможными способами» в отношении места подключения. Проверка целесообразности того или иного подключения элемента может осуществляться с учетом схемотехнического опыта. Однако при катастрофическом увеличении числа «всех возможных подключений» уповать на эффективную программу символьно-полиномиального анализа, используемую при проверке подключения на наличие требуемых степеней полинома, бессмысленно.

Общая методика структурного синтеза предусматривает поэлементное наращивание начальных схем до получения схемы удовлетворяющей полиному знаменателя. В знаменателе схемной функции такой схемы должны отсутствовать коэффициенты, которых нет в реализуемой аппроксимации. Процедура наращивания элементов применяется только для получения схемы знаменателя. Переход к схеме числителя осуществляется подключением к схеме знаменателя нуратора и нуллатора всеми возможными способами, что многократно сложнее, чем добавлять двухполюсные элементы.

Восстановление схемы числителя и реализуемой схемы по схеме знаменателя схемной функции, по сути, эвристический процесс, при его осуществлении полным перебором подключений приходится затрачивать значительное время также на выбраковку схем, которые не соответствуют полиному числителя. Однако искомыми являются не схемы знаменателя и числителя, а схема, подключение к которой источника сигнала и

приемника отклика, приводит к требуемым схемам числителя и знаменателя.

В качестве улучшения методики можно начать синтез с полинома числителя. От схемы числителя просто перейти к схеме знаменателя, удалив ветвь нуллатора и заменив норатор идеальным проводником, и, главное, получить реализуемую схему, заменив норатор источником сигнала, а нуллатор – приемником отклика (нагрузкой).

Выделение подсхем при структурном синтезе. Учет в методике структурного синтеза схемотехнического опыта нескольких поколений проектировщиков радиоэлектронной аппаратуры позволяет снизить объем перебора вариантов подключения элементов. Распространенной задачей, для решения которой применяется методика структурного синтеза на основе МСО, это реализация полиномиальной схемной функции (ПСФ) схемой на операционных усилителях.

Методика, подлежащая совершенствованию в данной статье, при добавлении элементов не учитывает их включение в том или другой двухполюсник в типовых структурах использования ОУ с инвертирующим или дифференциальным входом, показанных на рис. 1,а и 1,б.



Рис. 1

Как видно, на этих рисунках двухполюсники 1 и 2 соединяются параллельно и определяют частотные свойства схем. Чтобы упростить получение полиномов двухполюсников, желательно иметь двухполюсники примерно одинаковой сложности. Представление пассивных элементов в виде пары двухполюсников в каскаде на ОУ обычно всегда возможно. В худшем случае один из двухполюсников содержит всего один элемент, как в случае высокочастотного фильтра (ВЧ-фильтра) [1, 2], схема замещения которого показана на рис. 2,а. На рис. 2, б пассивные элементы этой схемы подразделяются по принадлежности к одному из двух двухполюсников 1 или 2.

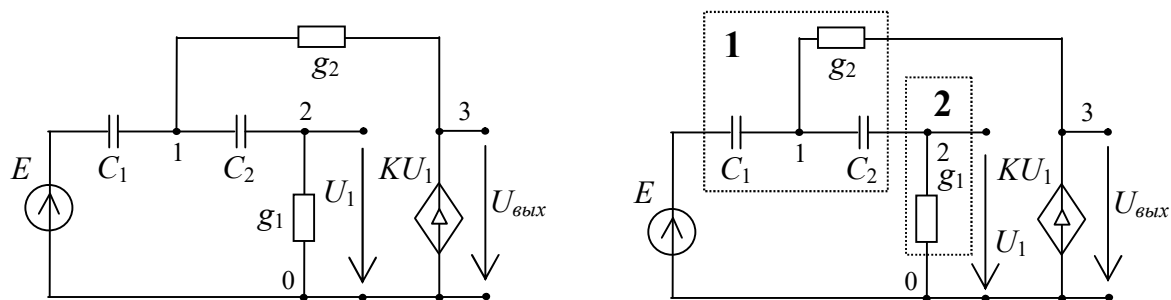


Рис. 2. Звено активного ВЧ-фильтра на источнике напряжения, управляемом напряжением (а);
подразделение пассивных элементов на двухполюсники 1 и 2 (б)

Таким образом, вместо того, чтобы синтезировать схему целиком, можно избежать сопутствующей этому генерации избыточных схем. Например, при синтезе схемы второго порядка, достаточно взять азбучную (табличную) одну из схем первого порядка для одного из двухполюсников, а схему второго двухполюсника выбрать такой, чтобы не произошло нейтрализации одного из двух реактивных элементов. Для этого соединения емкостей (индуктивностей) не должны образовывать контуры (сечения).

При синтезе на основе двухполюсных подсхем 1 и 2 не возникает вопросов с подключением источника сигнала и ОУ, которые в методике из [2, 3] подключаются случайным образом – до получения нужного результата программы CirSym. Эти вопросы устраняются сразу после изображения по памяти или синтеза двухполюсников 1 и 2. Последовательное соединение источника сигнала и дифференциального входа ОУ подключается параллельно двухполюсникам 1 и 2 (рис. 1,а). В схеме на рис. 1,б источник сигнала включается последовательно с двухполюсником 1. Таким образом, на рис. 1,а двухполюсник 1 заземляется непосредственно, а на рис. 1,б – через источник сигнала.

Аналогичные сложности применения методики [2] возникают при подключении ОУ (нуллора). Результат достигается методом проб и ошибок. Между тем, начав синтез с двухполюсников 1 и 2, очевидно, что двухполюсник 2 соединяется с инверсным входом ОУ на рис. 1,а или рис. 1,б и выходом соответствующего ОУ. При этом оказывается, что двухполюсники 2 на схемах рис. 1,а и рис. 2,б заземляются одинаково –

через выходы ОУ, имеющие близкое к нулю сопротивление. Отличие этого сопротивление от нуля, как и отличие от нуля сопротивления источника сигнала будет вносить искажения в реализацию частотных характеристик из-за некоторого фактического несоответствия по параметрам синтезированных двухполосников 1 и 2 вследствие конечных сопротивлений источника сигнала и ОУ.

Следует отметить, что для приведения схемы ВЧ-фильтра (рис. 2,а) к регулярной структуре (рис. 2,б), как у схем на рис. 1,а и 1,б, потребовалось отнести к двухполоснику 2 проводимость g_1 , чтобы общим с двухполосниками 1 и 2 был вход ОУ (узел 2). Это позволит не гадать, куда подключить ОУ после синтеза двухполосников 1 и 2, как в случае реализации этой схемы в [2], когда программе пришлось сгенерировать 20 схем, в том числе три схемы с подключением приемника отклика параллельно проводимостям g_1 или g_2 .

Рассмотренное приведение к регулярной структуре является строгим, поскольку сохраняет частотные свойства схемы после подключения ОУ и источника сигнала, так как их сопротивления при реализации схемы считаются равными нулю. Места подключения выхода ОУ и источника сигнала не придется искать по всей схеме – они оказываются локализованными в двухполоснике 1. Важно, что синтез всей схемы сводится к синтезу двухполосников 1 или 2 или даже одного из них.

Для обсуждаемого примера синтез двухполосников является тривиальной задачей, если требуется минимальная по числу элементов реализация в RC-базисе. Двухполосник 2 подключен параллельно входу ОУ, поэтому для ВЧ-фильтра единственным элементом этого двухполосника может быть только резистор. Следовательно, для реализации полного полинома второй степени двухполосник 1 должен содержать два конденсатора. Чтобы исключить последовательное или параллельное соединение этих конденсаторов достаточно одного резистора.

Простейшей схемой второго порядка с этими тремя элементами является схема в виде последовательного соединения одного из конденсаторов с параллельным соединением другого конденсатора и сопротивления. Общий узел схемы следует связать с узлом двухполосника 1, имеющим степень два, поскольку предстоит включить в каждое разветвление по источнику напряжения (сигнала и ОУ). Очевидно,

что сигнал нужно подавать через конденсатор. Этим вопрос синтеза схемы ВЧ-фильтра второго порядка оказывается исчерпанным, поскольку соответствие числителю ПСФ выполняется автоматически.

Автоматизация структурного синтеза на основе схемотехнического опыта требует учета следующих особенностей практических схем: 1) выделение активной подсхемы, в которую входят активные элементы, источник сигнала и приемник отклика (нагрузка); 2) подключение пассивной схемы к внешним узлам активной схемы. Для исчерпания возможных вариантов реализации пассивная подсхема представляет собой полную структуру, между каждой парой узлов которой включена обобщенная ветвь (ОВ). ОВ представляет собой подсхему – типовой двухполюсник – в виде параллельного, последовательного или смешанного соединения двух–трех идеальных элементов с параметрами сопротивления, емкости или индуктивности.

Данная статья посвящена рассмотрению альтернативной методики реализации заданной схемной функции. При этом начальной схемой является не простейшая схема в виде одного элемента, а полярный вариант – избыточная или полная схема, заведомо включающая искомые схемные решения. Поскольку поэлементное наращивание всеми возможными способами подключения элементов также представляет собой комбинаторный процесс, то вполне конкурентоспособной оказывается альтернативная методика, использующая избыточные структуры с типовыми ОВ.

Усечение таких структур до практических схем выполняется не путем решения систем компонентных уравнений и удаления или замыкания элементов с пренебрежимо малыми параметрами []. В данной статье предлагается усечение полной структуры не учетом численных значений параметров, а путем перебора сочетаний с заданным числом элементов и последующей проверки совпадения степеней полиномов числителя и знаменателя аппроксимирующим полиномам. Для исчерпания возможных реализаций пар полиномов перебираются все сочетания элементов избыточной схемы по 1, 2. ... n.

Генерация схемных реализаций на основе избыточных структур. Находить схему числителя по схеме знаменателя или наоборот не потребуется, если генерировать структуры схем, обязательно включающие источники сигнала и приемники отклика. Элементы активной подсхемы

соединяются между собой в соответствии с требованиями практической схемотехники, чтобы исключались заведомо неработоспособные структуры.

При поэлементном наращивании эти требования учесть затруднительно, поэтому структурый синтез схем с несколькими активными элементами ограничивается возможностями подключения «всеми возможными способами». В случае генерации схем перебором сочетаний элементов легко реализовать вычисления на нескольких процессорах (ядрах), обеспечив их равномерную загрузку.

Пассивная подсхема строится не на всех узлах схемы, а только на внешних узлах выбранной активной подсхемы, что уменьшает сложность комбинаторной задачи. На число узлов избыточной полной схемы не влияют не только внутренние узлы активной подсхемы, но и внутренние узлы обобщенных ветвей не влияют на число узлов избыточной полной схемы, поскольку перебор сочетаний выполняется из множества обобщенных ветвей (пассивных подсхем).

В качестве обобщенных ветвей полной схемы могут быть выбраны параллельные или последовательные соединения: резистора и конденсатора, резистора и катушки индуктивности, резистора с конденсатором и катушкой индуктивностью. Число узлов полной схемы также не увеличится, если использовать обобщенные ветви со смешанным соединением: последовательное соединение резистора и конденсатора, которому параллельна катушка индуктивности, или последовательное соединение катушки индуктивности, параллельно которому включен конденсатор. Такие типы соединений распространены на практике в схемах, реализующих заданные полиномы схемных функций.

Возможности генераторов схем будут ограничивать число узлов полной схемы, между каждой парой узлов которой включена обобщенная ветвь выбранного типа, и число элементов в обобщенных ветвях. Перебор всех возможных элементов из числа элементов избыточной схемы n по 1, 2, ... n не требуется. Нижнюю границу (минимальное число двухполюсных элементов) можно найти по максимальным степеням заданных полиномов числителя и знаменателя.

Верхняя граница числа двухполюсных элементов определяется автоматически, когда число реактивных элементов в генерируемых сочетаниях начинает значительно превышать максимальную степень

полиномов. Это означает, что схема избыточна по числу реактивных элементов.

При большом числе элементов в исходной избыточной схеме число сочетаний может оказаться слишком большим, что потребует выбора более производительного компьютера или параллельной генерации схем на нескольких компьютерах или процессорах (ядрах) одного компьютера. Равномерная загрузка процессоров обеспечивается легко, поскольку заданием для каждого процессора является начальное и конечное сочетание отведенной процессору последовательности сочетаний. Число сочетаний в последовательностях для процессоров определяется отношением числа всех генерируемых сочетаний двухполюсных элементов к числу имеющихся в распоряжении процессоров.

Среди схем, соответствующих сочетаниям, значительная часть не имеет физического смысла, поскольку числитель и (или) знаменатель схемной функции равны нулю. «Львиную долю» брака составляют схемы, не соответствующие полиномам числителя или знаменателя после нахождения каждого коэффициента.

Основным блоком программы синтеза, как и в случае поэлементного наращивания элементов, является программа символьного анализа CirSym (Circuit Symbol). Полиномиальный режим CirSym не был изначально разработан. Он появился спустя несколько лет и основан на поочередном нахождении каждого коэффициента новой функцией gggr, которая повторно обрабатывает исходную схему заново для получения потенциально возможных степеней от 0 до ncL , где ncL – число емкостей и индуктивностей.

Многokратное уменьшение времени генерации схемной функции обеспечило обобщение метода рекурсивной бисекции для учета реактивных элементов при формировании полиномов. Отличие полиномиального коэффициента от нуля может обнаружиться в середине или конце его формирования, поэтому при решении задачи структурного синтеза невозможно существенно уменьшить время расчета путем отказа от вывода формулы. Кроме того, формулы работоспособных схем будут использованы для проверки схем на изоморфизм, что также является особенностью предлагаемого алгоритма синтеза.

Несмотря на простоту реализации такого подхода, задача структурного синтеза решается в полном объеме. Для экономии

вычислительных затрат важно, что выполняется одновременная проверка числителя и знаменателя на соответствие заданным ненулевым коэффициентам полинома. Таким образом, генерируются только работоспособные схемы, схемные функции которых представляют интерес. Среди схем много изоморфных, но главное, что ни одна из потенциально полезных схем не будет пропущена.

Программа генерации схем, удовлетворяющих заданной схемной функции. Программа GenCir построена на основе программы символьно-полиномиального анализа CirSym [4]. При этом число операторов языка Си, относящихся к генерации схемных функций по заданным полиномам, составляет менее пятой части модифицированной функции `moden.c`, управляющей вводом исходного `cir`-файла и режимами CirSym.

Базовый набор активных и пассивных элементов, подлежащих моделированию в программе CirSym, не сокращен. Также допускаются все типы управляемых источников, идеальные операционные усилители (нуллары), резистивные сопротивления и проводимости. Однако формирование полиномиальных схемных функций требует задания конденсаторов операторными проводимостями pC , а катушек индуктивности – индуктивными сопротивлениями pL , чтобы отсутствовали дробные множители.

Cir-файл может быть произвольным по структуре и составу линейных элементов. Перебирать будут только элементы избыточной или полной пассивной подсхемы. В отличие от подсхемы их двухполюсников активная подсхема фиксирована по числу элементов, ее структура и состав по числу и виду элементов также могут быть произвольными, но эти элементы не участвуют в переборе, размножающем варианты схем.

Файл конфигурации `setup.sym` для программы GenCir используется тот же самый, как и для программы CirSym тот же, но дополнен специфическими для структурного синтеза строками:

```
...
Number of polynomial degrees for numerator
2
Number of polynomial degrees for denominator
3
Polynomial degrees of numerator and denominator
0 1 0 1 2
Full circuit (1 - gc, 2 - gL, 3 - gcL, 4 - g-L,c, 5 - g-c,L)
4
```

The number of elements in the generated circuits

4

All circuits (1) or only circuits with given polynomials (0)

0

Задаётся число ненулевых полиномиальных коэффициентов числителя и знаменателя, и перечисляются степени этих коэффициентов. Порядок и вид пары аппроксимирующих полиномов не ограничен.

В рассмотренных примерах пяти схем активных фильтров было рассмотрено задание пяти типов избыточных схем. Первые три типа содержат обобщенные ветви в виде параллельного соединения: емкости и проводимости, индуктивности и проводимости, емкости, индуктивности и проводимости. В следующих двух типах избыточных схем содержатся обобщенные ветви в виде смешанного соединения: емкость параллельна последовательному соединению индуктивности и проводимости или индуктивность параллельна последовательному соединению емкости и проводимости.

Ничего не мешает тому, чтобы указывать в `cir`-файле в качестве избыточной схемы не схему полной топологической структуры, а произвольную схему, образующую некоторое подмножество ветвей полной схемы. Таким образом, задача генерации схем по заданным полиномам схемной функции может быть решена с меньшими вычислительными затратами.

Число элементов в реализуемой схеме задается произвольно, например, с учетом стоимости элементов активной подсхемы. При генерации с соответствующими опциями (1 или 0) могут выводиться все работоспособные схемы с заданным числом элементов или только те схемы, которые удовлетворяют заданным степеням полинома.

Что еще нужно для синтеза? Пользователя не интересует, как получается схема. Целью обращения к программе является синтез линейных электрических и электронных схем произвольного порядка аппроксимирующих полиномов на произвольной элементной базе. Формально возможности программы GenCir для структурного синтеза электронных схем неограничены – их ограничат возможности используемого компьютера и приемлемое для расчета время.

Для ускорения генерации полиномиальных выражений может быть включены опции рекурсивного деления схемы на части [5, 6]. Перечисление сочетаний элементов выполняется оригинальными

лексикографическими генераторами сочетаний: прямым и обратным, которые более эффективны, чем известные программы [7].

Взаимно дополняющие генераторы сочетаний необходимы для быстрого перехода от элементов избыточной схемы, вошедших в сочетание и формирующих усеченную схему, к элементам, не вошедших в это сочетание, то есть усеченным (удаленным) элементам. Список усеченных элементов полезен, например, при генерации низкочувствительных схем, когда удаление некоторых элементов приводит к исключению слагаемых с отрицательным или положительным знаком. В результате знаменатели схем получают один знак: только положительный или только отрицательный.

Пример генерации схем по заданным полиномам с помощью программы GenCir. Пусть требуется синтезировать схему, реализующую следующие полиномы числителя и знаменателя: $N=a_2p^2+a_1p+a_0$ и $D=b_2p^2+b_1p+b_0$.

Решение. Используем для реализации один ОУ с дифференциальным входом при подаче сигнала на неинвертирующий вход (рис. 1,а). Этот узел с номером 4 является внутренним узлом активной подсхемы. В качестве пассивной подсхемы выберем подсхему, подключенную к узлам активной подсхемы: 0, 2, 3 и имеющую внутренний узел 1. Таким образом, избыточная пассивная подсхема будет иметь 6 обобщенных ветвей. Используем обобщенную ветвь в виде параллельного соединения проводимости и емкости. Тогда cir-файл избыточной полной схемы будет иметь вид:

```
g01 0 1 1 c01 0 1 1 g02 0 2 1 c02 0 2 1 g03 0 3 1 c03 0 3 1
g12 1 2 1 c12 1 2 1 g13 1 3 1 c13 1 3 1 g23 2 3 1 c23 2 3 1
N1 3 0 2 4 E 0 4 1 U 3 0 .END
```

В третьей строке задания перечислены элементы активной подсхемы: идеальный операционный усилитель, источник сигнала и приемник отклика. Параметры элементов приняты равными 1, поскольку поставлена задача получить структуру схемы, реализующей полиномы, заданные ненулевыми коэффициентами. Значения этих коэффициентов пока не принимаются во внимание. Поскольку реализуются полные полиномы второго порядка, генерируемые сочетания должны содержать от трех до пяти элементов. Для трех элементов программа генерирует единственную схему c12_c13_g23 и ту с единичным коэффициентом передачи. Для пяти

элементов генерируется слишком много схем за счет образования контуров из конденсаторов.

Число сочетаний из 12 элементов по 4 равно 495. Среди этих сочетаний элементов большая часть схем соответствует неработоспособным схемам с числителем и (или) знаменателем, равными нулю, а также с одинаковыми числителем и знаменателем. Меньшая часть схем работоспособна, но соответствует другим парам полиномов.

Заданным степеням полинома удовлетворяют 23 схемы. Из этого числа 15 схем имеют единичный коэффициент передачи, для них программа формирует одинаковые выражения для числителя и знаменателя. Этим схемам для удобства классификации присвоим код 1. Оставшиеся восемь схем являются практическими. В программе каждую синтезированную схему задает список включенных в нее двухполюсных элементов. Списки следуют после указания соответствующего им кода:

2

g01_c12_c13_g23_

g01_c12_g23_c23_

c01_g12_g13_c23_

c01_g12_g23_c23_

3

c01_c12_c13_g23_

4

c01_c12_g23_c23_

5

g02_c12_c13_g23_

6

c02_c12_c13_g23_

Среди этих схем есть схема c01_g12_g23_c23, синтезированная по методике поэлементного наращивания [3] и показанная на рис. 1,а, с коэффициентом передачи:

U =

1*

(

1* (g01*g23)+

p* (g01*(c23+c12)+c12*g23)+

p*p* (c12*c23)+

)/

(

$$\begin{aligned}
 &1 * (g_{01} * g_{23}) + \\
 &p * (g_{01} * c_{23} + c_{12} * g_{23}) + \\
 &p * p * (c_{12} * c_{23}) + \\
 &);
 \end{aligned}$$

Первые по порядку четыре схемы с кодом 2 обладают передаточными функциями одинаковой структуры. Поэтому среди них могут быть изоморфные схемы, в рассматриваемом случае отличающиеся перестановкой последовательно соединенных элементов, как, например, в паре схем $g_{01_c_{12}_g_{23}_c_{23}}$ и $c_{01_g_{12}_g_{23}_c_{23}}$, соответствующих схеме на рис. 1,а. Однако схемы другой пары: $g_{01_c_{12}_c_{13}_g_{23}}$ и $c_{01_g_{12}_g_{13}_c_{23}}$ отличаются друг от друга не только перестановкой первых двух элементов, но и соединением оставшихся двух элементов между различными парами узлов. Это означает, что среди схем с кодом 2 имеется три оригинальные структуры.

Четвертая оригинальная схема, также с двумя конденсаторами и двумя резисторами, имеет код 5: Схемы с кодами 3, 4 и 6 назвать оригинальными можно, но полезными вряд ли, поскольку для реализации полиномов второго порядка используется избыточное количество конденсаторов. Однако тем самым удалось избавиться от одного резистора, сохранив в схемах число двухполюсных элементов, что может оказаться целесообразным.

Выводы

1. Разработан алгоритм и реализована программа генерации схем по заданной схемной функции. Конкурирующие между собой варианты схем получаются полным перебором заданного числа элементов избыточной или полной пассивной схемы, представленной в исходном файле. Состав двухполюсных элементов пассивной подсхемы, как и состав элементов активной подсхемы, которые не участвуют в переборе, произволен.

2. Решение примера активного фильтра показывает, что использование избыточной полной структуры позволяет получать все возможные схемы с произвольным числом элементов по заданным полиномам схемной функции. Большая часть сгенерированных схем не работоспособна (имеют единичный коэффициент передачи). Оставшиеся схемы являются работоспособными и в значительной своей части оригинальными (неизоморфными).

Список литературы

1. Оптимальная реализация линейных электронных RLC–схем / А.А. Ланнэ, Е.Д. Михайлова, Б.С. Саркисян, Я.Н. Матвийчук. – Киев: Наукова думка, 1981. – 208 с.
2. Горшков К.С. Структурный синтез и символьный допусковый анализ электрических цепей методом схемных определителей : Автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.09.05 (Теорет. электротехника) / Ульяновский гос. техн. ун-т. – Ульяновск, 2010. – 160 с.
3. Filaretov V., Gorshkov K., Mikheenko A. A circuit synthesis technique based on network determinant expansion // 2012 International Conference on Synthesis, Modeling, Analysis and Simulation Methods and Applications to Circuit Design (SMACD) / IEEE. – 2012. – P. 293–296.
4. Филаретов В.В. Программа символьного анализа CIRSYM: история создания, структура и функции // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. научн. труд. – Ульяновск: УлГТУ, 2012. – Вып. 10. – С.158–171.
5. Недорезов П.В., Филаретов В.В. Символьно-полиномиальный анализ линейных электронных цепей методом схемных определителей // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр. – Ульяновск: УлГТУ, 2018. – Вып. 15. – С. 18–35.
6. Горшков К.С., Недорезов П.В., Филаретов В.В. Особенности реализации полиномиальной бисекции при символьном анализе линейных электронных цепей // In memoriam: Василий Андреевич Андреев: сборник памяти Андреева В.А. – Ульяновск: УлГТУ, 2018. – С. 198–210.
7. Агеев М.И., Алик В.П., Марков Ю.И. Библиотека алгоритмов 151б–200б (Справочное пособие). – Вып.4. – 1981. – 184 с.

Горшков Константин Сергеевич – канд. техн. наук, доцент кафедры электротехники и прецизионных электромеханических систем Санкт-Петербургского научно-исследовательского университета информационных технологий, механики и оптики (ИТМО).

E-mail: k.gorshkov@list.ru.

ДИАГНОСТИКА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

ПРИМЕНЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ ПРОГРАММ АНАЛИЗА ДЛЯ ДИАГНОСТИКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ ЦЕПЕЙ В СТАТИЧЕСКОМ РЕЖИМЕ

С. А. Курганов, И. А. Прокофьев

Задача диагностики нелинейных электронных цепей в статическом режиме сведена к многократному расчету режима линейных схем замещения с помощью программы анализа электрических цепей. Схема замещения формируется путем косвенной компенсации всех нелинейных резисторов и нелинейных управляемых источников с помощью управляемых линейных источников тока или напряжения с предельно большим значением параметра. Рассмотрен пример диагностики нелинейной схемы с помощью программы численного моделирования.

The task of diagnostics of nonlinear electronic circuits in static mode is reduced to multiple calculation of the mode of linear replacement circuits using an electrical circuit analysis program. The replacement circuit is formed by indirect compensation of all nonlinear resistors and nonlinear controlled sources using controlled linear current or voltage sources with an extremely large parameter value. An example of diagnostics of a nonlinear circuit using a numerical simulation program is considered.

О диагностике нелинейных электрических цепей в статическом режиме [1–3]. В общем случае диагностика нелинейных электрических цепей в статическом режиме выполняется путем формирования и решения систем нелинейных алгебраических уравнений [1]. Задача может быть сведена к многократному решению базисной задачи диагностики линейной электрической цепи, если вольтамперные характеристики (ВАХ) нелинейных резисторов и передаточные характеристики нелинейных управляемых источников (УИ) считаются искомыми [2]. При этом система уравнений формируется на основе законов Кирхгофа,

методов контурных токов или узловых напряжений относительно токов и/или напряжений нелинейных резисторов и нелинейных УИ. Система уравнений решается по результатам каждого эксперимента, проведенного при различных значениях функций независимых источников. Число экспериментов определяется числом требуемых точек ВАХ нелинейного резистора [2].

В [3] приведено решение задачи диагностики электрической цепи в статическом режиме с одним нелинейным резистором при известных сопротивлениях линейных резисторов. При этом параметр источника постоянного напряжения принимает ряд значений, а его ток может быть измерен. Система уравнений составляется по методу контурных токов, где неизвестными является ток и статическое сопротивление нелинейного резистора. Решение системы уравнений позволяет получить ВАХ нелинейного резистора в виде функций тока и напряжения, зависящих от сопротивлений линейных резисторов, напряжения и тока входного источника.

Недостатком методов [2, 3] является трудоемкое неформализованное построение уравнений диагностируемой цепи.

Целью настоящей работы является решение задачи диагностики нелинейных электрических цепей в статическом режиме при неизвестных характеристиках нелинейных элементов с помощью автоматизированных программ численного анализа линейных электрических цепей общего назначения.

Диагностика линейных электрических цепей с помощью программ автоматизированного анализа электрических цепей [4–5]. Для диагностики неисправностей в линейных электрических цепях параллельно неисправному элементу подключается норатор, при этом измеренное напряжение устанавливается с помощью фиксатора напряжения. Фиксатор напряжения представляется последовательным соединением нуллатора и источника ЭДС с параметром, равным измеренному напряжению. После замены пары нуллятор–норатор на источник напряжения, управляемый напряжением (ИНУН), полученная компенсированная схема рассчитывается по программе численного моделирования PSpice для получения токов и напряжений неисправных элементов [4]. Косвенная компенсация с помощью ИНУН с предельно большим коэффициентом передачи, равным 10^9 , применяется и для

диагностики многополюсной линейной электрической цепи в системе численного моделирования OrCad Capture [5]. Для косвенной компенсации элементов можно использовать операционный усилитель [6].

Косвенная компенсация нелинейных резисторов и нелинейных управляемых источников напряжения и тока. Косвенная компенсация применима не только для линейных, но и для нелинейных элементов. На рис. 1,а показана исходная схема с нелинейным резистором, на рис. 1,б – компенсированная схема на основе нуллора, где нуллятор и норатор представлены одинарной и двойной заштрихованной стрелкой.

Для диагностики с помощью численных программ анализа электрических цепей пара нуллятор–норатор заменяется линейным управляемым источником (УИ), например, источником тока, управляемым напряжением (ИТУН) (рис. 1,в). При этом вместо нелинейного резистора подсоединяется генератор ИТУН, а его приемник u включается последовательно с источником напряжения u_v . Напряжение u_v измеряется вольтметром V (рис. 1,а). Вместо ИТУН могут использоваться и другие управляемые источники – источник тока, управляемый током и источник напряжения, управляемый напряжением и током. При этом, как уже отмечалось, параметр управляемого источника g_r должен принимать предельно большое значение.

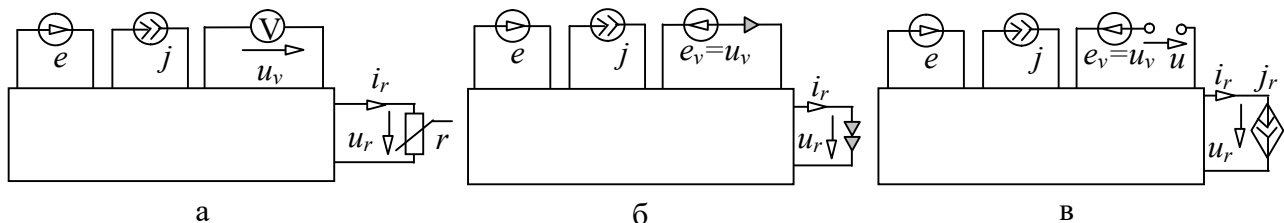


Рис. 1. Компенсация нелинейного резистора: исходная схема (а); компенсированные схемы – с нуллором (б) и ИТУН $j_r = g_r u$ (в)

Компенсация нелинейных управляемых источников выполняется с помощью линейных УИ аналогично. Исходная схема с нелинейным источником тока, управляемым током, (ИТУТ) показана на рис. 2,а. Компенсация ИТУТ выполняется с помощью линейного ИТУН с током $j = g u$, где g – передаточная проводимость, как и при компенсации нелинейного резистора, принимает предельно большое значение. Приемник напряжения u ИТУН включается последовательно с фиксирующим источником ЭДС e_v (рис. 2,б).

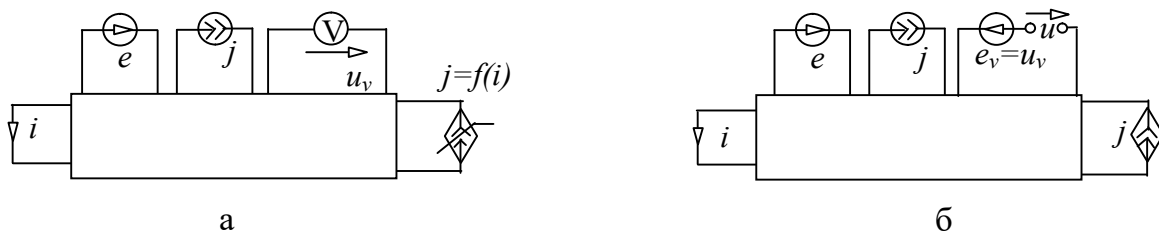


Рис. 2. Компенсация нелинейного ИТУТ: исходная схема (а);
схема с компенсированным ИТУТ с помощью линейного ИТУН j (б)

При компенсации всех нелинейных элементов компенсированные схемы (рис. 1,в и 2,б) становятся линейными. При этом статическая ВАХ резистора r (рис. 1,а) может быть получена по точкам многократным расчетом тока i_r и напряжения u_r в компенсированной схеме (рис. 1,в) в режиме постоянного тока при задании различных значений источников e, j и соответствующих измеренных напряжений u_v .

Передаточная функция $j=f(i)$ ИТУТ (рис. 2,а) находится путем расчета токов i и j в компенсированной схеме на рис. 2,б. Расчет может быть выполнен с помощью известных автоматизированных программ анализа электронных схем общего назначения, например, LTSpice [9]. При отсутствии в схеме реактивных элементов эксперимент и расчет нелинейных характеристик может проводиться при воздействии переменных источников.

Пример нахождения статических ВАХ p - n переходов биполярного транзистора. Дана принципиальная схема [7] (рис. 3,а) и схема замещения (рис. 3,б) транзисторного каскада усилителя постоянного тока. В схеме замещения использована кусочно-нелинейная схема замещения биполярного транзистора [8]. Известны сопротивления резисторов: $R_1=1,2$ кОм; $R_2=5,5$ кОм; $R_3=10$ кОм; $R_4=0,5$ кОм; $R_5=10$ кОм; $R_6=20$ кОм; $R_7=5$ кОм; параметры элементов схемы замещения транзистора – напряжение смещения базы $E_{60}=0,2$ В; ток смещения коллекторного перехода $J_{k0}=1$ мА; коэффициент передачи тока базы $\beta=50$; напряжение питания $E_{п}=15$ В.

Для измерений доступны входные и выходные узлы. Требуется получить ВАХ эмиттерного и коллекторного p - n переходов, представленных на рис. 3,б нелинейными резисторами $R_{н1}$ и $R_{н2}$.

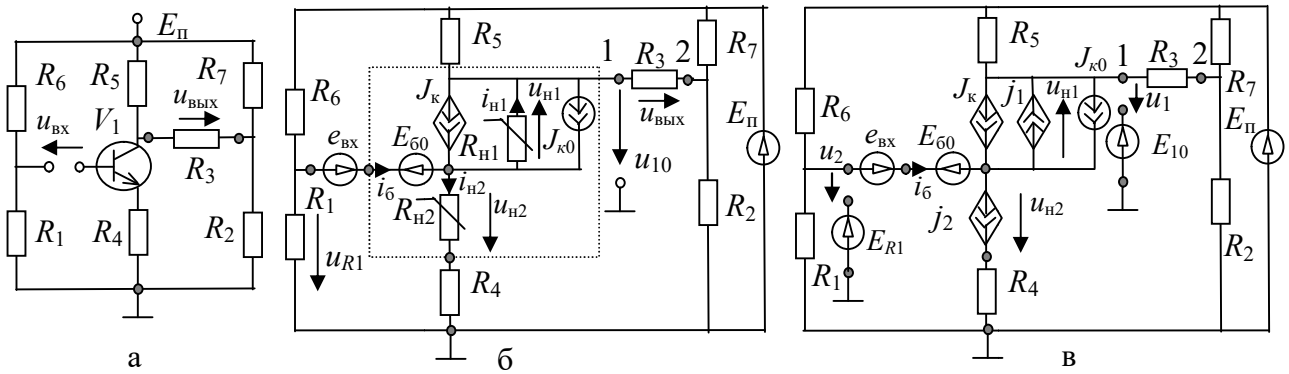
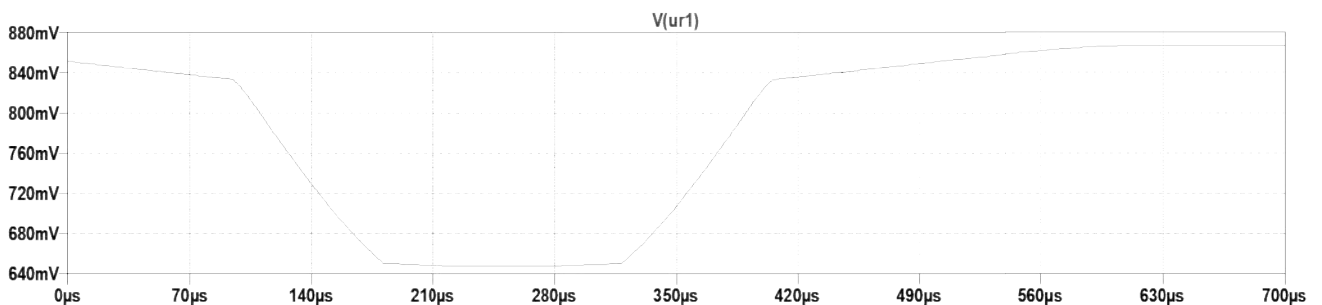
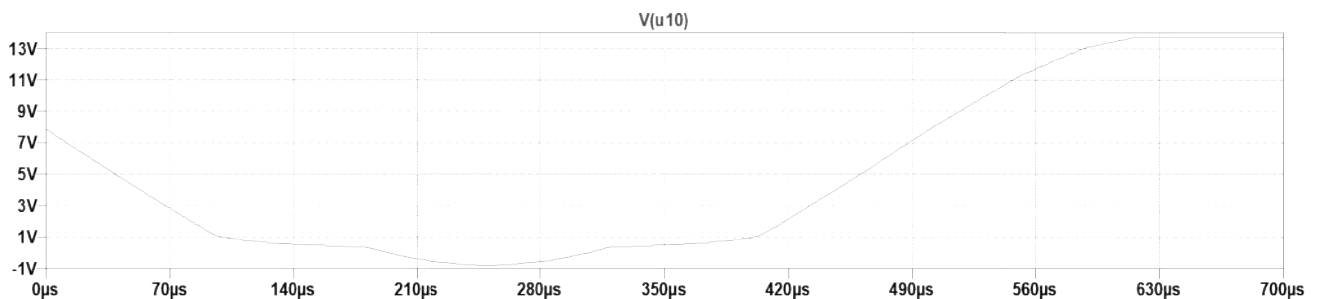


Рис. 3. Каскад усилителя постоянного тока: принципиальная схема (а); схема замещения (б); схема с компенсированными нелинейными резисторами R_{H1} и R_{H2}

Пусть ВАХ резисторов R_{H1} и R_{H2} одинаковые и имеют вид: $i = 0,008 u^2$ при $u \geq 0$ (ток и напряжение в амперах и вольтах) и $i = 0$ при $u < 0$. На входе схемы действует синусоидальная ЭДС частотой $f = 1$ кГц и амплитудой $E_{BX.m} = 1$ В, большей, чем в рабочем режиме, чтобы получить ВАХ в более широком диапазоне напряжений. Графики напряжений u_{R1} и u_{10} , полученные по схеме (рис. 3,б) на интервале 700 мкс с помощью программы LTSpice [9], представлены на рис. 4,а и 4,б.



а



б

Рис. 4. Напряжения u_{R1} (а) и u_{10} (б) как функции времени

Нелинейные резисторы R_{H1} и R_{H2} (рис. 3,б) компенсируются в соответствии с рис. 1,в путем замены их генераторами ИТУН $j_1 = gu_1$ и

$j_2 = gu_2$, где $g = 10^9$ См. При этом измеренные напряжения u_{R1} и u_{10} (рис. 4,а и 4,б) устанавливаются фиксаторами, содержащими приемники ИТУН и источники ЭДС $E_{R1} = u_{R1}$ и $E_1 = u_{10}$ (рис. 3,в).

По компенсированной схеме (рис. 3,в) получим с помощью программы LTSpice [9] численные функции токов $i_{n1}(t)$, $i_{n2}(t)$ и напряжений $u_{n1}(t)$, $u_{n2}(t)$ соответствующих нелинейных резисторов. Так, графики $i_{n1}(t)$ и $u_{n1}(t)$ представлены на рис. 5.

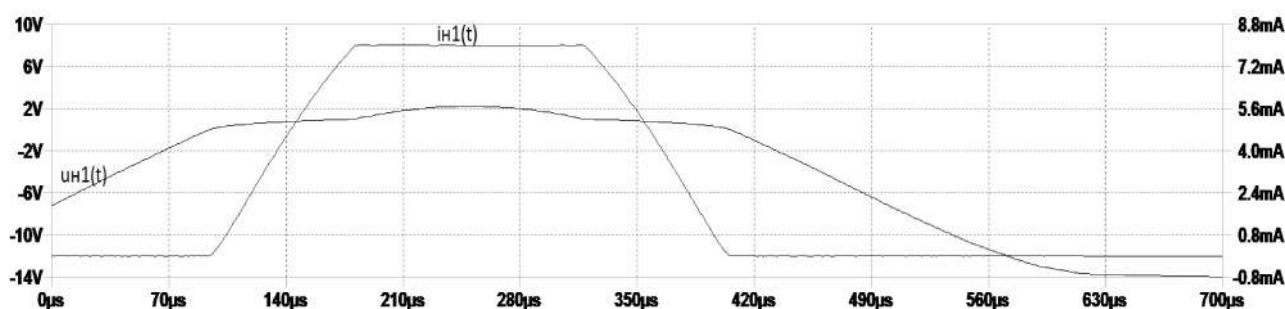


Рис. 5. Графики напряжения и тока нелинейного резистора R_{n1} (рис. 3,б)

Графики ВАХ (рис. 6,а и 6,б) нелинейных резисторов R_{n1} и R_{n2} , построенные по функциям $u_{n1}(t)$, $i_{n1}(t)$ (рис. 5) и $u_{n2}(t)$, $i_{n2}(t)$, соответствуют исходным квадратичным функциям. Так, при расчете напряжений и токов по программе LTSpice в 200 точках с 7 десятичными знаками численные значения ВАХ получаются с 2...3 верными знаками.

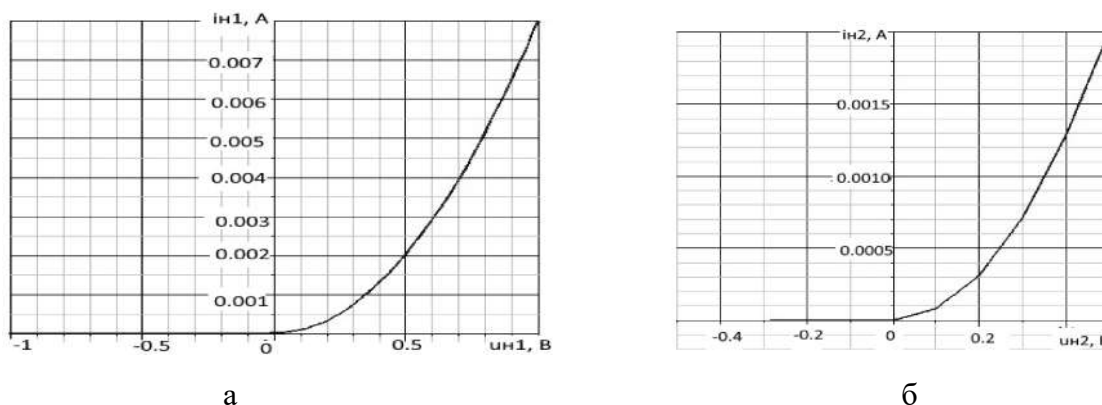


Рис. 6. ВАХ нелинейных резисторов R_{n1} (а) и R_{n2} (б), полученные по результатам диагностики

Выводы. Задача диагностики нелинейных электронных цепей в статическом режиме сведена с помощью метода косвенной компенсации к базисной задаче диагностики линейных электрических цепей и, таким образом, может быть автоматизирована с помощью известных программ численного анализа линейных электрических цепей общего назначения.

Список литературы

1. Tadeusiewicz M., Hałgas S. Multiple soft fault diagnosis of nonlinear dc circuits considering component tolerances // *Metrol. Meas. Syst.*, Vol. XVIII (2011), No. 3, pp. 349-360.
2. Киншт Н.В., Герасимова Г.Н., Кац М.А. Диагностика электрических цепей. – М.: Энергоатомиздат, 1983.– 192 с.
3. Басан С.Н. Идентификация параметров удалённых элементов электрических цепей // *Изв. вузов. Электромеханика.* – 2019, т. 62, № 4. – С. 97–99.
4. Farchy S. L., Gadzheva E. D., Raykovska L. H., Kouyoumdjiev T. G. Nullator-norator approach to analogue circuit diagnosis using general-purpose analysis programmes // *International Journal of Circuit Theory and Applications.*– 1995.– Vol. 23, is. 6.– P. 571–585.
5. Djordjevic S. Analog circuit diagnosis based on the nullor concept and multiport description of the circuit // *Analog Integrated Circuits and Signal Processing.* – Springer: published online. – 13 February 2018. – pp. 1–9.
6. Курганов С.А., Филаретов В.В. О применении операционных усилителей для компенсации импедансов независимыми источниками // *Схемно-топологические модели активных электрических цепей: Синтез и анализ: Тр. междунаrod. конф. КЛИН–2003.*– Ульяновск: УлГТУ, 2003. – Т.4.– С. 55–58.
7. Степаненко И.П. Основы теории транзисторов и транзисторных схем. –М.: Энергия, 1977.– 672 с.
8. Чуа Л. О., Лин П. М. Машинный анализ электронных схем: Алгоритмы и вычислительные методы.– М.: Энергия, 1980.– 640 с.
9. Heinemann R. PSPICE. Einführung in die Elektroniksimulaton. München/FRG: Carl Hanser Verlag, 2011.– 400 s.

Курганов Сергей Александрович – д.т.н, профессор кафедры «Электроснабжение» Ульяновского государственного технического университета. 432027, Ульяновск, ул. Северный Венец, 32. Тел. 8-8422-77-81-05. E-mail: sak@ulstu.ru.

Прокофьев Иван Алексеевич – магистр по направлению «Электроэнергетика и электротехника», ПАО "Россети-Волга" - "Ульяновские распределительные сети". E-mail: prokofev.ivan.2015@yandex.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ УСТРОЙСТВ

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ РЕГУЛИРОВАНИЯ МОЩНОСТИ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УСТАНОВОК

А. В. Манин, В. В. Юдин, А. В. Юдин

В скалярной и векторной форме получено выражение для логической функции, позволяющее выполнять моделирование процессов регулирования мощности для методов с импульсной модуляцией сетевого напряжения. Параметрами функции являются период модуляции, время начала и конца модулирующего интервала. Применение функции позволяет формализовать решение ряда задач регулирования: построение временных диаграмм напряжения и мощности, определение зависимости действующего значения напряжения от параметров модуляции, компонентов спектра напряжения, и др.

In the scalar and vector form expression for the logic function is received, allowing carrying out modeling of processes of regulation of power for methods with pulse modulation of mains voltage. Function parameters are the period a modulation, time of the beginning and the end of a modulating interval. Function application allows formalizing the decision of some regulation problems: construction of time diagrams of voltage and power, definition of dependence of RMS voltage by modulating parameters, components of spectrum of voltage, etc.

Введение. Вопросы регулирования мощности электроэнергетических установок, связанные с большими перетоками энергии, особенно при работе в ограниченном диапазоне управляющего воздействия, являются всегда актуальными и определяют энергоэффективность установок. Эти обстоятельства налагают высокие требования к точностным характеристикам регуляторов и являются условиями для разработки

новых методов регулирования мощности или напряжения в энергетических или электротехнологических установках [1,2].

Основная часть. Процесс регулирования мощности технологических установок часто сопряжен с периодическим подключением нагрузки к электрической сети. Изменение временных параметров подключения достигается обеспечением необходимых регулировочных характеристик с последующей их коррекцией и оптимизацией.

Для моделирования энергетических процессов предлагается ввести логическую функцию, осуществляющую выделение на оси времени периодических интервалов, заданной длительности. Функция истинна, когда интервал от момента окончания последнего целого периода до текущего момента времени превышает начальное значение t_N , и в то же время не превышает конечное значение t_K . В остальных случаях функция принимает ложные значения.

Предлагаемую функцию можно назвать функцией селекции периодического интервала (ФСПИ) и обозначить

$$sp(t_R, t_N, t_K, t) = \begin{cases} 0 & \text{при } kt_R < t < t_N + kt_R \\ 1 & \text{при } t_N + kt_R < t < t_K + kt_R \\ 0 & \text{при } t_K + kt_R < t < (k+1)t_R \end{cases} \quad (1)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$

ФСПИ зависит от трех параметров: периода выбираемого интервала t_R , а также его начального t_N и конечного t_K значений. Аргументом функции является значение текущего времени t . Параметры t_N и t_K определяют соответственно задержку начала и конца интервала относительно начала периода, а их разность – длительность этого интервала

$$\tau = t_K - t_N. \quad (2)$$

С помощью ФСПИ легко задать зависимость напряжения на нагрузке от времени

$$u(t) = E \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) sp(t_R, t_N, t_K, t), \quad (3)$$

где E – амплитуда напряжения сети, T – ее период.

Предложенная форма записи (3) охватывает достаточно широкий класс устройств регулирования. Так случай при $t_R = T/2$, $t_N \in [0, T/2]$,

$t_K = T/2$ соответствует регулированию за счет изменения угла включения тиристора, случай при $t_R = T/2$, $t_N \in [T/2, T/2 - \tau/2]$, $t_K \in \{0, 1, \dots, 2^n\} \cdot T/2$ – широтно-импульсному регулированию за счет изменения длительности интервала подключения $\tau \in [0, T/4]$, а случай при $t_R = T2^{m-1}$, $t_N = 0$, $t_K \in [0, T2^{m-1}]$ – импульсному регулированию цифровым двоичным m -разрядным кодом за счет изменения (в течение каждого фиксированного периода, кратного периоду сети) количества полупериодов напряжения, поданного в нагрузку.

Можно выразить ФСПИ через функцию вычета по модулю t_R

$$\text{sp}(t_R, t_N, t_K, t) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < t \pmod{t_R} < t_N \\ 1 & \text{при } t_N \leq t \pmod{t_R} \leq t_K \\ 0 & \text{при } t_K < t \pmod{t_R} < t_R \end{cases} \quad (4)$$

При этом получим удобную форму для реализации ФСПИ в среде MATLAB

$$\text{sp}(t_R, t_N, t_K, t) = [t \pmod{t_R} \geq t_N] \wedge [t \pmod{t_R} \leq t_K]. \quad (5)$$

Для практического использования ФСПИ целесообразно выявить ее характерные свойства. Основные из них получаются непосредственно из определения, откуда следует:

Свойство 1. Любая целая степень n ФСПИ равна самой функции

$$\text{sp}^n(t_R, t_N, t_K, t) = \text{sp}(t_R, t_N, t_K, t). \quad (6)$$

Свойство 2. Определенный интеграл от произведения произвольной функции времени на ФСПИ за период регулирования t_R равен интегралу от этой функции в пределах селектируемого интервала

$$\int_0^{t_R} u(t) \text{sp}(t_R, t_N, t_K, t) dt = \int_{t_n}^{t_k} u(t) dt. \quad (7)$$

Свойство 3. Произведение двух ФСПИ образует новую ФСПИ с задержкой начала интервала, равной максимальной из задержек начал интервалов перемножаемых функций, и с задержкой конца интервала, равной минимальной из задержек концов интервалов перемножаемых функций

$$\text{sp}(t_R, t'_N, t_K, t) \text{sp}(t_R, t''_N, t''_K, t) = \text{sp}(t_R, \max(t'_N, t''_N), \min(t'_K, t''_K), t). \quad (8)$$

Кроме рассмотренной ФСПИ $\text{sp}(t, t_N, t_K, t_R)$, в которой в качестве аргумента и параметров использованы скалярные величины, возможно применение функций с векторными аргументами, в частности, допустимым является формат $\text{sp}(t, T_N, T_K, T_R)$. В них аргументы $T = [t_1 \ t_2 \ \dots \ t_n]$, $T_N = [t_{N1} \ t_{N2} \ \dots \ t_{Nm}]$ и $T_K = [t_{K1} \ t_{K2} \ \dots \ t_{Km}]$ – векторы фиксированных моментов текущего времени, начальных и конечных значений интервалов. Количество компонентов векторов T_N и T_K одинаковое и равно общему числу интервалов в периоде t_R . При этом число интервалов m не связано с n и может быть любым.

Определим функцию селекции для векторного аргумента текущего времени $T = [t_1 \ t_2 \ \dots \ t_n]$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{sp}(t_R, t_N, t_K, T) &= \text{sp} \left(t_R, t_N, t_K, \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \dots \\ t_n \end{bmatrix}' \right) = \bigcup_{i=1}^n \text{sp}(t_R, t_N, t_K, t_i) = \\ &= [\text{sp}(t_R, t_N, t_K, t_1) \ \text{sp}(t_R, t_N, t_K, t_2) \ \dots \ \text{sp}(t_R, t_N, t_K, t_m)]. \end{aligned} \quad (9)$$

Функцию селекции для векторных аргументов задержки начал и концов селектируемых интервалов $T_N = [t_{N1} \ t_{N2} \ \dots \ t_{Nm}]$ и $T_K = [t_{K1} \ t_{K2} \ \dots \ t_{Km}]$:

$$\begin{aligned} \text{sp}(t_R, T_N, T_K, t) &= \bigcup_{j=1}^m \text{sp}(t_R, t_{Nj}, t_{Kj}, t) = \\ &= [\text{sp}(t_R, t_{N1}, t_{K1}, t) \ \text{sp}(t_R, t_{N2}, t_{K2}, t) \ \dots \ \text{sp}(t_R, t_{Nm}, t_{Km}, t)]. \end{aligned} \quad (10)$$

Для ФСПИ $\text{sp}(t_R, T_N, T_K, T)$ с совокупностью из трех векторных аргументов возможно определение

$$\text{sp}(t_R, T_N, T_K, T) = \bigcup_{j=1}^m \text{sp}(t_R, t_{Nj}, t_{Kj}, T) = \bigcup_{j=1}^m \left(\bigcup_{i=1}^n \text{sp}(t_R, t_{Nj}, t_{Kj}, t_i) \right). \quad (11)$$

Функцию селекции для всех векторных аргументов, когда и первый параметр $T_R = [t_{R1} \ t_{R2} \ \dots \ t_{Rp}]$ также является вектором, определим так

$$\text{sp}(T_R, T_N, T_K, T) = \bigcup_{k=1}^p \text{sp} \left[\left(\sum_{k=1}^p t_{Rk} \right), (t_{Rk-1} + T_N), (t_{Rk-1} + T_K), (t_{Rk-1} + T) \right] = \quad (12)$$

$$= \left(\begin{array}{c} \text{sp} \left[\sum_{k=1}^p t_{Rk}, T_N, T_K, T \right] \\ \text{sp} \left[\sum_{k=1}^p t_{Rk}, (t_{R1} + T_N), (t_{R1} + T_K), (t_{R1} + T) \right] \\ \dots \\ \text{sp} \left[\sum_{k=1}^p t_{Rk}, (t_{Rp} + T_N), (t_{Rp} + T_K), (t_{Rp} + T) \right] \end{array} \right)^T.$$

Для вычисления ФСПИ используют следующий алгоритм. Определяется размерность последнего передаваемого функции аргумента T . Формируется нулевой вектор S такой же размерности, как и аргумент T . Производится заполнение этого вектора. При этом, если второй и третий аргументы имеют всего лишь по одному элементу и ФСПИ осуществляет селекцию одного интервала $t \in [t_N, t_K]$, то заполнение S производится однократно. При этом используется встроенная функция MATLAB $\text{mod}(x, y)$, имеющая два аргумента x (может быть как скалярной, так и векторной величиной) и y , которая выполняет определение вычета из x по модулю y

$$\text{mod}(x, y) = x - ny, \quad (13)$$

где $n = \text{floor}(x/y)$ – числа, полученные делением чисел, соответствующих первому x аргументу на второй аргумент y с последующим округлением в сторону наименьших целых чисел.

Если таких элементов несколько и ФСПИ осуществляет селекцию одного m интервалов $t_1 \in [t_{N1}, t_{K1}]$, $t_2 \in [t_{N2}, t_{K2}]$, ... $t_m \in [t_{Nm}, t_{Km}]$, то заполнение S производится m раз в цикле, где для каждого из интервалов определяются свои значения $\text{sp}(t_R, t_{N1}, t_{K1}, T)$, $\text{sp}(t_R, t_{N2}, t_{K2}, T)$, ... $\text{sp}(t_R, t_{Nm}, t_{Km}, T)$, из которых посредством дизъюнкции осуществляют формирование результирующих значений ФСПИ

$$\text{sp}(t_R, T_N, T_K, T) = \bigcup_{i=1}^n \text{sp}(t_R, t_{Ni}, t_{Ki}, T). \quad (14)$$

Регуляторы, использующие формы напряжений, описываемые ФСПИ, как показывает анализ патентных источников, находят применение благодаря широкому диапазону, высокой точности регулирования и достаточно простым алгоритмам управления. Они реализуют принцип временной вариации компонентов управляющего кода регулятора напряжения [3-5].

Зависимость напряжения при времявариантном регулировании может быть описана с помощью функции селекции периодического интервала

$$u(G, t) = [k_0 + \Delta k \cdot d(Z) \cdot \text{sp}(T_R, T_H(V), T_K, t)] E \sin(\omega t) \quad (15)$$

где G – управляющий двоичный код, представленный в виде трех компонентов $G = (Z \ Y \ X)$ или $G_{\langle n+m+p \rangle} = [Z_{\langle n \rangle} Y_{\langle m \rangle} X_{\langle p \rangle}]$.

Компонент $Z = (z_n \ z_{n-1} \ \dots \ z_1)$ определяет начальный уровень, относительно которого осуществляется дискретное приращение угла управления тиристора, при этом выполняется условие $k_1 < k_2 < \dots < k_N$.

Компоненты $Y = (g_{m+p} \ g_{m+p-1} \ \dots \ g_{m+1}) = (y_p \ y_{p-1} \ \dots \ y_1)$

и $X = (g_m \ g_{m-1} \ \dots \ g_1) = (x_m \ x_{m-1} \ \dots \ x_1)$, образующие

компоненту $V = (Y \ X)$, осуществляющую временную вариацию и устанавливающую общую длительность пребывания регулятора на начальном уровне, определяя момент переключения ключей на ближайший больший уровень.

При этом компонент Y регулирует мощность в нагрузке полупериодами сети $T/2$, а компонент X – частями полупериода, кратными $T/2^{m-1}$. Таким образом, управляющий код V представим в виде двух составляющих: Y – количество полупериодов сетевого напряжения и X – код характеризующий фазовый угол внутри полупериода

$$V_{\langle m+p \rangle} = [Y_{\langle m \rangle} X_{\langle p \rangle}].$$

Оператор d в выражении (15) выполняет преобразование двоичного позиционного кода в десятичное число. При этом параметры этой функции определяются компонентами управляющего кода G :

Рассмотрим некоторые примеры применения ФСПИ. На рис. 1 представлен пример формы для регулятора, использующего длительный цикл регулирования $T_R = \frac{T}{2} 2^m = T 2^{m-1}$. Ему соответствуют компоненты управляющего кода $Z=[1]$, $Y=[1]$, $X=[0 \ 1 \ 1]$.

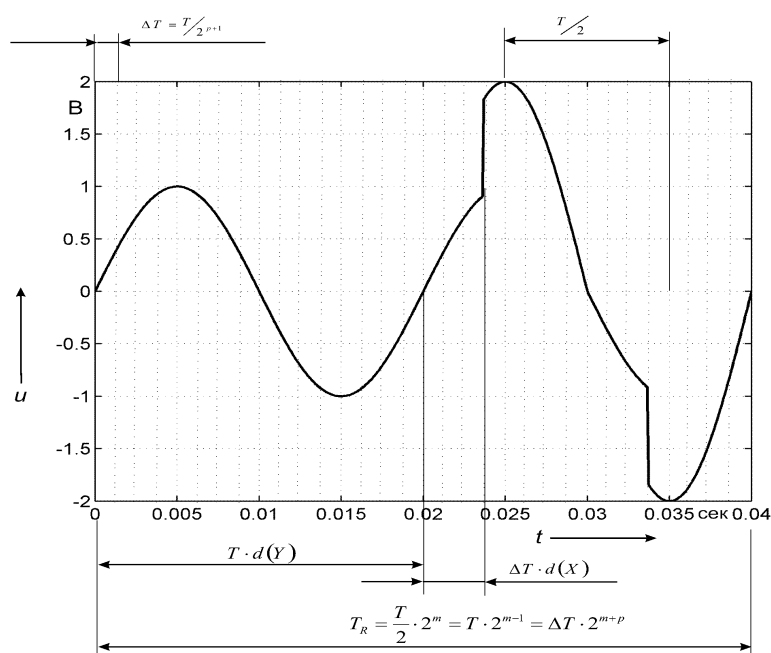


Рис. 1. Форма напряжения регулятора для компонентов управляющего кода $Z=[0]$, $Y=[1]$, $X=[0 \ 1 \ 1]$

На диаграммах, приведенных на рис. 2, проиллюстрирован процесс формирования из синусоидального напряжения сети (первая диаграмма) с помощью ФСПИ (вторая диаграмма) этого напряжения (третья диаграмма). Форма напряжения для простейшего тиристорного регулятора выражается через ФСПИ при компонентах $Z=[0]$, $Y=[0]$, $X=[0 \ 1 \ 1]$.

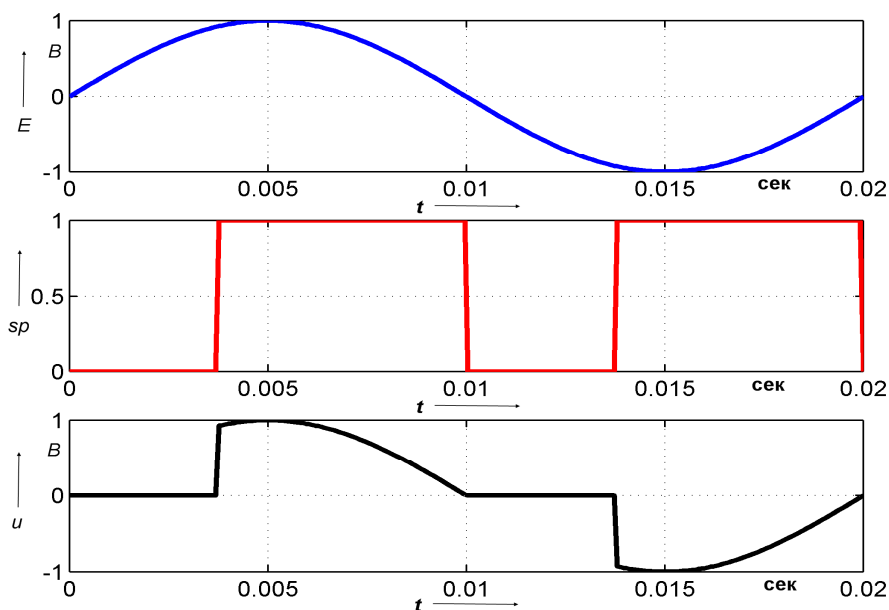


Рис. 2. Процесс формирования выходного напряжения регулятора

Таким образом, применение функции селекции периодического интервала позволяет предложить универсальное описание формы напряжения регулятора. С помощью моделирования ФСПИ в среде MATLAB были использованы различные варианты ее модификации, имеющие практическое применение при моделировании процессов регулирования электрических параметров в энергетических установках.

Вывод

Функция селекции периодического интервала позволяет упростить формализацию и получить решение следующих задач цифрового регулирования:

- 1) построение временных диаграмм напряжений и мощностей;
- 2) определение зависимости действующего значения напряжения, компонентов его спектра и степени искажения от управляющего кода;
- 3) оптимизации временных параметров коммутации по различным критериям (равномерности энергопередачи в регуляторах мощности, минимального уровня искажений в преобразователях частоты, минимального «провала» напряжения сети в многозонных регуляторах с согласованным управлением и т.д.).

Список литературы

1. Юдин В.В. Применение логического анализа описания технических объектов для их классификации // Рыбинск: РАТИ, 1986. – 9 с. – Деп. в ВИНТИ.
2. Юдин В.В., Кузнецов А.В. Моделирование информационных потоков в системах управления созданием технических объектов // Известия ТулГУ: Технологическая системотехника: материалы II междунар. электронн. науч.-техн. конф. – Тула: ТулГУ, 2003. – Вып.1. – С. 242–247.
3. А. с. 1684858 СССР, МКИ Н 02 J 3/18. Устройство для регулирования реактивной мощности // Горшечников В.А., Юдин В.В., Манин А.В. // Открытия. Изобретения, 1991, – № 38.
4. Манин А.В., Вайнер Д.Б. Быстродействующее симметрирующее устройство на базе магнитовентильных элементах одноплечевой нагрузки // Annali d'Italia.– N 16.– Vol – 1 2021. – С. 74–79.
5. Manin A.V., Vayner D.B. System of forming control signals by correction devices with creation of neural network patterns based on matrix analysis // E3S Web of Conferences 266, 04010 (2021). Topical issues 2021.

Манин Алексей Васильевич – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры электротехники и промышленной электроники ФГБОУ ВО «Рыбинский государственный авиационный технический университет имени П. А. Соловьёва». E-mail: manin-rgata@mail.ru Телефон +7-920-118-84-42

Юдин Виктор Васильевич – доктор технических наук, профессор кафедры электротехники и промышленной электроники ФГБОУ ВО «Рыбинский государственный авиационный технический университет имени П. А. Соловьёва». E-mail: YudinVV47@mail.ru

Юдин Алексей Викторович – доктор технических наук, заведующий кафедрой электротехники и промышленной электроники ФГБОУ ВО «Рыбинский государственный авиационный технический университет имени П. А. Соловьёва». E-mail: judinav@mail.ru

ОПТИМИЗАЦИЯ ПУСКА РАСПРЕДЕЛЕННОГО АСИНХРОННОГО ЭЛЕКТРОПРИВОДА НА ОСНОВЕ СХЕМНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Л. Н. Канов

Предложена методика оптимизации переходного процесса пуска распределенного асинхронного электропривода при питании двух удаленных друг от друга электродвигателей от одного силового преобразователя через систему кабелей. Методика основана на схемной модели системы распределенного электропривода, включающей модели электродвигателей и длинных кабелей, что позволяет применить процедуры оптимизации, не требующие вычисления производных критерия качества. Выполнена оптимизация процесса одновременного пуска двигателей с целью одновременного достижения ими рабочей скорости. Подобный процесс актуален при работе длинных конвейерных погрузочно–разгрузочных линий.

The method of optimization of transient of starting of the up-diffused asynchronous electromechanic is offered at the feed of two remote from each other electric motors from one power transformer through the system of cables. A method is based on the scheme model of the system of the up-diffused electromechanic, including the models of electric motors and long cables, that allows to apply procedures optimizations, not requiring the calculation of derivatives of criterion of quality. Optimization of process of the simultaneous starting of engines is executed with the purpose of simultaneous achievement by them to working speed. A similar process is actual during work of long conveyor loading – unloading lines.

О математических моделях электрических сетей. В портовых и судовых погрузочно–разгрузочных системах, конвейерных линиях, в системах электроприводов горных машин задача разработки алгоритмов для автономного преобразователя, обеспечивающего управление группой электродвигателей, удаленных как от самого преобразователя, так и друг от друга, является актуальной. Возникает необходимость построения математической модели сети сложной конфигурации с нагрузкой в виде

асинхронных электродвигателей и решения задачи управления состоянием электродвигателей при формировании удаленных от объектов управления управляющих воздействий от одного преобразователя.

В [1, 2] предложена математическая модель системы преобразования электроэнергии с асинхронными двигателями, в которой кабели заменяются их сопротивлениями и индуктивностями. Представляет интерес учет емкости кабелей. Актуально также построение оптимального управления двигателями, когда их скорости в процессе пуска должны изменяться одинаково, чтобы достижение рабочей скорости происходило одновременно. Особенно актуально это для конвейерных электроприводов.

Математическое описание процессов, происходящих в подобных системах даже в линейном варианте, отличается сложностью и ограничивает возможности анализа динамических режимов их работы [3 – 5]. Поэтому вопрос анализа динамических процессов в распределенных системах электроснабжения на основе их схемных моделей является актуальным.

Целью настоящей работы является построение оптимального управления группой из двух удаленных электродвигателей для их одновременного синхронного пуска на основе схемной модели системы электроснабжения, когда критерием оптимальности является разность в моментах выхода двигателей на стационарный режим.

Схемная модель асинхронного электропривода. Для целей исследования применим уравнения асинхронных двигателей относительно магнитных потокосцеплений в ортогональных координатных осях d, q , вращающихся с синхронной скоростью ω при опережающем вращении поперечной оси [4]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\psi_{sd}}{dt} &= U_{sd} + \omega_s \psi_{sq} - r_s i_{sd}; & \frac{d\psi_{sq}}{dt} &= U_{sq} - \omega_s \psi_{sd} - r_s i_{sq}; \\ \frac{d\psi_{rd}}{dt} &= (\omega - p\Omega) \psi_{rq} - r_r i_{rd}; & \frac{d\psi_{rq}}{dt} &= -(\omega - p\Omega) \psi_{rd} - r_r i_{rq}; \\ J \frac{d\Omega}{dt} &= -k_{TP} \omega_r - M_H(\omega_r) + M_{\Sigma M} \end{aligned} \right\}. \quad (1)$$

В этих формулах обозначены:

$$\psi_{sd} = L_s i_{sd} + M_{sr} i_{rd}, \quad \psi_{rd} = L_r i_{rd} + M_{sr} i_{sd}, \quad \psi_{sq} = L_s i_{sq} + M_{sr} i_{rq},$$

$$\Psi_{rq} = L_r i_{rq} + M_{sr} i_{sq}$$

– составляющие магнитных потоков сцеплений обмоток статора и ротора вдоль продольной и поперечной координатных осей;

$U_{sd}, U_{sq}, i_{sd}, i_{sq}, i_{rd}, i_{rq}$ – составляющие напряжения и токов фазы обмоток статора и ротора вдоль продольной и поперечной координатных осей;

r_s, r_r, L_s, L_r – активные сопротивления и индуктивности фазы обмоток статора и ротора;

M_{sr} – коэффициент взаимной индукции обмоток фаз статора и ротора;

p – число пар полюсов обмотки статора; k_{TP} – коэффициент пропорциональности между моментом сопротивления трения и скоростью вращения двигателя; $M_H(\Omega)$ – момент нагрузки на валу двигателя;

$M_{\text{ЭМ}} = M_{sr} \cdot (i_{sq} i_{rd} - i_{sd} i_{rq})$ – электромагнитный вращающий момент двигателя; J – момент инерции ротора с учетом момента инерции нагрузки; ω – синхронная частота напряжения статора; Ω – угловая скорость вращения ротора.

Для удобства решения представим уравнения двигателя 1 в форме токов. После подстановки потоков сцеплений в уравнения (1) получаем

$$\left. \begin{aligned} U_{s1d} &= r_{s1} i_{s1d} + L_{s1} \frac{di_{s1d}}{dt} + M_{sr1} \frac{di_{r1d}}{dt} - (L_{s1} i_{s1q} + M_{sr1} i_{r1q}) \omega; \\ U_{s1q} &= r_{s1} i_{s1q} + L_{s1} \frac{di_{s1q}}{dt} + M_{sr1} \frac{di_{r1q}}{dt} + (L_{s1} i_{s1d} + M_{sr1} i_{r1d}) \omega; \\ 0 &= r_{r1} i_{r1d} + L_{r1} \frac{di_{r1d}}{dt} + M_{sr1} \frac{di_{s1d}}{dt} - (L_{r1} i_{r1q} + M_{sr1} i_{s1q}) \cdot (\omega - p\Omega_1); \\ 0 &= r_{r1} i_{r1q} + L_{r1} \frac{di_{r1q}}{dt} + M_{sr1} \frac{di_{s1q}}{dt} + (L_{r1} i_{r1d} + M_{sr1} i_{s1d}) \cdot (\omega - p\Omega_1) \end{aligned} \right\}. \quad (2)$$

Схемная модель двигателя 1, построенная по уравнениям (2) на основании первого закона Кирхгофа, изображена на рис.1.

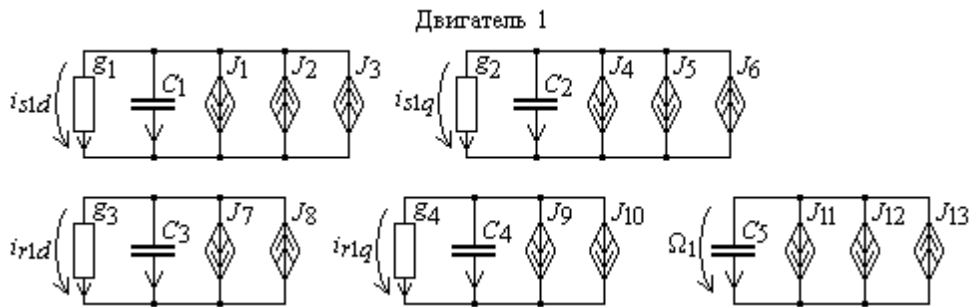


Рис.1. Схемная модель двигателя 1

Первые четыре схемы представляют уравнения (2), последняя – пятое уравнение механической динамики ротора в системе (1). Напряжения на проводимостях численно равны составляющим токов статора и ротора; напряжение на емкости C_5 соответствует угловой скорости вращения первого двигателя. Проводимости g_1, g_2 численно равны сопротивлению r_{s1} обмотки фазы статора первого двигателя. Емкости C_1, C_2 численно равны индуктивности L_{s1} обмотки фазы статора первого двигателя; емкости C_3, C_4 численно равны индуктивности L_{r1} обмотки фазы ротора первого двигателя; емкость C_5 равна моменту инерции J_1 ротора двигателя.

Управляемые источники двигателя 1 имеют вид: $J_1 = M_{sr1} \frac{di_{r1d}}{dt}$;

$$J_2 = \omega(L_{s1}i_{s1q} + M_{sr1}i_{r1q}); \quad J_3 = U_{s1d}; \quad J_6 = U_{s1q}; \quad J_4 = M_{sr1} \frac{di_{r1q}}{dt};$$

$$J_5 = \omega(L_{s1}i_{s1d} + M_{sr1}i_{r1d}); \quad J_7 = M_{sr1} \frac{di_{s1d}}{dt}; \quad J_8 = (\omega - p\Omega_1)(L_{r1}i_{r1q} + M_{sr1}i_{s1q});$$

$$J_{11} = k_{TP1}\Omega_1; \quad J_9 = M_{sr1} \frac{di_{s1q}}{dt}; \quad J_{10} = (\omega - p\Omega_1)(L_{r1}i_{r1d} + M_{sr1}i_{s1d}); \quad J_{12} = M_{H1}(\Omega_1);$$

$$; \quad J_{13} = M_{sr1}(i_{s1q}i_{r1d} - i_{s1d}i_{r1q}).$$

Полностью аналогичный вид имеет схемная модель двигателя 2, рис.2, с очевидной заменой индекса 1 на 2 в обозначениях токов, скорости, напряжений и конструктивных параметров двигателя: $g_5 = g_6 = r_{s2}$; $g_7 = g_8 = r_{r2}$; $C_6 = C_7 = L_{s2}$; $C_8 = C_9 = L_{r2}$; $C_{10} = J_2$ (в последней формуле J_2 означает момент инерции ротора второго двигателя).

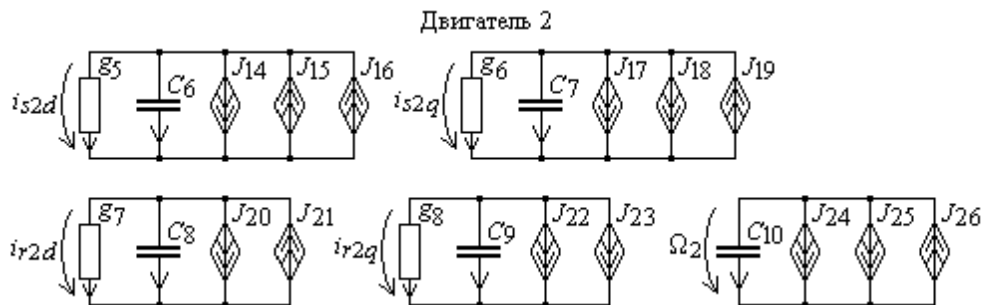


Рис.2. Схемная модель второго асинхронного электродвигателя

Управляемые источники двигателя 2 имеют вид: $J_{14} = M_{sr2} \frac{di_{r2d}}{dt}$;

$$\begin{aligned}
J_{15} &= \omega(L_{s2}i_{s2q} + M_{sr2}i_{r2q}); & J_{16} &= U_{s2d}; & J_{19} &= U_{s2q}; & J_{17} &= M_{sr2} \frac{di_{r2q}}{dt}; \\
J_{18} &= \omega(L_{s2}i_{s2d} + M_{sr2}i_{r2d}); & J_{26} &= M_{sr2}(i_{s2q}i_{r2d} - i_{s2d}i_{r2q}); & J_{20} &= M_{sr2} \frac{di_{s2d}}{dt}; \\
J_{21} &= (\omega - p\Omega_2)(L_{r2}i_{r2q} + M_{sr2}i_{s2q}); & J_{24} &= k_{TP2}\Omega_2; & J_{22} &= M_{sr2} \frac{di_{s2q}}{dt}; \\
J_{23} &= (\omega - p\Omega_2)(L_{r2}i_{r2d} + M_{sr2}i_{s2d}); & J_{25} &= M_{H2}(\Omega_2).
\end{aligned}$$

Схемные модели кабельных линий. Рассмотрим систему распределенного асинхронного электропривода, получающую питание от одного инвертора напряжения, показанную на рис.3. Два одинаковых асинхронных двигателя получают питание от инвертора напряжения через кабели с длинами l_1, l_2, l_0 . Кабели характеризуются индуктивностями L_{π} и сопротивлениями r_{π} жил, а также сопротивлениями $R(t)$ и емкостями C жил относительно оболочки.

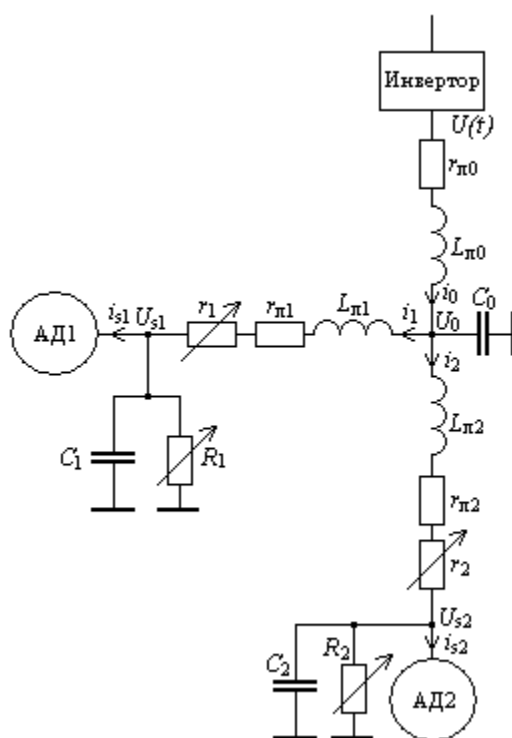


Рис.3. Схема замещения системы распределенного электропривода

На рис.3 обозначены:

$r_{\pi 0}, r_{\pi 1}, r_{\pi 2}$ – активные сопротивления жил кабеля;

$L_{\pi 0}, L_{\pi 1}, L_{\pi 2}$ – индуктивности жил кабеля;

C_0, C_1, C_2 – емкости жил кабеля относительно оболочки;

$r_1(t), r_2(t)$ – последовательные переменные сопротивления;

$R_1(t)$, $R_2(t)$ – параллельные переменные сопротивления.

Изменение переменных последовательных сопротивлений $r_1(t)$, $r_2(t)$ позволяет «включать» или «выключать» соответствующие кабели. Изменение переменных параллельных сопротивлений $R_1(t)$, $R_2(t)$ позволяет «включать» или «выключать» соответствующие асинхронные двигатели: малые величины $R_1(t)$, $R_2(t)$ закорачивают двигатели, большие величины – «разрешают» двигателям получать питание.

Получим схемную модель жилы кабеля l_0 , соединяющего выход преобразователя частоты и точку 0 разветвления. Уравнение линии по второму закону Кирхгофа имеет вид

$$U - U_0 = r_{л0} i_0 + L_{л0} \frac{di_0}{dt},$$

где U и U_0 – напряжения на выходе инвертора и на точке разветвления 0.

Представим в последнем уравнении напряжения U , U_0 и ток i_0 через ортогональные составляющие по продольной и поперечной осям $U_d, U_q, U_{0d}, U_{0q}, i_{0d}, i_{0q}$ и угол рассогласования [X.4]

$$\begin{aligned} U_d \cos \gamma - U_q \sin \gamma - (U_{0d} \cos \gamma - U_{0q} \sin \gamma) = \\ = r_{л0} \cdot (i_{0d} \cos \gamma - i_{0q} \sin \gamma) + L_{л0} \cdot \frac{d}{dt} (i_{0d} \cos \gamma - i_{0q} \sin \gamma) \end{aligned}$$

После преобразования получаем два уравнения для составляющих напряжений и тока в линии, соединяющей выход инвертора и точки разветвления

$$\left. \begin{aligned} U_d - U_{0d} &= r_{л0} i_{0d} + L_{л0} \frac{di_{0d}}{dt} - L_{л0} i_{0q} \omega; \\ U_q - U_{0q} &= r_{л0} i_{0q} + L_{л0} \frac{di_{0q}}{dt} + L_{л0} i_{0d} \omega. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Схемная модель уравнений (3) изображена на рис.4.

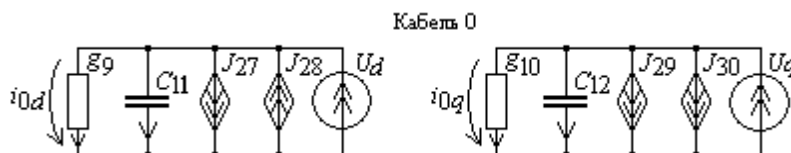


Рис.4. Схемная модель кабеля, соединяющего инвертор и точку разветвления

Проводимости $g_9 = g_{10}$ численно равны сопротивлению $r_{л0}$ жилы кабеля; емкости $C_{11} = C_{12}$ равны индуктивности кабеля $L_{л0}$. Напряжения

на проводимостях соответствуют составляющим тока в кабеле; независимые источники тока численно равны составляющим напряжения U_d и U_q на выходе инвертора. Управляемые источники имеют вид: $J_{27} = L_{\lambda 0} i_{0q} \omega$; $J_{28} = U_{0d}$; $J_{29} = L_{\lambda 0} i_{0d} \omega$; $J_{30} = U_{0q}$.

Полностью аналогично получаем уравнения для составляющих напряжения и тока в линии 1, соединяющей точку разветвления 0 с напряжением U_0 и двигатель 1 с напряжением U_{s1} :

$$\left. \begin{aligned} U_{0d} - U_{s1d} &= (r_1(t) + r_{\lambda 1}) i_{1d} + L_{\lambda 1} \frac{di_{1d}}{dt} - L_{\lambda 1} i_{1q} \omega; \\ U_{0q} - U_{s1q} &= (r_1(t) + r_{\lambda 1}) i_{1q} + L_{\lambda 1} \frac{di_{1q}}{dt} + L_{\lambda 1} i_{1d} \omega. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Уравнения для составляющих напряжения и тока i_2 в линии 2, соединяющей точку разветвления 0 с напряжением U_0 и двигатель 2 с напряжением U_{s2} получаем аналогично (4) заменой индекса 1 на индекс 2

$$\left. \begin{aligned} U_{0d} - U_{s2d} &= (r_2(t) + r_{\lambda 2}) i_{2d} + L_{\lambda 2} \frac{di_{2d}}{dt} - L_{\lambda 2} i_{2q} \omega; \\ U_{0q} - U_{s2q} &= (r_2(t) + r_{\lambda 2}) i_{2q} + L_{\lambda 2} \frac{di_{2q}}{dt} + L_{\lambda 2} i_{2d} \omega. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Схемные модели уравнений (4) и (5) изображены на рис.5.

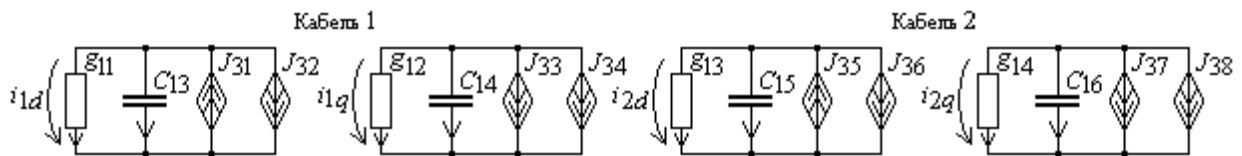


Рис.5. Схемные модели кабелей, соединяющих точку разветвления с двигателями

Проводимости $g_{11} = g_{12}$ и $g_{13} = g_{14}$ численно равны сопротивлениям $r_{\lambda 1} + r_1$ и $r_{\lambda 2} + r_2$ жил кабелей 1 и 2; емкости $C_{13} = C_{14}$ и $C_{15} = C_{16}$ численно равны индуктивностям кабелей $L_{\lambda 1}$ и $L_{\lambda 2}$. Напряжения на проводимостях соответствуют составляющим токов. Управляемые источники имеют вид: $J_{31} = L_{\lambda 1} i_{1q} \omega$; $J_{32} = U_{s1d} - U_{0d}$; $J_{33} = L_{\lambda 1} i_{1d} \omega$; $J_{34} = U_{s1q} - U_{0q}$; $J_{35} = L_{\lambda 2} i_{2q} \omega$; $J_{36} = U_{s2d} - U_{0d}$; $J_{37} = L_{\lambda 2} i_{2d} \omega$; $J_{38} = U_{s2q} - U_{0q}$.

Далее получим уравнения для напряжений в узле 0 разветвления U_0 и на статорах двигателей U_{s1} и U_{s2} . Первый закон Кирхгофа для узла 0 имеет вид

$$i_0 = i_1 + i_2 + C_0 \frac{dU_0}{dt}.$$

В ортогональных dq – координатах получаем для составляющих токов и напряжения в узле разветвления 0

$$\left. \begin{aligned} i_{0d} &= i_{1d} + i_{2d} + C_0 \frac{dU_{0d}}{dt} - C_0 U_{0q} \omega; \\ i_{0q} &= i_{1q} + i_{2q} + C_0 \frac{dU_{0q}}{dt} + C_0 U_{0d} \omega. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Аналогично, в соответствии с первым законом Кирхгофа получаем уравнения для напряжений и токов в узлах 1 и 2 на статорах двигателей

$$\begin{aligned} i_1 &= i_{s1} + \frac{U_{s1}}{R_1(t)} + C_1 \frac{dU_{s1}}{dt}; \\ i_2 &= i_{s2} + \frac{U_{s2}}{R_2(t)} + C_2 \frac{dU_{s2}}{dt}. \end{aligned}$$

В этих формулах слагаемые $\frac{U_{s1}}{R_1(t)}$ и $\frac{U_{s2}}{R_2(t)}$ дают токи в регулирующих сопротивлениях $R_1(t), R_2(t)$ на статорах двигателей. Для продольных и поперечных составляющих напряжений и токов в узлах 1 и 2 получаем уравнения

$$\left. \begin{aligned} i_{1d} &= i_{s1d} + \frac{U_{s1d}}{R_1(t)} + C_1 \frac{dU_{s1d}}{dt} - C_1 U_{s1q} \omega; \\ i_{1q} &= i_{s1q} + \frac{U_{s1q}}{R_1(t)} + C_1 \frac{dU_{s1q}}{dt} + C_1 U_{s1d} \omega; \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} i_{2d} &= i_{s2d} + \frac{U_{s2d}}{R_2(t)} + C_2 \frac{dU_{s2d}}{dt} - C_2 U_{s2q} \omega; \\ i_{2q} &= i_{s2q} + \frac{U_{s2q}}{R_2(t)} + C_2 \frac{dU_{s2q}}{dt} + C_2 U_{s2d} \omega. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Схемные модели уравнений (6) – (8) изображены на рис.6.

Проводимости $g_{15} = g_{16}$ и $g_{17} = g_{18}$ численно равны проводимостям $\frac{1}{R_1}$ и $\frac{1}{R_2}$; емкости $C_{17} = C_{18}$, $C_{19} = C_{20}$ и $C_{21} = C_{22}$ равны соответственно емкостям C_0 , C_1 и C_2 на рис.2. Напряжения на проводимостях соответствуют составляющим напряжений на двигателях; напряжения на емкостях C_{17} , C_{18} соответствуют составляющим напряжения в узле 0.

Управляемые источники имеют вид: $J_{39} = C_0 U_{0q} \omega$; $J_{40} = i_{1d} + i_{2d} - i_{0d}$; $J_{41} = C_0 U_{0d} \omega$; $J_{41} = i_{1q} + i_{2q} - i_{0q}$; $J_{43} = C_1 U_{s1q} \omega$; $J_{44} = i_{s1d} - i_{1d}$; $J_{45} = C_1 U_{s1d} \omega$; $J_{46} = i_{s1q} - i_{1q}$; $J_{47} = C_2 U_{s2q} \omega$; $J_{48} = i_{s2d} - i_{2d}$; $J_{49} = C_2 U_{s2d} \omega$; $J_{50} = i_{s2q} - i_{2q}$.

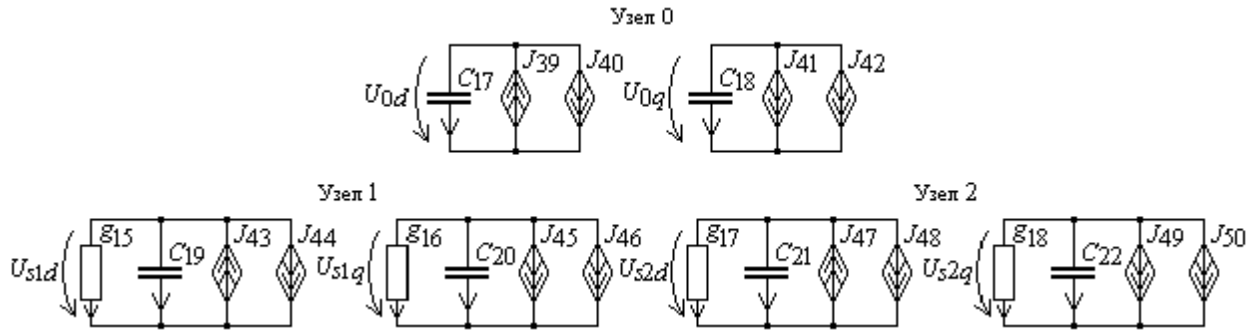


Рис.6. Схемные модели режимов в узлах 0, 1 и 2 кабельной системы

Полученная схемная модель рассматриваемой системы распределенного электропривода по рис. 1, 2, 4 – 6 пригодна для анализа основных статических и динамических режимов и может рассчитываться программным обеспечением, допускающим использование управляемых источников тока.

Неуправляемый процесс пуска системы двигателей. Неуправляемый процесс пуска получаем расчетом схемной модели при неизменном напряжении инвертора $U = 380$ В и частоте $\omega = 314$ с⁻¹. Параметры асинхронных двигателей небольшой мощности принимаем следующими: $r_{s1} = r_{s2} = 0,272$ Ом; $r_{r1} = r_{r2} = 0,191$ Ом; $L_{s1} = L_{s2} = 0,049$ Гн; $L_{r1} = L_{r2} = 0,048$ Гн; $M_{sr1} = M_{sr2} = 0,046$ Гн; $J_1 = J_2 = 0,5$ кг·м²; $k_{H1} = k_{H2} = 0,1$. Параметры кабельных линий принимаем такими: $r_{л0} = 0,125$ Ом; $L_{л0} = 0,00159$ Гн; $C_0 = 176$ мкФ; $r_{л1} = 0,5$ Ом; $L_{л1} = 0,003185$ Гн; $C_1 = 239$ мкФ; $r_{л2} = 0,125$ Ом; $L_{л2} = 0,00159$ Гн; $C_2 = 47,7$ мкФ. Продольные переменные сопротивления полагаем малыми: $r_1(t) = r_2(t) \approx 0$; поперечные переменные сопротивления – большими: $R_1(t) = R_2(t) = 10^4$ Ом.

Таким образом, напряжение и ток инвертора U, i_0 через линию 0, преодолевая сопротивление и индуктивность кабеля 0, попадают в узел разветвления 0 и далее расходятся по линиям 1 и 2 к двигателям: i_1, i_2, U_{s1}, U_{s2} . Так как параметры линий из-за разной длины существенно отличаются, пуск двигателей происходит неодинаково за разное время, рис.7.

Рис. 7 показывает, что пусковые моменты двигателей отличаются. Напряжение, ток и момент первого двигателя меньше, чем второго, поэтому время запуска первого двигателя значительно больше. Это неблагоприятно сказывается на работе всей системы электропривода.

Предлагаемый способ оптимизации процесса пуска основан на поочередном подключении двигателей к инвертору на равные небольшие

интервалы Δt . В течение одного интервала к инвертору подключается первый двигатель установкой сопротивлений резисторов $r_1(t) = 0$, $R_1(t) = 10^4 \text{ Ом}$. Инвертор на этом интервале обеспечивает напряжение $U = U_1$. Второй двигатель в это время закорачивается на сопротивление $R_2(t) \approx 0$, и устанавливается сопротивление продольного резистора $r_2(t) = 10^4 \text{ Ом}$.

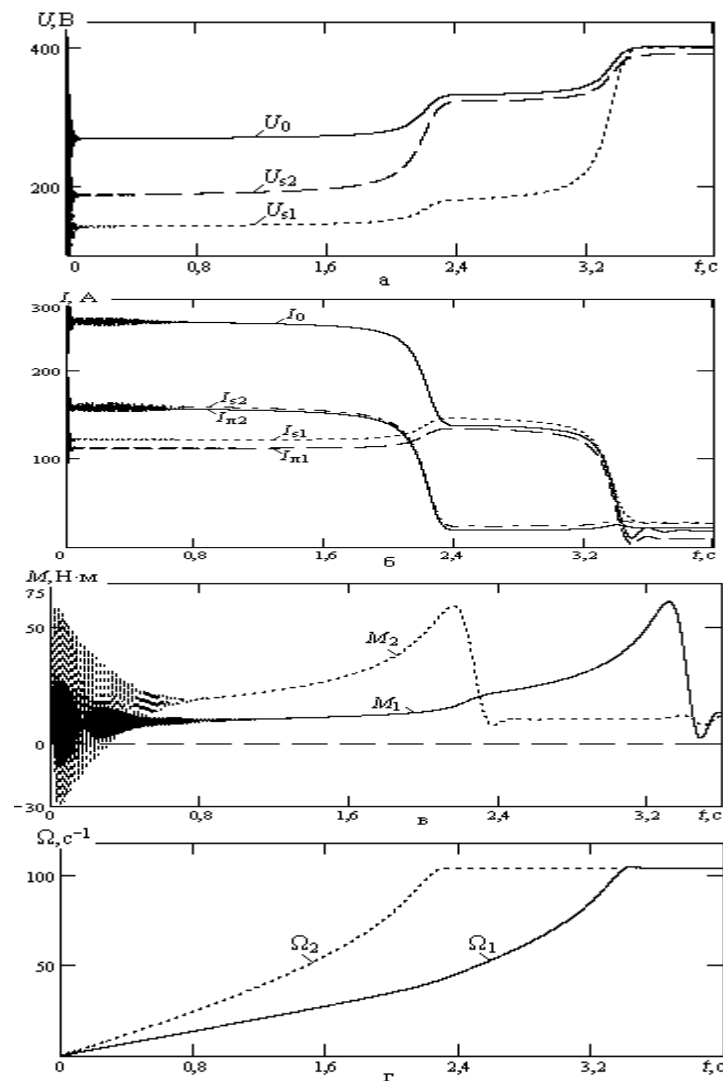


Рис.7. Неуправляемый пуск распределенного электропривода:

- а) напряжения в узле разветвления и на статорах двигателей;
- б) входной ток и токи линий и статоров двигателей;
- в) вращающие моменты двигателей; г) скорости двигателей

В следующий интервал к инвертору подключается второй двигатель установкой сопротивлений резисторов $r_2(t) = 0$ и $R_2(t) = 10^4 \text{ Ом}$. Инвертор обеспечивает выходное напряжение $U = U_2$. Первый двигатель на это

время закорачивается на небольшое сопротивление $R_1(t) \approx 0$, а сопротивление последовательного резистора устанавливается максимальным $r_1(t) = 10^4$ Ом. Частота инвертора остается на уровне $\omega = 314$ с⁻¹. Изменяя напряжения U_1 и U_2 , регулируем пусковых моментов двигателей практически независимо друг от друга и обеспечиваем одинаковое время разгона двигателей. Этим достигается плавный, без рывков переходный процесс системы распределенного электропривода. Интервал времени задаем $\Delta t = 5$ мс.

Выбор напряжений U_1 и U_2 выполняем симплекс – методом Нелдера Мида [6] на плоскости напряжений U_1 и U_2 , не требующим подсчета производных. Идея метода состоит в сравнении значений критерия качества в вершинах симплекса. В качестве критерия оптимальности принимаем разность между временами достижения скоростями двигателей установившегося значения $\Delta T = t_1 - t_2$. Необходимо, чтобы двигатели одновременно достигали заданной скорости, т.е. чтобы разность $\Delta T \rightarrow 0$ и $t_1 = t_2$. Величина моментов t_1 и t_2 не задается.

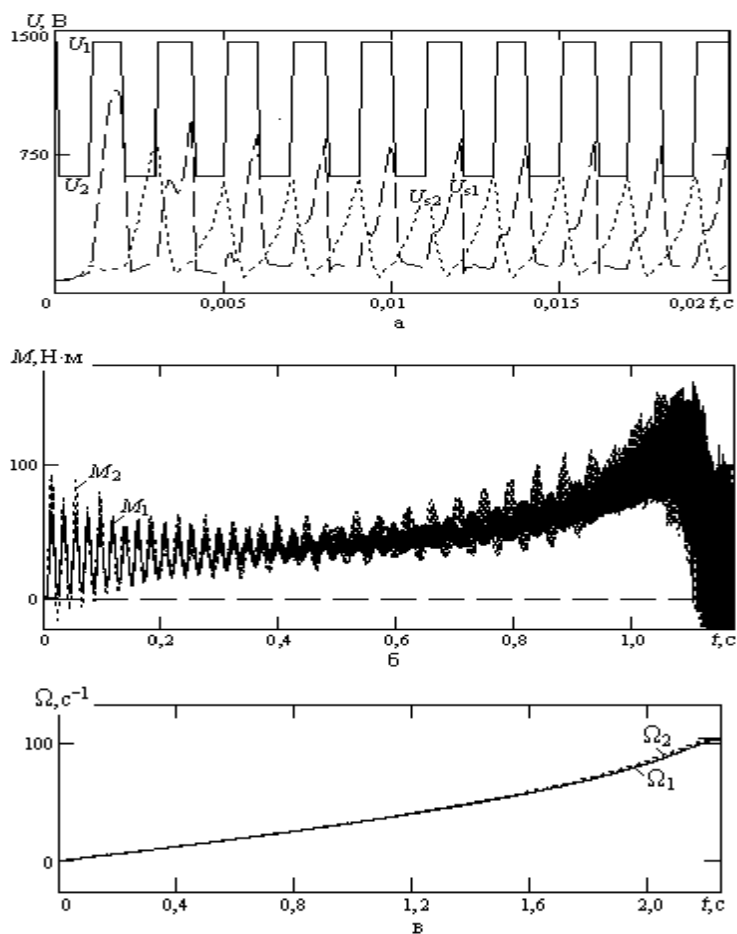


Рис.8. Переходный процесс оптимального пуска системы двигателей:

- а) напряжения на точке разветвления и на статорах двигателей;
- б) вращающие моменты двигателей; в) скорости двигателей

Оптимальное значение U_1 и U_2 находится при перемещении вершин симплекса в направлении минимальной точки критерия итерационной процедурой. Расчетом схемной модели определяем значения критерия ΔT в точках на вершинах исходного симплекса с координатами: $U_{11} = 650\text{В}$, $U_{21} = 1225\text{В}$, $U_{12} = 450\text{В}$, $U_{22} = 1250\text{В}$, $U_{13} = 500\text{В}$, $U_{23} = 1400\text{В}$: $\Delta T_1(U_{11}, U_{21}) = 0,4\text{с}$; $\Delta T_2(U_{12}, U_{22}) = 0,57\text{с}$; $\Delta T_3(U_{13}, U_{23}) = 0,41\text{с}$.

После трех итераций в точке с координатами $U_{15} = 625\text{В}$, $U_{25} = 1450\text{В}$ получено значение критерия $\Delta T_5 = 0,012\text{с}$, что с достаточной степенью точности дает оптимальный переходный процесс одновременного пуска двух двигателей с малой разностью длительностей пуска, которые составляют в этой точке $T_5 \approx 2,05\text{с}$. Таким образом, получаем необходимые значения U_1 и U_2 для одновременного разгона двигателей за приемлемое время. Напряжение инвертора задаем в соответствии с условием

$$U = \text{if}(500 \cdot \sin(3140t) > 0, \text{ then } U = U_1, \text{ else } U = U_2).$$

Графики напряжений, моментов и скоростей оптимального процесса пуска изображены на рис.8. Графики напряжений изображены на одном периоде промышленной частоты и показывают результат модуляции действующих напряжений на статорах. Сложная форма этих напряжений является следствием переходных процессов в кабелях.

Моменты двигателей сопровождаются колебаниями, которые при выходе на стационарный режим исчезают. Графики скоростей двигателей практически сливаются, что показывает высокую степень синхронности переходного процесса пуска.

При оптимизации начальный симплекс на плоскости напряжений был выбран произвольно. При выборе другой формы начального симплекса процесс оптимизации приводит в иную оптимальную точку с другой длительностью синхронного процесса пуска. Однако в любой другой оптимальной точке пуск двигателей заканчивается одновременно. При увеличении напряжений длительность пуска пропорционально сокращается. Оптимальные значения напряжений связаны практически

линейной зависимостью, что облегчает оптимальную настройку инвертора.

Выводы

1. Показана возможность управления состоянием группы асинхронных двигателей, находящихся в сети электроснабжения, путем формирования необходимых величин электромагнитных моментов при помощи одного инвертора. **2.** Применение схемных моделей позволяет определять конфигурацию системы электроснабжения, длины кабелей, количество и параметры двигателей, последовательность их включения или отключения, выполнять оптимизацию управления приводами погрузочно–разгрузочных комплексов, учитывать характер нагрузки на двигателях, моделировать режимы работы портовых и судовых механизмов. **3.** Учет изменения активных и индуктивных сопротивлений роторов вследствие вытеснения тока и насыщения цепей намагничивания также может быть выполнен в предложенной схемной модели распределенного электропривода на основе зависимостей этих параметров от скольжения.

Список литературы

1. Ещин Е.К. Модель асинхронного электродвигателя в системе электроснабжения // Электротехника, 2002. – №1. – С.40–43.
2. Усихин В.Н. О влиянии нагрузки на токи в электроустановках переменного тока до 1 кВ // Промышленная энергетика.– 2001.– № 1.– С.29– 33.
3. Копылов И.П. Математическое моделирование электрических машин. – М.: Изд-во «Высшая школа», 2001. – 431 с.
4. Ковач К., Рац И. Переходные процессы в машинах переменного тока. – М., Л.: Изд-во «Высшая школа», 2001. – 528 с.
5. Ещин Е.К. Управление состоянием группы асинхронных электродвигателей в сети электроснабжения // Изв. ВУЗов. Электромеханика. – 2020. – Т.63. – № 1. – С.62–68.
6. Банди Б. Методы оптимизации. Вводный курс. – М.: Изд-во «Радио и связь», 1988. – 128 с.

Канов Лев Николаевич – к.т.н., доц. кафедры Судового электрооборудования Севастопольского государственного университета. 299053, Севастополь, ул. Университетская, 33, ауд. А302.
E-mail: Inkanov48@mail.ru

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

ИССЛЕДОВАНИЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ТОКА ПРИ КУЛОНОВСКОЙ КАЛИБРОВКЕ

Е. Н. Меньшов

В результате теоретических исследований фундаментальных уравнений ЭМП сосредоточено внимание на кулоновской калибровке, раскрыт её фундаментальный резерв в рамках классической теории поля и уделено внимание дополнительному току, который считался фиктивным, и ранее не проводилось глубокого исследования этого тока. Этот ток компенсирует орбитальный электронный ток, но не влияет на значение орбитального момента импульса заряженной частицы.

As a result of theoretical studies of the fundamental equations of EMF, attention is focused on Coulomb calibration, its fundamental reserve is revealed within the framework of classical field theory and attention is paid to the additional current, which was considered fictitious, and no in-depth study of this current has been conducted before. This current compensates for the orbital electron current, but does not affect the value of the orbital angular momentum of the charged particle.

Введение. Электромагнитные явления описываются уравнениями Максвелла [1], которые более 150 лет служат изучению новых электромагнитных явлений и применению в новых электромагнитных технологиях. Однако имеются вопросы, как к самим уравнениям, так и к их частным решениям.

Система уравнений Максвелла решается относительно электродинамических потенциалов, которые замещают силовые характеристики электромагнитного поля:

$$\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}, \quad (1)$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi. \quad (2)$$

Причем характеристики поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ инвариантны по отношению к преобразованиям потенциалов, что позволяет наложить на потенциалы ЭМП (1) и (2) дополнительные условия, предназначенные для устранения произвольности к искусственно введенным потенциалам $\mathbf{A}$ и φ , а выбор типа калибровочных соотношений определяется простотой решаемой задачи [1].

Широкое распространение в теории ЭМП получили калибровки:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{d\varphi}{dt} = 0; \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \quad (4)$$

При калибровке Лоренца (3) уравнения для потенциалов в вакууме принимают вид:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J}, \quad (5)$$

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (6)$$

а при кулоновской калибровке (4) аналогичные уравнения:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \nabla \frac{\partial}{\partial t} \varphi; \quad (7)$$

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (8)$$

Уравнения Максвелла подчиняются преобразованиям Лоренца. В работах [2, 3] отмечено, что преобразования Лоренца волновых уравнений электромагнитного поля выводятся при наличии соответствующей пары связей: между векторной и скалярной характеристиками источников поля

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}, \quad \operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0; \quad (9)$$

между векторным и скалярным потенциалами

$$\mathbf{A} = \left(\frac{v_0}{c^2} \right) \varphi, \quad \operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (10)$$

Первая пара (9) приводит к инвариантности волновых уравнений силовых характеристик $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ электромагнитного поля, а вторая пара – к инвариантности волновых уравнений электродинамических потенциалов $(\mathbf{A}, \varphi)$ относительно преобразования Лоренца.

В работах [2, 3] показано, что уравнения (10) являются следствием уравнений (9). Это положение подтверждается и при обратном преобразовании волновых уравнений. В частности, выразив плотность тока и плотность электрического заряда соответственно из волновых

уравнений (5) и (6) и подставив в уравнение непрерывности тока в (9), приходим к выражению (3) калибровки Лоренца.

Важно отметить, что характер решений волновых уравнений для равномерного и ускоренного движения заряженной частицы существенно различный. В работах [2-3] получено решение для равномерно движущегося заряда $v_0 = \text{const}$, которое не связано с понятием запаздывающего потенциала:

$$A = \left(\frac{v_0}{c^2}\right) \varphi(\mathbf{r} - \mathbf{v}_0 t).$$

Физически такая зависимость свидетельствует о том, что изменение потенциала не связано с электромагнитным возмущением, которое перемещается со скоростью света c . Здесь отсутствует волновое движение ЭМП и возникает видимость принципа дальнего действия. Но с точки зрения принципа относительности, если с неподвижной системой отсчета связать заряженную частицу, то равномерно движущийся наблюдатель сканирует стационарное распределение ЭМП, поэтому возбуждение поля отсутствует в каждой точке окружающего пространства, и поэтому не имеет смысла применять понятия: «дальнее действие – ближнее действие».

Подчеркнем, что уравнение непрерывности тока играет фундаментальную роль в проявлении свойства инвариантности уравнений Максвелла относительно преобразований Лоренца. Составляющие этого уравнения являются источниками (правыми частями) волновых уравнений.

Как известно, что при кулоновской калибровке уравнения для электромагнитных потенциалов не инвариантны относительно преобразований Лоренца, но это не изменяет физического смысла решений уравнений Максвелла. Скалярный потенциал (8) определяется распределением зарядов так, как будто бы они покоились [5], поэтому он описывается интегралом от объемной плотности мгновенного распределения заряда:

$$\varphi = \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r',$$

и второе слагаемое в правой части (7) представляется в виде дополнительного тока:

$$J_l = \frac{1}{\mu_0 c^2} \nabla \frac{\partial}{\partial t} \varphi = - \frac{1}{\mu_0 c^2} \int \frac{\text{div}' J}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r', \quad (11)$$

который в правой части волнового уравнения противоположен продольной составляющей зарядового тока J и, тем самым, кулоновская калибровка разделяет поле на продольную составляющую, описываемую потенциалом φ , и поперечную составляющую, описываемую векторным потенциалом.

В [6] волновой анализ уравнения (7) показывает, что кулоновская калибровка порождает поперечные моды векторного потенциала. Так как волны материи относят к поперечным волнам, поэтому считается, что *понятие векторного потенциала широко распространено в квантовой теории.*

Таким образом: 1) Калибровка Лоренца, являясь производной фундаментального уравнения непрерывности тока, приводит к электродинамическим потенциалам, удобным для описания волновых свойств электромагнитного поля и удовлетворяющим условию инвариантности уравнений ЭМП относительно преобразований Лоренца. 2) При кулоновской калибровке с характеристик потенциалов *снята функция носителей инвариантности уравнений ЭМП* относительно преобразований Лоренца и *обнаружены* иные их свойства. В частности, в правой части волнового уравнения (7) на основе уравнения для скалярного потенциала (8) *вводится понятие дополнительной плотности тока* (11), которая обладает компенсирующим свойством для зарядовой плотности тока в правой части волнового уравнения векторного потенциала. 3) Здесь рассмотрены некоторые свойства полей, связанных с калибровками. Однако, непосредственным различием калибровок – это в первую очередь *сказывается на характерах источников поля в правых частях неоднородных волновых уравнений.* При лоренцевой калибровке источником для векторного потенциала – плотность тока, а для скалярного потенциала – объемная плотность заряда.

При кулоновской калибровке для векторного потенциала добавляется еще один, якобы, псевдоисточник – *дополнительный ток.* При этом скалярный потенциал φ определяется мгновенным распределением зарядов так, как будто они покоились [5], но мгновенное распределение зарядов непрерывно изменяется во времени $\rho = \rho(t)$. Согласно связи $\mathbf{E}_k = -\nabla\varphi_k$ и уравнения (8) кулоновское поле $\mathbf{E}_k$ тоже изменяется во времени. Отсюда плотность тока

$$\mathbf{J}_k = -\frac{1}{\mu_0 c^2} \frac{\partial \mathbf{E}_k}{\partial t} \quad (12)$$

физически представляет собой *ток смещения мгновенного электрического кулоновского поля*. Данная работа посвящена изучению свойств этого дополнительного тока на примере стационарного движения одиночного электрического заряда по замкнутой орбите вокруг некоторого центра.

Представление плотности дополнительного тока через напряженность кулоновского поля. Заметим, что уравнение (3) утверждает непрерывность векторного магнитного потенциала $\mathbf{A}$, поэтому кулоновская калибровка должна выражать стационарные энергетические процессы ЭМП. В настоящей работе будем исследовать электромагнитные процессы с установившимися энергетическими состояниями [4].

Пусть источником ЭМП является движущийся со скоростью $\mathbf{v}_0$ относительно неподвижной системы отсчета точечный заряд q с объемной плотностью $\rho(\mathbf{R}) = q\delta(\mathbf{R})$, где $\delta(\mathbf{R}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ – дельта функция Дирака; $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(t)$ – радиус-векторы неподвижной точки и заряда соответственно относительно неподвижной системы отсчета; $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ – вектор, соединяющий центр заряда с неподвижной точкой. Тогда значение временной производной напряженности перемещающегося кулоновского электрического поля примет следующий вид:

$$\frac{\partial \mathbf{E}_k(\mathbf{R})}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{E}_k}{\partial X} \frac{dX}{dt} + \frac{\partial \mathbf{E}_k}{\partial Y} \frac{dY}{dt} + \frac{\partial \mathbf{E}_k}{\partial Z} \frac{dZ}{dt} = -(\mathbf{v}_0 \nabla) \mathbf{E}_k(\mathbf{R}), \quad (13)$$

где $\frac{d\mathbf{R}}{dt} = -\mathbf{v}_0$. Выражение (13) получено с учетом того, что в декартовой системе отсчета координаты вектора $\mathbf{R}$ и его модуль выражаются так:

$$X = x - x_0; Y = y - y_0; Z = z - z_0. \\ |\mathbf{R}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}. \quad (14)$$

В (13) производная по времени от $\mathbf{E}_k(\mathbf{R})$ совпадает по внешнему виду с конвективной составляющей субстанциональной производной (производной Лагранжа), поэтому ток смещения (12) кулоновского поля принимает вид: $\mathbf{J}_k = \varepsilon_0(\mathbf{v}_0 \nabla) \mathbf{E}_k(\mathbf{R})$, а уравнение (7) записывается в форме:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 (\mathbf{v}_0 \nabla) \mathbf{E}_k(\mathbf{R}). \quad (15)$$

Обозначим результирующую плотность тока в правой части (15)

$$\mathbf{J}_p = \mathbf{J} + \mathbf{J}_k = \mathbf{J} - \varepsilon_0 (\mathbf{v}_0 \nabla) \mathbf{E}_k(\mathbf{R}), \quad (16)$$

где плотность тока переноса в (16) описывается выражением

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}_0 = q \mathbf{v}_0 \delta(\mathbf{R}). \quad (17)$$

Электрическую индукцию кулоновского поля в точке $\mathbf{R}$ выразим по классической формуле $\mathbf{D} = q\mathbf{R}/4\pi|\mathbf{R}|^3$, то (12) примет вид:

$$\mathbf{J}_\kappa = -\frac{(\mathbf{v}_0 \nabla) \mathbf{R}}{4\pi|\mathbf{R}|^3}. \quad (18)$$

В неподвижной системе отсчета движение электрона по замкнутой орбите опишем вращающимся радиус-вектором: $\mathbf{r}_0 = (x_0 \mathbf{i} + y_0 \mathbf{j})$ и линейной скоростью $\mathbf{v}_0 = (v_{0x} \mathbf{i} + v_{0y} \mathbf{j})$.

Выражая $(\mathbf{v}_0 \nabla)$ в координатной форме

$$(\mathbf{v}_0 \nabla) = v_{0x} \frac{\partial}{\partial x} + v_{0y} \frac{\partial}{\partial y} = v_{0x} \frac{\partial}{\partial X} + v_{0y} \frac{\partial}{\partial Y},$$

проводим преобразование плотности результирующего тока (16) с учетом (18):

$$\begin{aligned} J_p &= q \left[\mathbf{v}_0 \delta(\mathbf{R}) - \frac{(\mathbf{v}_0 \nabla) \mathbf{R}}{4\pi|\mathbf{R}|^3} + \frac{3\mathbf{R}(\mathbf{v}_0 \nabla)|\mathbf{R}|}{8\pi|\mathbf{R}|^5} \right] = \\ &= q \left[\mathbf{v}_0 \delta(\mathbf{R}) - \frac{(v_{0x} \mathbf{i} + v_{0y} \mathbf{j})}{4\pi|\mathbf{R}|^3} + \frac{3\mathbf{R} \left(v_{0x} \frac{\partial}{\partial X} + v_{0y} \frac{\partial}{\partial Y} \right) (X^2 + Y^2 + Z^2)}{8\pi|\mathbf{R}|^5} \right] = \\ &= q \left[\mathbf{v}_0 \delta(\mathbf{R}) - \frac{\mathbf{v}_0}{4\pi|\mathbf{R}|^3} + \frac{3(\mathbf{R} \mathbf{v}_0) \mathbf{R}}{4\pi|\mathbf{R}|^5} \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

В (19) ток смещения кулоновского поля примет вид:

$$\mathbf{J}_\kappa = q \left[-\frac{\mathbf{v}_0}{4\pi|\mathbf{R}|^3} + \frac{3(\mathbf{R} \mathbf{v}_0) \mathbf{R}}{4\pi|\mathbf{R}|^5} \right].$$

Так как распределения плотностей электронного $\mathbf{J}$ и тока смещения $\mathbf{J}_\kappa$ кулоновского поля не тождественны, то их воздействия можно сравнить только по значениям силы токов.

Интегральные свойства тока смещения кулоновского поля.

Вычислим результирующую силу тока через неподвижную полуплоскость S (ток заряда, движущегося по замкнутой траектории, рассчитывается в одной точке пересечения траектории с поперечной плоскостью), проходящую через ось z и неподвижный радиус вектор $\mathbf{r}$ (с азимутальной координатой ψ). Мгновенный ток, создаваемый одиночным орбитальным точечным зарядом, усредним за время T_0 , равное периоду вращения. При этих условиях (7) будет иметь вид:

$$\langle \int_S \left(\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right) \mathbf{e}_n dr_{xy} dz \rangle_{T_0} = -\mu_0 \langle \int_S (\mathbf{J} + \mathbf{J}_k) \mathbf{e}_n dr_{xy} dz \rangle_{T_0}, \quad (20)$$

где символом $\langle \dots \rangle_{T_0}$ обозначен оператор усреднения по времени за период вращения электрона, а пределы интегрирования соответственно равны: по r_{xy} $(0, \infty)$, а по z $(-\infty, \infty)$; вектор элемента поверхности равен $d\mathbf{S} = dr_{xy} dz \mathbf{e}_n$, где r_{xy} – проекция $\mathbf{r}$ на координатную плоскость ОХУ. Направление единичного нормального к плоскости интегрирования вектора $\mathbf{e}_n$ соответствует направлению движения заряда q , который запишем в координатной форме:

$$\mathbf{e}_n = \alpha_n \mathbf{i} + \beta_n \mathbf{j}; (\mathbf{r} \mathbf{e}_n) = x\alpha_n + y\beta_n = 0; x = -\frac{y\beta_n}{\alpha_n}; \quad (21)$$

$$dx = -dy\beta_n/\alpha_n; \quad dr_{xy} = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dy/\alpha_n. \quad (22)$$

Вычислим в три этапа правую часть уравнения (14) с учетом (13).

1) Для первого слагаемого (19), представим $\delta(X) \delta(Y)$ в полярных координатах, то $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = r_{xy}^{-1} \delta(\psi - \psi_0) \delta(r_{xy} - r_0) \delta(z)$:

$$\begin{aligned} I &= \langle q \int_S (\mathbf{e}_n \mathbf{v}_0) \frac{\delta(\psi - \psi_0) \delta(r_{xy} - r_0) \delta(z) dr_{xy} dz}{r_{xy}} \rangle_{T_0} = \\ &= \frac{q}{T_0} \int_{t-0.5T_0}^{t+0.5T_0} \frac{(\mathbf{e}_n \{v_{\psi_0} + v_{r_0}\}) \delta(\psi_0 - \psi) dt}{r_0} = \frac{q}{T_0}. \end{aligned} \quad (23)$$

Учтено то, что $(\mathbf{e}_n \mathbf{v}_{\psi_0}) = v_{\psi_0} \cos(\psi_0 - 90^\circ - \psi + 90^\circ)$, где $v_{\psi_0} = \omega r_0$ азимутальная составляющая скорости электрона, $(\mathbf{e}_n \mathbf{v}_{r_0}) = v_{r_0} \cos(\psi_0 - \psi + 90^\circ)$, где $v_{r_0} = dr_0/dt$ – радиальная составляющая скорости: $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\psi - \psi_0) \delta(\psi - \psi_0) \omega dt = 1$, где $\omega dt = d(\psi - \psi_0)$;

$$\int_{-\pi}^{\pi} -\sin(\psi_0 - \psi) \delta(\psi_0 - \psi) \frac{dr_0}{r_0 d(\psi_0 - \psi)} d(\psi_0 - \psi) = 0.$$

2) Для второго слагаемого (19) заменим dr_{xy} на dy по формулам (22) и при вычислении (20) используем табличный интеграл [7, с. 92]:

$$\begin{aligned} I_{k1} &= -\frac{q}{4\pi} \langle (\mathbf{e}_n \mathbf{v}_0) \int_0^\infty dr_{xy} \int_{-\infty}^\infty \frac{dz}{[X^2 + Y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} \rangle_{T_0} = \\ &= -\frac{q}{2\pi\alpha_n} \langle (\mathbf{e}_n \mathbf{v}_0) \int_0^\infty \frac{dy}{Ay^2 + By + C} \rangle_{T_0} = -\frac{q}{2\pi\alpha_n} \langle (\mathbf{e}_n \mathbf{v}_0) Y \rangle_{T_0}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\int_0^\infty \frac{dy}{Ay^2 + By + C} = Y.$$

Постоянные коэффициенты в (24) получены с учетом (21):

$$A = \alpha_n^{-2}; B = \frac{2(\alpha_n y_0 - \beta_n x_0)}{\alpha_n} = -2\alpha_n^{-1} |\mathbf{e}_n \times \mathbf{r}_0|; C = x_0^2 + y_0^2 = r_0^2, \quad (25)$$

где $|\mathbf{e}_n \times \mathbf{r}_0|$ – модуль векторного произведения.

3) Для третьего слагаемого (19) при вычислении (20) используем аналогичное преобразование и табличные интегралы [7, с. 92; с. 36]. Учитывая, что $(\mathbf{r}\mathbf{e}_n) = 0$ и с учетом (21) $(\mathbf{r}\mathbf{v}_0) = y(\alpha_n v_{0y} - \beta_n v_{0x})\alpha_n^{-1} = y|\mathbf{e}_n \times \mathbf{v}_0|\alpha_n^{-1}$, получим:

$$\begin{aligned} I_{k2} &= \frac{3q}{4\pi} \left\langle \int_0^\infty dr_{xy} \int_{-\infty}^\infty \frac{(\mathbf{e}_n \mathbf{R})(\mathbf{R}\mathbf{v}_0)dz}{[X^2 + Y^2 + Z^2]^{\frac{5}{2}}} \right\rangle_{T_0} = -\frac{q}{\pi} \left\langle \int_0^\infty \frac{(\mathbf{e}_n \mathbf{r}_0)(\mathbf{r}\mathbf{v}_0)dy}{\alpha_n [X^2 + Y^2]^2} \right\rangle_{T_0} + \\ &+ \frac{q}{\pi} \left\langle \int_0^\infty \frac{(\mathbf{e}_n \mathbf{r}_0)(\mathbf{r}_0 \mathbf{v}_0)dy}{\alpha_n [X^2 + Y^2]^2} \right\rangle_{T_0} = -\frac{q}{\pi \alpha_n^2} \left\langle \int_0^\infty \frac{(\mathbf{e}_n \mathbf{r}_0)|\mathbf{e}_n \times \mathbf{v}_0|ydy}{[Ay^2 + By + C]^2} \right\rangle_{T_0} + \\ &+ \frac{q}{\pi \alpha_n} \left\langle \int_0^\infty \frac{(\mathbf{e}_n \mathbf{r}_0)(\mathbf{r}_0 \mathbf{v}_0)dy}{[Ay^2 + By + C]^2} \right\rangle_{T_0} = \frac{q}{\pi \alpha_n^2} \left\langle \frac{2|\mathbf{e}_n \times \mathbf{v}_0|(\mathbf{e}_n \mathbf{r}_0)}{(B^2 - 4AC)} \right\rangle_{T_0} - \\ &- \frac{qB}{\pi \alpha_n^2} \left\langle \frac{(\mathbf{e}_n \mathbf{r}_0)|\mathbf{e}_n \times \mathbf{v}_0|}{(B^2 - 4AC)} Y \right\rangle_{T_0} + \frac{q}{\pi \alpha_n} \left\langle \frac{(\mathbf{e}_n \mathbf{r}_0)(\mathbf{r}_0 \mathbf{v}_0)}{(4AC - B^2)} \left(-\frac{B}{C} + 2AY \right) \right\rangle_{T_0} = \\ &= -\frac{q}{2\pi} \left\langle \frac{|\mathbf{e}_n \times \mathbf{v}_0|}{(\mathbf{e}_n \mathbf{r}_0)} \right\rangle_{T_0} - \frac{q}{2\pi \alpha_n} \left\langle \frac{|\mathbf{e}_n \times \mathbf{v}_0||\mathbf{e}_n \times \mathbf{r}_0|}{(\mathbf{e}_n \mathbf{r}_0)} Y \right\rangle_{T_0} + \\ &+ \frac{q}{2\pi} \left\langle \frac{(\mathbf{r}_0 \mathbf{v}_0)|\mathbf{e}_n \times \mathbf{r}_0|}{(\mathbf{e}_n \mathbf{r}_0)r_0^2} \right\rangle_{T_0} + \frac{q}{2\pi \alpha_n} \left\langle \frac{(\mathbf{r}_0 \mathbf{v}_0)}{(\mathbf{e}_n \mathbf{r}_0)} Y \right\rangle_{T_0}, \quad (26) \end{aligned}$$

где с учетом (24) имеем:

$$4AC - B^2 = \frac{4[r_0^2 - (\alpha_n y_0 - \beta_n x_0)^2]}{\alpha_n^2} = \frac{4[\alpha_n x_0 + \beta_n y_0]^2}{\alpha_n^2} = \frac{4(\mathbf{e}_n \mathbf{r}_0)^2}{\alpha_n^2}.$$

Складывая (24) и (26), получим суммарный ток $I_k = I_{k1} + I_{k2}$. При этом учтем, что сумма I_{k1} со вторым слагаемым I_{k2} преобразуется:

$$-\frac{q}{2\pi \alpha_n} \left\langle \frac{(\mathbf{r}_0 \mathbf{v}_0)}{(\mathbf{e}_n \mathbf{r}_0)} Y \right\rangle_{T_0}, \quad (27)$$

так как

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}_n \mathbf{v}_0) + \frac{|\mathbf{e}_n \times \mathbf{v}_0||\mathbf{e}_n \times \mathbf{r}_0|}{(\mathbf{e}_n \mathbf{r}_0)} &= \frac{(\mathbf{e}_n \mathbf{r}_0) \frac{d(\mathbf{e}_n \mathbf{r}_0)}{dt} + |\mathbf{e}_n \times \mathbf{r}_0| \frac{d|\mathbf{e}_n \times \mathbf{r}_0|}{dt}}{(\mathbf{e}_n \mathbf{r}_0)} = \\ &= \frac{r_0 \frac{dr_0}{dt} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) - r_0^2 \cos \theta \sin \theta \left(\frac{d\theta}{dt} - \frac{d\theta}{dt} \right)}{(\mathbf{e}_n \mathbf{r}_0)} = \frac{(\mathbf{r}_0 \mathbf{v}_0)}{(\mathbf{e}_n \mathbf{r}_0)}, \end{aligned}$$

где $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_{0r} + \mathbf{v}_{0\tau}$, $\mathbf{v}_{0r}$ – радиальная, $\mathbf{v}_{0\tau}$ – тангенциальная составляющие.

При этом выражение (27) компенсируется с четвертым слагаемым

(26), поэтому ток I_k будет состоять из первого и третьего слагаемых (19):

$$-I_k = \frac{q}{2\pi T_0} \int_{t-0.5T_0}^{t+0.5T_0} \left\{ \frac{d(r_0 \sin \theta)}{dt} - \frac{\sin \theta \frac{dr_0}{dt}}{r_0 \cos \theta} \right\} dt = \frac{q}{2\pi T_0} \int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi} d\theta = \frac{q}{T_0}.$$

Согласно (16) и (20) подставляя соответствующие компоненты, получим результирующий ток $I_p = I + I_k = 0$ для произвольной формы орбиты. Получено важное *научное положение*, что результирующий ток, усредненный за период движения электрона по замкнутой стационарной траектории, равен нулю, поскольку усредненный ток смещения кулоновского поля компенсирует усредненный электронный ток:

$$\langle \int_S (\mathbf{J} + \mathbf{J}_k) \mathbf{e}_n dr_{xy} dz \rangle_{T_0} = \frac{q}{T_0} - \frac{q}{T_0} = 0. \quad (28)$$

Подчеркнем, что компенсация результирующего тока получена при произвольной форме замкнутой орбиты электрона с центром отсчета.

Проверка возможности компенсации классического орбитального момента импульса электрона. В работе [8] раскрыта *модифицированная формула* вектора Пойнтинга, устанавливающая связь между вектором Пойнтинга и ему сопутствующей эквивалентной плотности тока. Если предположить обратную связь – что току смещения кулоновского поля (12) сопутствует вектор Пойнтинга, то его можно рассчитать:

$$\mathbf{\Pi}_k = \mathbf{J}_k U, \quad (29)$$

где U напряжение, приложенное к системе заряд- кулоновское поле.

Так как кулоновское поле распределено непрерывно, то на расстоянии R от центра электрона напряжение равно разности потенциалов:

$$U(R) = \varphi(R) - \varphi(\infty) = \varphi(R) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}. \quad (30)$$

Электромагнитное поле обладает механическими свойствами, характеристиками которых являются вектор плотности импульса $\mathbf{g} = c^{-2}\mathbf{\Pi}$ и плотность момента импульса $\mathbf{k}_0 = [\mathbf{r}\mathbf{g}]$ [1]. Вычислим момент импульса $\mathbf{L}_k$, создаваемый вектором Пойнтинга (29) – (30) [9], подставив (19) в типовую формулу и учтя $\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}_0$:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_k &= \iiint_V [\mathbf{r} \mathbf{g}] dV = \frac{q}{c^2} \iiint_{V-V_3} \varphi(R) \left[\mathbf{r} \times \left(-\frac{\mathbf{v}_0}{4\pi|\mathbf{R}|^3} + \frac{3(\mathbf{R}\mathbf{v}_0)\mathbf{R}}{4\pi|\mathbf{R}|^5} \right) \right] dV = \\ &= -\frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^2} \left\{ \iiint_{V-V_3} \frac{\mathbf{R} \times \mathbf{v}_0}{R^4} dV + \iiint_{V-V_3} \frac{\mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0}{R^4} dV - 3 \iiint_{V-V_3} \frac{(\mathbf{R}\mathbf{v}_0)(\mathbf{r}_0 \times \mathbf{R})}{R^6} dV \right\}. \end{aligned} \quad (31)$$

В (31) интегрирование проводится по объему $V - V_3$, занятому кулоновским полем, где V_3 объем электрона, который ограничен классическим радиусом электрона r_3 [8].

Сначала вычисляем второй интеграл (31) при условии $dV = 4\pi R^2 dR$

$$\iiint_{V-V_3} \frac{\mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0}{R^4} dV = 4\pi(\mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0) \int_{r_3}^{\infty} \frac{dR}{R^2} = \frac{4\pi(\mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0)}{r_3}. \quad (32)$$

Представим векторное произведение $\mathbf{R} \times \mathbf{v}_0$ в координатной форме, сначала, в декартовой, потом вектор $\mathbf{R}$ в сферической системе:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} \times \mathbf{v}_0 &= -(\mathbf{i} v_{0y} - \mathbf{j} v_{0x})R_z + \mathbf{k}(v_{0y}R_x - v_{0x}R_y) \\ &= -(\mathbf{i} v_{0y} - \mathbf{j} v_{0x})R \cos\theta + \mathbf{k}R \sin\theta(v_{0y} \cos\psi - v_{0x} \sin\psi). \end{aligned} \quad (33)$$

В сферической системе координат $dV = 2\pi R^2 \sin\theta dR d\theta d\psi$, а пределы интегрирования интегралов в (31) следующие: $r_3 \leq R < \infty$; $0 \leq \theta \leq \pi$; $0 \leq \psi \leq 2\pi$, поэтому интегралы от тригонометрических функций будут равны нулю, значит первый интеграл в (31) равен нулю.

Аналогичным способом проведем преобразование числителя третьего интеграла в (31), учтя при этом, что вектор скорости $\mathbf{v}_0$ и радиус-вектор $\mathbf{r}_0$ электрона лежат в плоскости XOY :

$$\begin{aligned} (\mathbf{R}\mathbf{v}_0)(\mathbf{r}_0 \times \mathbf{R}) &= (v_{0x}R_x + v_{0y}R_y)[(\mathbf{i} r_{0y} - \mathbf{j} r_{0x})R_z + \mathbf{k}(r_{0x}R_y - r_{0y}R_x)] = \\ &= R^2(v_{0x} \cos\psi + v_{0y} \sin\psi) \left[(\mathbf{i} r_{0y} - \mathbf{j} r_{0x}) \frac{\sin 2\theta}{2} + \mathbf{k}(r_{0x} \sin\psi - r_{0y} \cos\psi) \sin^2\theta \right]. \end{aligned}$$

При интегрировании по объему тригонометрические функции $\cos\psi$ и $\sin\psi$ приводят к нулевым значениям интегралов, поэтому третий интеграл в (31) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} &3 \iiint_{V-V_3} \frac{(\mathbf{R}\mathbf{v}_0)(\mathbf{r}_0 \times \mathbf{R})}{R^6} dV = \\ &= 3\mathbf{k} \int_{r_3}^{\infty} \frac{dR}{R^2} \int_0^{\pi} \sin^3\theta d\theta \int_0^{2\pi} (r_{0x}v_{0y} \sin^2\psi - r_{0y}v_{0x} \cos^2\psi) d\psi = \\ &= 3\mathbf{k} \frac{4\pi}{3} \frac{(r_{0x}v_{0y} - r_{0y}v_{0x})}{r_3} = \frac{4\pi(\mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0)}{r_3}. \end{aligned} \quad (34)$$

Подставляя (32) и (34) в (31), получим

$$\mathbf{L}_K = -\frac{q^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^2} \left\{ \frac{4\pi(\mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0)}{r_3} - \frac{4\pi(\mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0)}{r_3} \right\} = 0.$$

где $\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r_3 c^2} = q\varphi(r_3) = m_3$ – электромагнитная масса электрона, которая вычисляется из эквивалентности полной энергии электрона $m_3 c^2$ энергии электростатического поля [1].

Учитывая электромагнитную природу электрона, вычислим его вектор Пойнтинга по (29) с учетом электронного тока (17). При этом напряжение (30) выберем на поверхности классического радиуса электрона (такой же прием использовался в [8]):

$$\Pi_3 = J\varphi(r_3) = \mathbf{v}_0 \delta(\mathbf{R}) \varphi(r_3),$$

то момент импульса электрона примет следующий вид:

$$\mathbf{L}_3 = q\varphi(r_3) \iiint_V [\mathbf{r} \mathbf{v}_0] \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dV = m_3 (\mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0), \quad (35)$$

и совпадает с классической формулой в разделе «Механика» [9].

Отсюда следует, что в рамках классической теории отсутствует компенсация момента импульса орбитального электрона дополнительным током (током смещения кулоновского поля) и этот механический момент можно моделировать в рамках концепции электромагнитной природы элементарной частицы «электрон».

Выводы

1. На основе калибровки Кулона давно был замечен дополнительный источник ЭМП – это ток смещения кулоновского электрического поля. Выявлено новое проявление этого тока. Доказано, что этот ток, усредненный за период вращения электрона на стационарной орбите произвольной формы, приводит к компенсации электронного тока.

2. В рамках классического подхода компенсируется источник, приводящий к излучению электромагнитной энергии стационарным орбитальным электроном в центрально-симметричном поле, что может быть причиной устойчивости атома.

3. В рамках классической теории отсутствует компенсация момента импульса орбитального электрона потоком электромагнитной мощности, связанным с дополнительным током смещения кулоновского поля.

4. Между классическим и квантовым подходами традиционно разделение сфер применения каждой теории, соответственно макро- и микромиры. Обнаруженная компенсация электронного тока, усредненного за период вращения электрона на стационарной орбите, указывает на два обстоятельства: 1) на границе существования классический подход

передает квантовому подходу физически обоснованную причину устойчивости атома; 2) усреднение за период вращения электрона дает объяснение невозможности указать положение электрона на орбите. В рамках классической теории необходимо решить вопрос о месте классического механического момента электрона в системе квантованных орбитальных угловых моментов.

Список литературы

1. Левич В.Г. Курс теоретической физики Т.1.– М.: Наука, 1969.– 910 с.
2. Меньшов Е.Н. Роль калибровки Лоренца в электродинамике. – Вестник УлГТУ. – 2019. – №2.– С.51–54.
3. Меньшов Е.Н. О свойствах калибровки Лоренца в теории электромагнитного поля // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: межд. сб. науч. тр, Вып 16. – Ульяновск: УлГТУ, 2020. – С. 97–104.
4. Меньшов Е.Н. Роль кулоновской калибровки в классической теории электромагнитного поля. Деп. в ВИНТИ 27.06.2019, №46. – В2019. – 12 с.
5. Джексон Д. Классическая электродинамика.– М.: Мир, 1965. –702 с.
6. Ильинский Ю.А., Келдыш Л.В. Взаимодействие электромагнитного излучения с веществом. – М.: МГУ, 1989. – 299 с.
7. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. – М.: Наука, 1981. – 800 с.
8. Меньшов Е.Н. Представление вектора Пойнтинга через электрические характеристики электротехнических систем // Интеллектуальная Электротехника. – 2021. – № 4 (16). – С. 36–46.
9. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности. – М.: Высш.шк., 1986. – 320 с.

Меньшов Евгений Николаевич – докт. техн. наук, профессор
каф. «Электроснабжение»
Ульяновского государственного технического университета.
E-mail: raynd2@rambler.ru

МАТРИЧНЫЙ АНАЛИЗ

ВЫЧИСЛЕНИЕ СИМВОЛЬНЫХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ ПОЛНЫХ МАТРИЦ НА ОСНОВЕ ИХ ПОЛОВИННОГО ДЕЛЕНИЯ И НАРАЩИВАНИЯ СТРОК

М. В. Недорезов, В. Ф. Тимофеев, В. В. Филаретов

Для ускорения вычисления значения определителя в процессе генерации символьного выражения предложено представлять миноры половинного порядка в виде последовательных выражений. Экспериментально установлено, что для предлагаемого разложения определителя полной матрицы с увеличением порядка на единицу затраты времени увеличиваются не более, чем в 2,5 раза, хотя при таком усложнении матрицы число сочетаний пар миноров удваивается. Это позволило на средних по производительности компьютерах двукратно превзойти существующие ограничения на порядок полных матриц для символьных вычислений.

To speed up the calculation of the determinant value in the process of generating a symbolic expression, it is proposed to represent half-order minors in the form of consecutive expressions. It has been experimentally established that for the proposed decomposition of the determinant of the complete matrix, with an increase in order per unit, the time spent increases by no more than 2.5 times, although with such a complication of the matrix, the number of combinations of minor pairs doubles. This made it possible to double the existing restrictions on the order of complete matrices for symbolic calculations on medium-performance computers.

Матричный анализ является одним из самых распространенных математических аппаратов, совершенствование его алгоритмов продолжает привлекать исследователей актуальностью и непреходящей нехваткой вычислительных ресурсов [1, 2]. Но не только матричный анализ обогащает своими результатами другие области знания. Например,

разработано направление решения матричных задач с помощью теории электрических цепей [3–8]. Однако схемная модель, занимающая промежуточное положение между матрицей и ее определителем, равным схемному определителю, эффективна лишь для матриц, соответствующих электрическим цепям или в случае электродинамической аналогии. В случае произвольных матриц оказывается, что матричное решение является более коротким, как для полностью заполненных (полных) матриц [9–11], которые со времен Кирхгофа являются излюбленными тестовыми матрицами вследствие своей предельной общности.

Исследователи ведут между собой своеобразные соревнования, кто разложит определитель полной матрицы большего порядка? Например. В 2014 году китайский специалист бросил вызов, опубликовав таблицу с параметрами выражений определителей матриц до 18-го порядка включительно [2]. Вызов был принят, и в 2020-м году были раскрыты определители полных матриц 19–21-го порядка [9, 10].

Символьное решение представляет интерес, когда обозримо для аналитических исследований или, по крайней мере, может быть вычислено за приемлемое время. Нужно учитывать, что генерация формулы определителя полной матрицы высокого порядка занимает в несколько раз меньше времени, чем ее интерпретация для получения численного значения [10]. 22-й порядок в виде единого выражения не поддался. Время генерации выражения длилось трое суток, для его хранения немного не хватило жесткого диска в 10 Тбт. Эксперимент с программой HalfMat [9, 10] проводил В.Ф. Тимофеев. Конечно, о вычислении выражения такого размера речь вести не стоит.

О вычислении в процессе генерации выражения. Вариантом, позволяющим обрести полезность символьным выражениям для расчета определителей матриц высокого порядка, является вычисление значения определителя в процессе генерации символьного выражения. Это выражение не будет записываться на жесткий диск, поскольку этот вид хранения символьного выражения не пригоден для многовариантных расчетов. При совмещении генерации формулы с ее вычислением все операции выполняются в оперативной памяти.

Необходимость последующей интерпретации или компиляции возникает, при формировании единых выражений. Если выражение представляет собой иерархическую последовательность подвыражений,

являясь последовательным выражением, то значения предыдущих подвыражений подставляются в последующие подвыражения. При этом важно, что хранение самих подвыражений не требуется – при желании будет проведен повторный быстрый расчет.

Последовательные выражения наглядно формируются наращиванием строк матрицы [3]. Сформируем такие выражения для матрицы четвертого порядка. Нумерация строк и столбцов матрицы, а также номеров подвыражений начинается с нуля.

Первая и вторая строки матрицы имеют вид:

$X0_0$ $X0_1$ $X0_2$ $X0_3$ и $X1_0$ $X1_1$ $X1_2$ $X1_3$.

Элементы первой строки с присвоенными им значениями являются первыми четырьмя подвыражениями последовательного выражения. Объединение строк 1 и 2 состоит в образовании допустимых комбинаций элементов, взятых из разных столбцов первой и второй строки соответственно:

0 1+2+3

1 0+2+3

2 0+1+3

3 0+1+2

Этим 12 комбинациям соответствуют шесть подвыражений:

$$X5_4 = X0_0 * X1_1 - X0_1 * X1_0;$$

$$X5_5 = X0_0 * X1_2 - X0_2 * X1_0;$$

$$X5_6 = X0_0 * X1_3 - X0_3 * X1_0;$$

$$X5_7 = X0_1 * X1_2 - X0_2 * X1_1;$$

$$X5_8 = X0_1 * X1_3 - X0_3 * X1_1;$$

$$X5_9 = X0_2 * X1_3 - X0_3 * X1_2;$$

Каждое подвыражение, соответствующее объединению первых двух строк, характеризуется двумя индексами столбцов. Добавление третьей строки $X2_0$ $X2_1$ $X2_2$ $X2_3$ к этому объединению строк заключается в образовании допустимых комбинаций элементов, взятых из разных столбцов первой, второй и третьей строки соответственно:

01 2+3

02 1+3

03 1+2

12 0+3

13 0+2

23 0+1

Этим 12 комбинациям соответствуют четыре подвыражения:

$$\begin{aligned}X6_10 &= X5_4 * X2_2 - X5_5 * X2_1 + X5_7 * X2_0; \\X6_11 &= X5_4 * X2_3 - X5_6 * X2_1 + X5_8 * X2_0; \\X6_12 &= X5_5 * X2_3 - X5_6 * X2_2 + X5_9 * X2_0; \\X6_13 &= X5_7 * X2_3 - X5_8 * X2_2 + X5_9 * X2_1;\end{aligned}$$

Каждое подвыражение, соответствующее объединению первых трех строк, характеризуется тремя индексами столбцов. Добавление четвертой строки $X3_0 \ X3_1 \ X3_2 \ X3_3$ к этому объединению строк заключается в образовании допустимых комбинаций элементов, взятых из разных столбцов первой, второй, третьей и четвертой строки соответственно:

012 3
013 2
023 1
123 0

Этим 4 комбинациям соответствует единственное подвыражение:

$$X7_14 = X6_10 * X3_3 - X6_11 * X3_2 + X6_12 * X3_1 - X6_13 * X3_0;$$

Это подвыражение, соответствует объединению всех четырех строк, поскольку характеризуется четырьмя индексами столбцов: 0123. Следовательно, его значение, вычисленное последним, равно значению определителя полной матрицы 4-го порядка.

Использование прямого и обратного генератора сочетаний. Для эффективной генерации последовательного выражения продолжим рассмотрение примера формирования определителя полной матрицы 4-го порядка.

Взаимно дополняющие индексы пар столбцов, соответствующие объединению строк матрицы 4-го порядка, показывает, что подвыражения с первым индексом 5, 6 и 7 соответствуют выборкам из прямого и обратного генератора сочетаний. Так, для получения подвыражений $X5...$ используются сочетания из четырех по 1 (прямые сочетания) и сочетания по 3 (обратные сочетания), подвыражений $X6...$ используются сочетания из четырех по 2 (прямые сочетания) и сочетания по 2 (обратные сочетания), подвыражения $X7...$ используются сочетания из четырех по 3 (прямые сочетания) и сочетания по 1 (обратные сочетания).

В предыдущей реализации вывода последовательных выражений при объединении строк обратная последовательность, дополняющая прямую последовательность, получалась в двойном цикле, хотя в прямом и обратном генераторах сочетаний все циклы одинарные. Например, каждое

сочетание из {123,023,013,012} получалось на основе соответствующих сочетаний: 0, 1, 2, 3 и вектора номеров столбцов: 0123.

После реализации обратного генератора берутся по порядку пары сочетаний от разных генераторов, например, первую: 0 и 123, и образуются миноры 01, 02, 03, которые сразу вычисляются. Это исключает дополнительные проверки, упрощая изложение алгоритма и код программы. Попутно с этим улучшением формализации облегчается восприятие и обработка последовательного выражения вследствие использования сквозной нумерации подвыражений.

Последовательное выражение, которое вычисляется по мере нахождения (считывания), состоит из пронумерованных по порядку подвыражений. «Сквозной» номер подвыражений указывается после номера 5, 6, 7 объединения строк, обозначенного знаком «+»: 1+2, 1+2+3, 1+2+3+4. Сквозная нумерация обеспечила избавление от двумерных массивов, отличающихся высокой разреженностью, что препятствовало расчету определителей высокого порядка. Теперь все большие массивы для первого и второго минора одномерные. Для матриц до 34-го порядка хватает такой размерности: v10[413270], v20[413270].

Сравнение генераторов сочетаний. Генератор сочетаний из американский генератор, взятый из журнала САСМ (США) [12], был приведен к размещению элементов вектора сочетания с нулевой позиции:

```
if (cmb[k1]==k1) return;
for (b1=0;b1<k;b1++)
    if (cmb[b1]>b1) {a=cmb[b1]-b1-1;
        for (m=0;m<b1+1;m++) cmb[m]=m+a;
        goto rep2;}
b1=p1-k;
for (m=0;m<k;m++) cmb[m]=b1+m;
goto rep;
```

Безусловный переход отправляет на метку «rep», где начинается формирование произведения пары миноров, соответствующей следующему сочетанию.

Предлагаемый генератор [9] минимизирован до одного goto, двух циклов и одной вспомогательной переменной:

```

if (cmb[k1]==p1) {
for (i=k1;i>1;i--) if (cmb[i]-cmb[i-1]!=1) break;
cmb[--i]++;
for (i++;i<=k1;i++) cmb[i]=cmb[i-1]+1;
If (cmb[k1]>p1) return;} else cmb[k1]++;
goto rep;

```

Было проведено сравнение генераторов сочетаний [9] и [12] в составе программы HalfMat на полной матрице Трента [13] 15-го порядка. Затраты времени и значение определителя при использовании генераторов [12] и [9] соответственно составили:

Execution time: 00 hour 01 min. 15.81 sec
detmin= 7.2057594037927936e+16

и

Execution time: 00 hour 01 min. 11.51 sec
detmin= 7.2057594037927832e+16 .

Небольшое ускорение за счет компактности предложенного кода будет сказываться с увеличением порядка матрицы. Например, для матрицы 34-го порядка число пар взаимодополнительных миноров половинного порядка равно $C_{34_17}=2333606220$.

О недостатках последовательных выражений. У последовательных выражений есть серьезный недостаток – накопление погрешности. Поэтому эквивалентное единое выражения, со сложностью по числу операций в десятки раз большей, оказывается точнее. В этом легко убедиться, сравнивая единые и последовательные выражения для определителей матриц Гильберта. Однако такие сложные тесты придется использовать на малых порядках (до восьми), На высоких порядках, например, 18-м порядке погрешность проявляется на очень хорошо обусловленных матрицах.

Например, определитель тестовой матрицы Трента (равный числу деревьев полного графа или полной схемы, составленной из двухполюсников) 18-го порядка при рекурсивном половинном делении:
det=5480386857784802192000.

Execution time: 00 hour 11 min. 42.63 sec

При использовании последовательного выражения:
det= 5480386857784761647000.

Execution time: 00 hour 08 min. 30.11 sec.

Точное значение определителя по формуле Кэли:

DET= 5480386857784802542000.000000

Как видно, единое выражение на основе половинного деления матрицы дает почти точный результат, а последовательное выражение имеет погрешность в 5 знаках! Такова цена восторгам по поводу методов диаграмм деления, раскручиваемых с 2001 года [2]...

Другим недостатком последовательных выражений является комбинаторное увеличение числа слагаемых с увеличением номеров подвыражений. Это ограничивает возможности программ на существующей компьютерной базе матрицами 20-го порядка. Даже 18-го, преемник-разработчик метода DDD-диаграмм приводят результаты расчетов до матрицы 18-го порядка [2]. Далее в таблице остаются пустые клетки.

Заметим, что идея диаграммных методов символьного анализа электрических цепей и нахождения определителей матриц в аналитическом виде как раз и основана на формировании последовательных выражений, что, как показано выше, соответствует наращиванию строк матрицы.

Утверждается о возможности параллелизации вычислений [2], но эффект этого сомнителен вследствие комбинаторного увеличения числа параметров на этапах объединения строк матрицы и возникающей сложности объединения частичных решений. Вряд ли возможна большая эффективность формирования последовательных выражений, чем при использовании прямого и обратного генератора сочетаний, как показано выше. На предел возможностей диаграммных методов указывает Максимальный порядок полной матрицы – 18 в таблице для числа операций [2], указывает не только на точностное, но и вычислительное ограничение последовательных выражений.

Программа HalfSeq: уступка точности в пользу эффективности вычисления. Характерно, что разрыв по быстродействию у сравниваемых выше программ генерации единых и последовательных выражений для матрицы 18-го порядка не такой большой, но существенно меньшее время требует последовательное выражение. Следовательно, можно прогнозировать высокую эффективность программы, сочетающей преимущества половинного деления для высоких порядков матрицы и последовательных выражений для вычисления в ходе формирования миноров половинного деления.

Указанный выше разрыв в быстродействии между рекурсивным половинным делением и последовательными выражениями исчезает уже при генерации определителя матрицы 20-го порядка. Поэтому на порядках, больших 20, применение последовательных выражений оказывается менее выгодным с точки зрения, как точности, так и быстродействия. Пока нет другой альтернативы сочетания половинного деления с последовательными выражениями для эффективного вычисления в ходе генерации формулы.

Недостаток последовательных выражений – высокую погрешность здесь предлагается частично скомпенсировать формированием гибридного выражения. В этом выражении миноры, образованные половинным делением, представляются в виде последовательной формулы, которая не заносится в оперативную память и не выводится на жесткий диск, а вычисляется. Программа HalfMat из рекурсивной программы превращается в нерекурсивную, поскольку половинное деление матрицы выполняется один раз – для первого деления пополам исходной матрицы, а не до получения простейших матриц первого порядка.

Эффективность комбинированного, предлагаемого здесь, алгоритма, реализованного в программе HalfSeq, обеспечивается тем, что форма – шаблон разложения минора в виде последовательного выражения – зависит только от порядка матрицы. Поэтому для матрицы нечетного порядка требуется два шаблона, а для матрицы четного порядка, делящейся пополам без остатка в виде одной строки и столбца, достаточно одного шаблона. Таким образом, сколько бы не было в разложении определителя произведений пар миноров, все они вычисляются по одному (для четного порядка) или двум (для нечетного порядка) шаблонам.

В связи с этим определители полных матриц четного порядка вычисляются несколько быстрее, чем нечетного. По мере совершенствования программы, затраты времени функции только для четного порядка и функции для универсального порядка сближались. Например, для 28-го порядка время вычислений почти одинаковое, соответственно:

Execution time: 00 hour 10 min. 08.00 sec

и

Execution time: 00 hour 10 min. 18.18 sec .

Размерности массивов программы HalfSeq позволили рассчитать определитель полной матрицы 34 порядка [14]. Его теоретические показатели:

HalfSeq: matrix of 34 order

Number of combinations $C_{34}_{17}=2333606220$

Number of subformulas in first minor: $nu_{1[16]}=131069$

Number of operands in first minor: $nu_{n1[16]}=2228190$

Number of subformulas in second minor: $nu_{2[16]}=131069$

Number of operands in second minor: $nu_{n2[16]}=2228190$

Нет препятствий для расчета определителей больших порядков, если не требуется знать число пар обрабатываемых миноров (число сочетаний из порядка матрицы p по $p/2$). Это число уже для 35-го порядка превышает размер незнакового целого числа в 4 байта (свыше 4,2 миллиардов). Целые числа большего значения не поддерживаются BuilderC++, 2002г. И более современными компиляторами. Указанная переменная не влияет на вычисления, ее значение информирует пользователя о сложности задачи перед выводом значения определителя, как указано выше строкой:

«Number of combinations $C_{34}_{17}=2333606220$ ».

Время вычислений увеличивается примерно в 6 раз при увеличении четного или нечетного порядка на две единицы. Например, 24-й порядок считается 17 сек., 26-й – 100 сек. 28-й – 10 мин., 30-й – 60 мин., 32-й – 6 часов.

Таким образом, 34-й порядок будет считаться около 36 часов на бытовом компьютере. Этот порядок был предельным в недавней версии программы HalfSeq. Для его увеличения достаточно увеличить размерности двух векторов – предельное число подвыражений последовательной формулы минора и предельное число её операндов.

Запуск исполняемых модулей программы HalfSeq партиями: по 3, 4, 6, 12 подзадач позволил сократить время генерации и вычисления определителя матрицы 34-го порядка в 6 раз, уложившись в 6 часов компьютерного времени [14].

Текст программы HalfSeq. Принципиальным отличием разработанной серии программ [9–11] для разложения матричных определителей, которую продолжает предлагаемая программа, является отказ от использования сложных структур для хранения элементов матрицы. Каждый элемент задается только своим идентификатором в

списке (по строкам) всех элементов матрицы. Координаты элемента в матрице задаются неявно – порядком следования в построчном списке элементов. Положение элементов матрицы вычисляется в процессе генерации определителя.

Исходными данными является список идентификаторов *actv* элементов матрицы. В основе алгоритма лежит образование всех возможных сочетаний из числа p , равного порядку матрицы, по $k=p/2$, равному порядку минора, или по $d=p-k$, равного порядку дополнительного минора. В случае нечетного p порядок минора меньше порядка дополнительного минора на единицу $k=d-1$. Каждому сочетанию соответствует слагаемое определителя, образованное произведением минора k -го порядка и дополнительного минора порядка $d=p-k$, которые вычисляются в виде последовательных выражений. В отличие от программы *HalfMat* алгоритм половинного деления выполняется не рекурсивно, а однократно, порождая сумму произведений всех возможных пар минора порядка k и дополнительного минора порядка d . Эти миноры (далее первый и второй минор, соответственно) представляются в виде последовательных выражений и вычисляются, суммируясь с предыдущими слагаемыми.

Текст программы *HalfSeq* на языке Си приводится ниже. Предварительные комментарии: p - порядок исходной матрицы, k - порядок первого минора, d - порядок второго минора, *actv* – вектор значений матрицы, *n_cmb* – число слагаемых лпределителя (сочетаний из p по k), *cmb[k]* - номера строк первого минора, *cmb_[d]* – номера строк второго минора, *sgn0* - постоянная составляющая знака, *sgn* - знак текущего произведения минора и дополнительного минора, *curl**d* – номер частичного потока сочетаний, *minld* и *maxld* – нижняя и верхняя граница потока сочетаний; *cm* и *cmk* – векторы номеров элементов в начале строк, используемые при образовании первого и второго миноров: *ncm1* и *ncm2* – формируемые однократно шаблоны для повторной генерации последовательных выражений первого и второго минора.

```
void halfseq(int p) {
int d,d1,k,k1,j,j1,p1,sgn,sgn0=0,v,v2,v3,sn[20];
unsigned int n_cmb; int cm[40],cmk[40],na,nb,nu;
int i,i1,m,cmb[20],cmb_[20],cmb0[20],cmb0_[20];
k=p/2; d=p-k; p1=p-1; k1=k-1; d1=d-1;
```

```

for (i=0;i<k;i++) cmb[i]=i;
numera(p,k,cmb,&n_cmb); // нахождение числа сочетаний
minld=0; curld=1; maxld=n_cmb; // параметры потока сочетаний
divload(p,k,minld-1,cmb,cmb_); // векторы прямых и обратных сочетаний.
for (i=0;i<k;i++) sgn0+=i;
for (i=0;i<p;i++) {cm[i]=i*p; cmk[i]=cm[i]+k;}
seq1(k); seq2(d); // генерация шаблонов первого и второго минора
cmb0[0]=50; cmb0_[0]=50; // предельные значения векторов сочетаний
for (i1=minld;i1<=maxld;i1++) { // цикл перебора сочетаний (слагаемых)
for (v=0;v<k;v++) if (cmb[v]!=cmb0[v]) {
// учет повторяющихся подвыражений первого минора
if (!v) {sn[0]=sgn0+cmb[0]; cmb0[0]=cmb[0]; j1=cm[cmb[0]];
for (m=0;m<k;m++) v10[m]=actv[j1+m].val; v++;} break;}
na=nu_1[v]; nu=nu_n1[v-1];
for (;v<k;v++) { // вычисление первого минора
v2=2*(v+1); sn[v]=sn[v-1]+cmb[v];
cmb0[v]=cmb[v]; j1=cm[cmb[v]];
for (;nu<nu_n1[v];nu+=v2) {v3=nu+v2;
v10[++na]=v10[ncm[nu]]*actv[j1+ncm1[nu+1]].val;
for (j=nu+4;j<v3;j+=4)
v10[na]+=v10[ncm[j]]*actv[j1+ncm1[j+1]].val;
for (j=nu+2;j<v3;j+=4)
v10[na]-=v10[ncm[j]]*actv[j1+ncm1[j+1]].val;
} } // учет повторяющихся подвыражений второго минора
for (v=0;v<d;v++) if (cmb_[v]!=cmb0_[v]) {
if (!v) {cmb0_[0]=cmb_[0]; j1=cmk[cmb_[0]];
for (m=0;m<d;m++) v20[m]=actv[j1+m].val; v++;} break;}
nb=nu_2[v]; nu=nu_n2[v-1];
for (;v<d;v++) { // вычисление второго минора
cmb0_[v]=cmb_[v]; v2=2*(v+1); j1=cmk[cmb_[v]];
for (;nu<nu_n2[v];nu+=v2) {v3=nu+v2;
v20[++nb]=v20[ncm1[nu]]*actv[j1+ncm2[nu+1]].val;
for (j=nu+4;j<v3;j+=4)
v20[nb]+=v20[ncm1[j]]*actv[j1+ncm2[j+1]].val;
for (j=nu+2;j<v3;j+=4)
v20[nb]-=v20[ncm1[j]]*actv[j1+ncm2[j+1]].val; } }
if (sn[k1]%2) det-=v10[na]*v20[nb];
else det+=v10[na]*v20[nb]; // добавление слагаемого
for (i=d1;i>0;i--) // генератор обратных сочетаний
if (cmb_[i]-cmb_[i-1]!=1) break;
cmb_[i++]--; if (i<d) {cmb_[d1]=p1;

```

```

for (m=d1;m>i;m--) cmb_[m-1]=cmb_[m]-1;}
if (cmb[k1]<p1) cmb[k1]++; // генератор прямых сочетаний
else {for (i=k1;i>1;i--) if (cmb[i]-cmb[i-1]!=1) break;
cmb[i-1]++; for (;i<k;i++) cmb[i]=cmb[i-1]+1;} } }

```

Оценка затрат при половинном делении матрицы с вычислением последовательных выражений произведений миноров. Имеются перспективы использования программы HalfSeq – генератора последовательных выражений с одновременным вычислением для матриц 40–50-го порядка. В случае рекурсивного половинного деления матриц порядков 20–22 с помощью программы HalfMat время от порядка к порядку возрастало в 3–4 раза. Выражения, занесенные на жесткий диск, оказывались бесполезными вследствие практической невозможности вычисления (интерпретации). При этом значительная доля времени генерации выражений использовалась именно на вывод формулы.

Вычисление последовательных выражений для миноров половинного порядка непосредственно в оперативной памяти обеспечивает постоянное среднее увеличение затрат времени с увеличением порядка матрицы на единицу. Алгоритм, реализованный в программе HalfSeq, относится к классу «in constant average time (CAT)-algorithm», как в случае генерации неизоморфных корневых деревьев [15].

Однако объем вычислений определяется числом не деревьев, а всех возможных пар миноров, образующихся при половинном делении матрицы. В алгоритмах генерации корневых деревьев число деревьев увеличивается с добавлением вершины примерно в 3 раза, и во столько же раз увеличиваются затраты времени.

Для предлагаемого разложения определителя полной матрицы с увеличением порядка на единицу затраты времени увеличиваются менее, чем в 3 раза — не более, чем 2,5, что иллюстрируют данные табл. 1. Коэффициент 2,5 можно считать относительно низким, поскольку число сочетаний пар миноров при увеличении порядка матрицы на единицу удваивается. Таким образом, возрастание объема вычислений не так сильно сказывается на увеличении времени вычислений. Расчет определителя полной матрицы 34-го порядка [14] укладывается в рассмотренную структуру затрат.

Таблица 1. Формирование и расчет определителей
полных матриц программой HalfSeq

<i>p</i>	Значение определителя	Время расчета
18	5480386857784836096000.	00:00:00.41
19	262144000000000000000000.	00:00:00.85
20	13248496640331120070000000.	00:00:01.11
21	705429498686391737000000000.	00:00:02.63
22	39471584120695663120000000000.	00:00:03.44
23	231551350147618771600000000000.	00:00:12.59
24	14210854715201855900000000000000.	00:00:17.98
25	91066857695374444240000000000000.	00:00:45.45
26	6082667877133238002000000000000000.	00:01:43.70
27	422774529505785155500000000000000000.	00:04:26.43
28	30531345459705142380000000000000000000.	00:10:34.44
29	2.2876792454961102330000000000000000000e+41	00:28:18.83
30	1.7761887753094042160000000000000000000e+43	01:00:21.56
31	1.4272476927059598810000000000000000000e+45	02:42:02.69
32	1.1855834718803175280000000000000000000e+47	06:09:57.15
33	1.0170102859315408226000000000000000000e+49	15:56:40.36

Выводы

1. Вычисление последовательных выражений для миноров половинного порядка в оперативной памяти обеспечивает постоянное среднее увеличение затрат времени 2,5 раза с увеличением порядка матрицы на единицу, что показал расчет программой HalfSeq матричных определителей 17–33 порядков.

2. Объем вычислений распределен по потоку всех возможных пар миноров и дополнительных миноров при половинном делении матрицы. С увеличением порядка матрицы на единицу число слагаемых определителя удваивается, поэтому коэффициент увеличения затрат в 2,5 раза, можно считать относительно низким.

3. По сравнению с известными алгоритмами возрастание объема вычислений не так сильно сказывается на увеличении времени вычислений, препятствуя дальнейшему продвижению в направлении увеличения порядка полной матрицы.

Список литературы

1. Smit J. The efficient calculation of symbolic determinants // Proc. of the ACM symposium on symbolic and algebraic computation.– 1976.– P. 105–113.
2. Shi G. Computational complexity analysis of determinant decision diagram // IEEE Trans. on Circuits and Syst. II: Express briefs.– 2010.– Vol. 57, no. 10.– P. 828–832.
3. Филаретов В.В. Схемное отображение матрицы для символьного решения систем линейных алгебраических уравнений // Логико-алгебраические методы, модели, прикладные применения: Тр. международ. конф.– Ульяновск: Ульян. гос. техн. ун-т, 2001.– С. 13–15.
4. Филаретов В.В. Метод двоичных векторов для топологического анализа электронных схем по частям // Электричество.– 2001.– №8.– С.33–42.
5. Филаретов В.В. Программа символьного анализа CIRSYM: история создания, структура и функции // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. научн. труд. – Ульяновск: УлГТУ, 2012.– Вып. 10.– С.158–171.
6. Недорезов М.В., Филаретов В.В. Эффективные алгоритмы разложения матричных определителей // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: международ. сб. науч. тр. – Ульяновск: УлГТУ, 2015. – Вып. 12. – С. 195–215.
7. Недорезов М.В., Филаретов В.В. Разложение определителей матриц с одинаковыми элементами в символьном виде // In memoriam: Султан Галимзянович Валеев: сборник памяти С.Г.Валеева.– Ульяновск: УлГТУ, 2016.– С. 104–114.
8. Filaretov V., Gorshkov K. Efficient generation of compact symbolic network functions in a nested rational form // International Journal of Circuit Theory and Applications: Research articles.– May 2020.– P. 1–25.
9. Филаретов В.В., Недорезов М.В. Минимальные формулы определителей полных матриц на основе их половинного деления // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. научн. труд. – Ульяновск: УлГТУ, 2020.– Вып. 16. – С. 124–144.
10. Курганов Д.С., Тимофеев В.Ф., Филаретов В.В. Разложение символьных определителей полных матриц высокого порядка // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. научн. труд. – Ульяновск: УлГТУ, 2020.– Вып. 16.– 145–152.

11. Недорезов П.В., Филаретов В.В. Оптимизация символьных определителей разреженных матриц // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2020. – Вып. 16.– С. 153–163.
12. Агеев М.И., Алик В.П., Марков Ю.И. Библиотека алгоритмов 151б–200б (Справочное пособие).– Вып.4.– 1981.– 184 с.
13. Trent HM. A note on the enumeration and listing of all maximal trees of a connected linear graph // Proceedings of the National Academy of Sciences USA.– 1954.– Vol. 40.– 1004–1007.
14. Кузьмин Н.П., Курганов Д.С., Филаретов В.В. Параллельный расчет символьных определителей полных матриц высокого порядка при произвольном числе процессоров // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. труд. – Ульяновск: УлГТУ, 2022.– Вып. 17.– С.135–141.
15. Недорезов П.В., Филаретов В.В. Генерация неизоморфных корневых деревьев в частичном и полном лексикографическом порядке // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. труд. – Ульяновск: УлГТУ, 2022.– Вып. 17.– С.164–190.

Недорезов Максим Владимирович – аспирант факультета аэромеханики и летательных аппаратов Московского Физико-Технического Института.
E-mail: nedmv@rambler.ru

Тимофеев Владимир Федорович – инженер-конструктор 2 категории, Ульяновский филиал Конструкторского бюро Публичного Акционерного Общества "ТУПОЛЕВ" (ПАО «Туполев»). Адрес: 432072, г. Ульяновск, Россия, пр-т Антонова. E-mail: v.f.timofeev@mail.ru

Филаретов Владимир Валентинович – докт. техн. наук, ответственный редактор международного научного сборника «Синтез, анализ и диагностика электронных цепей» Ульяновского государственного технического университета. E-mail: vvfil@mail.ru

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ РАСЧЕТ СИМВОЛЬНЫХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ ПОЛНЫХ МАТРИЦ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ ЧИСЛЕ ПРОЦЕССОРОВ

Н. П. Кузьмин, Д. С. Курганов, В. В. Филаретов

Рассмотрены вопросы создания и запуска подзадач при параллельной обработке с последующим объединением частичных решений в решение всей задачи. Показано, что многократного эффекта параллельных вычислений можно достичь без программирования раздельной обработки – простым делением задачи на подзадачи и одновременным запуском исполняемых модулей. Этот выигрыш может, как уменьшиться, так и увеличиться при запуске подзадач партиями с числом подзадач, меньшим их числа. Предложенные рекомендации учтены при генерации и вычислении символьного выражения определителя полной матрицы 34-го порядка за несколько часов вместо нескольких суток.

Особенности параллельного решения задач. Параллелизация вычислений обычно рассматривается теоретически, когда предполагается формирование заданий каждому процессору [1,2]. Такие вычисления максимально эффективны тогда, когда обеспечена равномерная загрузка всех используемых процессоров. При этом выигрыш по времени равен числу используемых процессоров, а время решения задачи равно времени, затрачиваемому каждым процессором.

Языки программирования высокого уровня обычно не предоставляют доступа к аппаратным возможностям компьютера для направления заданий вычислительным ядрам процессора. Поэтому приходится ограничиваться запуском нескольких исполняемых модулей, обеспечивающих частичное решение задачи на одном или нескольких компьютерах.

В случае одного процессора, который может иметь несколько вычислительных ядер, целесообразно делить исходную задачу на некоторое количество подзадач приблизительно одинаковой сложности.

Также важно, чтобы объединение результатов решения подзадач, не было слишком сложным, чтобы не был сомнительным выигрыш от параллелизации. Небольшие по сложности подзадачи облегчают вычисления компьютеру, но затрудняют объединение решений, даже при простом учете частичных решений из-за плохобозримого их числа.

Параллельное разложение матричных определителей. Генерация и вычисление выражений определителей полных матриц является сложной задачей даже при современном состоянии вычислительной техники [3, 4]. Для решения матричных задач высокого порядка приходится использовать алгоритмы, которые можно адаптировать к параллельному решению, предусматривающему деление задачи на части.

Получать решения подзадач в виде выражений, хранящихся на жестком диске, бессмысленно, потому что вычисление этих выражений требует в несколько раз больше времени, чем их генерация [4]. Избежать хранения промежуточных результатов позволяет вычисление значения определителя в процессе генерации его выражения [5]. Это предельно упростит объединение решений подзадач, сводя их к суммированию частичных определителей.

Рекурсивное половинное деление матрицы представляет определитель в виде суммы произведений миноров [3]. Слагаемые этой суммы соответствуют сочетаниям, генерируемым в лексикографическом порядке. Сочетания выбираются из целого числа, равного порядку матрицы p по $p/2$. При этом каждый минор будет иметь размерность $p/2$. Если p – нечетное число, то сочетания выбираются по $(p-1)/2$. При этом первый минор будет иметь размерность $k=(p-1)/2$, а второй минор – размерность $p-k$.

Число сочетаний из p по k просто разделить на число имеющихся процессоров, чтобы процессорам достались для обработки близкие по количеству потоки сочетаний.

Для рекурсивного деления матрицы на два минора половинного порядка [3] подзадачи представляют собой набор лексикографически упорядоченных сочетаний от некоторого сочетания (нижней границы) до другого сочетания (верхней границы). Объединение результатов решения подзадач состоит в суммировании произведений взаимно дополнительных

миноров в диапазоне от нижней до верхней границы сочетаний, относящихся к рассматриваемой подзадаче.

Параллельные вычисления при использовании этого алгоритма разложения матричных определителей реализуются предельно эффективно вследствие равномерной загрузки процессоров. Подзадачи (потoki сочетаний) идеальные – отличаются одна от другой плюс-минус несколькими слагаемыми. Это обусловлено делением всех слагаемых выражения определителя поровну с учетом количества имеющихся вычислительных ядер, процессоров, компьютеров и одновременно запущенных исполняемых модулей программы HalfMat. Пользователю остается уповать на эффективность использования системой аппаратных возможностей компьютера в мультипрограммном режиме.

Дальнейшее изложение сопровождается параллельным расчетом определителя полной матрицы 34-го порядка. Для удобства воспроизведения вычислений рассматривается матрица является матрицей Трента, значение которой равно числу деревьев полного графа с 35 вершинами или определителю полной 35-узловой полной схемы с единичными проводимостями [6].

Полная матрица 34-го порядка: формирование подзадач. Количество подзадач выбирается с учетом времени работы подзадачи на используемом компьютере. Это время не должно быть слишком большим в смысле удобства работы пользователя программы. Для каждой подзадачи указывается начальное и конечное сочетание обрабатываемого в рамках подзадачи потока сочетаний. Деление на потоки сочетаний предусматривается в соответствующем режиме работы программы.

В рассматриваемом примере было выбрано 12 подзадач для расчета на двух компьютерах: 1) AMD Ryzen 3500X, 6-ти ядерный на частоте 4092 МГц.; 2) INTEL Core i7 5930K, 6-ти ядерный на частоте 3,5 ГГц. Ориентировали основной расчет на втором компьютере с 6-ю физическими и 6 виртуальными ядрами (отсюда выбранное число подзадач – 12).

Подзадачи считались по одной за приемлемое время. На первом компьютере 1 подзадача считалась с таким временем:

det=2.211443613864848152000000000000000000000000e+51

Execution time: 02 hour 12 min. 24.22 sec (1)

На втором компьютере эта же подзадача считалась дольше:

det=2.2114436138648481520000000000000000000000e+51

Execution time: 03 hour 22 min 40 sec (2)

Частичные потоки сочетаний 1–12 перечислены в строках табл. 1.

Таблица 1. Расчет нижней и верхней границы потока сочетаний для подзадач 1–12

Номер потока	Частичный поток сочетаний	
	Нижняя граница	Верхняя граница
1	1	194467185
2	194467186	388934370
3	388934371	583401555
4	583401556	777868740
5	777868741	972335925
6	972335926	1166803110
7	1166803111	1361270295
8	1361270296	1555737480
9	1555737481	1750204665
10	1750204666	1944671850
11	1944671851	2139139035
12	2139139036	2333606220

Число подзадач, равное 12, кратно числу всех сочетаний. Поэтому размеры всех потоков одинаковы и равны размеру первого потока 194467185 сочетаний.

Эксперименты на первом компьютере AMD Ryzen 3500X. Вначале было определено число подзадач, которое может одновременно считать компьютер примерно за одинаковое время, близкое ко времени решения одной подзадачи. Система, управляющая компьютером, так устроена, что не может бросить все имеющиеся ресурсы на решение единственной задачи. Эти ресурсы не позволяют ускорить тактовый генератор, поэтому подзадача, запущенная одна, не может считаться быстрее.

Однако у компьютера есть ресурсы, которые позволяют с такой же скоростью считать 4 задачи, а пятую уже не тянет. Действительно, по одному запущенному файлу система показывала загрузку от 19,5–21,8%. Если поделим весь ресурс компьютера 100% на ресурс для одной подзадачи 21,8 %, то примерно получается = 4,6 подзадач, которые могут считаться одновременно. Эксперимент показал, что при запуске 5-й

подзадачи компьютер «подвисал», то есть «подсказал», что целесообразно запускать подзадачи партиями по 4 подзадачи.

Таблица 1. Время расчета 12 подзадач в трех партиях по четыре, в часах : минутах

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2:13	1:53	1:53	1:49	1:48	1:55	1:55	1:48	1:50	1:53	1:53	2:13

При этом получается многократное ускорение. Если бы мы запускали по одной 12 подзадач, то считали бы определитель 34-го порядка приблизительно: 2 часа * 12=24 часа. Долго, хотя намного быстрее, чем при отказе от деления на подзадачи. При загрузке подзадач партиями по 4 подзадачи (2 часа на расчет партии) на 12 подзадач потребовалось 2*3=6 часов. В 4 раза быстрее!

Проверка численного решения. Для матрицы Трента 34-го порядка только 4 из 12 подзадач имеют ненулевое решение, поэтому $\det = \det1 + \det2 + \det3 + \det7$. После подстановки численных значений:

$$\begin{aligned} \det1 &= 22.11443613864848152e+50; \\ \det2 &= -4.371458306477090952e+50; \\ \det3 &= -4.371458306477090952e+50; \\ \det7 &= -4.371458306477090952e+50; \end{aligned}$$

получаем эталонное значение, соответствующее значению матрицы Трента 34-го порядка. $DET = 9.0000612192172087e+50$.

Эксперименты на втором компьютере INTEL Core i7 5930K. На этом компьютере было проведено три эксперимента: 1) с тремя; 2) с шестью и 3) с двенадцатью подзадачами в партии (табл. 2–4 соответственно).

Таблица 2. Время расчета 12 подзадач в четырех партиях по три, в часах : минутах

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3:25	2:57	2:55	2:49	2:47	2:56	2:56	2:46	2:48	2:54	2:54	3:24

Таблица 3. Время расчета 12 подзадач в двух партиях по шесть, в часах : минутах

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3:25	2:54	2:54	2:48	2:47	2:57	2:58	2:47	2:48	2:54	2:55	3:24

Таблица 4. Время расчета 12 подзадач в одной партии в часах : минутах

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
5:49	5:16	5:18	5:11	5:06	5:18	5:22	5:07	5:11	5:16	5:14	5:50

Второй компьютер справлялся с каждой подзадачей в партиях из трех и шести подзадач за одинаковое время. Значит, было неважно, сколько задач в партии 3 или 6. Очевидно, что целесообразно использовать партии с большим числом подзадач, поскольку решение можно получить в 1,5 раза быстрее. Если проводить оценку по среднему времени решения подзадач, например 3 часа 10 минут, то время решения всей задачи для четырех подзадач в партии равно примерно 9 с половиной часов, а для 6 подзадач в партии время решения задачи равно 6 часов 20 минут

Судя по тому, что время решения самых сложных первой или двенадцатой задач такое же – (2), можно заключить, что увеличение времени вычислений начнется, когда число подзадач в партии превысит число физических ядер, то есть шесть.

При партии в двенадцать подзадач (табл. 4) время каждой подзадачи максимальное – в среднем 5 часов 20 минут. Однако за это время обеспечивается решение 12 подзадач, то есть всей задачи. Получается, что с партией в максимальное число подзадач достигается наименьшее время решения задачи. Это на 1 час меньше, чем с наибольшей половинной партией в 6 подзадач, и меньше, чем в случае использования более быстродействующего первого компьютера (табл. 1), которому требуется примерно столько же времени, сколько затрачивается при шести подзадачах в партии (табл. 3).

Выводы:

1. Установлено, что при продолжительном счете целесообразно предусматривать параллельную обработку нескольких подзадач и запускать их одновременно. Число подзадач в партии для единовременного запуска определяется экспериментально по запуску одной подзадачи.

2. Параллельная обработка подзадач с последующим объединением их решений позволяет существенно снизить требования к используемым компьютерам и обеспечивает многократное ускорение.

Список литературы

1. E.M. Kubicka, K.A. McKeon, An application of level sequences to parallel generation of rooted trees, Combinatorial mathematics and combinatorial computing 76 (2011) 33–58.
2. Горшков К.С., Недорезов М.В., Филаретов В.В. Параллельная генерация неизоморфных корневых деревьев с равномерной загрузкой процессоров // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. научн. труд. – Ульяновск: УлГТУ, 2022.– Вып. 17. – С. 191–212.
3. Недорезов М.В., Филаретов В.В. Минимальные формулы определителей полных матриц на основе их половинного деления // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. научн. труд. – Ульяновск: УлГТУ, 2020.– Вып. 16. – С. 124–144.
4. Курганов Д.С., Тимофеев В.Ф., Филаретов В.В. Разложение символьных определителей полных матриц высокого порядка // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. научн. труд. – Ульяновск: УлГТУ, 2020.– Вып. 16.– 145–152.
5. Недорезов М.В., Тимофеев В.Ф., Филаретов В.В. Вычисление символьных определителей полных матриц на основе их половинного деления и наращивания строк // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. научн. труд. – Ульяновск: УлГТУ, 2022.– Вып. 17. – С. 120–134.
6. Trent HM. A note on the enumeration and listing of all maximal trees of a connected linear graph // Proceedings of the National Academy of Sciences USA.– 1954.– Vol. 40.– 1004–1007.

Кузьмин Николай Павлович – директор Общества с ограниченной ответственностью ООО "Спецмонтажсервис".

Домашний адрес: 432010, г. Ульяновск, проезд Сиреневый д.14, кв.11;

тел:(8927)270-13-62; e-mail: niko_rus@mail.ru.

Курганов Дмитрий Сергеевич – инженер-программист и системный администратор, г. Ульяновск . E-mail: kurganov_ds@mail.ru

ГЕНЕРАЦИЯ И ВЫЧИСЛЕНИЕ КОМПАКТНЫХ СИМВОЛЬНЫХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ ДЛЯ РАЗРЕЖЕННЫХ МАТРИЦ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

К. С. Горшков, П. В. Недорезов, В. В. Филаретов

Разработан алгоритм половинного деления для компактного разложения определителя произвольной матрицы с одновременной интерпретацией выражения для получения значения произведения пары взаимно дополняющих миноров. Оптимальная свертка выражений миноров обеспечивает сокращение времени вычисления определителя за счет уменьшения числа операций и размера выражения. Выполнение всех операций в оперативной памяти, минуя использование жесткого диска, позволяет реализованной программе обрабатывать разреженные матрицы до 999-го порядка.

A half-division algorithm has been developed for compact decomposition of the determinant of an arbitrary matrix with synchronous interpretation of the expression to obtain the value of the product of a pair of mutually complementary minors. Optimal convolution of minor expressions reduces the time for calculating the determinant by reducing the number of operations and the size of the expression. Performing all operations in RAM, bypassing the use of a hard disk, allows the implemented program to process sparse matrices up to the 999th order.

Определители разреженных матриц. Матричные математические модели произвольной физической природы обычно имеют разреженную структуру. Однако интерес к полным матрицам, как и к схемам с полной топологической структурой не ограничивается использованием в качестве тестовых моделей при проверке программ. Например, при использовании полной матрицы в качестве шаблона разработаны эффективный алгоритм и программа разложения определителей разреженных матриц [1]. В качестве основы был взят рекурсивный алгоритм половинного деления полной матрицы произвольного порядка [2].

В данной статье обсуждается ряд усовершенствований алгоритма [1] путем учета разреженности матрицы. Разработанная программа HalfsCal

предусматривает вычисление значения определителя в процессе генерации выражения на основе половинного деления матрицы. Переход к последовательным выражениям миноров здесь, в отличие от программы HalfSeq [3], не выполняется, поскольку для произвольной разреженной матрицы сложнее запрограммировать генерацию последовательных выражений миноров. В этом нет необходимости, главным образом, потому, что единые выражения определителей разреженных матриц высоких порядков довольно компактны и быстро обрабатываются интерпретатором в оперативной памяти, хотя для хранения на диске с последующей интерпретацией слишком велики.

В матричных моделях электрических цепей разреженность обычно обусловлена отсутствием или небольшой долей ненулевых элементов в левом нижнем или правом верхнем углу относительно главной диагонали. Матрицы обладают ленточной структурой, как, например, 5-диагональная матрица Гинзбурга, 40-го порядка [4], левый верхний квадрант которой показан на рис. 1.

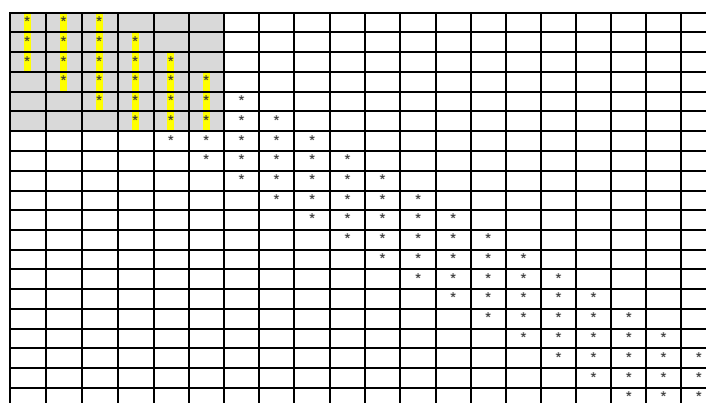


Рис. 1. Левый верхний квадрант (20 на 20)
5-ти диагональной матрицы Гинзбурга 40-го порядка
(выделен первый диагональный блок 6 на 6)

Обобщение матрицы Гинзбурга. Матрица Гинзбурга с целочисленными значениями была изначально предложена в виде матрицы 40-го порядка с целочисленными значениями и значением определителя равным 1681. Если эту матрицу обобщить для произвольного порядка, то ее удобно использовать в качестве тестовой для программ формирования и вычисления матричных определителей. Минимальный порядок матрицы Гинзбурга равен 6. Такая матрица выделена в левом верхнем углу матрицы Гинзбурга 20 порядка.

Для хранения разреженной матрицы предлагается использовать список ненулевых элементов по строкам. Идентификаторы элементов матрицы начинаются символом «G». После него идет номер строки, знак подчеркивания «_», номер столбца и численное значение элемента.

Верхний порядок матрицы Гинзбурга не ограничен, но для тестирования программ можно ограничиться диапазоном порядков от $6 < p < 999$. Для создания файла со строками-элементами матрицы Гинзбурга удобно воспользоваться фрагментом кода на языке Си:

```
fprintf(inpa,"Ginsburg's matrix of order %d\n",p);
fprintf(inpa,"G1_1 5\nG1_2 -4\nG1_3 1\n"); // занесение 1-й строки
fprintf(inpa,"G2_1 -4\nG2_2 6\nG2_3 -4\nG2_4 1\n\n"); // 2-й строки
j=2;
for (i=1;i<=p-4;i++) {j++; // занесение (p-4)-х строк
fprintf(inpa,"G%d_%d 1\n",j,j-2);
fprintf(inpa,"G%d_%d -4\n",j,j-1);
fprintf(inpa,"G%d_%d 6\n",j,j);
fprintf(inpa,"G%d_%d -4\n",j,j+1);
fprintf(inpa,"G%d_%d 1\n\n",j,j+2); }
// занесение (p-1)-й строки
fprintf(inpa,"G%d_%d 1\n",p-1,p-3);
fprintf(inpa,"G%d_%d -4\n",p-1,p-2);
fprintf(inpa,"G%d_%d 6\n",p-1,p-1);
fprintf(inpa,"G%d_%d -4\n\n",p-1,p);
// занесение p-й строки
fprintf(inpa,"G%d_%d 1\n",p,p-2);
fprintf(inpa,"G%d_%d -4\n",p,p-1);
fprintf(inpa,"G%d_%d 5\n",p,p);
fprintf(inpa,".end\n"); } }
```

Нетрудно убедиться в том, что матрица Гинзбурга порядка p – это каскадное соединение $p-2$ четырехполюсников. Например, матрица Гинзбурга порядка 6 это каскадное соединение $(6-2=4)$ четырех четырехполюсников, показанное на рис. 2.

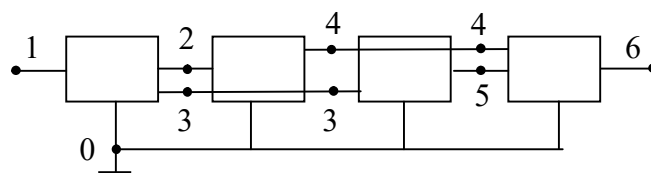


Рис. 2. Схемное отображение матрицы Гинзбурга 6-го порядка

Матрица проводимостей схемы на рис. 2 соответствует матрице Гинзбурга 6-го порядка (рис. 3).

G11	G12	G13			
G21	G22	G23	G24		
G31	G32	G33	G34	G35	
	G42	G43	G44	G45	G46
		G53	G54	G55	G56
			G64	G65	G66

Рис. 3. Первый диагональный блок матрицы Гинзбурга

Для матрицы на рис. 3 вышеприведенный фрагмент на языке Си сводится к записи следующих строк: первой строки из трех элементов, второй строки из четырех элементов, третьей и четвертой строки из пяти элементов в цикле `for (i=1;j<=2;i++)`; пятой строки из четырех элементов и шестой строки из трех элементов.

Список элементов матрицы 6-го порядка для разработанной программы `HalfsCal` имеет вид:

```
G1_1 5 G1_2 -4 G1_3 1 G2_1 -4 G2_2 6 G2_3 -4 G2_4 1 G3_1 1 G3_2 -4
G3_3 6 G3_4 -4 G3_5 1 G4_2 1 G4_3 -4 G4_4 6 G4_5 -4 G4_6 1 G5_3 1
G5_4 -4 G5_5 6 G5_6 -4 G6_4 1 G6_5 -4 G6_6 5 .
```

Новые обозначения элементов матрицы в отличие от обозначений, используемых в программах `HalfMat` и `Halfs`, лишены неоднозначности и допускают представление элементов до `G999_999`.

Генерация компактных формул с численной интерпретацией: особенности программы `HalfsCal`. Первой задачей данной статьи является совершенствование программы `Halfs` [1] для генерации определителей произвольных разреженных матриц высокого порядка. Избежать рассмотрения нулевых миноров позволяет простая проверка подматриц на включение нулевой строки или столбца.

Учет «ленточности» матрицы приводит к резкому сокращению затрат времени путем предварительной отбраковки сочетаний строк для миноров левой и правой половины матрицы (первого и второго минора). Такие строки выявляются просмотром элементов второго минора. Строки первого (дополняющего) минора не проверяются, потому что вследствие

ленточности матрицы ненулевым вторым минорам соответствуют ненулевые первые миноры. В ленточной матрице Гинзбурга пять диагоналей, следовательно, при половинном делении возможно только 6 ненулевых пар миноров при первом половинном делении. При этом неважно, какой порядок матрицы.

Покажем это на примере матрицы рис. 3. Матрица делится пополам, оставляя столбцы 1, 2, 3 в левой половине, а столбцы 4, 5, 6 в правой половине. В левой (правой) половине строка 6 (строка 1) нулевая, Поэтому для первого минора образуются сочетания строк: 123, 124, 125, 134, 135, 145. Сочетания без 1 не приведут к ненулевым парам первого и второго минора, поскольку во второй половине матрицы первая строка нулевая. Сочетания с 6 невозможны, поскольку в самой первой половине матрицы строка 6 нулевая. Таким образом, из 20 сочетаний для 6 элементов по 3 останется 6 приведенных выше сочетаний, образующих пять произведений первого и второго минора, которые суммируются в определителе рассматриваемой матрицы.

Предлагаемый учет разреженности позволяет вручную разложить определитель этой матрицы 6-го порядка. Найденные 6 сочетаний: 123, 124, 125, 134, 135, 145 приводят к выражению:

$$D=M_{123} * M_{456} - M_{124} * M_{356} + M_{125} * M_{346} + M_{134} * M_{256} - M_{135} * M_{246} + M_{145} * M_{236} \quad (1)$$

Знак перед произведениями миноров получается суммированием номеров строк и столбцов любого минора, например, первого. Номера столбцов этого минора фиксированы 1+2+3 – это неизменяющаяся составляющая знака. Номера строк минора меняются: 1+2+3, 1+2+4, 1+2+5, 1+3+4, 1+3+5, 1+4+5 – это изменяющаяся составляющая знака. Так получают знаки перед произведениями миноров выражения (1). Раскрытие программой самих миноров третьего порядка очевидно:

$$\begin{aligned} M_{123} &= (G1_3 * (G2_1 * G3_2 - G2_2 * G3_1) - G2_3 * (G1_1 * G3_2 - \\ &G1_2 * G3_1) + G3_3 * (G1_1 * G2_2 - G1_2 * G2_1)); \\ M_{456} &= (G4_6 * (G5_4 * G6_5 - G5_5 * G6_4) - G5_6 * (G4_4 * G6_5 - \\ &G4_5 * G6_4) + G6_6 * (G4_4 * G5_5 - G4_5 * G5_4)); \\ M_{124} &= (G1_3 * (G2_1 * G4_2) - G2_3 * (G1_1 * G4_2) + G4_3 * (G1_1 * G2_2 - G1_2 * G2_1)); \\ M_{356} &= (-G5_6 * (G3_4 * G6_5 - G3_5 * G6_4) + G6_6 * (G3_4 * G5_5 - G3_5 * G5_4)); \\ M_{125} &= (+G5_3 * (G1_1 * G2_2 - G1_2 * G2_1)); \end{aligned}$$

$$M_{346} = (-G4_6*(G3_4*G6_5-G3_5*G6_4)+G6_6*(G3_4*G4_5-G3_5*G4_4));$$

$$M_{134} = (G1_3*(G3_1*G4_2)-G3_3*(G1_1*G4_2)+G4_3*(G1_1*G3_2-G1_2*G3_1));$$

$$M_{256} = (-G5_6*(G2_4*G6_5)+G6_6*(G2_4*G5_5));$$

$$M_{135} = (+G5_3*(G1_1*G3_2-G1_2*G3_1));$$

$$M_{246} = (-G4_6*(G2_4*G6_5)+G6_6*(G2_4*G4_5));$$

$$M_{145} = (+G5_3*(G1_1*G4_2));$$

$$M_{236} = (G6_6*(G2_4*G3_5));$$

После учета выражений миноров в формуле (1) и подстановки численных значений матрицы Гинзбурга 6-го порядка получается $D=49$.

Так как число сочетаний при первом делении матрицы максимальное, уменьшение их числа до шести обуславливает эффективность программной реализации. Например, был получен результат для матрицы Гинзбурга порядка 999. Генерация выражения потребовала 2 часа 19 минут. Однако на численную интерпретацию с помощью программы CalcSym (автор Д.В. Шеин) ушло 10 (!) часов.

Интересен численный результат. CalcSym выдала значение 1000000, альтернативная программа численного расчета определителей MathLab – результат 1000000.0363028118. На меньших порядках 600–700 больших расхождений с MathLab не выявлено.

Высокая точность расчета по символьным выражениям обусловлена их компактной сверткой. Программа HallsCal генерирует единые выражения, отличающиеся высокой точностью. Подвыражения, входящие в выражение (1) на самом деле записываются в одну формулу, минуя промежуточные переменные (идентификаторы миноров) для минимизации погрешности вычислений.

Численная интерпретация формулы, считываемой с жесткого диска, по продолжительности требует в пять раз больше времени. Это означает, что практическое использования разработанного генератора формул ограничено. Второй задачей статьи является установка в программу HallsCal интерпретатора комплексных выражений для вычисления значения матричного определителя в процессе генерации формулы.

Теперь нулевые элементы, даже символ «0», в оперативной памяти не хранятся. Вместо этого их позициям приписывается указатель NYLL. Память под эти элементы не нужно освобождать, отсюда экономия времени. Ниже приводится текст соответствующей функции на языке Си. Отсутствующие пояснения к идентификаторам можно найти в [1, 2].

```

void halfscal(int act_n, MATR *act) {
    int k,k1,k2,p,p1,nu,d,d2,sgn0=0,sgn; MATR *act1;
    int i,j,m,cmb[500],cmbi[1000],stg,n_cmb=0; char *t,t0[50];
    p=sqrt(act_n); det=0; // начальное значение определителя
    k=p/2; d=p-k; k2=k*k; d2=d*d; k1=k-1; p1=p-1;
    for (j=d;j<p;j++) sgn0+=j;
    stg=0; // Переход к следующему сочетанию при нулевой строке
    for (i=0;i<act_n;i+=p)
        {m=0;
        for (j=d;j<p;j++)
            if (act[i+j].reb!=NULL) m=1;
            if (m) break; stg++;
        }
    j=stg+k;
    for (i=stg;i<j;i++) cmb[i-stg]=i;
    x[0]='\0'; w=x; // присвоение значений очередному минору
    // занесение элементов матрицы в строку w
    ... ..
rep: n_cmb++; // формирование миноров для нового сочетания
    for (i=0;i<p;i++) cmbi[i]=0;
    for (i=0;i<k;i++) cmbi[cmb[i]]=1;
    i=0; // учет нулевых строк для пропуска сочетаний
    for (j=0;j<p;j++)
        {if (cmbi[j])
        {for (m=d;m<p;m++)
        if (act[i+m].reb!=NULL) goto fi;
        goto con;}
        else
        for (m=0;m<d;m++)
        if (act[i+m].reb!=NULL) goto fi;
        goto con;
    fi: i+=p;} // начало строки первого минора
    min=1; c[0]='\0'; b=c; skol=0;
    strcat(b,x); b+=strlen(x);
    act1=(MATR *) malloc (k2*sizeof(MATR));
    nu=0; i=0; // формирование первого минора act1
    for (j=0;j<p;j++)
        {if (cmbi[j])
        for (m=d;m<p;m++)
            if (act[i+m].reb!=NULL) act1[nu++].reb=strdup(act[i+m].reb);
            else act1[nu++].reb=act[i+m].reb;
        }
    }

```

```

    i+=p;}
    sgn=sgn0; for (j=0;j<k;j++) sgn+=cmb[j];
    if (sgn%2) {strcat(b," m1=-"); b+=5;}
    else {strcat(b," m1= "); b+=5;}
    strcat(b+,"(");
    t=b; halves(k2,act1); // генерация выражения первого минора
    for (i=0;i<k2;i++)
        if (act1[i].reb != NULL) free(act1[i].reb);
    free(act1); // освобождение памяти первого минора
    if (b==t) goto con; // первый минор равен нулю
    strcat(b,""); b+=2;
    ReadFile(); // чтение и вычисление первого минора
    ValidLengthTabl(); // составление таблицы переменных
    analysis(); output(); // синтаксический анализ и вывод значений
    c[0]='\0'; b=c; skol=0; // начало строки первого минора
    strcat(b,x); b+=strlen(x);
    act1=(MATR *) malloc (d2*sizeof(MATR));
    nu=0; i=0; // формирование второго минора act1
    for (j=0;j<p;j++)
        {if (!cmb[j])
            for (m=0;m<d;m++)
                if (act[i+m].reb!=NULL)
                    act1[nu++].reb=strdup(act[i+m].reb);
                else act1[nu++].reb=act[i+m].reb;
            i+=p;}
    strcat(b," m2= ("); b+=6; // произведение миноров
    t=b; halves(d2,act1); // генерация выражения второго минора
    for (i=0;i<d2;i++) if (act1[i].reb != NULL) free(act1[i].reb);
    free(act1); // освобождение памяти второго минора
    if (b==t) goto con; // второй минор равен нулю
    strcat(b,""); b+=2;
    ReadFile(); // чтение и вычисление второго минора
    ValidLengthTabl(); // составление таблицы переменных
    analysis(); output(); // синтаксический анализ и вывод значений
    det=det+min; // добавление очередного сомножителя
con: if (cmb[k1]==p1 && k1) { генератор сочетаний из p по k
    for (i=k1;i>1;i--) if (cmb[i]-cmb[i-1]!=1) break;
    cmb[i-1]++;
    for (;i<k;i++) cmb[i]=cmb[i-1]+1; } else cmb[k1]++;
    if (cmb[k1]<p) goto rep; }

```

Определители матриц Гинзбурга, рассчитанные программой HalfsCal компьютере: AMD Ryzen 5 3550H, 4 ядра, 3.7ГГц, сведены в табл. 1.

Таблица 1. Значения определителей и время вычислений программы HalfsCal.

Порядок Матрицы	Значение определителя матрицы Гинзбурга	Время вычислений, в минутах : секундах
50	2601	00:00.08
100	10201	00:01.01
150	22801	00:05.15
200	40401	00:15.97
250	63001	00:44.34
300	90601	01:29.08
350	123201	02:39.72
400	160801	04:46.63
450	203401	07:56.03
500	251001	15:24.01

Выводы

1. Выделение миноров при рекурсивном половинном делении матрицы многократно эффективнее, чем выделение отдельных элементов матрицы или миноров меньшей (большей) размерности, что решает проблему разложения и вычисления определителей разреженных матриц высокого порядка.

2. Разреженная матрица обрабатывается как полностью заполненная, но подвыражения, соответствующие нулевым минорам, удаляются или не генерируются, что обуславливает эффективность реализованной программы HalfsCal. Такой учет разреженности позволяет увеличить предельные для символьного расчета и вычисления определителей порядки матриц до сотен и тысяч.

3. Компактная свертка единого выражения определителя (при отсутствии промежуточных переменных) обеспечивает повышение точности расчета по сравнению с численным решением и решением в виде последовательных выражений.

Список литературы

1. Недорезов П.В., Филаретов В.В. Оптимизация символьных определителей разреженных матриц // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2020. – Вып. 16.– С. 153–163.
2. Недорезов М.В., Филаретов В.В. Минимальные формулы определителей полных матриц на основе их половинного деления // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. научн. труд. – Ульяновск: УлГТУ, 2020.– Вып. 16.– 124–144.
3. Недорезов М.В., Тимофеев В.Ф., Филаретов В.В. Вычисление символьных определителей полных матриц на основе их половинного деления и наращивания строк // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. труд. – Ульяновск: УлГТУ, 2022.– Вып. 17.– С.120–134.
4. Уилкинсон Д., Райнш К. Справочник по алгоритмам на Алголе: Линейная алгебра.– М.: Машиностроение, 1976.– С. 61. [Wilkinson J.H., Reinsch C. Handbook for automatic computation: Linear algebra.– Heidelberg New York Springer–Verlag Berlin.].

Горшков Константин Сергеевич – канд. техн. наук, доцент кафедры электротехники и прецизионных электромеханических систем Санкт-Петербургского научно-исследовательского университета информационных технологий, механики и оптики (ИТМО).

E-mail: k.gorshkov@list.ru.

Недорезов Петр Владимирович – магистрант Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета – ЛЭТИ им. В.И.Ленина.

E-mail: pyatakpy@rambler.ru

Филаретов Владимир Валентинович – докт. техн. наук, ответственный редактор международного научного сборника «Синтез, анализ и диагностика электронных цепей» Ульяновского государственного технического университета. E-mail: vvfil@mail.ru

СТРУКТУРНЫЙ СИНТЕЗ

АЛГОРИТМ ГЕНЕРАЦИИ НЕИЗОМОРФНЫХ КОРНЕВЫХ ДЕРЕВЬЕВ С ПРИМЕНЕНИЕМ КОДИРОВАНИЯ ИХ СВЕРТОК

Э. А. Свирщёва

Предложено представление корневого дерева в виде свернутого множества путей из корня. Показано, что свертка дерева удобна для исследования его симметрий, в том числе проверки каноничности добавления вершины при рекурсивной генерации корневых деревьев. Рассмотрены алгоритмы построения свертки дерева и генерации неизоморфных корневых деревьев.

A representation of the root tree in the form of a collapsed set of paths from the root is proposed. It is shown that convolution of a tree is convenient for studying its symmetries, including checking the canonicity of vertex addition during recursive generation of root trees. Algorithms for constructing tree convolution and generating non-isomorphic root trees are considered.

Введение. Известно [1], что появление изоморфных вариантов корневых деревьев в процессе их построения обусловлено их симметриями. Отсюда следует, что возможен структурный синтез неизоморфных корневых деревьев в виде управляемого вычислительного процесса, в котором в качестве управляющего фактора, не допускающего построения изоморфных вариантов, используется информация о симметриях деревьев и их составных частей (поддеревьев). Предлагаемый алгоритм это подтверждает.

В работе [1] рассмотрен канонический [2,3] структурный синтез корневых деревьев, в котором используются их лексикографическое (лг) упорядочение. Такое упорядочение позволяет исключить без рассмотрения подавляющее большинство изоморфных вариантов синтезируемых деревьев, но не все. Покажем, что исключение оставшихся изоморфных вариантов возможно с применением информации о

симметриях корневых деревьев (поддеревьев). Составной частью такого синтеза является распознавание симметрий корневых деревьев, которое позволяет обойти построение изоморфных деревьев. Но средства выявления симметрий, примененные в работах [1,4], трудоемки и плохо поддаются автоматизации.

В предлагаемой статье приведен алгоритм процедуры структурного синтеза неизоморфных корневых деревьев, включающий выявление симметрий. В ней для распознавания симметрий применены математическая модель корневого дерева в виде его свертки [4] и математическая модель его структуры в виде символьного кода, которые были введены в работах [4,5]. Переход от представления дерева сверткой к представлению его структуры символьным кодом позволил существенно повысить эффективность выявления симметрий и их применения в структурном синтезе неизоморфных корневых деревьев.

В статье также предложен и применен более эффективный алгоритм построения свертки дерева, чем приведенный в работе [4].

Представление корневого дерева соединением «ромашек». Представим каноническое корневое дерево таблицей 1, в левом столбце которой перечислены номера его корневых вершин, упорядоченных лексикографически (лг) в алфавите $(0, 1, \dots, N)$, в правом столбце – номера вершин инцидентных вершинам левого столбца. Отсутствие инцидентных вершин у вершины с номером n обозначено равенством $m(n) = \emptyset$ (пусто).

Номера вершин правого столбца также лг упорядочены по отношению к номерам, как предшествующей строки, так и предшествующего столбца таблицы. Например, для дерева на рис.1 такая таблица приведена ниже.

Таблица 1

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$m(n)$	1– 6	7	8	9	∅	∅	∅	10– 12	13	14	∅	∅	∅	∅	∅

Построение такой таблицы можно рассматривать как разложение корневого дерева на элементарные поддеревья, какими являются «ромашки». Ромашкой принято называть дерево (поддерево), в котором корневая вершина инцидентна всем остальным его вершинам, названным концевыми (или висячими [6]). Под лепестком ромашки подразумевается ребро дерева, соединяющее ее корень с любой концевой вершиной.

Будем считать, что могут быть ромашки, содержащие по единственному лепестку или совсем без лепестков. Тогда любое корневое

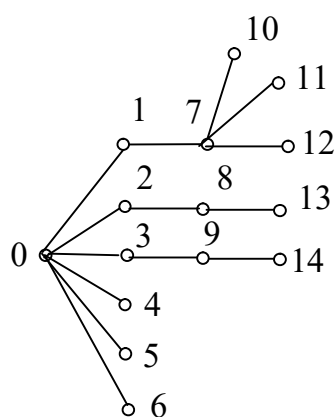


Рис. 1

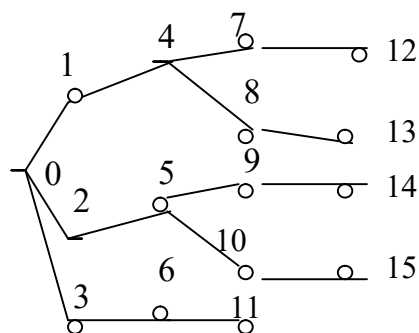


Рис. 2

дерево можно считать составленным из ромашек. Между собой ромашки соединяются с помощью общих вершин.

Для дерева, которое представлено соединением ромашек, в [6] используется название «дерево с висячими корнями». В таком дереве одна и та же вершина может быть одновременно корневой для одного поддерева и концевой для другого. В дереве на рис.1, например, такой является вершина с номером 7.

Условимся рассматривать номера вершин ромашки как элементы множеств. Это позволяет применить к ним алгебраические операции на множествах – композиции и объединения [7,8,9]. Первая из этих операций здесь обозначена жирной точкой «.», вторая – жирной запятой «,» между объединяемыми элементами множества. Для обозначения начала и конца множества используются жирные круглые скобки: «(» и «)». Знак «0» играет роль нуля в операциях над множествами.

Операция «объединение» выражает действие над номерами концевых вершин ромашек, которые принадлежат общему ярусу дерева и имеют общую корневую вершину. Примеры объединения вершин ромашек в дереве на рис.1 – это (1,2,3,4,5,6) или (10,11,12).

Операция «композиция» выражает действие над номерами вершин, которые принадлежат путям [4] в дереве. Примеры композиции вершин в дереве на рис.1 – это 0.1.7.10 или 0.2.8.13.

Каждой ромашке соответствует одна строка таблицы 1. Ромашки в таблице 1 лг упорядочены.

Представление дерева сверткой. От представления ромашками перейдем к представлению дерева и его поддеревьев свертками.

Свертка [4] – это представление корневого дерева (поддерева) алгебраическим выражением (моделью), охватывающим все его вершины. В построении свертки корневого дерева применимы операции композиции и объединения.

Композиция $n.m(n)$ – это свертка n -й ромашки. Например, из таблицы 1 следует, что при $n = 0$ и $m(n) = 1,2,3,4,5,6$ свертка ромашки – это $0.(1,2,3,4,5,6)$, при $n = 1$ и $m(n) = 7$ свертка ромашки – это 1.7 , при $n = 2$ и $m(n) = 8$ свертка ромашки – это 2.8 .

Свертка пары ромашек возможна, если они соединены между собой. Соединение возможно при выполнении следующих условий:

- а) обе ромашки содержат одну общую вершину;
- б) эта вершина в лг старшей из ромашек является концевой, а в младшей из них – корневой.

Например, свертка пары ромашек $0.(1,2,3,4,5,6)$ и 1.7 – это $0.(1.7,2,3,4,5,6)$.

Это свойство указанных вершин сохраняется и после соединения ромашек. Покажем это на примере свертки $0.(1.7,2,3,4,5,6)$. В ней 1(единица) является номером соединяющей вершины. По отношению к вершине 0 вершина 1 является концевой, а по отношению к вершине 7 – корневой.

Свертка дерева (поддерева) меняется с изменением количества соединяемых в нем ромашек с номерами $n \in \{0,1,2,\dots, N\}$ их корневых вершин. Условимся свертку обозначать R_n , учитывая эту зависимость. Свертки с номерами соединяющих вершин $n \neq 1$ строятся по аналогии с $R_1 = 0.(1.7,2,3,4,5,6)$.

Ниже приведен рекурсивный алгоритм построения свертки дерева (поддерева) с использованием разложения его на ромашки.

Исходные данные для работы алгоритма: число вершин дерева N , таблица 1 и первоначальная свертка дерева при $n = 0$. Например, для дерева на рис.1 $R_n = R_0 = 0.m(0) = 0.(1,2,3,4,5,6)$.

Алгоритм 1 построения свертки дерева.

1. Положить $n=1$.
2. Если $m(n) = \emptyset$, положить $R_n = R_{(n-1)}$ и идти к шагу 4.

3. Определить свертку R_n путем замены номера n в свертке $R_{(n-1)}$ композицией $n.m(n)$.
4. Положить $n := n + 1$.
5. Если $n < N$, идти к шагу 2.
6. Конец.

Работа алгоритма показана на примерах корневых деревьев, приведенных на рис.1 и рис.2. В таблицах 2 и 3 соответственно приведены результаты действия алгоритма на каждом шаге его работы. Найденные свертки в таблицах 2 и 3 выделены жирно.

Будем рассматривать свертку дерева с корнем 0 как объединение сверток его поддеревьев с корневыми вершинами $1, 2, \dots, n$.

Например, такой список сверток поддеревьев для дерева на рис.1 – это

1.7.(1.0,11,12), 2.8.13, 3.9.14, 4, 5, 6,

а для дерева рис.2

1.4.(7.12,8.13), 2.5.(9.14,10.15), 3.6.11.

Здесь свертки каждого поддерева выделены подчеркиванием. Объединением соответствующих поддеревьев может быть представлено дерево, номера вершин которого совпадают с номерами корневых вершин его поддеревьев (дерево с висячими корнями). В свертке дерева отображены не только связи между его вершинами, но и между вершинами каждого из его поддеревьев. Заметим, что поддерева каждого из рассмотренных деревьев между собой лг упорядочены по убыванию.

Применение свертки для проверки симметричности деревьев. В свертке отражены особенности структуры дерева: номера вершин ветвления дерева – это множители перед скобками, а образы вершины ветвления – это выражения в скобках.

Последовательность знаков «.», «,», «Ø», «(» и «)», которая обозначает порядок операций над вершинами дерева (поддерева), будем рассматривать как кодовое слово, содержащее информацию о структуре этого дерева, подразумевая при этом, что каждый из знаков «.» и «,» относится к номеру вершины, которому он предшествует. Условимся называть такую последовательность знаков структурным кодом соответствующего дерева.

Таблица 2

n	$m(n)$	R_n
0	1,2,3,4,5,6	0.(1,2,3,4,5,6)
1	7	0.(1.7,2,3,4,5,6)
2	8	0.(1.7,2.8,3,4,5,6)
3	9	0.(1.7,2.8,3.9,4,5,6)
4	Ø	-«-
5	Ø	-«-
6	Ø	-«-
7	10, 11, 12	0.(1.7.(10,11,12),2.8,3.9,4,5,6)
8	13	0.(1.7.(10,11,12),2.8.13,3.9,4,5,6)
9	14	0.(1.7.(10,11,12),2.8.13,3.9.14,4,5,6)
10	Ø	-«-
11	Ø	-«-
12	Ø	-«-
13	Ø	-«-
14	Ø	-«-

Таблица 3

n	$m(n)$	R_n
0	1,2,3	0.(1,2,3)
1	4	0.(1.4,2,3)
2	5	0.(1.4,2.5,3)
3	6	0.(1.4,2.5,3.6)
4	7,8	0.(1.4.(7,8),2.5,3.6)
5	9,10	0.(1.4.(7,8),2.5.(9,10),3.6)
6	11	0.(1.4.(7,8),2.5.(9,10),3.6.11)
7	12	0.(1.4.(7.12,8),2.5.(9,10),3.6.11)
8	13	0.(1.4.(7.12,8.13),2.5.(9,10),3.6.11)
9	14	0.(1.4.(7.12,8.13),2.5.(9.14,10),3.6.11)
10	15	0.(1.4.(7.12,8.13),2.5.(9.14,10.15),3.6.11)
11	Ø	-«-
12	Ø	-«-
13	Ø	-«-
14	Ø	-«-
15	Ø	-«-

Этот код определяется по свертке дерева посредством простого удаления из нее всех цифр. Он представляет собой упорядоченное множество символов операций над множеством вершин дерева (поддерева).

Очевидно следующее

Утверждение. Для того, чтобы два канонических корневых дерева (поддеревья) были симметричными, необходимо и достаточно, чтобы совпадали их структурные коды.

В примерах канонических деревьев, приведенных на рис.1 и рис.2, структурные коды – это $.(..(.,),...,.,.,.)$ и $.(..(.,),..(.,),..)$ соответственно. Они не совпадают. Это достаточный формальный признак отсутствия симметричности соответствующих деревьев. Указанный признак симметричности корневых деревьев был применен впервые в работе [4].

Генерирование неизоморфных корневых деревьев. В основу предлагаемого рекурсивного алгоритма структурного синтеза неизоморфных корневых деревьев положен метод перехода от канонического дерева T_q с q вершинами к вариантам канонического дерева $T_{(q+1)}$ с $(q+1)$ вершинами. Этот метод был обоснован и применен в работах [1,4,5,10] при использовании различных математических моделей дерева.

Множество номеров вершин канонического дерева T_q обозначим J_q . Для отбора допустимых вариантов присоединения дополнительных ребер к вершинам дерева T_q необходимо осуществить попарное сравнение деревьев (поддеревьев) исходного дерева T_q , имеющих общую корневую вершину $n \in \{0,1,2,\dots, N\}$. Признаком симметричности сопоставляемой пары деревьев (поддеревьев) является совпадение их структурных кодов, которые определяются по сверткам.

Если два дерева (поддеревья) симметричны, необходимо исключить из множества J_q номер младшей из двух симметричных вершин дерева T_q .

Такое исключение необходимо повторять для каждой пары симметричных деревьев (поддеревьев).

Для перебора пар деревьев (поддеревьев) может быть использован один из известных алгоритмов генерирования сочетаний по два, например, из работ [11,12]. Поэтому здесь они не приводятся.

Условимся называть число поддеревьев, исходящих из одной вершины $n \in \{0,1,2,\dots, N\}$, степенью исхода этой вершины d_n . Свертку дерева T_q с корневой вершиной $n=N$ обозначим R_N .

Исходные данные для работы алгоритма: 1) число вершин дерева N ; 2) свертка R_N дерева T_q ; 3) множество J_q , 4) список степеней исхода d_n корневых вершин поддеревьев дерева T_q .

Алгоритм 2 генерирования неизоморфных корневых деревьев.

1. Положить $n = 0$.
2. По свертке R_n дерева с корневой вершиной n определить свертки его поддеревьев и их количество d_n .
3. Если $d_n > 1$, присвоить номера k_1 и k_2 , которые соответствуют лг старшему сочетанию из d_n по 2, поддеревьям и их сверткам.
4. По сверткам поддеревьев с номерами k_1 и k_2 определить их коды.
5. Если коды совпадают, из множества J_q исключить номера вершин k_2 -го (т.е. лг младшего) из соответствующих симметричных поддеревьев дерева T_q при условии, что они еще не исключены.
6. Если варианты сочетания из d_n по 2 не исчерпаны, перейти к очередному варианту сочетания k_1, k_2 . Идти к шагу 4.
7. Положить $n := n + 1$. Если $n = N$, идти к шагу 9.
8. Если $d_n = 1$, или $d_n = 0$, или если n относится к младшему из симметричных поддеревьев, идти к шагу 7. Иначе идти к шагу 2.
9. Конец.

Применение алгоритма 2 позволяет полностью исключить влияние симметрий дерева T_q на формирование дерева $T_{(q+1)}$.

Работу алгоритма 2 покажем на примерах деревьев, приведенных на рис.1 и рис.2.

Исходные данные для дерева T_q на рис.1: $N=15$,

Свертка дерева $R_N = 0.(1.7.(10,11,12), 2.8.13, 3.9.14, 4, 5, 6)$,

$J_q = (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14)$,

$d_0=6, d_7=3, d_1=d_2=d_3=d_8=d_9=1, d_4=d_5=d_6=d_{10}=d_{11}=d_{12}=d_{13}=d_{14}=0$.

Шаг 1. Положим $n = 0$. Шаг 2. 1.7.(10,11,12), 2.8.13, 3.9.14, 4, 5, 6, $d_0=6$.

Шаг 3. Так как $d_0 > 1$, установим $k_1=1$ и $k_2=2$. Идем к шагу 4.

Шаг 4. ..(,,) и ... Шаг 5. Не совпадают.

Шаг 6. Не исчерпаны. Переходим к $k_1=1$ и $k_2=3$. Идем к шагу 4.

Шаг 4. ..(,,) и ... Шаг 5. Не совпадают.

Шаг 6. Не исчерпаны. Переходим к $k_1=1$ и $k_2=4$. Идем к шагу 4.

Шаг 4. ..(,,) и Ø. Шаг 5. Не совпадают.

Шаг 6. Не исчерпаны. Переходим к $k_1=1$ и $k_2=5$. Идем к шагу 4.

Шаг 4. ..(,,) и Ø. Шаг 5. Не совпадают.

Шаг 6. Не исчерпаны. Переходим к $k_1=1$ и $k_2=6$. Идем к шагу 4.

Шаг 4. ..(,,) и Ø. Шаг 5. Не совпадают.

Шаг 6. Не исчерпаны. Переходим к $k_1=2$ и $k_2=3$. Идем к шагу 4.

Шаг 4. .. и ...

Шаг 5. Совпадают. Из множества J_q исключаем номера вершин 3,9,14:

$$J_q = (0,1,2,4,5,6,7,8,10,11,12,13).$$

Шаг 6. Не исчерпаны. Переходим к $k_1=2$ и $k_2=4$. Идем к шагу 4.

Шаг 4. .. и $\emptyset$. Шаг 5. Не совпадают.

Шаг 6. Не исчерпаны. Переходим к $k_1=2$ и $k_2=5$. Идем к шагу 4.

Шаг 4. .. и $\emptyset$. Шаг 5. Не совпадают.

Шаг 6. Не исчерпаны. Переходим к $k_1=2$ и $k_2=6$. Идем к шагу 4.

Шаг 4. .. и $\emptyset$. Шаг 5. Не совпадают.

Шаг 6. Не исчерпаны. Переходим к $k_1=3$ и $k_2=4$. Идем к шагу 4.

Шаг 4. .. и $\emptyset$. Шаг 5. Не совпадают.

Шаг 6. Не исчерпаны. Переходим к $k_1=3$ и $k_2=5$. Идем к шагу 4.

Шаг 4. .. и $\emptyset$. Шаг 5. Не совпадают.

Шаг 6. Не исчерпаны. Переходим к $k_1=3$ и $k_2=6$. Идем к шагу 4.

Шаг 4. .. и $\emptyset$. Шаг 5. Не совпадают.

Шаг 6. Не исчерпаны. Переходим к $k_1=4$ и $k_2=5$. Идем к шагу 4.

Шаг 4. $\emptyset$ и $\emptyset$.

Шаг 5. Совпадают. Из множества J_q исключаем номер вершины 5:

$$J_q = (0,1,2,4,6,7,8,10,11,12,13).$$

Шаг 6. Не исчерпаны. Переходим к $k_1=4$ и $k_2=6$. Идем к шагу 4.

Шаг 4. $\emptyset$ и $\emptyset$.

Шаг 5. Совпадают. Из множества J_q исключаем номер вершины 6:

$$J_q = (0,1,2,4,7,8,10,11,12,13).$$

Шаг 6. Не исчерпаны. Переходим к $k_1=5$ и $k_2=6$. Идем к шагу 4.

Шаг 4. $\emptyset$ и $\emptyset$. Шаг 5. Совпадают. В множестве J_q вершина 6 исключена.

Шаг 6. Исчерпаны. Шаг 7. Положим $n = 1$.

Шаг 8. Так как $d_1=1$, идем к шагу 7. Шаг 7. Положим $n = 2$.

Шаг 8. Так как $d_2 = 1$, идем к шагу 7. Шаг 7. Положим $n = 3$.

Шаг 8. Так как $d_3 = 1$, идем к шагу 7. Шаг 7. Положим $n = 4$.

Шаг 8. Так как $d_4 = 0$, идем к шагу 7. Шаг 7. Положим $n = 5$.

Шаг 8. Так как $d_5 = 0$, идем к шагу 7. Шаг 7. Положим $n = 6$.

Шаг 8. Так как $d_6 = 0$, идем к шагу 7. Шаг 7. Положим $n = 7$.

Шаг 8. Так как $d_7 > 1$, идем к шагу 2. Шаг 2. 10,11,12. $d_7 = 3$.

Шаг 3. Так как $d_7 > 1$, устанавливаем $k_1=1$ и $k_2=2$. Идем к шагу 4.

Шаг 4. $\emptyset$ и $\emptyset$.

Шаг 5. Совпадают. Из множества J_q исключаем вершину поддерева с номером k_2 . Это вершина 11: $J_q = (0,1,2,4,7,8,10,12,13)$.

Шаг 6. Не исчерпаны. Переходим к $k_1=1$ и $k_2=3$. Идем к шагу 4.

Шаг 4. $\emptyset$ и $\emptyset$.

Шаг 5. Совпадают. Из множества J_q исключаем вершину поддерева с номером k_2 . Это вершина 12: $J_q = (0,1,2,4,7,8,10,13)$.

Шаг 6. Не исчерпаны. Перейдем к $k_1=2$ и $k_2=3$. Идем к шагу 4.

Шаг 4. $\emptyset$ и $\emptyset$.

Шаг 5. Совпадают. В множестве J_q вершина 12 исключена.

Шаг 7. Положим $n = 8$. Шаг 8. $d_8=1$. Шаг 7. Положим $n = 9$.

Шаг 8. $d_9=1$. Шаг 7. Положим $n = 10$. Шаг 8. $d_{10}=0$.

Шаг 7. Положим $n = 11$. Шаг 8. $d_{11}=0$. Шаг 7. Положим $n = 12$.

Шаг 8. $d_{12}=0$. Шаг 7. Положим $n = 13$. Шаг 8. $d_{13}=0$.

Шаг 7. Положим $n = 14$. Шаг 8. $d_{14}=0$.

Шаг 7. Положим $n = 15 = N$. Так как $n = N$, идем к шагу 9.

Шаг 9. Конец.

Исходные данные для дерева T_q на рис 2: $N=16$.

Свертка дерева R_N : 0.(1.4.(7.12,8.13), 2.5.(9.14,10.15), 3.6.11).

$J_q = (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15)$.

$d_0=3, d_4=d_5=2, d_1=d_2=d_3=d_6=d_7=d_8=d_9=d_{10}=1, d_{11}=d_{12}=d_{13}=d_{14}=d_{15}=0$.

Шаг 1. Положим $n = 0$.

Шаг 2. 1.4.(7.12, 8.13), 2.5.(9.14,10.15), 3.6.11, $d_0=3$.

Шаг 3. Так как $d_0>1$, устанавливаем $k_1=1$ и $k_2=2$.

Шаг 4. ..(.,.) и ..(.,.).

Шаг 5. Совпадают. Из множества J_q исключаем номера вершин лг младшего из симметричных поддеревьев 2,5,9,10,14,15: $J_q = (0,1,3,4,6,7,8,11,12,13)$.

Шаг 6. Не исчерпаны. Переходим к $k_1=1$ и $k_2=3$. Идем к шагу 4.

Шаг 4. ..(.,.) и ... Шаг 5. Не совпадают.

Шаг 6. Не исчерпаны. Переходим к $k_1=2$ и $k_2=3$.

Шаг 4. ..(.,.) и ... Шаг 5. Не совпадают. Шаг 6. Исчерпаны.

Шаг 7. Положим $n = 1$. Шаг 8. Так как $d_1=1$, идем к шагу 7.

Шаг 7. Положим $n = 2$. Шаг 8. Так как $d_2=1$, идем к шагу 7.

Шаг 7. Положим $n = 3$. Шаг 8. Так как $d_3=1$, идем к шагу 7.

Шаг 7. Положим $n = 4 \neq N$. Шаг 8. Так как $n \neq N$, идти к шагу 2.

Шаг 2. 7.12, 8.13, $d_4=2$.

Шаг 3. Так как $d_4>1$, установим номера $k_1=1$ и $k_2=2$.

Шаг 4. . и ..

Шаг 5. Совпадают. Из множества J_q исключаем номера вершин 8,13:

$$J_q = (0,1,3,4,6,7,11,12).$$

Шаг 6. Сочетания из d_4 по 2 исчерпаны.

Шаг 7. Положим $n = 5$.

Шаг 8. Так как номер 5 относится к младшему из симметричных поддеревьев, идем к шагу 7.

Шаг 7. Положим $n = 6$. Шаг 11. Так как $d_6=1$, идем к шагу 7.

Шаг 7. Положим $n = 7$. Шаг 8. Так как $d_7=1$, идем к шагу 7.

Шаг 7. Положим $n = 8$. Шаг 8. Так как $d_8=1$, идем к шагу 7.

Шаг 9. Положим $n = 9$. Шаг 8. Так как $d_9=1$, идем к шагу 7.

Шаг 7. Положим $n = 10$. Шаг 8. Так как $d_{10}=1$, идем к шагу 7.

Шаг 7. Положим $n = 11$. Шаг 8. Так как $d_{11}=0$, идем к шагу 7.

Шаг 7. Положим $n = 12$. Шаг 8. Так как $d_{12}=0$, идем к шагу 7.

Шаг 7. Положим $n = 13$. Шаг 8. Так как $d_{13}=0$, идем к шагу 7.

Шаг 7. Положим $n = 14$. Шаг 8. Так как $d_{14}=0$, идем к шагу 7.

Шаг 7. Положим $n = 15$. Шаг 8. Так как $d_{15}=0$, идем к шагу 7.

Шаг 7. Положим $n = 16 = N$. Идти к шагу 9. Шаг 9. Конец.

Выводы

1. Эффективность алгоритма 1 достигнута путем сокращения числа его шагов до минимального значения N (т.е. числа вершин дерева T_q) и применения на каждом шаге элементарной операции («присвоения»).

2. Эффективность алгоритма 2 обеспечивается использованием минимальной по трудоемкости комбинаторной операции (сочетания из N элементов по 2) и применением на каждом шаге элементарной операции («сравнения»).

3. От эффективности структурного синтеза неизоморфных корневых деревьев зависит эффективность многих логистических алгоритмов.

Список литературы

1. Свирщёва Э.А. Структурный синтез неизоморфных систем с однородными компонентами. – Харьков, 1998. – 256 с. (Переработанный в 2005г. вариант находится на сайте электронной технической библиотеки).

2. Фараджев И.А. Конструктивное перечисление комбинаторных объектов. // Алгебраические исследования в комбинаторике.– М., Наука, 1978.– С.3–11.
3. McKay Brendan D. Isomorph-Free Exhaustive Generation / Computer Science Department, Australian National University.– Canberra, ACT 0200, Australia, 1997.– 19 с.
4. Свирщёва. Э.А. Представление корневых деревьев для их синтеза без изоморфных вариантов. Синтез, анализ, диагностика электронных цепей: международн. сб. науч. тр. – Ульяновск: УлГТУ, 2017. – Вып.14. С. 186–203.
5. Свирщёва. Э.А. Алгоритм отбора вершин для наращивания неизоморфных корневых деревьев. Синтез, анализ, диагностика электронных цепей: международн. сб. науч. тр. – Ульяновск: УлГТУ, 2018. – Вып.15. С. 147–160.
6. Харари Ф. Теория графов. М.: Мир, 1973. – 301 с.
7. Сигорский В.П. Математический аппарат инженера.– «Техніка», Киев, 1975.– 768 с.
8. Математическая энциклопедия. Редколлегия: И.М. Виноградов (гл. ред.). М.: Сов. Энциклопедия, 1982.– Т.3.– 1184 стб.
9. Математическая энциклопедия. Редколлегия: И.М. Виноградов (гл. ред.). М.: Сов. Энциклопедия, 1979.– Т.2.– 1104 стб.
10. Свирщёва Э.А. Симметрии и построение неизоморфных корневых деревьев. Синтез, анализ, диагностика электронных цепей: международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2016. – Вып.13. С. 125–149.
11. Кнут Д.Э. Искусство программирования., Том 4, вып.3: «Генерация всех сочетаний и разбиений».– М.: 000 «И.Д. Вильямс», 2007. – 208 с.
12. Федоряева Т.И. Комбинаторные алгоритмы: учебное пособие. Генерация сочетаний в лексикографическом порядке.– Новосибирск: Изд-во НГУ, 2011.– 118 с.

Свирщёва Эльвира Александровна – канд. техн. наук.
г. Харьков, Украина.
E-mail: svirshchieva@mail.ru; olel@kharkov.ukrtel.net

ГЕНЕРАЦИЯ НЕИЗОМОРФНЫХ КОРНЕВЫХ ДЕРЕВЬЕВ В ЧАСТИЧНОМ И ПОЛНОМ ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКОМ ПОРЯДКЕ

П. В. Недорезов, В. В. Филаретов

Разработаны два рекурсивных алгоритма генерации корневых деревьев в лексикографическом порядке: частичном (ЧЛГ) и полном (ПЛГ). В первом алгоритме нумерация вершин выполняется традиционно – по путям от корня (вверх). При смене пути слева направо выполняется возвращение к корню, и лексикографический порядок нарушается. Вторым алгоритм использует новую нумерацию вершин – по уровням корневого дерева (по ширине), что не требует возвращения, поскольку уровни просматриваются снизу вверх, что обеспечивает неубывающее лексикографическое перечисление деревьев. Деревья в обоих алгоритмах задаются векторами начальных вершин (ВНВ): в первом алгоритме это частично лексикографический известный родительский вектор, а во втором алгоритме – полностью лексикографический новый ВНВ. Предложенные алгоритмы генерируют каждое дерево за постоянное время, но только ПЛГ-порядок обеспечивает удовлетворительную загрузку процессоров при параллельных вычислениях.

Two recursive algorithms for generating root trees in lexicographic order have been developed: partial and complete. In the first algorithm, the numbering of vertices is performed traditionally – along the paths from the root. When changing the path from left to right, a return to the root is performed, and the lexicographic order is violated. The second algorithm uses a new numbering of vertices – by levels of the root tree (by width), which does not require a return, since the levels are viewed from the bottom up, which provides a non-decreasing lexicographic enumeration of trees. Trees in both algorithms are defined by vectors of initial vertices: in the first algorithm it is a partially lexicographic known parent vector, and in the second algorithm it is a completely lexicographic new vector of initial vertices. The proposed algorithms generate each tree in constant time.

Все известные алгоритмы, опубликованные за рубежом, генерируют корневые деревья в порядке перечисления, который основан на рекуррентной формуле Оттера [1]. Этот порядок предусматривает перечисление канонических (неизоморфных) деревьев с n вершинами, имеющих одинаковую высоту: from 1 to $n-1$ [2–4]. Такой порядок можно назвать частично лексикографическим порядком (ЧЛГ-порядком), поскольку следование лексикографическому упорядочению нарушается вследствие нумерации вершин по путям из корня. При достижении конечной вершины очередного пути происходит возвращение к начальной вершине – корню и нумерация продолжается. Такая нумерация вершин называется нумерацией по высоте (способом «первый по высоте» [3]).

Перечисление деревьев при использовании кода Грея [5] почти не отличается от традиционного ЧЛГ-порядка. Интересный, но малоизвестный за рубежом метод перечисления корневых деревьев в полном лексикографическом (ПЛГ) порядке [6] требует использования другой нумерации вершин.

Здесь предлагается развитие единого подхода к рекурсивной генерации корневых помеченных деревьев в двух известных лексикографических порядках перечисления – ЧЛГ- и ПЛГ-порядках [7,8]. Чтобы последовательность вершин в коде дерева была неубывающей лексикографической (соблюдался ПЛГ-порядок), необходимо нумеровать вершины без возвращения к корню. Для этого выполняется нумерация по уровням или новым способом – «первый по ширине», альтернативным способом [3]. Обсуждение ведется на строгой доказательной основе, включающей как теоретические, так и экспериментальные обоснования.

Кодирование корневых деревьев: векторы начальных вершин. Начнем с основных определений. Дерево, заданное уровневой последовательностью, непомечено. Уровневая последовательность, заданная для корневого упорядоченного дерева с n вершинами получается путем обхода дерева и записи уровня каждой вершины по мере ее посещения [2]. Корневое дерево может быть пронумеровано по уровням: от 0 к последнему. Например, дерево, показанное на рис. 1,а может быть представлено следующей уровневой последовательностью: {01212}.

Родителем вершины корневого дерева называется смежная со стороны корня вершина. Вершину, имеющую родителя, можно назвать ребенком. Вершина без детей называется листом корневого дерева.

Братом (сестрой) вершины называют любую другую вершину, имеющую того же родителя. Уровнем вершины является 0, если вершина – корень. Уровень других вершин на единицу больший, чем уровень их родителей.

Корневое дерево с помеченными вершинами может быть задано генеалогическим или родительским вектором (РВ), как показано на рис. 1,а. Для каждой некорневой вершины i , элемент вектора $PB[i]$ является родителем i . Следовательно, номер начальной вершины каждой дуги дерева задан элементом в РВ-коде, а номером конечной вершины этой дуги является порядковый номер соответствующего элемента в векторе РВ. Вершины дерева нумеруются по порядку способом «первый по высоте» [3], то есть текущий номер получает вершина, следующая в рассматриваемом пути от корня или вершина, начинающая следующий путь в дереве, то есть корневая вершина с номером 0. Если корневая вершина всегда обозначается «0», то первый элемент РВ-кода на рис. 1,а не требуется.

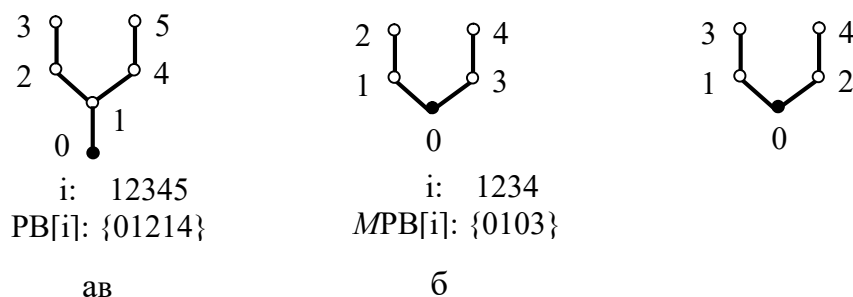


Рис. 1. Примеры кодирования корневых деревьев: с шестью вершинами в РВ-коде (а) и пятью вершинами: в МРВ-коде (б) и в полностью лексиграфически упорядоченном ВНВ-коде (в)

Корневое дерево может быть закодировано другой последовательностью (вектором), в которой не нарушается лексикографический порядок [6]. Для этого нумерация вершин корневого дерева выполняется по уровням дерева, то есть неизвестным ранее способом – способом не «первым по высоте» [3], а «первым на уровне». При этом текущий номер получает вершина, следующая после текущей на рассматриваемом уровне, или вершина, первая по порядку на следующем уровне. Переход с уровня на уровень выполняется, как и просмотр вершин пути, слева-направо. Переход от пути к пути в МРВ-коде выполняется,

наоборот, снизу-вверх, то есть аналогично нумерации вершин на уровнях в двойственном ВНВ-коде.

Двойственность обсуждаемых двух кодов заключается в использовании одного из двух возможных порядков нумерации вершин корневого дерева: 1) нумерации по путям или 2) нумерации по уровням. Второй способ нумерации вершин получил в литературе название «вектора начальных вершин» (ВНВ) [9–13]. Конечные вершины ребер в случае ВНВ-кода, как и для МРВ-кода, одинаковы у всех деревьев и являются последовательностью натуральных чисел $1, 2, \dots, N$, где $N=n-1$ – число ребер в дереве. Любое дерево может быть представлено ВНВ, как показано на рис. 1,в.

Можно показать, что не только ВНВ-код, но и МРВ-код, является вектором начальных вершин. В свою очередь, ВНВ-код можно считать МРВ-кодом.

Теорема 1. Каждое корневое дерево может быть задано упорядоченным множеством номеров начальных вершин ребер.

Доказательство. При задании корневого дерева удобно считать, что ребра ориентированные, и одна из вершин ребра начальная, а другая конечная. По определению в корневом дереве, растущем из корня, каждое ребро заходит в одну и только одну вершину (в вершину-корень ребра не заходят). Поэтому каждому ребру можно сопоставить порядковый номер конечной вершины.

С другой стороны, каждое ребро в корневом дереве выходит из одной и только одной вершины, поэтому каждое ребро соответствует номеру начальной вершины. Для сохранения соответствия между ребрами и вершинами необходимо записывать начальные и конечные вершины, относящиеся к одному ребру, в одинаковые позиции векторов начальных и конечных вершин. Можно не хранить информацию о номерах конечных вершин, записывая вектор начальных вершин таким образом, чтобы позиция вектора соответствовала номеру конечной вершины. Для этого достаточно начать нумерацию вектора начальных вершин с 1, поскольку вершина-корень 0 не входит в число конечных вершин.

Таким образом, номера конечных вершин ребер, заданных кортежем их начальных вершин, не требуют задания, поскольку равны позициям кортежа (порядковым номерам соответствующих дуг). Что и требовалось доказать. Для корневых деревьев, растущих в корень, доказательство

аналогично. Кортёж у таких деревьев будет состоять из конечных вершин ребер.

По сути, оба этих способа кодирования помеченных корневых деревьев – один программистский прием, использующий вместо хранения двух векторов хранение одного вектора той же размерности и с помещением информации о другом векторе в номера позиций. Неубывание значений элементов в ВНВ-коде обеспечивается поярусной (сверху-вниз) нумерацией вершин корневого дерева (рис. 1,в). В МРВ-коде вершины нумеруются также сверху-вниз, но по путям корневого дерева (рис. 1,б), что сохраняет лексикографическое упорядочение только в позициях кода, соответствующих этим путям. Нумерация вершин объясняет частичный или полный ЛГ-порядок перечисления корневых деревьев. Нумерация вершин по путям прерывается, возвращаясь в корень. Отсюда чередование в векторе нулей и «ненулей». Нумерация вершин по уровням непрерывная, поэтому один или несколько нулей могут быть только в начале вектора.

Следующий более сложный пример с семью вершинами иллюстрирует взаимосвязь между РВ-, МРВ- и ВНВ-кодами: $\{0123216\} \rightarrow \{012105\} \rightarrow \{001123\}$. Как видно, принципиальным отличием МРВ- и ВНВ-кодов является не формальное сходство, обусловленное заданием дуг их начальными вершинами, а неубывающий порядок следования элементов в ВНВ-коде, что является следствием различной нумерации вершин. Поэтому последовательность генерации в первом случае будет называться ЧЛГ-генерацией, а во втором – ПЛГ-генерацией.

Частично лексикографическая генерация корневых деревьев. В структуре корневого дерева можно выделить пути из ребер и поддеревья, образованные путями в корневом дереве. Например, корневое дерево на рис. 1,б образовано двумя поддеревьями: 0-1-2 и 0-3-4. При перечислении неизоморфных корневых деревьев важно различать поддеревья по взаимному размещению в корневом дереве. Корневое дерево упорядочено, если имеет линейный порядок, налагаемый на дочерние элементы и поддеревья. Примем ориентацию вершин-детей или поддеревьев слева направо.

Порождение производных деревьев с $n+1$ вершиной от текущего дерева с n вершинами выполняется добавлением элемента (вершины) в конец МРВ-кода дерева. Это означает, что новое ребро (новая вершина)

может подсоединяться только к правому поддереву. Следует подчеркнуть, что некоторые вершины, используемые для подсоединения нового ребра, могут быть общими вершинами обоих поддеревьев. Очевидно, что эти вершины образуют путь из корня в вершину разветвления на два поддерева.

Каноничность формируемого (производного) дерева требует, чтобы к вершинам левого поддерева ребра подсоединялись до присоединения ребер к симметричным вершинам правого поддерева, которые находятся на том же уровне.

Теорема 2. Если в исходном корневом дереве левое и правое поддерево симметричны, то производные канонические деревья получаются подсоединением ребер к общим вершинам этих поддеревьев, то есть вершинам, входящим в путь от корня до вершины разветвления включительно.

Доказательство. В случае симметрии левого и правого поддеревьев новое ребро может быть присоединено только к их общим вершинам. В противном случае канонического дерева не получится по одной из двух причин: 1) на некотором уровне правого дерева окажется больше вершин, чем на этом же уровне у левого дерева (нарушение каноничности); 2) высота правого дерева окажется больше, чем левого (нарушение порядка перечисления по высоте – ЧЛГ-порядка). Превышение высоты также можно рассматривать как нарушение каноничности, поскольку в каноническом дереве ребро, присоединенное к вершине правого поддерева должно присоединяться к свободной симметричной вершине левого поддерева.

Присоединение ребра к одной из вершин пути до вершины разветвления поддеревьев порождает деревья, для которых отсутствуют изоморфные варианты, поскольку исходное (текущее) дерево, содержащее рассматриваемый путь, единственно.

Следствие. Исходное корневое дерево, содержащее k ребер, образующих путь из корня, порождает каноническое дерево присоединением ребра к каждой вершине, всего $k+1$ канонических деревьев.

Корневое дерево-путь является предельным случаем двух поддеревьев, когда отсутствуют вершины разветвления. Порождаемые деревья единственны, как единственно исходное (текущее) дерево, содержащее

рассматриваемый путь. Присоединение ребра к конечной вершине этого пути не нарушает каноничность дерева, хотя и выполняется после установления симметрии поддеревьев после присоединения ребра к предыдущей вершине, в силу теоремы 2. В дереве-пути вершины левого и правого поддерева являются общими, поэтому к каждой из них может быть присоединено новое ребро.

Теорема 3. Если в исходном корневом дереве левое и правое поддерево несимметричны, то производные канонические деревья получаются подсоединением нового ребра, начиная с корня, к вершинам правого поддерева до вершины с возникновением симметрии левого и правого поддерева включительно.

Доказательство. Предположим, что при подсоединении нового ребра способом, описанным в теореме 3, возникает симметрия левого и правого поддерева. Можно рассмотреть два случая: 1) симметрия возникает при подсоединении нового ребра самой верхней общей вершине поддеревьев – вершине их разветвления; 2) симметрия возникает при подсоединении нового ребра вершине правого поддерева, которая не является общей вершиной поддеревьев.

В первом случае в соответствии с теоремой 2 присоединение новых ребер к общим вершинам левого и правого поддерева не нарушает каноничности формируемых деревьев. Таким образом, если по условиям теоремы 2 двигаться, начиная с корня, и подсоединять новое ребро к вершинам правого поддерева, то формирующиеся деревья будут каноническими до той вершины, подсоединение ребра к которой вызвало симметрию поддеревьев.

Во втором случае рассмотрим нижние вершины правого поддерева, включающие вершину s , подсоединение нового ребра к которой вызвало симметрию деревьев. Подсоединение нового ребра к этим вершинам не может нарушить каноничности производных деревьев, поскольку левое и правое поддерева несимметричны. Подсоединение нового ребра к вершинам правого поддерева, расположенным выше вершины s , приведет к нарушению каноничности, поскольку при симметрии поддеревьев ребро можно подсоединяться только к левому поддереву. Приведенное обоснование доказывает теорему 3.

Теорема 2 со следствием и теорема 3 используются в следующем примере.

Пример 1. На рис. 2 представлены 20 неизоморфных деревьев с шестью вершинами, которые пронумерованы в ЧЛГ-порядке. Деревья, показанные на рис. 2, соответствуют семейству деревьев с 6 вершинами на рис. 1 в [22].

Корневая вершина, помещенная слева на каждом дереве, имеет черную заливку. Как видно, деревья одинаковой высоты нумеруются одно за другим.

Новые ребра обозначены пунктирными линиями. Ребра левого поддерева и правого поддерева, которые нужно сравнивать, обозначены толстыми линиями. Вершины нумеруются известным способом для ЧЛГ-генерации – способом «первый по высоте» [21], который показан на рис. 1,б: слева-направо по путям от корня и далее сверху-вниз по уровням корневого дерева.

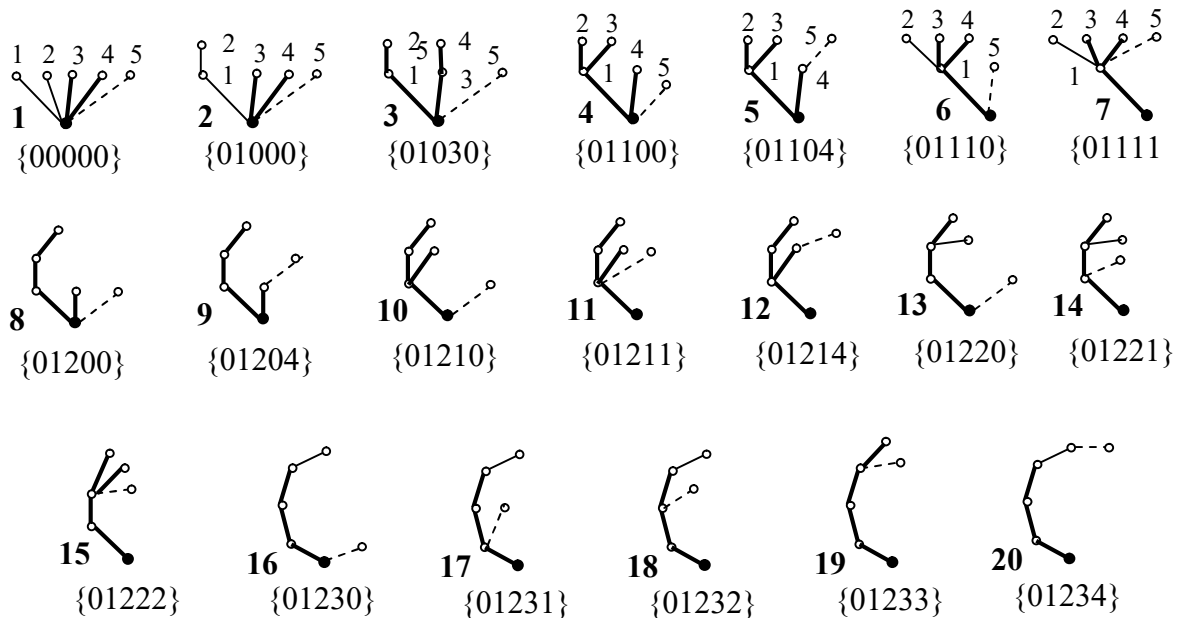


Рис 2. Перечисление в ЧЛГ-порядке канонических корневых деревьев с шестью вершинами (под деревьями указаны их МРВ-коды)

Как следует из рис.2, левое и правое поддерево одни и те же для одного и того же исходного дерева. Новые ребра подсоединяются к общим вершинам поддеревьев, начиная с корня. В исходном дереве, представляющем собой путь, эти поддеревья накладываются, поэтому новые ребра подсоединяются ко всем вершинам этого пути, то есть ко всем вершинам исходного дерева.

Подробнее рассмотрим ЧЛГ-генерацию первых семи деревьев, показанных на рис. 2. Эти семь деревьев получаются из пяти деревьев с пятью вершинами: $\{0000\}$, $\{0100\}$, $\{0103\}$, $\{0110\}$ и $\{0111\}$. Как видно из рис. 2, в исходных деревьях $\{0000\}$, $\{0100\}$, $\{0103\}$ и $\{0111\}$ левое и правое поддеревья симметричны. В случае начальных деревьев $\{0000\}$, $\{0100\}$, $\{0103\}$ поддеревья имеют единственную общую вершину – корень. Следовательно, по теореме 2 производными деревьями будут три дерева с шестью вершинами: $\{00000\}$, $\{01000\}$ и $\{01030\}$. В случае начального дерева $\{0111\}$ имеется две общих вершины поддеревьев: 0 и 1. Следовательно, получится два дерева с шестью вершинами: $\{01110\}$ и $\{01111\}$.

Как видно из рис. 2, в дереве $\{0110\}$ левое и правое поддерево не симметричны. В соответствии с теоремой 3 новое ребро может быть подсоединено к вершинам 0 и 4, принадлежащим правому поддереву. Следовательно, получится два новых дерева с шестью вершинами: $\{01100\}$ и $\{01104\}$. Следующие восемь деревьев с 6 вершинами, показанные на рис. 2, могут быть получены аналогично – с помощью теорем 2 и 3. Заключительные пять деревьев на рис. 2 получаются как следствие теоремы 2.

В примере 1 для наглядности применения теорем 2 и 3 поддеревья L и R проверяются на симметричность перед подсоединением нового ребра к правому поддереву. Для реализации в программе проще проверку на симметричность выполнять после подсоединения нового ребра. В этом случае не потребуется искать общие вершины поддеревьев, ограничившись нахождением вершин правого поддерева и занесения их в список вершин-кандидатов (СВК). Если поддеревья L и R симметричны, то подсоединение новых ребер к вершинам из СВК останавливается и выполняется переход к следующему начальному дереву.

Пример 2. Рассмотрим дерево с восемью вершинами ($n=8$), показанное на рис. 3,а и 3,б. Корень является общей вершиной и находится внизу двух рассматриваемых поддеревьев L и R . Обозначения этих поддеревьев изменились, поскольку теперь верхнее поддерево является левым, а нижнее поддерево – правым. Рассматриваемое дерево представляется кодом МРВ= $\{0122056\}$. Конечные вершины, которые не указываются, соответствуют порядковым номерам элементов МРВ-кода: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Следовательно, вершина 7 является верхней вершиной в

поддереве R. Поэтому можно пройти по ребрам от вершины 7 к единственной общей вершине поддеревьев L и R – корню.

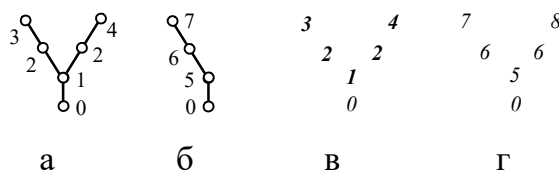


Рис. 3. Поддеревья L (а) и R (б) начального корневого дерева ($n=8$) с восемью вершинами, уровневое представление поддерева L (в), добавление вершины 6 (подсоединение ребра (6,8) до симметрии поддеревьев L и R (в-г))

Поддерево R на рис. 3,б образовано путем из вершин: 0, 5, 6, 7. В соответствии с теоремами 2 и 3 новые ребра подсоединяются к вершинам, начиная с вершины 0 (корня). Поэтому в результате подсоединения ребер к вершинам 0, 5 и 6 может быть получена следующая последовательность деревьев соответственно: $\{01220560\}$, $\{01220565\}$ and $\{01220566\}$. Удобно не изображать на рисунке ребра дерева, а вершины показывать в виде соответствующих номеров, копируя их из МРВ-кода. Такие изображения поддеревьев L и R после подсоединения ребра к вершине 6 представлены на рис. 3,в and 3,г соответственно. Заметим, что в этом случае поддеревья L и R симметричны. Следовательно, подсоединять новое ребро к вершине 7 (добавлять вершину 7 в МРВ-код дерева) нельзя, и последовательность $\{01220567\}$ не генерируется.

Решение примеров 1 и 2 приводит к блок-схеме алгоритма ЧЛГ-генерации корневых деревьев (рис. 4). Можно начать с единственного ребра (одного дерева) или списка деревьев с $n-1$ вершинами и сгенерировать все корневые деревья с n вершиной. Для каждого начального дерева с числом вершин, меньшим на единицу, достаточно рассматривать только два поддерева: L и R, последних в МРВ-коде.

Крайней вершиной в поддереве R является вершина с номером $n-1$ (последней элемент МРВ-кода). С этой вершины начинается путь по вершинам поддерева R в корень. Вершины этого пути в обратном порядке, начиная с вершины $n-1$ и заканчивая вершиной 0, заносятся в СВПП.

СВПП, кроме вершин поддерева R, может включать вершины, общие для обоих поддеревьев. Вершины из СВПП по одной добавляются в МРВ-код в обратном порядке (от корня в конце списка), образуя производные

канонические деревья с $n+1$ вершиной, пока не будет выполнено любое (или оба) из двух условий: 1) поддеревья L и R симметричны; 2) достигнут конец СВПП. Тогда осуществляется переход к следующему начальному дереву с n вершинами.

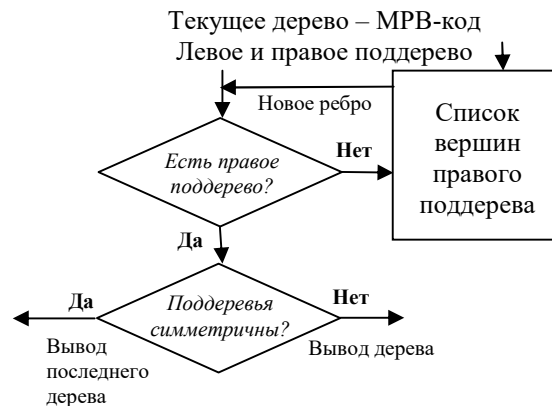


Рис. 4. Генерация корневых деревьев, производных от текущего дерева в ЧЛГ-порядке

Блок-схема на рис.4 реализована программе RuskFi на языке Си (Алгоритм 1). N и n_lcv являются размерностями МРВ-кода $mpa[N]$ и СВПП $lcv[n_lcv]$ соответственно. Переменная n_tree является счетчиком числа деревьев. При вычислениях на одном процессоре в качестве начального вектора используется МРВ-код единственного дерева с одним ребром $mpa[0]=0$. При рекурсивных обращениях этот код наращивается, образуя семейства деревьев с 2, 3, ..., Q вершинами. Q – заданное число вершин без единицы, поскольку размерность кода корневого дерева на единицу меньше числа его вершин.

Алгоритм 1.

RuskFi – рекурсивное добавление вершин в ЧЛГ-порядке

```

1: void ruskfi(int N,int *mpa) {
2:   int lcv[N],n_lcv=0,cur,j;
3:   if (N == Q) // вывод канонического дерева
4:     n_tree = n_tree + 1;
5:   else {lcv[0]=N; // запись в СВПП, начиная с конца МРВ-кода
6:     while (lcv[n_lcv]) lcv[++n_lcv]=mpa[lcv[n_lcv]-1]-1;
7:     for (cur=n_lcv; cur>=0; cur--)
8:       {mpa[N]=lcv[cur]; // добавление вершины из СВПП
9:       ruskfi(N+1,mpa);

```

```

10:      if (!symmetry(N,mpa,n_lcv,lcv,cur)) continue;
11:      else return;}}}

```

СВПП $lcv[all]$ формируется из МРВ-кода $mpa[N]$, первой вершиной в вектор заносится конечная вершина с номером, равным номеру позиции элемента $mpa[N-1]$ (то есть номером $N-1$), а последней вершиной – корень дерева (строки 5 и 6). Напомним, что в Си нумерация элементов массивов начинается с 0. Вершины СВПП образуют путь, начиная от вершины с номером $N-1$ и заканчивая корнем. Поэтому просматривать СВПП при выборе вершин для добавления необходимо в обратном порядке – от элемента с номером n_lcv-1 .

Вершины СВПП добавляются к текущему МРВ-коду дерева в цикле с индексом cur (строки 7–11). Если в полученном дереве поддеревья R и L симметричны, то текущий СВПП считается исчерпанным, а деревья, производные от текущего дерева, перечисленными. В этом же цикле выполняется проверка поддеревьев R и L на симметричность вызовом функции *symmetry* (Листинг 1).

Поддеревья R и L могут иметь не одну общую вершину – корень, а большее число общих вершин, если разветвление на поддеревья происходит выше корня. Вершины СВПП $lcv[all]$ выбираются из МРВ-кода $mpa[N]$ в цикле с индексом all (строка 3) *starting from the root (the end of LCV)*. Этот цикл ограничен порядковым номером cur текущей добавленной вершины ($all \geq cur$), так как вершины, расположенные выше добавленной вершины (перед добавленной вершиной в СВПП), не могут служить начальными вершинами искомых поддеревьев.

Переменные pL и pR (n_L и n_R) соответствуют начальным позициям поддеревьев L и R в $mpa[N]$ (числу вершин поддеревьев L и R), соответственно. Эти переменные зависят от выбранного уровня корневого дерева, и используются при проверке симметрии поддеревьев.

Листинг 1. Проверка симметрии поддеревьев L и R

```

1: int symmetry(int N,int *mpa,int n_lcv,int *lcv,int cur)
   // возвращает 1 (0) при симметрии (несимметрии) поддеревьев
2: int pL,pR,n_L,n_R,all,j,alt;
3: for (all=n_lcv; all>=cur; all--)
4:   {pR=-1; // поиск двух поддеревьев с корнем lcv[all]
5:     for (pL=N-1; pL>=0; pL--)
6:       if (lcv[all]==mpa[pL])

```

```

7:    { if (pR==-1) pR=pL;
8:      else { //сравнение поддеревьев L и R на симметричность
9:          n_L=pR-pL; n_R=N-pR+1;
10:         if (all==cur) alt=n_L; else alt=n_R;
11:         j = 1;
12:         while(mpa[pR+j]-mpa[pL+j]==n_L && pR+j<=N)
13:             {j++;}
14:         if (j==alt) return(1); } } }
15:     return(1); } // поддерева симметричны
16: return(0); } // поддерево R не существует

```

Рассмотрим использование функции *symmetry* в Примере 2. В соответствии со строкой 7 Алгоритма 1 вершины из СВПП добавляются в порядке: 0, 5, 6, 7. Если вершина 0 добавляется в *mpa*: {01220560}, то при вызове функции находится пара поддеревьев L и R в виде фрагментов кода: 0122 и 0560. Эти поддерева несимметричны, поэтому функция *symmetry* возвращает значение 0 и добавление вершин может быть продолжено. При добавлении вершины 5 находится пара поддеревьев L и R в {01220565}: 0122 и 0565. Эти поддерева также несимметричны – добавление вершин продолжается. При добавлении вершины 6 находится пара поддеревьев L и R в {01220566}: 0122 и 0566. Эти поддерева симметричны, поскольку *symmetry* возвращает значение 1, добавление вершин останавливается и выполняется переход к следующему исходному дереву.

Проверка симметрии поддеревьев L и R выполняется в цикле по *j* в строках 11–13 листинга 1. Цикл ограничивается переменной *alt*, которая ограничивается условием *all==cur* (строка 10).

Рассмотрим сравнение поддеревьев после добавления вершины 6, следуя алгоритму 1. В этом случае *MPA*={01220566}: *N*=7, *LCV*={7,6,5,0}, *cur*=1, *all*=3, *pL*=0, *pR*=4, *n_L*=4-0=4, *n_R*=7-4+1=4. Как видно, *all*≠*cur*, *alt*=4. Необходимо сравнить подвектора {122} и {566}, принимая во внимание сдвиг позиций на *n_L*=4. Получаем для первой позиции: 1+4=5; для второй: 2+4=6; для третьей: 2+4=6. Как видно, поддерева R и L симметричны, следовательно все производные деревья, соответствующие текущему дереву с *MPA*={0122056} перечислены.

Как видно из строки 10 листинга 1, значение переменной *alt* различается в случаях *all==cur* и *all!=cur* для поддеревьев L и R. Для

выяснения причин рассмотрим два других поддерева в последовательности деревьев с $n=9$:

... 01221550 01221551 01222000....

В случае дерева {01221551} добавленная вершина 1 совпадает с начальной вершиной поддерева: $pL=1$, $pR=4$, $n_L=4-1=3$, $n_R=7-4+1=4$. Значение переменной $alt=n_L$, так как проверка симметрии заключается в сравнении подвекторов 22 и 55, пренебрегая добавленной вершиной 1. В результате выявляется симметрия поддерева и выполняется переход к следующему исходному дереву {0122200}. Таким образом, условие $pR+j \leq N$ в строке 12 листинга 1 ограничивает избыточную проверку для несуществующих элементов МРА.

Теперь рассмотрим другую последовательность деревьев с $n=9$:

... 01222160 01222161 01222166 01222200 ...

В дереве {01222166} добавленная вершина 6 отличается от начальной вершины 1 поддерева: $pL=1$, $pR=5$, $n_L=5-1=4$, $n_R=7-5+1=3$. Значение переменной $alt=n_R=3$, так как проверка симметрии заключается в сравнении подвекторов subvectors 22 и 66, пренебрегая последнее ребро подвектора поддерева L. В результате выявляется симметрия поддерева и выполняется переход к следующему исходному дереву {0122220}.

Иллюстрационный пример семейства корневых деревьев с 7 вершинами представлен на рис. 5, где исходное ребро увеличенного размера показано в верхней части рисунка.

Предлагаемый алгоритм генерации корневых деревьев на основе ЧЛГ-кода подобен алгоритму Ли и Раскея [3], но использует сокращенный МРВ-код вместо РВ-кода. Проведенное сравнение корневых деревьев до 15 вершин, генерируемых предложенной программой RuskFi и программой Gen [3], показало совпадение результатов.

В отличие от аналогичных алгоритмов рекурсивного добавления вершин [3] and [4] в Алгоритме 1 инициализация выполняется только кодом начального дерева. В общем случае это преимущество позволяет генерировать деревья с n вершинами рекурсивно, начиная с p исходных деревьев ($p=2, 4, 9, 20, 48...$), имеющих m vertices ($m < n$). Число исходных деревьев p рассчитывается по формуле Оттера [1]. Следовательно, параллельные вычисления могут быть легко реализованы при фиксированном числе p процессоров. Каждый процессор будет

генерировать все корневые деревья с n вершинами, начиная с соответствующего дерева из данного множества.

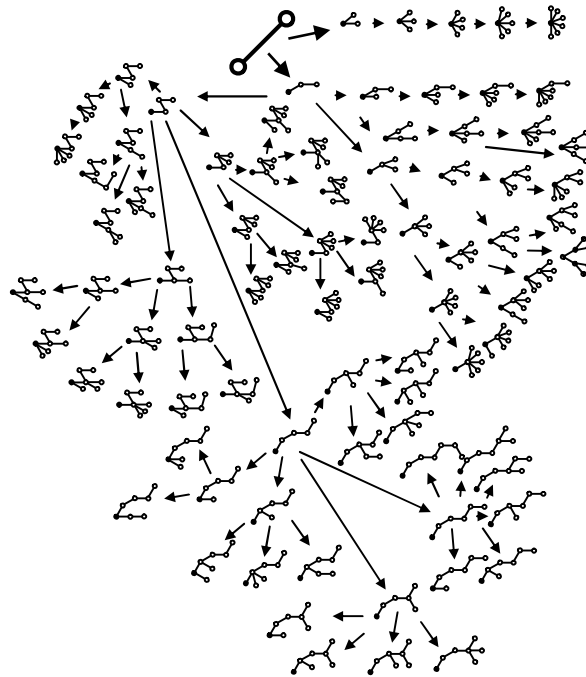


Рис. 5. Семейство корневых деревьев с 7 вершинами в ЧЛГ-порядке

Алгоритмы [3] and [4] не могут обеспечить такого преимущества при параллельных вычислениях на p процессорах вследствие сложности вычисления параметров рекурсивного вызова. Как следует из [3], в алгоритме Ли и Раскея используется два параметра: первый параметр – корень поддерева, который многократно копируется по мере спуска по крайнему левому пути РВ, второй параметр – число вершин в этом поддереве. В алгоритме Накано и Уно также используется два параметра: текущее дерево и его копия по высоте [4].

Предлагаемый алгоритм имеет единственный рекурсивный вызов, поэтому более понятен и проще реализуем. В то же время имеется два рекурсивных вызова в алгоритме [3] и три рекурсивных вызова в алгоритме [4].

Полностью лексикографическая генерация корневых деревьев в неубывающем порядке вершин. Как и в случае ЧЛГ-порядка, в структуре корневого дерева с нумерацией вершин в ПЛГ-порядке можно выделить пути из ребер и поддеревья, образованные путями в корневом дереве. Например, корневое дерево на рис. 1, в образовано двумя поддеревьями: 0-1-3 и 0-2-4. Порождение производных деревьев с $n-1$

вершиной от текущего дерева с n вершинами выполняется добавлением элемента (вершины) в конец ВНВ-кода дерева. Это означает, что новое ребро (новая вершина) может подсоединяться только к правому поддереву.

Как и в случае ЧЛГ-порядка, некоторые вершины, используемые для подсоединения нового ребра, могут быть общими вершинами обоих поддеревьев. Однако, в случае ПЛГ-порядка остальные общие вершины поддеревьев, хотя и образуют путь из корня в вершину разветвления на два поддерева, не могут быть использованы для подсоединения новых ребер, поскольку номера добавляемых вершин продолжают неубывающую последовательность целых чисел.

Теорема 4. Если после подсоединения нового ребра левое и правое поддерева исходного корневого дерева становятся симметричными, то производное дерево является каноническим.

Доказательство. При симметричности на некотором уровне левого поддерева не может оказаться меньше вершин, чем на этом же уровне у правого поддерева, потому что до симметрии поддеревьев исходное дерево было каноническим. Следовательно, производное дерево является каноническим.

Теорема 5. Если новое ребро присоединяется к самому левому пути исходного корневого дерева, при этом не важно, оно заканчивает путь или образует разветвление, то производное корневое дерево является каноническим.

Доказательство. Следует рассмотреть два случая: 1) новое ребро заканчивает путь; 2) новое ребро образует разветвление. В первом случае добавляется вершина не следующем уровне. Но на нем у самого левого пути (поддерева) всегда допускается наличие вершин. Во втором случае добавленная вершина образует правое поддерево. При любой вершине подсоединения нового ребра оказывается, что добавленной вершине будет симметрична вершина левого поддерева на соответствующем уровне, то есть не может возникнуть нарушения каноничности. Таким образом, в любом случае производное дерево будет каноническим.

Следствие. Если новое ребро своим присоединением создает правое поддерево, то производное корневое дерево является каноническим.

Доказательство. Принимая во внимание теорему 4, предположим, что поддерево-путь, к которому подсоединяется новое ребро, не самый

левый. С каким бы путем новое ребро ни создавало правое поддереву, добавляемая при этом вершина не нарушит каноничности производного дерева, поскольку она окажется симметричной соответствующей вершине левого поддерева.

Теоремы 4 и 5 используются в следующем примере при генерации 20 канонических деревьев с 6 вершинами, как в случае ЧЛГ-генерации (пример 1). 20 неизоморфных деревьев с 6 вершинами, которые перечисляются в ПЛГ-порядке, представлены на рис. 6.

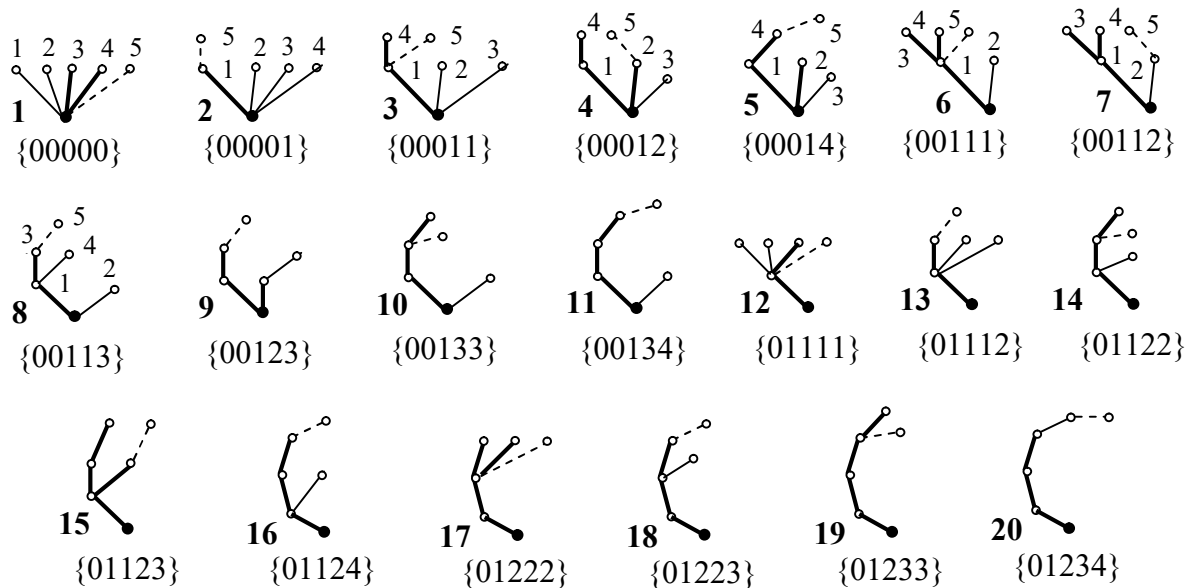


Рис 6. Перечисление в ПЛГ-порядке канонических корневых деревьев с шестью вершинами (под деревьями указаны их ВНВ-коды)

Пример 3. Рассмотрим генерацию первых восьми деревьев в ПЛГ-порядке при использовании ВНВ-кода, что показано на рис. 6. Новые ребра изображены штриховыми линиями. Такие ребра могут входить в поддерево R или образовывать его. Ребра поддерева L и поддерева R (исключая новое ребро) с их общими ребрами показаны толстыми линиями. Вершины пронумерованы по уровням – способом, показанным на рис. 1,с: слева-направо снизу-вверх от 0 (корня) до 5.

Восемь рассматриваемых деревьев с 6 вершинами генерируются от трех исходных деревьев с 5 вершинами: $\{0000\}$, $\{0001\}$ и $\{0011\}$: два дерева от дерева $\{0000\}$, три дерева – от дерева $\{0001\}$ и три дерева от дерева $\{0011\}$. Как видно на рис. 6, новые ребра присоединяются к левому поддереву в деревьях: $\{00001\}$, $\{00014\}$ и $\{00113\}$. В этих случаях

поддерево R не существует, и проверка на каноничность не требуется в соответствии с теоремой 4. Поддеревья L и R в деревьях: $\{00000\}$, $\{00011\}$, $\{00012\}$ и $\{00111\}$ симметричны, следовательно, эти деревья канонические по теореме 3. Заметим, что в дереве $\{00000\}$ поддерево R существует в виде одного нового ребра. Поддеревья L и R в $\{00112\}$ не симметричны, но являются каноническими, так как левая и правая симметричные вершины 1 и 2 имеют, соответственно, два и одно выходящее ребро. В противном случае дерево не было бы каноническим. Поддерево $\{00112\}$ единственное среди 20 деревьев на рис. 6, для выявления каноничности которого недостаточно теорем 3 и 4.

Как следует из рис. 6, левое и правое поддерево различные для одного и того же исходного дерева. Положение левого поддерева определяется подсоединением к правому поддереву нового ребра. При этом левым поддеревом становится ближайшее по линейному порядку поддерево. В частном случае правым поддеревом может быть новое ребро.

Новые ребра подсоединяются в ЛГ-порядке, начиная с вершины, номером которой заканчивается ВНВ-код исходного дерева. Последующие вершины находятся на том же уровне или переходят на новый уровень исходного дерева. Образующиеся деревья являются каноническими всегда, если левое и правое поддерево не являются симметричными до уровня, на котором подсоединяется новое ребро.

Если поддеревья являются симметричными – проверяется положение нового ребра (добавляемой в код вершины). Подсоединение соответствующего ребра допускается, если в левом поддереве имеется ребро, начинающееся в вершине, симметричной добавляемой вершине. В противном случае текущая комбинация вершин ВНВ-кода пропускается. В частном случае, когда новое ребро занимает самое левое положение в поддереве и дереве, не существует правого поддерева, и в проверке каноничности подсоединения нет необходимости – новое ребро не может ее нарушить. Примеры таких деревьев показаны на рис. 6 под номерами: 2, 5, 8, 9, 11, 13, 16, 18, 20.

Усложним задачу и рассмотрим генерацию деревьев добавлением новой вершины к 20 деревьям с 5 вершинами (рис. 7). Как видно из рис. 6 и рис. 7, СВПП не требуется в случае использования ВНВ. Новые вершины добавляются в конец ВНВ в неубывающем лексикографическом порядке.

00000	→	000000	000001
00001	→	000011	000012 000015
00011	→	000111	000112 000114
00012	→	000123	000124
00014	→	000144	000145
00111	→	001111	001112 001113
00112	→	001122	001123 001125
00113	→	001133	001134 001135
00123	→	001233	001234 001235
00133	→	001333	001334
00134	→	001344	001345
01111	→	011111	011112
01112	→	011122	011123 011125
01122	→	011222	011223 011224
01123	→	011234	
01124	→	011244	011245
01222	→	012222	012223
01223	→	012233	012234 012235
01233	→	012333	012334
01234	→	012344	012345

Рис. 7. Генерация деревьев с 7 вершинами от деревьев с 6 вершинами

Иллюстрационный пример семейства корневых деревьев с 7 вершинами представлен на рис. 8, где исходное ребро увеличенного размера показано в средней части рисунка. Рассмотренные выше примеры ведут к структурной схеме алгоритма для генерации корневых деревьев в ПЛГ-порядке, которая представлена на рис. 9. Можно начинать от одного ребра и генерировать все корневые деревья с n вершинами. При добавлении новой вершины достаточно сравнивать только два заключительных поддерева L и R в ВНВ-коде. Новое ребро всегда подсоединяется к поддереву R или является этим поддеревом.

В соответствии с рис. 9, если поддерева L и R симметричны на нижних уровнях, то новая вершина может быть добавлена на верхнем уровне способом, не нарушающим каноничность дерева. В этом случае выводится производное дерево с n вершинами. Затем рассматривается следующее новое ребро, заходящее в вершину со следующим номером в неубывающем лексикографическом порядке.

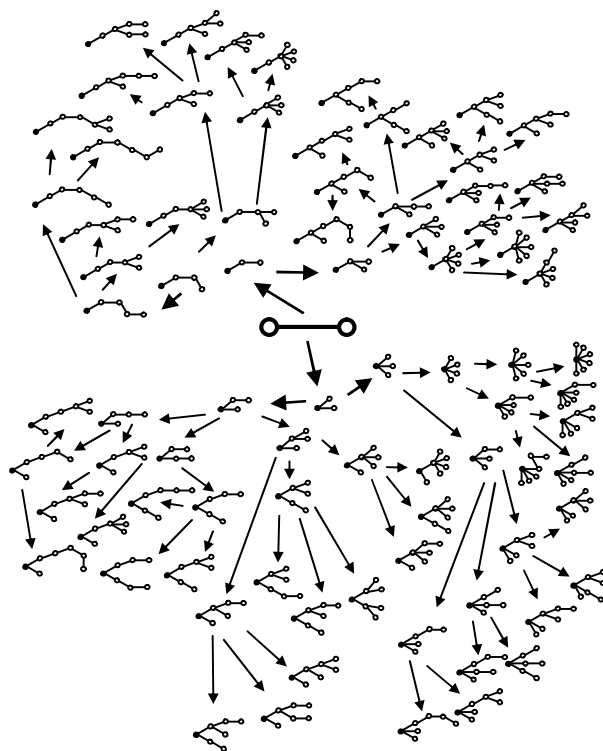


Рис. 8. Семейство корневых деревьев с 7 вершинами в ПЛГ-порядке

Блок-схема на рис. 9 реализована программе AddNode на языке Си (Алгоритм 2). N – размерность ВНВ-кода $ivv[N]$. Переменная n_tree является счетчиком числа деревьев. При вычислениях на одном процессоре в качестве начального вектора используется ВНВ-код единственного дерева с одним ребром $ivv[0]=0$. При рекурсивных обращениях этот код наращивается, образуя семейства деревьев с 2, 3, ..., Q вершинами. Q – заданное число вершин без единицы, поскольку размерность кода корневого дерева на единицу меньше числа его вершин.

В отличие от МРА, начальные вершины поддеревьев L и R записываются в соседних позициях ВНВ. Эти начальные вершины являются общими вершинами поддеревьев L и R . Можно сказать, что такие вершины являются последними вершинами определенных братьев и сестер, которые могут быть найдены с помощью основной функции AddNode, называемой `addnode`. Переменные k и i соответствуют количеству вставляемых вершин и количеству элементов в ivv соответственно. Как показано на рис. 9, AddNode обеспечивает вывод результатов с помощью трех потоков данных: 1, 2 и 3. Соответствие между блок-схемой и списком AddNode подчеркивается комментариями в Алгоритме 2.

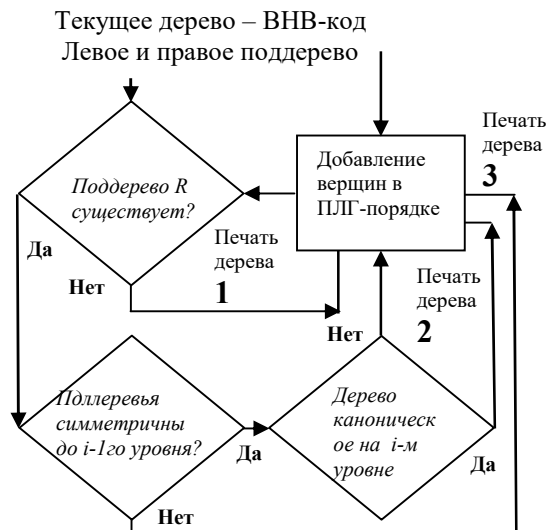


Рис. 9. Генерация корневых деревьев,
производных от текущего дерева в ПЛГ-порядке

Двенадцать из двадцати деревьев, показанных на рис. 6, выводятся 1-м потоком данных. Шесть из них уже обсуждались в примере 3. Остальные шесть из этих 12 деревьев такие: {00123}, {00134}, {01112}, {01124}, {01223}, {01234}. Заключительные 11 деревьев выводятся 2-м и 3-м потоками данных. Одно из них, дерево {00112}, состоит из несимметричных поддеревьев, которые симметричны только на 1-м уровне. Остальные десять деревьев состоят из симметричных поддеревьев L и R.

Алгоритм 2

AddNode – рекурсивное добавление вершин в ПЛГ-порядке

```

1: void addnode(int N,int *ivv) {
2:   int i,k;
3:   if (N == Q) n_tree=n_tree+1.; // output canonic tree
4:   else
5:     for (k = ivv[N-1]; k <= N; k++) // cycle for inserting of vertices
6:       {ivv[N]=k; // inserting the vertex in accordance with TLO
7:         for (i=N; i>0; i--) // choosing of the sibling for subtrees
8:           if (ivv[i]!=ivv[i-1]) {i=ivv[i];
9:             if (!i) break; // 1st dataflow (Fig. 9)
10:          } else if (canon(N+1,i,i+1,ivv))
11:            continue; // 2nd and 3rd dataflows (Fig. 9)
12:          else goto con;} addnode(N+1,ivv); con: ; } }
  
```


Наиболее ресурсоемким шагом предлагаемого алгоритма является проверка поддеревьев L и R на каноничность, которая включает проверку симметрии вершин на уровнях деревьев. Код C показан для проверки каноничности в листинге 2. N - размерность вектора *ivv*. Переменные *pl* и *pr* соответствуют крайним левым записям в *ivv*[N] для поддеревьев L и R соответственно на текущем уровне. Перечисление записей в *IVV* начинается с 1. Крайние левые позиции необходимы для поиска крайних левых вершин поддерева L и R на следующем первом уровне, если поддерева L и R симметричны. Кроме того, крайние левые позиции необходимы для записи вектора внешних степеней поддеревьев L и R (строки 5-8 в листинге 2). Эти позиции, а также *IVV*, используются в качестве параметров функции *canon*. *deg*[N] - это вектор внешних степеней вершин. Размерность вектора равна $2 * difp$. Переменные *difp* и *upr* соответствуют числу вершин каждого поддерева и верхнему значению поддеревьев в *IVV* на текущем уровне, соответственно.

Переменная *cpL* – это новое вычисленное значение *pl* на следующем верхнем уровне. Переменная *n_L* – это счетчик количества вершин на следующем верхнем уровне. Эти переменные используются для вычисления крайнего левого элемента поддерева R на следующем верхнем уровне: *pl*=*CPL*; *pr*=*pl*+*NPL* (строки 12 в листинге 2).

Листинг 2. Проверка поддеревьев L и R на каноничность

```

1: int canon(int N,int pL,int pR,int *ivv)
   { // return 1 (0), if tree is canonic (non-canonic)
2: int difp,upp,deg[N],i,n_L,cpL;
3: while(pL<pR) {difp=pR-pL; upp=difp+pR-1;
4: for (i=0;i<2*difp;i++) deg[i]=0; cpL=0; n_L=0;
5: for (i=upp; i<N; i++)
6:   {if (ivv[i] > upp) break;
7:    if (ivv[i]>=pL) {ivv[i]<pR) {if (!n_L) cpL=i+1; n_L++;}
8:    (deg[ivv[i]-pL])++;} }
9: for (i=0; i<difp; i++)
10:  if (deg[i]>deg[i+difp]) return(1); // tree is canonic
11:  else if (deg[i]<deg[i+difp]) return(0); // tree is non-canonic
12: pL=cpL; pR=pL+n_L; } return(1);}

```

Как видно из примера 3, СВПП не требуется в случае использования ВНВ, который подходит для визуального выбора канонических деревьев.

Элементы ВНВ, так же как и МРВ, могут быть расположены по уровням, как показано на следующем более сложном примере.

Пример 4. Рассмотрим текущее дерево с $n=N+1=16$, показанное на рис. 10,а. Это дерево может быть закодировано с помощью $ivv=\{0,0,1,1,2,2,3,3,4,5,5,6,7,10,12\}$. Размерность вектора равна $N=15$.



Рис. 10. Уровневое представление неканонического дерева с $n=16$ вершинами (а); вектор внешних степеней на уровнях 0, 1 и 2: $pL=1$ и $pR=2$; $pL=3$ и $pR=5$; $pL=7$ и $pR=10$ (б).

Как видно, корневое дерево состоит из двух поддеревьев L и R, которые начинаются с одной и той же вершины 0. Они симметричны от первого уровня до третьего. Вершины 7 и 10 на 4-м уровне примыкают к симметричным вершинам 3 и 5 поддеревьев L и R соответственно. Вершина 12 примыкает к вершине 6 поддерева R. Обратите внимание, что вершина 6 симметрична вершине 4 поддерева L. Можно сказать, что рассматриваемое корневое дерево не является каноническим, поскольку вершина 4 поддерева L является листом.

Рассмотрим использование функции `canon` (листинг 2) в `AddNode`, чтобы показать, что дерево, представленное на рис. 10(а) в примере 4, не является каноническим. Процесс записи вектора внешних степеней показан на рис. 10,б, который симметричен рис. 10,а. Как видно из строк 3-12 в листинге 2, функция `canon` реализуется циклом «while», в котором можно обнаружить симметрию L и R, а также каноничность всего дерева.

В данном ivv $pl=1$ и $pr=2$ являются крайними левыми позициями на нулевом уровне поддеревьев L и R. Симметрия первого уровня поддеревьев с верхним значением $upr=2$ может быть найдена с помощью вектора степеней вершин deg с размерностью $2 * difp=2$. Как следует из приведенного ivv , $pl=3$ и $PR=5$ являются крайними левыми позициями на первом уровне поддеревьев L и R. Сумма вершин поддеревьев каждого уровня записывается в векторах степеней (строки 8 в листинге 2).

Как видно из рис. 10(б), на первом уровне $град=\{1+1,1+1\}$, поэтому цикл проверки каноничности и симметрии (строки 9–11 в листинге 2) не

возвращает значения. Следовательно, поддеревья симметричны на первом текущем уровне и нужно проверить следующий уровень.

Симметрия второго уровня поддеревьев с верхним значением $upr=6$ может быть найдена с помощью вектора внешних степеней вершин deg с размерностью $2*difr=4$. Как видно из приведенного ivv , $pl=7$ и $PR=10$ являются крайними левыми позициями на втором уровне поддеревьев L и R . Как видно из рис. 10,б, $deg=\{1+1,1,1+1,1\}$ на втором уровне, поэтому цикл проверки каноничности и симметрии не возвращает значения. Следовательно, поддеревья симметричны на втором уровне и нужно проверить следующий уровень.

Симметрию третьего уровня поддеревьев с верхним значением $upr=12$ можно выявить, используя вектор внешних степеней вершин deg с размерностью $2*difr=6$. Как видно из приведенного ivv , поддеревья L и R включают разное количество вершин на третьем уровне ($pl = 13$ и $pr = 16$): одну и две соответственно. В рассматриваемом примере $deg=\{1,0,0,1,0,1\}$ на третьем уровне на рис. 10,б, таким образом, цикл проверки каноничности и симметрии возвращает значение «0». Следовательно, дерево не является каноническим, и вершина 12 не может быть добавлена.

Алгоритм, предлагаемый в этом разделе, подобно алгоритму, изложенному в предыдущем разделе, инициализируется только ВНВ-кодом и его размерностью. По умолчанию, процесс генерации начинается с единственного ребра. Также можно начать с произвольного корневого дерева. Например, 48 деревьев с 7 вершинами (рис. 7) могут быть получены с использованием 20 процессоров. При этом каждый процессор будет генерировать корневые деревья, начиная с одного из 20 деревьев с 6 вершинами (рис. 6). Вычислительная нагрузка каждого процессора инициализируется соответствующим ВНВ.

В табл. 1 показан размер результатов и время выполнения для случаев $n=18...24$. Как видно, размеры результатов обеих программ одинаковы, поскольку в МРВ и ВНВ используется одинаковое количество элементов для кодирования деревьев с n вершинами. Важно отметить, что содержание элементов в МРВ и ВНВ различно. Количество неизоморфных корневых деревьев, полученных с помощью $RuskFi$ и $AddNode$, проверяется с помощью рекуррентной формулы Оттера [1].

Табл. 1. Размер результатов (байты) и время выполнения (секунды) программ RuskFi и AddNode с использованием одного процессора

n	RuskFi (Fig. 4)		AddNode (Fig. 9)	
	Bytes	Seconds	Bytes	Seconds
18	32 702 261	2.33	32 702 261	2.33
19	93 773 760	6.85	93 773 760	6.84
20	269 351 029	19.72	269 351 029	19.77
21	774 880 545	57.37	774 880 545	57.92
22	2 232 269 404	186.38	2 232 269 404	186.20
23	6 438 788 762	477.72	6 438 788 762	477.32
24	18 593 124 842	1478.07	18 593 124 842	1442.44

В экспериментах с программами проверялось количество деревьев до $n=31$ вершины. Для получения эталонных значений количества деревьев с 2, 3, ... 31 вершиной. была реализована программа на языке Си, представленная в листинге 3. Насколько известно авторам, количества корневых деревьев с 27–30 вершинами: $A[27]$, $A[28]$, $A[29]$, $A[30]$, используемые в листинге 1, ранее не публиковались.

Листинг 3. Рекуррентная формула Оттера [1]

```

1: main () { // N – max number of vertices
2: double A[N], n_a, m1, m3, S[N][N];
3: int l, N, m;
  // A[1], A[2], ... A[N-1] – starting conditions for recursion
  A[1] = 1; A[2] = 1; A[3] = 2; A[4] = 4; A[5] = 9; A[6] = 20;
  A[7] = 48; A[8] = 115; A[9] = 286; A[10] = 719;
  A[11] = 1842; A[12] = 4766; A[13] = 12486;
  A[14] = 32973; A[15] = 87811; A[16] = 235381;
  A[17] = 634847; A[18] = 1721159; A[19] = 4688676;
  A[20] = 12826228; A[21] = 35221832;
  A[22] = 97055181; A[23] = 268282855; A[24] = 743724984;
  A[25] = 2067174645; A[26] = 5759636510;
  A[27] = 16083734329; A[28] = 45007066269;
  A[29] = 126186554308; A[30] = 354426847597;
4: for (i=1; i<=N; i++)
5:   { S[N][i]=0.; m=1;
6:     while(m>=1 && i*m<=N)
7:       {m3=A[N+1-i*m]; S[N][i]=S[N][i]+m3; m++;}
8:     n_a=0.;
9:     for (i=1; i<=N; i++) {m1=i*A[i]*S[N][i]; n_a=n_a+m1;}
10:    A[N+1]=n_a/N; } // recursion result (N+1)

```

Выводы: На единой основе разработаны два рекурсивных алгоритма генерации корневых деревьев. В первом алгоритме используется ЧЛГ-порядок, то есть традиционное перечисление по высоте деревьев. Вторым алгоритмом реализуется ПЛГ-порядок. Коды деревьев являются векторы начальных вершин. В случае ЧЛГ-порядка (ПЛГ-порядка) вершины нумеруются по путям (по уровням). Показано, что, хотя для этого нового порядка перечисления (ПЛГ-порядка) не существует перечислительной формулы, подобной формуле Оттера [1], процесс генерации корневых деревьев не становится сложнее в случае одного процессора. В отличие от известных алгоритмов предложенные алгоритмы имеют единственный рекурсивный вызов и запускаются только кодом дерева с меньшим числом вершин, что позволяет формировать вычислительные задания произвольного объема.

Список литературы

1. Otter R. The Number of Trees // The Annals of Mathematics (2nd Ser.).– 1948.– Vol. 49 (3).– P. 583–599.
2. Beyer T., Hedetniemi S.M. Constant time generation of rooted trees // Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics: Computation 9.– 1980.– No. 4.– P.706–712.
3. Li G., Ruskey F. The advantages of forward thinking in generating rooted and free trees // Proceedings of ACM–SIAM symposium on Discrete algorithms.– 1999.– P. 939–940.
4. Nakano S.I., Uno T., Efficient generation of rooted trees / National Institute of Informatics: Technical Report: NII-2003-005E.– 2003.– 9 p.
5. Korsh J.F., Lafollette P. A loopless Gray code for rooted trees.– ACM Trans. on Algorithms.– 2006.– 2 (2).– P. 135–152.
6. Свирщёва Э.А. Структурный синтез неизоморфных систем с однородными компонентами. – Харьков, 1998. – 256 с. (перераб. 2005).– www.techlibrary.ru.
7. Филаретов В.В. Единый подход к синтезу неизоморфных корневых деревьев // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.–Ульяновск: УлГТУ, 2017.– Вып.14.–С. 177–194.
8. Филаретов В.В. Структурные закономерности порождения канонических корневых деревьев при лексикографическом порядке // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2018. – Вып. 15. – С. 161–174.

9. Недорезов М.В., Недорезов П.В., Филаретов В.В. Алгоритм и программа генерации неизоморфных корневых деревьев на основе векторов начальных вершин // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2016. – Вып. 13.– С. 149–162.

10. Недорезов П.В., Филаретов В.В. Применение двоичных кодов для генерации неизоморфных корневых деревьев // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2016. – Вып. 13.– С. 163–174.

11. Недорезов П.В. Генерация неизоморфных корневых деревьев на основе двоичных кодов // МФТИ: XIX международная конференция научно-технических работ школьников «Старт в Науку».– М.: МФТИ, 2017.– <http://abitu.net/conference/1637>

12. Недорезов М.В., Недорезов П.В., Филаретов В.В. Алгоритм синтеза неизоморфных корневых деревьев в лексикографическом порядке // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2017. – Вып. 14.– С. 204–214.

13. Недорезов М.В., Недорезов П.В., Филаретов В.В. Генерация неизоморфных корневых деревьев на основе композиций числа вершин // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2020. – Вып. 16.– С. 164–177.

14. Kubicka E.M., McKeon K.A. An application of level sequences to parallel generation of rooted trees // Combinatorial mathematics and combinatorial computing.– 2011.– Vol. 76.– P. 33–58.

15. Недорезов П.В., Тимофеев В.Ф., Филаретов В.В. Параллельный синтез неизоморфных корневых деревьев // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2017. – Вып. 14. – С. 236–244.

Недорезов Петр Владимирович – магистрант Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета – ЛЭТИ им. В.И.Ленина.
E-mail: pyatakpy@rambler.ru

ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ ГЕНЕРАЦИЯ НЕИЗОМОРФНЫХ КОРНЕВЫХ ДЕРЕВЬЕВ С РАВНОМЕРНОЙ ЗАГРУЗКОЙ ПРОЦЕССОРОВ

К. С. Горшков, П. В. Недорезов, В. В. Филаретов

Рассмотрено применение двух рекурсивных алгоритмов генерации корневых деревьев для параллельной работы с фиксированным числом процессоров. Перечисление деревьев выполняется в виде векторов начальных вершин для двух лексикографических порядков: частичного (ЧЛГ) и полного (ПЛГ). Показано, что при работе с числом процессоров 2, 4, 9, 20, 48... ЧЛГ-порядок не приводит к ускорению генерации, а ПЛГ-порядок, хотя и обеспечивает многократное ускорение, но балансировка загрузки процессоров недостаточна. Введены операции над потоками корневых деревьев, предусматривающие деление потоков на части и их объединение. Разработан алгоритм формирования заданий процессорам при генерации корневых деревьев в ЧЛГ- и ПЛГ-порядках, обеспечивающий заданное отклонение от среднего числа деревьев на процессор. Достигнута равномерная загрузка 128 процессоров в известном примере генерации корневых деревьев для 20 вершин.

The application of two recursive algorithms for generating root trees for parallel operation with a fixed number of processors is considered. The enumeration of trees is performed in the form of vectors of initial vertices for two lexicographic orders: partial (CHLG) and full (PLG). It is shown that when working with the number of processors 2, 4, 9, 20, 48... HLG-order does not lead to acceleration of generation, and PLG-order, although it provides multiple acceleration, but balancing the load of processors is insufficient. Operations on root tree streams have been introduced, which provide for dividing streams into parts and combining them. An algorithm has been developed for generating tasks for processors when generating root trees in CHLG and PLG orders, providing a given deviation from the average number of trees per processor. A uniform load of 128 processors has been achieved in the well-known example of generating root trees for 20 vertices.

О генерации неизоморфных корневых деревьев. Перечисление деревьев относится к классическим задачам теории графов [1] и находит многочисленные приложения [2, 3]. В синтезе структур проблема перечисления может быть решена генерацией только канонических (неизоморфных) деревьев [4].

В статье рассматривается один из широко используемых типов деревьев – корневое дерево, в котором одна из вершин выбрана в качестве корня. Генерация таких деревьев требуется в различных областях: комбинаторике [3, 5], data mining [6] computer communications [7], химической информатике [8–13], машинном обучении [14, 15], робототехнике [16] и даже численных алгоритмах решения дифференциальных уравнений [17].

Способ кодирования корневого дерева обуславливает эффективность алгоритма генерации корневых деревьев. Большинство алгоритмов используют уровневую последовательность (level sequences). Е.А. Диниц и М.А. Зайцев [18], а также А.В. Козина [19] разработали первые алгоритмы генерации корневых деревьев, которые имели время выполнения $O(nt)$, где t – число корневых деревьев с n вершинами.

Beyer и Hedetniemi [20] предложили алгоритм с постоянным временем получения одного дерева с использованием функции перехода непосредственно от одной регулярной последовательности, задающей дерево, к следующей регулярной последовательности. Li и Ruskey [21] и Nakano с Uno [22] предложили алгоритмы для генерации корневых деревьев рекурсивным добавлением новой вершины.

Эти два алгоритма отличаются только последовательностями представления деревьев и генерируют их за постоянное время, распределенное по всем деревьям. Li и Ruskey используют для представления корневых деревьев родительский вектор (РВ). Позднее Korsh и Lafollette [23] разработали алгоритмы для генерации корневых деревьев за постоянное время в коде Грея при рекурсивной и нерекурсивной реализации.

За рубежом известен только частично лексикографический порядок перечисления корневых деревьев (ЧЛГ-порядок), в соответствии с которым деревья следуют по мере увеличения их высоты по числу ребер [1]. Исследования неубывающего лексикографического порядка –

полного ЛГ-порядка (далее ПЛГ-порядка) были начаты в работах Э.А. Свирщёвой [24].

Для параллельных вычислений был использован только не рекурсивный алгоритм [3]. К недостаткам известных рекурсивных алгоритмов [21, 22] для ЧЛГ-порядка относится невозможность реализации параллельных вычислений. Эти недостатки устранены в алгоритмах для обоих порядков перечисления, которые использовались при параллельной генерации корневых деревьев [25]. Эти алгоритмы были усовершенствованы и детально изложены в недавней работе [26]

Выполнение расчетов на фиксированном числе процессоров при полностью лексикографическом порядке перечисления обеспечивает многократное ускорение. Однако число процессоров связывается с рядом чисел, равных количеству деревьев с 3, 4, 5, 6, 7, ... вершинами. Соответствующий ряд для числа процессоров имеет вид: 2, 4, 9, 20, 48, ... что ограничивает использование алгоритмов [25, 26] даже по сравнению с алгоритмом [3], который также не обеспечивает равномерной загрузки процессоров.

В данной статье обсуждаются возможности эффективных параллельных вычислений с использованием программ RuskFi и AddNode [26] для обоих порядков перечисления корневых деревьев. При этом снимается ограничение на число используемых процессоров и обеспечивается полная балансировка их вычислительной нагрузки.

Параллельная генерация корневых деревьев при произвольном числе процессоров. Используем понятие среднего числа деревьев m , которые генерируются одним процессором [3]. Это число получается делением числа всех деревьев с n вершинами T_n , подлежащих генерации, на число процессоров p : $m = T_n / p$.

Простое получение вычислительных потоков двумя предложенными алгоритмами обусловлено наличием в них одного рекурсивного вызова. Если число процессоров не равно числу потоков, порождаемых деревьями с некоторым числом вершин, или ставится задача сделать нагрузку процессоров одинаковой, то можно делить крупные потоки на части, соответствующие каждой вершине, добавленной последней. При этом в задании для каждого процессора присутствует не один, а несколько кодов, обеспечивающих нагрузку, равную среднему числу деревьев на процессор.

Деление потоков корневых деревьев на части и их объединение: использование алгебры потоков деревьев для равномерной загрузки процессоров. Рекурсивные алгоритмы позволяют начать генерацию корневых деревьев для n вершин с любого дерева, например, в виде одного ребра или дерева с меньшим числом вершин $p < n$. Если в качестве исходного дерева будет задано дерево с $p = n$, то программа выведет это дерево в качестве результата.

Следовательно, списки начальных деревьев, обеспечивающие генерацию примерно равного или равного количества деревьев, могут служить заданиями для имеющихся в распоряжении процессоров. Каждое начальное дерево – элемент списка – записывается в фигурных скобках и снабжается атрибутом, равным числу порождаемых деревьев, которое характеризует размер потока деревьев.

Для сохранения заданного порядка генерации такие списки (задания процессорам) необходимо формировать на основе исходного списка начальных деревьев с p вершинами $p < n$. Выбор числа p при произвольном числе процессоров m , если их число не равно числу корневых деревьев с p вершинами T_p , произволен. Следует иметь в виду, что при малом p придется делить большие потоки, что приведет к увеличению числа элементов в списке каждого процессора. При большом p потоки делить не придется, но число элементов в списках увеличится многократно. Увеличение числа элементов в списках заданий нежелательно, поскольку может уменьшиться выигрыш от параллельных вычислений.

Для операций с потоками введем обозначения. В фигурных скобках записывается код исходного дерева, являющийся обозначением потока, а за ним следует атрибут – размер потока в числе деревьев. Деление потоков на части записывается в виде объединения частичных потоков, производных от исходного потока.

Пример 1. Рассмотрим простой пример параллельной генерации корневых деревьев с 7 вершинами на двух процессорах в ПЛГ- и ЧЛГ-порядках.

Решение для перечисления деревьев в ПЛГ-порядке. В исходном потоке это множество деревьев записывается как $\{0\}_{48}$ или в развернутом виде:

$$\{0\}48 = 000000+000001+000011+000012+000015+000111+000112+000114+ \\ +000123+000124+000144+000145+001111+001112+001113+001122+ \\ +001123+001125+001133+001134+001135+001233+001234+001235+ \\ +001333+001334+001344+001345+011111+011112+011122+011123+ \\ +011125+011222+011223+011224+011234+011244+011245+012222+ \\ +012223+012233+012234+012235+012333+012334+012344+012345. \quad (1)$$

ВНВ-код одного потока состоит из одного элемента, которым запускается рекурсивный алгоритм. ВНВ-коды перечисленных 48 деревьев состоят из шести элементов (для краткости записи эти элементы не заключены в фигурные скобки. Среднее число деревьев (идеальная нагрузка каждого процессора) равна $48/2=24$ дерева. Для деления потока в ВНВ-код добавляется в ПЛГ-порядке одна вершина и проверяется каноничность полученного кода. Отсюда получают два производных потока:

$$\{0\}48 = \{00\}28 + \{01\}20. \quad (2)$$

Их содержимое заносится в порядке, соответствующем исходному потоку. Это распределение нагрузки на процессоры не является плохим, но не позволяет предельно сократить время генерации в 2 раза (по числу процессоров), поскольку быстроедействие программы будет определяться наиболее загруженным первым процессором.

Поэтому первый производный поток, размер которого превышает среднее число деревьев ($28 > 24$) делится на две части с образованием канонических деревьев путем добавления следующей вершины в ВНВ-код в ПЛГ-порядке:

$$\{00\}28 = \{000\}12 + \{001\}16. \quad (3)$$

Выражение (3) соответствует первым 28 деревьям выражения (1).

Вторая часть производного потока делится повторно:

$$\{001\}16 = \{0011\}9 + \{0012\}3 + \{0013\}4. \quad (4)$$

Выражение (4) соответствует 16 деревьям в конце выражения (1).

Теперь, если передать последнюю часть потока $\{0013\}4$ второму процессору, поставив ее в начало задания, то будет обеспечена равномерная загрузка процессоров, и не нарушится ПЛГ-порядок следования деревьев при объединении результатов работы процессоров. Таким образом, задание для первого процессора будет иметь вид: 1)

$\{000\}12 + \{0011\}9 + \{0012\}3$, а для второго процессора: 2) $\{0013\}4 + \{01\}20$. Последовательный запуск заданий в каждом процессоре сократит время вычислений по сравнению с запуском всего потока деревьев (1) на одном процессоре.

Решение для перечисления деревьев в ЧЛГ-порядке. Теперь рассмотрим аналогичное решение в случае ЧЛГ-порядка перечисления деревьев. В исходном потоке это множество деревьев записывается как

$$\begin{aligned} \{0\}48 = & 000000 + 010000 + 010300 + 010305 + 011000 + 011040 + 011044 + 011100 + \\ & + 011105 + 011110 + 011111 + 012000 + 012040 + 012044 + 012045 + 012100 + \\ & + 012105 + 012110 + 012111 + 012140 + 012141 + 012200 + 012205 + 012210 + \\ & + 012211 + 012215 + 012220 + 012221 + 012222 + 012300 + 012305 + 012310 + \\ & + 012311 + 012315 + 012320 + 012321 + 012322 + 012325 + 012330 + 012331 + \\ & + 012332 + 012333 + 012340 + 012341 + 012342 + 012343 + 012344 + 012345. \end{aligned} \quad (5)$$

В исходном потоке это множество деревьев записывается как $\{0\}48$. МРВ-код потока состоит из одного элемента. Производные потоки деревьев задаются МРВ-кодом с добавлением в ЧЛГ-порядке одной вершины. Среднее число деревьев ($48/2=24$) не изменилось, однако в отличие от выражения (2) производные потоки несопоставимы:

$$\{0\}48 = \{00\}1 + \{01\}47. \quad (6)$$

Такое распределение нагрузки между процессорами не является приемлемым – оно бессмысленно, поскольку не приводит к сокращению времени вычислений по сравнению с одним процессором.

Поэтому второй производный поток, почти равный исходному потоку, делится на две части образованием канонических деревьев путем добавления вершины в МРВ-код в ЧЛГ-порядке:

$$\{01\}47 = \{010\}3 + \{011\}7 + \{012\}37. \quad (7)$$

Как видно из (6) и (7), для ЧЛГ-порядка характерно преобладание заключительного производного потока. Продолжив деление, получаем:

$$\{012\}37 = \{0120\}4 + \{0121\}6 + \{0122\}8 + \{0123\}19 \quad (8)$$

Выражения (6)–(8) показывают, что при ЧЛГ порядке перечисления производные потоки следуют в возрастающем порядке с преобладанием заключительного потока. На потоке $\{0123\}19$ процесс деления может быть остановлен, поскольку при делении предыдущего потока $\{0122\}8$

можно получить потоки, добавление которых к потоку $\{0123\}19$ приведет к получению заданий, близких к среднему числу деревьев:

$$\{0122\}8 = \{01220\}2 + \{01221\}3 + \{01222\}3. \quad (9)$$

Деление потока $\{01221\}3$ приведет к получению деревьев с 7 вершинами, поэтому лучшим результатом будут следующие задания для первого процессора:

$$1) \{00\}1 + \{010\}3 + \{011\}7 + \{0120\}4 + \{0121\}6 + \{01220\}2 = 23,$$

для второго процессора:

$$2) \{01221\}3 + \{01222\}3 + \{0123\}19 = 25.$$

Эти задания обеспечивают равномерную, хотя и не идеальную, загрузку процессоров, и не нарушают ЧЛГ-порядок следования деревьев при объединении результатов работы процессоров. Другим существенным недостатком перечисления в ЧЛГ-порядке является значительное увеличение числа заданий вследствие их малого размера. При использовании ЧЛГ-порядка требуется выполнение процессорами 9 заданий, вместо 5 заданий в случае ПЛГ-порядка.

Закономерности образования производных потоков деревьев в случае ЧЛГ-порядка приводят к следующей теореме.

Теорема 1. При делении на части потока корневых деревьев, перечисляемых в ЧЛГ-порядке, производные потоки возрастают по мере добавления вершины в их МРВ-код, а заключительный поток получает в числе деревьев преобладающий над остальными потоками размер.

Доказательство. Теорема вытекает из теорем 2 и 3 [26]. Справедливость теоремы 1 обусловлена принятой при ЧЛГ-порядке нумерации вершин корневого дерева. Вершины нумеруются по путям корневого дерева снизу вверх, а пути перебираются слева направо.

Поэтому вершины, которые добавляются для перечисления деревьев, производных от некоторого текущего дерева, являются конечными вершинами ребер, подсоединяемых к правому поддереву. Чем больше вершин в этом поддереве, тем больше производных деревьев. Число вершин в правом поддереве увеличивается от одного производного дерева к другому. Следовательно, увеличивается число деревьев, порождаемых при добавлении к другому производному дереву следующих вершин, что доказывает теорему 1.

В случае ПЛГ-порядка справедлива теорема 2.

Теорема 2. При делении на части потока корневых деревьев, перечисляемых в ПЛГ-порядке, все производные потоки, полученные добавлением вершины в их ВНВ-код, оказываются сопоставимыми по числу деревьев.

Доказательство. Теорема 2 вытекает из теорем 4 и 5 [26]. Справедливость теоремы 2 обусловлена принятой при ПЛГ-порядке нумерации вершин корневого дерева. Вершины нумеруются по уровням корневого дерева снизу вверх, а уровни перебираются слева направо.

Поэтому вершины, которые добавляются для перечисления деревьев, производных от некоторого текущего дерева, являются конечными вершинами ребер, подсоединяемыми к произвольным поддеревьям. Положение правого поддерева не фиксировано, как в случае ЧЛГ-порядка, а определяется положением подсоединяемого ребра. Поэтому число вершин в этом поддереве не влияет на количество деревьев, порождаемых одним производным деревом по сравнению с другим. Следовательно, число деревьев, порождаемых при добавлении к другому производному дереву следующих вершин, изменяется относительно мало. Это не позволяет говорить о существовании какой-то закономерности и доказывает теорему 2.

С учетом примера 1, теорем 1 и 2, получается, что использование ЧЛГ-порядка перечисления корневых деревьев, как и в случае фиксированного числа процессоров, нецелесообразно при произвольном числе процессоров. Однако ЧЛГ-порядок используется в [3] при параллельной реализации нерекурсивного алгоритма генерации корневых деревьев [20].

Особенности ЧЛГ-порядка перечисления в сочетании с нерекурсивным алгоритмом делают реализацию параллельных вычислений сложной и неэффективной. Методика параллелизации вычислений [3] предусматривает выравнивание нагрузки только среди процессоров, генерирующих деревья одной высоты. Задача выравнивания нагрузки среди всех процессоров не решается.

В примере [3] для 20 вершин требуется сгенерировать 12826228 деревьев на 128 процессорах, то есть среднее число деревьев составляет примерно $m=12826228/128=1.00205$ деревьев. В рамках одной высоты невозможно поделить деревья на задания, равные среднему числу деревьев m . Поэтому деревья с высотой от одного до 19 ребер

распределяются между процессорами неравными порциями: 1–3) 44533; 4) 99083*6; 5) 106614*16; 6) 106840*25; 7) 105402*27; 8) 107448*22; 9) 109327*15; 10) 110110*9; 11) 108792*4; 12) 184903*1; 13–19) 94504.

Деревья с высотой от одного до трех ребер и деревья с высотой от 13 до 19 ребер не могут полностью загрузить два процессора, а деревья с высотой 12 ребер создают почти двойную нагрузку на один процессор. Деревья, занимающие промежуточное положение по высоте, преобладают по количеству. Такие деревья приходится генерировать на нескольких процессорах, число которых приводится после знака «*». Эта нагрузка всего на несколько процентов превышает m , но имеется существенное отклонение от средней загрузки почти у всех 128 процессоров, кроме 6 процессоров (для высоты 4 ребра)

В идеальном случае выигрыш от параллельных вычислений T_n/m составил бы не менее 128 раз, а не 45 раз, как в решении [3]. Кроме балансировки нагрузки, на эффект параллельных вычислений может влиять сложность формирования заданий для процессоров.

Рекурсивные алгоритмы [26] позволяют просто делить потоки на части для обеспечения заданного отклонения от средней нагрузки процессора. Для этого к коду исходного дерева добавляется вершина, образующая каноническое дерево с большим не единицу числом вершин. В случае отсутствия рекурсии приходится делить на части сам результат, например, для 20 вершин [3], что принципиально ограничивает возможности балансировки нагрузки.

Алгоритм балансировки загрузки процессоров. Точность балансировки оценивается отклонением d нагрузки в числе деревьев, задаваемой каждому процессору, от среднего числа деревьев m на один процессор. Таким образом, фактическая нагрузка одному процессору может варьироваться в диапазоне от $m-d$ до $m+d$.

Предлагаемый алгоритм состоит из двух этапов. На первом этапе формируется множество потоков, на втором этапе эти потоки целиком или путем деления распределяются между процессорами и на третьем этапе процессорами выполняются параллельные вычисления.

Чтобы попасть в интервал $\{m-d, m+d\}$ и сохранить последовательность деревьев, генерируемых процессорами с порядковыми номерами, нужно делить потоки по мере формирования заданий процессорам. Для формирования заданий процессорам можно

использовать различное число потоков, генерируемых предлагаемыми алгоритмами из ряда: 2, 4, 9, 20, 48, 115, 286, 719,

При выборе числа потоков, меньшего 128, придется делить большие потоки, увеличивая число заданий каждому процессору. Но в противном случае потребуется складывать большое число потоков, что также приведет к увеличению числа заданий. Поэтому в рассматриваемом случае целесообразно остановиться на одном из двух вариантов – с 115 или 286 потоками.

Алгоритм формирования потоков деревьев. Блок-схема алгоритма формирования потоков деревьев показана на рис. 1. При его реализации использована программа AddNode [26] для генерации корневых деревьев с Q вершинами в неубывающем ПЛГ-порядке. Число потоков деревьев равно числу корневых деревьев с Q_p ($Q_p < Q$) вершинами. Функция AddNode_p на языке Си, реализующая блок-схему на рис. 1, представлена ниже.

```
void addnodp(int N,int ivv1[40])
{
    int i,k,N1=N+1,k0=ivv1[N-1];

    for (k = k0; k < N1; k++) // цикл добавления вершин
    {
        ivv1[N]=k; // занесение N-го элемента в код дерева
        if (!testing(N,ivv1)) // проверка каноничности дерева
        {
            if (N1 == Qp || Qp == 1)
            {
                for (i = 0; i < N1; i++)
                    {fprintf(file,"%d",ivv1[i]); ivv2[i]=ivv1[i];}
                count2=0; addnod2(N1,ivv2); countf++;
                fprintf(file," %d trees\n",count2);
                for (i = 0; i < N1; i++) load[n_ld][i]=ivv1[i];
                nu[n_ld]=N1; ld[n_ld++]=count2;
            } else addnodp(N1,ivv1);
        }
    }
}
```

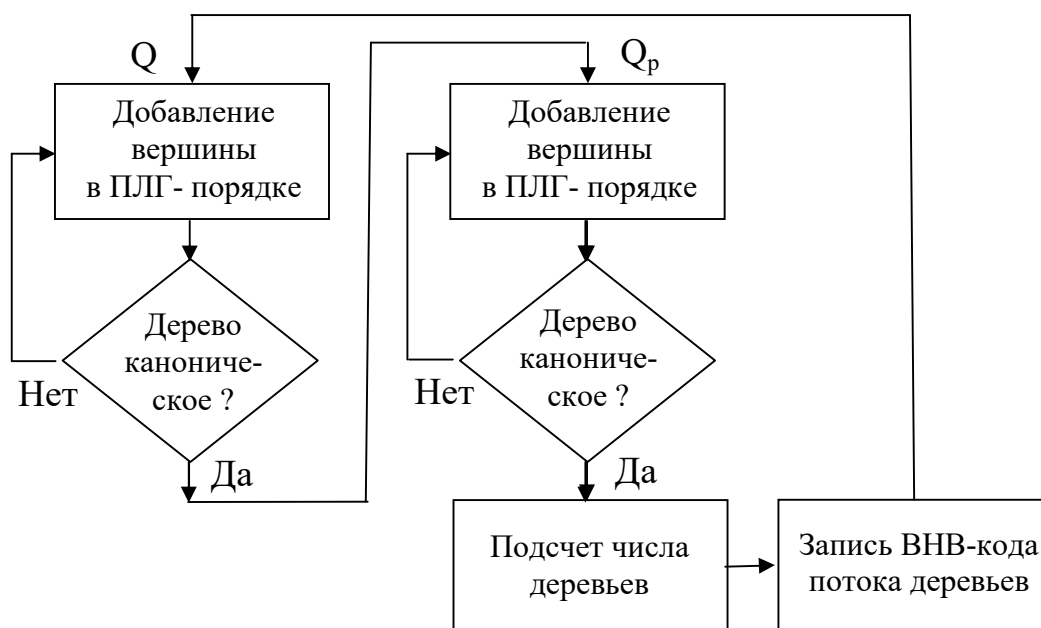



Рис 1. Формирование потоков корневых деревьев
для распределения между процессорами

Алгоритм распределения частичных потоков корневых деревьев между процессорами. Потоки задаются VNB-кодами соответствующих корневых деревьев и помещаются в матрицу $load[n][Q_p-1]$, где n – предельно допустимое число потоков, которые включают частичные потоки, среди которых имеются, кроме исходных потоков, и производные потоки, полученные в результате деления. Исходные (производные) потоки располагаются в нижней (верхней) части матрицы. Добавление производных потоков выполняется снизу вверх, чтобы сохранить ПЛГ-порядок.

Отведение частичных потоков процессорам выполняется последовательно: от первого процессора до последнего. При этом каждый процессор получает перечень частичных потоков в виде их VNB-кодов. Размеры частичных потоков в числе деревьев заносятся в вектор $ld[n]$ и требуются только на этапе распределения потоков. По сумме размеров частичных потоков задания процессорам отличаются от среднего числа деревьев m на процессор, попадая в диапазон $\{m-d, m+d\}$ с отклонением d по числу деревьев.

Кроме значений m , d и числ процессоров n_{pr} для алгоритма распределения частичных потоков, важны позиция n_{ld0} начала исходных

потоков в матрице load и предельное число max производных потоков, получающихся при делении исходных потоков. По мере переноса частичных потоков в задания для процессоров элементы вектора ld обнуляются. Блок схема алгоритма распределения частичных потоков показана на рис. 2.

При заполнении матрицы load элементами и обнулении их используются разные переменные: одна переменная n_ld для любых частичных потоков, а другая – n_pld только для производных потоков. Переменная n_ld в качестве индекса основного цикла управляет процессом формирования заданий процессорам. Начальное значение этой переменной $n_ld = n_ld0$. Переменная n_pld используется в качестве счетчика производных потоков с учетом сдвига на max при переходе к следующему делению исходного потока. Начальное значение этой переменной $n_pld = n_pld0 - max$.

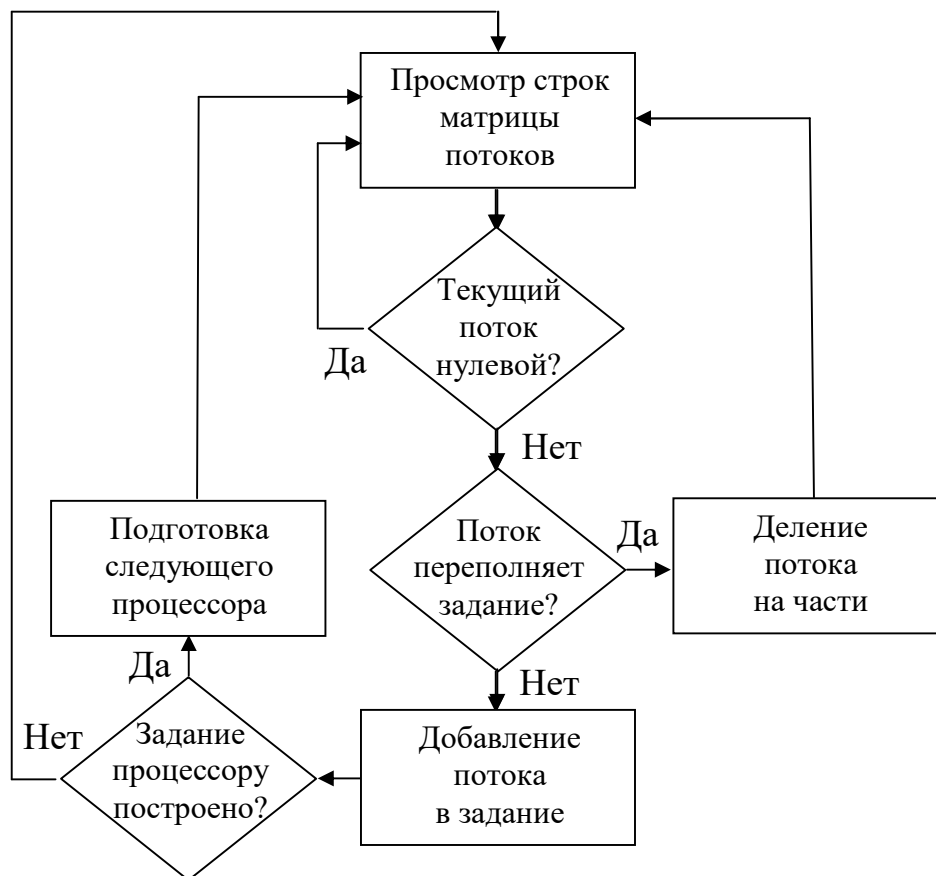


Рис 2. Распределение потоков корневых деревьев между процессорами

Текст программы **LoadTask** для распределения заданий процессорам приводится ниже.

```
void loadtask(int N) {
    int i,j,k,m,n_pa,l_d,n_pld,ntsk=0;
    n_pr=0; n_pld=n_ld0-step;
con:
    for (i = 0; i < n_ld; i++) { // просмотр строк матрицы частичных потоков
        if (!ld[i]) continue; // если поток нулевой
        l_d=ld[i];
        if (sum+l_d < max+delta && sum+l_d > max-delta)
        {n_pr++; // передача задания текущему процессору
        N=Qp;
        sum+=l_d; ld[i]=0; t+=l_d; // добавление текущего потока
        task[ntsk++]=l_d; // занесение текущего потока в задание
        sum=0; ntsk=0; // подготовка следующего процессора
        }
        else if (sum+l_d < max+delta) {
        sum+=l_d; ld[i]=0; t+=l_d; // добавление текущего потока
        task[ntsk++]=l_d; // занесение текущего потока в задание
        }
        else if (sum+l_d > max+delta) { // деление текущего потока
            addnodm(&N,i,&n_pa); // получение частей потока
            ld[i]=0; // обнуление текущего потока
            for (m = 0; m < n_pa; m++) // занесение частей
            {for (k = 0; k < N; k++) load[n_pld][k]=dif[m][k]; // в матрицу потоков
            nu[n_pld]=nup[m]; // в вектор числа вершин потоков
            ld[n_pld++]=pald[m]; // в вектор размеров потоков
            }
            n_pld-=max; }
        goto con; }
    if (n_pr > n_proc) {
        n_pr++; // передача задания последнему процессору
    }
}
```

Пример 2 [3], Например, первыми среди 286 потоков следуют потоки:

{0 0 0 0 0 0 0 0}27751 {0 0 0 0 0 0 0 1}47811.

Нижняя граница диапазона не пройдена, но добавление следующего потока {0 0 0 0 0 0 1 1} 97750

переходит верхнюю границу диапазона. Поэтому поток 97750 делится добавлением вершины к коду:

$$\{0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\} \ 97750 = \{\} \ 40069 + \{\} \ 46496 + \{\} \ 11185.$$

Но следующий поток также велик, поэтому и он делится:

$$\{0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\} \ 40069 = \{1\} \ 12208 + \{2\} \ 13338 + \{\} \ 12681 + \{\} \ 1842.$$

Добавление следующего по порядку потока $\{0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\} \ 12208$ не переходит нижнюю границу, но следующий поток переполняет верхнюю границу, поэтому он делится:

$$\{0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 2\} \ 13338 = \{2\} \ 5110 + \{3\} \ 6621 + \{\} \ 1607.$$

и к заданию можно добавлять потоки:

$$\{0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 2\ 2\} \ 5110 \text{ и } \{0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 2\ 3\} \ 6621 \text{ trees} .$$

Таким образом, для первого процессора вычислительное задание имеет вид:

$$\begin{aligned} &\{0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\} \ 27751 \quad \{0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\} \ 47811 \\ &\{0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\} \ 12208 \quad \{0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 2\ 2\} \ 5110 \\ &\{0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 2\ 3\} \ 6621. \end{aligned}$$

Размер этого задания ($t=27751+47811+12208+5110+6621=9.9501000000000000e+04$) попадает в установленный диапазон размеров. Последовательность и состав частичных потоков соответствует ЛГ-порядку перечисления деревьев.

Следующее задание начнется потоком 1607 (остатком потока 13338 trees) и продолжится потоками 12681 и 1842 (остатком потока 40069). К этим потокам добавятся потоки 46496 и 11185 (остатки потока 97750).

Далее к текущему заданию добавляется следующий по порядку (из 286 потоков): $\{0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 2\} \ 20282$ и размер задания составляет: $t=1607+12681+1842+46496+11185+20282=9.4093000000000000e+04$; Это не переходит нижнюю границу диапазона, поэтому делится на части следующий поток $\{0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 7\} \ 12486$ и процесс формирования задания для очередного процессора продолжается.

При выборе малого d , которое вычитается из среднего числа деревьев или складывается с ним, число рассмотренных «озадаченных» процессоров будет расходиться с заданным их числом на единицу. Поэтому последнее задание будет небольшим, и его можно добавить к предпоследнему заданию, уменьшив число процессоров на единицу.

Случай, когда, наоборот, одного процессора не хватает, возможен, когда d выбрано слишком большим, и образовалось скопление потоков у нижней границы диапазона, общий размер которых сопоставим со средним числом деревьев исходных потоков.

Пример 3. Рассмотрим параллельную генерацию деревьев [3] в случае 115 исходных потоков. Требуется распределить нахождение 12826228 деревьев по 128 процессорам. Среднее число деревьев на процессор приблизительно равно 100200. Покажем формирование задания для первого процессора.

Ближайшее к числу процессоров число потоков равно 115. При этом 12826228 неизоморфных деревьев с 20 вершинами будут порождены 115 кодами неизоморфных деревьев с 8 вершинами. Для формирования задания первому процессору достаточно первых двух потоков из 115: 1) 0000000 75562; 2) 0000001 130518 . Первая комбинация цифр в обозначении потока указывает код начального дерева, а вторая – размер потока в деревьях с 20 вершинами.

Первый поток помещается в задание целиком: $sum=75562$, а второй – делится добавлением вершины к коду начального дерева:

```
00000011 97750
00000012 20282
00000017 12486
```

Первая часть от деления также велика, и она рекурсивно делится:

```
000000111 46496
000000112 40069
000000117 11185
```

и

```
0000001111 17833
0000001112 23056
0000001117 5607
```

Первая часть от третьего деления может быть помещена в задание: $sum=75562+17833$, а вторая часть требует деления:

```
00000011122 11248
00000011123 5412
00000011127 5677
000000111210 719
```

и

```
000000111222 2063
000000111223 5782
000000111227 2781
0000001112210 622
```

Первая часть от результата деления помещается в задание:
 $\text{sum}=75562+17833+2063$, а вторая часть 5782 делится:

```
0000001112233 1395
0000001112234 1681
0000001112237 1956
00000011122310 635
00000011122312 115
```

В задание помещаются три первые по порядку части:

$\text{sum}=75562+17833+2063+1395+1681+1956=100490$, и процесс формирования задания для первого процессора можно закончить, если, например, допустимое отклонение от среднего числа деревьев составляет 300 деревьев ($100200+300 < 100490$).

Таким образом, задание для первого процессора будет иметь вид:

```
0000000 75562
0000001111 17833
000000111222 2063
0000001112233 1395
0000001112234 1681
0000001112237 1956
```

Как видно, последовательность деревьев в задании соответствует TLO, что будет соблюдаться при формировании заданий для следующих процессоров. Аналогично можно сформировать задания для каждого из 128 процессоров, решив пример [3], но для этого желательна разработка программы, блок-схема которой представлена на рис. 1. На этой программе сравниваются два предложенных алгоритма в режиме равномерной загрузки процессоров.

Об ограничении при делении потоков деревьев. Программа **LoadTask** для балансировки заданий процессорам на тесте Кубички может использовать не только потоки от 115 и 286 деревьев, ближайшие к

заданному числу процессоров (128), но и потоки от 48, 719, 1842, ... деревьев.

Однако потоки, меньшие 48 деревьев, для этого примера использовать нельзя, поскольку, как установлено, возможно существование потоков, которые не делятся на части вследствие порождения единственного потока с новой вершиной. Например, в случае потоков с 20 деревьями порождается поток {012344567788}, к которому при делении можно добавлять только вершину 9, то есть этот поток невозможно разделить на части.

Невозможность деления очевидна при визуальном представлении ВНВ-кода {0123445677889}. Из вершин, добавляемых в неубывающем ПЛГ-порядке: 8, 9, 10, 11, 12, только вершина 9 приводит к образованию канонического дерева или соответствующего потока деревьев.

Ограничение, когда при делении потока получается один производный поток, обходится добавлением следующей вершины. Поэтому допускается произвольное число потоков, как меньшее, так и большее числа процессоров. В приложенном решении допускается отклонение в каждом процессоре 210 деревьев от среднего числа деревьев 100200. Для этого используется следующий конфигурационный файл программы **LoadTask**:

Number of nodes:

20

Number of nodes for initial tree

13

Number of processors

128

Average number of trees per processor

100200

Acceptable deviation from the average number of trees

210

Begining of base flow

12000

Step of division

10

Output for trees? (1 / 0):

0

Время решения задачи полной балансировки загрузки 128 процессоров при генерации корневых деревьев с 20 вершинами для различного числа исходных потоков корневых деревьев сведено в табл. 1.

Таблица 1. Формирование заданий 128 процессорам
при разном числе потоков деревьев

Число потоков корневых деревьев и время формирования (в секундах) заданий для 128 процессоров											
2	4	9	20	48	115	286	719	1842	4766	12486	32973
26.19	22.76	19.53	16.31	13.10	09.93	07.11	05.02	04.05	03.82	04.29	06.03

Данные табл. 1 показывают, что с увеличением количества исходных потоков, время расчета заданий процессорам уменьшается до некоторого предела (3–4 секунды). Затем это время начинает увеличиваться непропорционально быстро за счет вывода на жесткий диск чрезмерно большого объема заданий.

При сортировке корневых деревьев, например, выявлении у них каких-то признаков обращения к программе генерации деревьев может требоваться многократно. Поэтому единожды сформированные задания для процессоров может повторно использоваться, и время генерации заданий не является существенным. Тем более, судя по табл. 1, это время невелико даже для небольшого числа потоков деревьев.

О преимуществе ПЛГ-порядка перед ЧЛГ-порядком. Это преимущество очевидно при решении примера [3] для двух порядков перечисления деревьев. Это требует использования в программе **LoadTask** функций не только программы **AddNode**, но и программы **RuskFi**. Сформируем задания для обеих версий программы **LoadTask** при вычислениях на 128 процессорах. Ниже приводятся заключительные строки из решения для балансировки процессоров.

Для ПЛГ-порядка:

...

Proc=128 i=2284, l_d= 32973, sum= 99765, t= 12826228

n_tsk=1456

20 vertices - 12826228 trees

Execution time: 00 hour 00 min. 10.08 sec.

Для ЧЛГ-порядка:

...

Proc=129 i=2985, l_d= 6557, sum= 9230, t= 12826228

n_tsk=2301

20 vertices - 12826228 trees

Execution time: 00 hour 00 min. 10.03 sec.

Как видно, сокращается почти наполовину число заданий n_tsk. При ЧЛГ-порядке увеличивается разброс заданий процессорам по объему, поскольку потребуется передача 128-му процессору существенного задания (9230 деревьев) лишнего 129-го процессора. Расчеты проведены для приведенного выше конфигурационного файла.

При среднем числе деревьев на процессор 100200 и допуске на отклонение 300, число деревьев на процессор варьируется от 99900 до 100500. Таким образом, избавление от 129-го процессора приведет к резкой разбалансировке загрузки, следовательно, ЧЛГ-порядок перечисления корневых деревьев (порядок Оттера) не обеспечивает равномерную загрузку процессоров.

В отличие от параллельных вычислений [3], когда каждое следующее дерево получается из предыдущего [20], предложенный рекурсивный подход основан на операциях с потоками деревьев, порождаемых соответствующими кодами начальных деревьев. Это позволяет формировать одинаковые задания для процессоров или задания требуемого размера (при наличии процессоров с различной производительностью), что невозможно при известном подходе [3].

Единственный рекурсивный вызов позволяет использовать оба предложенных алгоритма в общем случае – для произвольного числа процессоров. Однако, как показано выше, второй алгоритм (на основе ПЛГ-порядка) обеспечивает существенно меньшее расхождение потоков по размеру, что уменьшает затраты на деление слишком больших потоков при балансировке загрузки процессоров. Поэтому использовать алгоритм с ПЛГ-порядком для параллельных вычислений предпочтительно также в случае произвольного числа процессоров.

Использование большого числа потоков, формирующих задания процессорам, может потребовать значительного времени для считывания задания каждым процессором с жесткого диска. Эффективность

параллельного расчета в случае ПЛГ-порядка является следствием его преимущества – удовлетворительной балансировки загрузки при фиксированном числе процессоров: 2, 4, 9, 20, 48, ... , по сравнению с ЧЛГ-порядком.

Выводы

1. Установлено, что единственный рекурсивный вызов и запуск рекурсивного алгоритма только кодом дерева с меньшим числом вершин позволяет делить генерируемые корневые деревья на потоки со сколь угодно малым различием по числу деревьев.

2. Предложен и реализован алгоритм балансировки загрузки процессоров для ЧЛГ- и ПЛГ-порядков перечисления корневых деревьев. В обоих порядках перечисления достигается предельно высокое сокращение времени генерации, что обеспечивается формированием заданий процессорам в желаемом диапазоне изменения их нагрузки.

3. Показано, что полный лексикографический порядок (ПЛГ-порядок) обеспечивает реализацию параллельных вычислений при произвольном числе процессоров, уменьшая количество формируемых вычислительных заданий при равномерной загрузке процессоров.

Эта работа была выполнена при финансовой поддержке Правительства Российской Федерации, Грант 08-08.

Авторы благодарят Е.А. Свирщёву [24] за очень полезные обсуждения.

Список литературы

1. Otter R. The Number of Trees // The Annals of Mathematics (2nd Ser.).– 1948.– Vol. 49 (3).– P. 583–599.
2. Gupta A.K., Hambruch S. E. Load balanced tree embeddings // Parallel Computing.– 1992.– Vol. 18.– P. 595–614.
3. Kubicka E.M., McKeon K.A. An application of level sequences to parallel generation of rooted trees // Combinatorial mathematics and combinatorial computing.– 2011.– Vol. 76.– P. 33–58.
4. McKay B.D. Isomorph-free exhaustive generation // Journal of Algorithms.– 1998.– Vol. 26 (2).– P. 306–324.
5. Asciak K., Lauri J., Myrvold W., Pannone V. On the edge-reconstruction number of a tree // Australasian Journal of Combinatorics.– 2013.– Vol. 60 (2).– P. 1–23.

6. Miyahara T., Shoudai T., Uchida T., Takahashi K., Ueda H. Discovery of Frequent Tree Structured Patterns in Semistructured Web Documents // Proc. of 5th Pacific-Asia Conference on Knowledge Discovery and Data Mining (PAKDD-2001).– Hong Kong, China, 2001.– P. 47–52.
7. Hosseini M., Georganas N.D. End System Multicast routing for multi-party videoconferencing applications // Computer Communications.– 2006.– Vol. 29.– P. 2046–2065.
8. Fujiwara H., Wang J., Zhao L., Nagamochi H., Akutsu T. Enumerating Treelike Chemical Graphs with Given Path Frequency // Journal of Chemical Information and Modeling.– 2008.– 48.– P. 1345–1357.
9. Shimizu M., Nagamochi H., Akutsu T. Enumerating tree-like chemical graphs with given upper and lower bounds on path frequencies // BMC Bioinformatics.– 2011.– Vol. 12 (Suppl 14): S3.– P. 1–9.
10. Schutte M., Dehmer M. Large-scale analysis of structural branching measures // Journal of Mathematical Chemistry.– 2014.– Vol. 52.– P. 805–819.
11. Suzuki M., Nagamochi H., Akutsu T. Efficient enumeration of monocyclic chemical graphs with given path frequencies // Journal of Cheminformatics.– 2014.– No. 6 (31).– P. 1–18.
12. Hayashida M., Jindalertudomdee J., Zhao Y., Akutsu T. Parallelization of enumerating tree-like chemical compounds by breadth-first search order // BMC Medical Genomics.– 2015.– Vol. 8 (Suppl 2):S15.– P. 1–7.
13. Brinkmann G., Computing the maximal canonical form for trees in polynomial time // Journal of Mathematical Chemistry.– 2018.– Vol. 56.– P. 1437–1444.
14. Balcazar J.L., Bifet A., Lozano A. Mining frequent closed rooted trees // Machine Learning.– 2010.– Vol. 78 (1).– P. 1–33.
15. Gupta S., Roy S. Stable Matching Games: Manipulation via Subgraph Isomorphism // Algorithmica.– 2018.– Vol. 80 (9)– P. 2551–2573.
16. Chen I.-M., Burdick J.W. Enumerating the Non-Isomorphic Assembly Configurations of Modular Robotic Systems // The International Journal of Robotics Research.– 1998.– Vol.17 (7).– P. 702–719.
17. Bonnans J.F., Laurent-Varin J. Computation of order conditions for symplectic partitioned Runge-Kutta schemes with application to optimal control // Numer. Math.– 2006.– Vol. 103.– P. 1–10.
18. Диниц Е.А., Зайцев М.А. Алгоритмы генерации неизоморфных деревьев // Автоматика и телемеханика.– 1977, № 4.– С. 121–126.

19. Козина А.В. Кодирование и генерация неизоморфных деревьев // Кибернетика.– Киев.– 1980.–№ 5.– С. 38–43.
20. Beyer T., Hedetniemi S.M. Constant time generation of rooted trees // Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics: Computation 9.– 1980.– No. 4.– P.706–712.
21. Li G., Ruskey F. The advantages of forward thinking in generating rooted and free trees // Proceedings of ACM–SIAM symposium on Discrete algorithms.– 1999.– P. 939–940.
22. Nakano S.I., Uno T., Efficient generation of rooted trees / National Institute of Informatics: Technical Report: NII-2003-005E.– 2003.– 9 p.
23. Korsh J.F., Lafollette P. A loopless Gray code for rooted trees // ACM Transactions on Algorithms.– 2006.– Vol. 2 (2).– P. 135–152.
24. Свирщёва Э.А. Структурный синтез неизоморфных систем с однородными компонентами. – Харьков, 1998. – 256 с. (перераб. 2005).– www.techlibrary.ru.
25. Недорезов П.В., Тимофеев В.Ф., Филаретов В.В. Параллельный синтез неизоморфных корневых деревьев // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.–Ульяновск: УлГТУ, 2017.– Вып. 14.– С.224–232.
26. Недорезов П.В., Филаретов В.В. Генерация неизоморфных корневых деревьев в частичном и полном лексикографическом порядке // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2022. – Вып. 17.– С. 164–190.

Горшков Константин Сергеевич – канд. техн. наук, доцент кафедры электротехники и прецизионных электромеханических систем Санкт-Петербургского научно-исследовательского университета информационных технологий, механики и оптики (ИТМО).

E-mail: k.gorshkov@list.ru.

Недорезов Петр Владимирович – магистрант Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета – ЛЭТИ им. В.И.Ленина.

E-mail: pyatakpy@rambler.ru

УРАВНЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ СОСТОЯНИЯ И ЗАКОНЫ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

И. В. Ерохов

Метод переменных состояния является основным для любого комплекса программ анализа электрических и электронных схем. В описании зарубежных комплексов программ поначалу этот метод подавали как совершенно новый, который слабо связан с классической теорией электрических цепей. Это не могло остаться без ответа специалистов, и связь с теорией цепей была установлена, а ее доказательство включено в учебник [1]. Приведем процесс составления уравнений состояния для простой электрической цепи согласно этому источнику, рис. 1.

Запишем уравнения Кирхгофа для электрической цепи, изображение которой приведено ниже:

$$\begin{aligned} -j(t) - i_L + i_R + i_C &= 0 \\ R_1 i_L + L \frac{di_L}{dt} + R_2 i_R &= e(t) \\ u_C - i_R R_2 &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

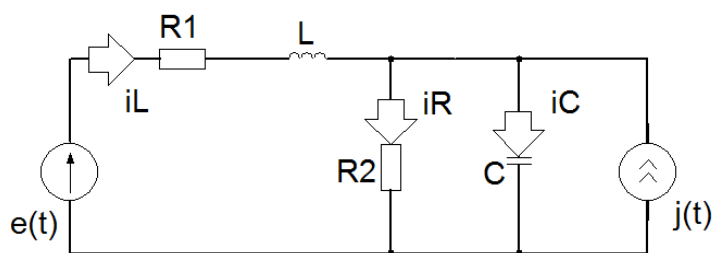


Рис. 1. Пример для составления системы уравнений состояния.

Преобразуем уравнение единственного независимого узла цепи:

$$i_R = i_L - i_C + j(t),$$

$$i_R = i_L - C \frac{du_C}{dt} + j(t). \quad (2)$$

Особо отметим, что уравнение (2) составлено по первому закону Кирхгофа. Обратим внимание на то, что в правой части преобразованного уравнения среди слагаемых находятся переменные состояния: ток индуктивности i_L и напряжение емкости u_C .

Рассмотрим контурное уравнение из системы (1), которое описывает ячейку схемы:

$$U_C - i_R \cdot R_2 = 0. \quad (3)$$

Преобразуем выражение, применяя уравнение (2) в качестве подстановки

$$u_C - \left[i_L - C \frac{du_C}{dt} + j(t) \right] R_2 = 0, \quad (4)$$

откуда и получаем одно из уравнений метода переменных состояния:

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{1}{C} i_L - \frac{1}{CR_2} u_C + \frac{1}{C} j(t). \quad (5)$$

Возьмем следующее контурное уравнение из системы (1):

$$R_1 i_L + L \frac{di_L}{dt} + R_2 i_R = 0. \quad (6)$$

Преобразуем уравнение (6), применяя в качестве подстановки выражение для тока i_R из уравнения (4):

$$R_1 i_L + L \frac{di_L}{dt} + R_2 \left[i_L - C \frac{du_C}{dt} + j(t) \right] = e(t). \quad (7)$$

Последнее слагаемое уравнения (7) соответствует напряжению на конденсаторе

$$u_C = \left[i_L - C \frac{du_C}{dt} + j(t) \right] R_2.$$

С учетом этого запишем уравнение (7) в следующем виде:

$$R_1 i_L + L \frac{di_L}{dt} + u_C = e(t).$$

Разрешая выражение относительно производной, получаем второе уравнение метода переменных состояния:

$$\frac{di_L}{dt} = -\frac{R_1}{L}i_L - \frac{1}{L}u_C + \frac{1}{L}e(t). \quad (8)$$

Запишем дифференциальное уравнение метода переменных состояния в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} i'_L \\ u'_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{CR_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ j(t) \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Остальные переменные цепи выразим через переменные состояния:

$$i_R = \frac{u_C}{R_2}; \quad i_C = i_L - \frac{u_C}{R_2} + j(t); \quad u_L = -R_1 i_L - u_C + e(t).$$

Запишем эти уравнения в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} i_R \\ i_C \\ u_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R_2} \\ 1 & -\frac{1}{R_2} \\ -R_1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ j(t) \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Уравнения (9), (10) объединяются в систему метода переменных состояния [2]:

$$\begin{cases} [\bar{X}'] = [A][\bar{X}] + [B][\bar{u}] \\ [\bar{Y}] = [C][\bar{X}] + [D][\bar{u}] \end{cases}, \quad (11)$$

где $\bar{X}$ – вектор переменных состояния, $\bar{X}'$ – вектор производных (по времени) переменных состояния, $\bar{u}$ – вектор источников; $\bar{Y}$ – вектор выходных переменных, $[A]$, $[B]$, $[C]$, $[D]$ – матрицы, составленные по графу схемы.

Итак, следует отметить: 1) переменные состояния являются величинами, которые измеряются на реактивных элементах; 2) по найденным значениям переменных состояния определяются остальные переменные электрической цепи.

Очевидно, что для получения всех остальных переменных необходимо иметь в электрической цепи достаточное количество реактивных элементов. Определять необходимое число реактивных элементов пока никто не пытался, однако, надо думать, проблема обнаруживалась на практике, поэтому в авторитетном издании по

машинному анализу схем первому уравнению системы (11) дана очень аккуратная формулировка.

«В любой схеме с сосредоточенными параметрами имеют место три основных типа уравнений: ... для каждого узла, ... каждого контура и уравнения вольт-амперной характеристики для каждого из элементов Если с их помощью удастся получить систему линейно независимых дифференциальных уравнений первого порядка, то говорят, что для данной схемы существует *уравнение переменных состояния в нормальной форме*:

$$x' = f(x, t), \quad (12)$$

где x – набор из n независимых вспомогательных переменных» [2].

В комплексе программ машинного анализа построение систем уравнений (11) строго алгоритмизировано и начинается с выбора дерева в графе схемы замещения, подготовленной к заданию в компьютер. Отметим только то, что при формировании дерева программисты стремятся отнести индуктивности к множеству ветвей связи, а емкости – к множеству ветвей дерева. Таким образом, токи индуктивностей, чаще всего, играют роль контурных токов, а напряжения конденсаторов участвуют в формировании потенциалов узлов. Покажем это на простом примере, рис.2, взятом из того же источника [2].

Если ветви, содержащие источник, емкость и резистор под номером два, отнести к дереву, а две остальные ветви – к связям, то требования по размещению реактивных элементов в ветвях графа рис.2 будут выполнены. Заметим, что в случае этой схемы напряжение на емкости равно потенциалу узла 2, а ток через индуктивность является контурным током.

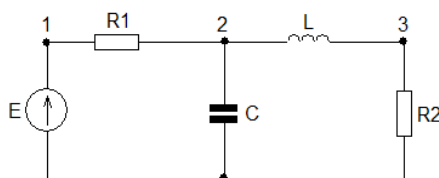


Рис. 2. Простейшая электрическая схема

Контурный ток, как вспомогательную величину, ввел Максвелл, чтобы облегчить расчет переменных электрической цепи. Но уже в источнике [2], этот ток был определен как независимая переменная, а в

учебнике [3] – как ток главных ветвей схемы. Другими словами, авторы этих книг считали, что значения контурных токов могут быть независимыми от определенных обстоятельств.

В статье [4] было показано, что значения элементов вектора контурных токов можно назначать произвольно. Несмотря на такой выбор, расчет токов ветвей по формуле (13) дает величины, отвечающие первому закону Кирхгофа:

$$\bar{I}_b = [B_f]^t \bar{I}_c, \quad (13)$$

где $\bar{I}_b$ – вектор токов ветвей.

Аналогичными свойствами обладают также вектора узловых напряжений (потенциалов), когда значения элементов назначены произвольно. Расчет напряжений ветвей по формуле (14) дает величины, отвечающие второму закону Кирхгофа:

$$\bar{U}_b = [A_f]^t \bar{\varphi}_n, \quad (14)$$

где $\bar{U}_b$ – вектор напряжений ветвей.

Понятно, что по этой причине погрешности вычислений значений контурных токов и напряжений (потенциалов) узлов незаметны для специалиста, так как полученные величины токов и напряжений ветвей отвечают законам Кирхгофа. Уравнение баланса мощностей в ветвях электрической цепи также не может быть использовано для проверки правильности расчета величин контурных токов и напряжений (потенциалов) узлов, т.к. произведение векторов токов и напряжений ветвей, полученных по формулам (13), (14), будет равно нулю.

Пример. Проверим справедливость формул (13), (14) на матрицах инцидентий схемы моста Уитстона, рис.3. Определим, что ветви 3, 4, 5 образуют дерево, а ветви 1, 2, 6 являются связями.

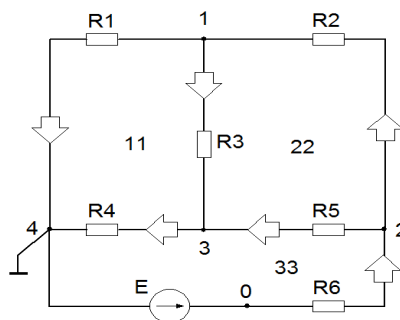


Рис.3. Схема моста Уитстона

Запишем фундаментальные матрицы инцидентий электрической цепи рис.3:

$$B_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 11 \\ 22 \\ 33 \end{matrix}; \quad A_f = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{matrix}.$$

Не будем записывать транспонированные формы этих матриц отдельно, так как считаем, что их легко опознать в формулах для определения значений токов и напряжений ветвей.

Проверим формулу (13):

$$\bar{U}_b = A_f^t \bar{\varphi}_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 2 \\ -15 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 6 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}.$$

Для проверки полученных значений составим уравнение для узла 1, рис.3, и проверим баланс токов ветвей:

$$I_1^b - I_2^b + I_3^b = 0 \Rightarrow 3 - 4 + 1 = 0.$$

Первый закон Кирхгофа выполняется потому, что транспонированная фундаментальная контурная матрица выступает здесь в роли тензора, т.е. просто преобразовывает значения вектора контурного тока в величины токов ветвей.

Проверим формулу (14):

$$\bar{U}_b = A_f^t \bar{\varphi}_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 2 \\ -15 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 6 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}.$$

Для проверки полученных значений составим уравнение для контура 11, рис.3, и проверим баланс напряжений ветвей:

$$U_1^b - U_3^b - U_4^b \Rightarrow 13 - 6 - 7 = 0.$$

Второй закон Кирхгофа выполняется потому, что транспонированная фундаментальная узловная матрица выступает здесь в роли тензора, т.е. просто преобразовывает значения вектора напряжений узлов в величины напряжений ветвей.

Произведение полученных векторов тока и напряжения ветвей всегда будет равно нулю, что гарантирует теорема Зеляха-Теллегена [5].

$$\bar{I}_b^t \cdot \bar{U}_b = 0,$$

$$\times \begin{Bmatrix} 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 1 \\ 13 & 2 & -15 & 6 & 7 & 8 \end{Bmatrix} = 39 + 8 - 75 + 6 + 14 + 8 = 75 - 75 = 0.$$

Вероятно, подобные свойства могут быть перенесены на переменные состояния, так как:

1. В графе электрической цепи реактивные элементы предпочтительно располагаются в ветвях связей и дерева и их роль аналогична величинам $(\bar{I}_c, \bar{\varphi}_n)$.

2. По значениям переменных состояния вычисляются величины остальных переменных цепи, аналогично величинам $(\bar{I}_c, \bar{\varphi}_n)$.

Совпадение как структурной дислокации в графе электрической цепи, так и их функций при дальнейших действиях по определению остальных неизвестных, дает право делать такое предположение.

Следует напомнить, что начиная решение дифференциального уравнения необходимо определить значения переменных реактивных элементов до начала процесса интегрирования, т.е. задать начальные условия. На примере конденсатора покажем, что начальное значение напряжения является величиной интеграла, определенного до момента старта процесса интегрирования:

$$u_c(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_c(\tau) \cdot d\tau = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i_c(\tau) \cdot d\tau + \frac{1}{C} \int_0^t i_c(\tau) \cdot d\tau. \quad (15)$$

Из выражения (15) следует, что для определения реального значения напряжения на конденсаторе в момент времени t важно знать точное значение начального условия. К сожалению, эти значения не всегда удастся определить точно или хотя бы приблизительно. Не исключается случайное задание значений, другими словами, это делают, руководствуясь интуицией.

На схеме рис.3 начальные условия изображены как дополнительные источники энергии.

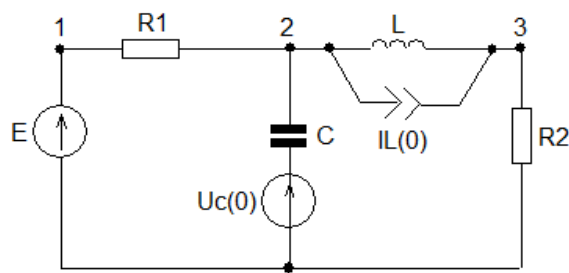


Рис. 3. Фиксация начальных условий элементов на схеме

Как видно из рис.3, начальный ток добавляется к току индуктивности, а начальное напряжение – к напряжению конденсатора. Если величины начальных условий определены с неизвестной погрешностью, то она обязательно войдет в погрешность самих переменных состояния. Трудно предположить, что в процессе численного решения системы уравнений погрешность начальных условий будет сведена к нулю.

Источники погрешности вычислений. Математики, использующие в своих исследованиях численные методы интегрирования, согласны с тем, что их результаты находятся с некоторой погрешностью. Приведем цитату из лекции для студентов-математиков [6]:

Существуют четыре источника погрешности результата:

1) погрешность математической модели – связана с ее несоответствием физической реальности, так как абсолютная истина недостижима. Если математическая модель выбрана недостаточно тщательно, то, какие бы методы мы не применяли для расчета, все результаты будут недостаточно надежны, а в некоторых случаях и совершенно неправильны.

2) погрешность исходных данных, принятых для расчета. Это неустранимая погрешность, но это погрешность возможно и необходимо оценить для выбора алгоритма расчета и точности вычислений. Как известно, ошибки эксперимента условно делят на систематические, случайные и грубые, а идентификация таких ошибок возможна только при статистическом анализе результатов эксперимента.

3) погрешность метода – основана на дискретном характере любого численного алгоритма. Это значит, что вместо точного решения исходной задачи метод находит решение другой задачи, близкого в каком-то смысле (например, по норме банахова пространства) к искомому. Погрешность

метода — основная характеристика любого численного алгоритма. Погрешность метода должна быть в 2–5 раз меньше неустранимой погрешности.

4) погрешность округления — связана с использованием в вычислительных машинах чисел с конечной точностью представления.

Погрешность, вызванная произвольным заданием начальных условий, соответствует второму пункту списка ошибок численного интегрирования и определяется как неустраняемая.

Итак, погрешности в определении величин переменных состояния отражаются в погрешностях токов и напряжений ветвей. Безусловное выполнение законов Кирхгофа даже при таких исходных данных делает эту ошибку незаметной. То, что погрешность можно идентифицировать при статистическом анализе данных, полученных в процессе многократных расчетов одной и той же схемы (с вариацией величин начальных условий), чаще всего, остается благим пожеланием.

В случае электронной схемы начальные условия можно определить при расчете электрической цепи на постоянном токе. В виде альтернативы точному расчету можно предложить определение начальных условий на упрощенной модели электрической цепи. Ее следует получать из схемы замещения, составленной для точного расчета. Как надо упрощать модель электрической цепи должны решать специалисты, но необходимо понимать, что максимальное сохранение структуры графа модели является гарантией успеха. Чтобы при расчете избежать потери ветвей, содержащих идеальные индуктивности (замыкание) и емкости (разрыв), следует к любой индуктивности подключить последовательно ее внутреннее сопротивление, а к любой емкости подключить параллельно сопротивление ее изоляции. Введение этих резисторов гарантирует на будущее, что в процессе расчета не возникнут топологические вырождения.

Итак, неустраняемая погрешность переменных состояния делает невозможным ее обнаружение с помощью законов Кирхгофа и уравнения баланса мощностей элементов цепи. Других способов проверки результатов расчета теория в настоящее время предложить не может. Таким образом, следует признать, что проблема верификации результатов машинного анализа схем существует.

Сегодня эти результаты воспринимаются на веру, поскольку повторить расчет большой схемы другими средствами нет никакой возможности. Хорошо, если результаты расчета можно проверить экспериментально, но это не всегда возможно. Многие схемы реализуются в интегральной технологии, где измерение возможно только через специально подготовленные «окна». Кроме того, надо помнить, что экспериментальная проверка вносит свои погрешности и обнаруживает свои технические трудности, преодоление которых, например, при измерении малых напряжений и токов является собой отдельную проблему.

Когда-то, до ухода в ВУЗ, я трудился в организации п/я. Имел отношение к программам анализа электронных схем. Конечно, я не программировал для М-222 и не сопровождал решение. Моя роль была скромной – анализ полученных результатов. Именно тогда у меня родилась фраза: «Верьте мне, люди!» Я ощущал свое полное бессилие в вопросе проверки результатов. Сегодня это состояние подтверждено достаточно строго.

Список литературы

1. Зевеке Г.В., Ионкин П.А., Нетушил А.В., Страхов С.В. Основы теории цепей: Учебник для ВУЗов. – М. : Энергия, 1975. – 752 с.
2. Чуа Л.О., Лин П.М. Машинный анализ электронных схем. – М.: Энергия, 1980. – 640 с.
3. Попов В.П. Основы теории цепей. – М.: Высш. шк., 2000. – 575 с.
4. Ерохов И.В. Об операторах Кирхгофа, введенных Пенфилдом // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2017.– Вып. 14. – С.6–13.
5. Ерохов И.В. О теореме Зеляха // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2012.– Вып. 10. – С. 259–262.
6. Лекция для студентов. https://studopedia.ru/4_33684_lektsiya--tochnost-vichisleniy-klassifikatsiya-pogreshnostey.html

Ерохов Игорь Васильевич – профессор., doc. Phil., к.т.н. г. Запорожье

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА СЕГОДНЯ

Моделирование и синтез нелинейных аналоговых и дискретных нелинейных динамических систем. Интенсивно развивающимся направлением в фундаментальной электротехнике является моделирование и синтез нелинейных аналоговых и дискретных нелинейных динамических систем. С этим направлением связаны многие прикладные области (цифровая связь, радиотехника, системы управления, автоматизированное проектирование и т.д.).

В качестве математических моделей динамических систем активно используются нейронные сети [1, 2]. Это обусловлено тем, что нейронные сети выступают универсальными аппроксиматорами, позволяющими установить соответствие между заранее выделенными переменными, характеризующими состояние устройства. Поведенческое моделирование становится неизбежным в условиях возрастающей сложности технических устройств, повышения требований к их параметрам и характеристикам, развития элементной базы и появления новых технологий.

Исследования на кафедре. Кафедра ТОЭ имеет свои научные разработки в области моделирования нелинейных систем, результаты которых отражены в монографии [1]. Второе издание этой монографии вышло в 2021 году. Научные исследования, выполняемые сотрудниками кафедры при активном участии студентов и аспирантов, посвящены [3-5]:

моделированию энергоэффективных мемристивных наноэлектронных преобразователей (рис. 1);

построению интеллектуальных систем управления роботами-манипуляторами и шагающими роботами;

прецизионной настройке регуляторов в приводной технике;

синтезу нелинейных фильтров для восстановления разных типов сигналов;

синтезу компенсаторов нелинейных искажений для цифровых каналов связи;

построению интеллектуальных классификаторов данных для информационных систем.

В качестве примеров можно привести построение реакционно-диффузных клеточных нейронных сетей для управления походкой и траекторией движения роботов, а также сверточных нейронных сетей для управления роботами манипуляторами на основе алгоритмов обучения с подкреплением. Построенные нейронные сети обеспечивают более высокую точность управления по сравнению с известными системами.

На кафедре ТОЭ также проводятся исследования:

взаимодействия электромагнитных полей с тканями биологических объектов (разработана математическая модель расчета электромагнитных процессов, происходящих в нервных тканях под действием импульсов магнитного поля);

технологического применения мощных электромагнитных импульсов (разработана установка диспергирования металлов в дуговом разряде, перемещающемся по поверхности электродов под воздействием электромагнитных сил, и технология ее применения для получения ультрадисперсных частиц металлов);

использования мощных ультразвуковых воздействий с целью диспергирования агломератов и равномерного распределения наноструктурированных наполнителей полимерных материалов.

Новое в образовании. Значимым событием для кафедры ТОЭ является открытие двух собственных магистерских образовательных программ (заочной – в 2021 году и очной – в 2022 году) «Электрические сети и системы с интеллектуальным управлением» в рамках направления подготовки 13.04.02 – «Электроэнергетика и электротехника».

Можно утверждать, что, будучи фундаментальной на протяжении своей 130-летней истории [6–8], кафедра впервые приобретает статус выпускающей. Выпускники кафедры становятся специалистами по проектированию электротехнических систем и интеллектуальному управлению режимами работы сложных электротехнических комплексов.

Сотрудниками кафедры (профессор Е.Б. Соловьева и доцент В.В. Панкин) преподаются дисциплины: «Modeling and Synthesis of Nonlinear Elements of Systems» и «Mathematical Modeling of Linear and Nonlinear Systems», включенные в англоязычные образовательные

программы для магистров факультета электротехники и автоматики, а также факультета компьютерных технологий и информатики.

Дисциплина «Нейронные сети для математического моделирования устройств и систем» преподается для магистров факультета электротехники и автоматики.

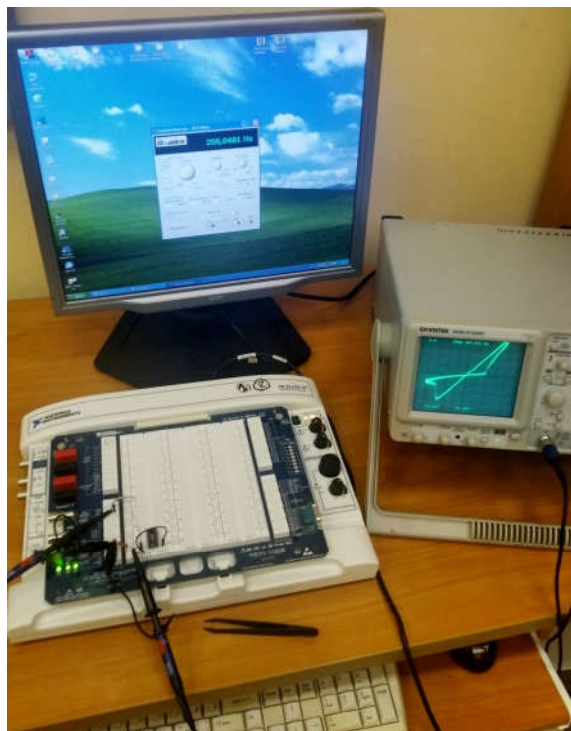


Рис. 1. Установка для экспериментальных исследований и моделирования нелинейных мемристивных преобразователей [9].

Список литературы

1. Бычков Ю.А., Соловьева Е.Б., Щербаков С.И. Непрерывные и дискретные нелинейные модели динамических систем.— СПб.: Изд-во «Лань», 2018.— 420 с.
2. Solovyeva E. Recurrent neural networks as approximators of nonlinear filters operators // Journal of Physics: Conference Series.— 2018.— Series 1141, 012115, pp. 1–10. DOI: 10.1088/1742-6596/1141/1/012115
3. Данилов Л.В., Соловьева Е.Б. Макромоделирование существенно нелинейных электрических цепей на основе функциональных полиномов // Известия высших учебных заведений. Радиоэлектроника .— 1990 .— Т.33, №6. — С.3–7.

4. Соловьева Е.Б., Дегтярев С.А. Синтез нейронных фильтров импульсных помех для восстановления изображений // Известия высших учебных заведений. Радиоэлектроника.– 2008.– Т.51, № 12. – С. 46–57.
5. Соловьева Е.Б. Компенсация нелинейных искажений сигналов в каналах связи методом расщепления // Цифровая обработка сигналов.– 2005.– №4.– С. 2–8.
6. Введение в теоретическую электротехнику. Курс подготовки бакалавров: Учебное пособие / Ю. А. Бычков, В. М. Золотницкий, Е. Б. Соловьева, Э. П. Чернышев. – СПб.: Изд-во «Лань», 2016.– 288 с.
7. Панкин В.В., Соловьева Е.Б. К 125-летию Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета – ЛЭТИ им. В.И. Ленина // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр. – Ульяновск: УлГТУ, 2016. – Вып. 13.– С. 247–259.
8. Панкин В. В., Соловьева Е.Б. Первая в России кафедра электротехники: от технического училища до электротехнического университета // In memoriam: Василий Андреевич Андреев: сборник памяти В.А. Андреева. – Ульяновск: УлГТУ, 2018.– С. 138–153.
9. Панкин В.В., Соловьева Е.Б. Первая электротехническая лаборатория в первом электротехническом вузе России // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр. – Ульяновск: УлГТУ, 2020. – Вып. 16.– С. 184–198.
10. Соловьева Е.Б. Наука: день за днем // Электрик: Издание ЛЭТИ.– №2.– март 2022.– С. 5.

Е. Б. Соловьева

Соловьева Елена Борисовна – д.т.н., профессор, зав. кафедрой ТОЭ, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет (СПбГЭТУ) – ЛЭТИ им. В.И. Ленина.
Тел.: (812) 346–17–96, elena.soleb@yandex.ru
Адрес: 197376, Россия, г. Санкт-Петербург, ул. Проф. Попова, д. 5, СПбГЭТУ, кафедра ТОЭ.

ЗАЩИТЫ ДИССЕРТАЦИЙ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗДЕЛЕНИЯ ФЕРРОМАГНИТНОЙ СУСПЕНЗИИ В МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

(о диссертации на соискание степени доктора технических наук
по специальности 05.13.18)

Актуальность темы. Промышленные технологии связаны с явлением разделения ферромагнитной водной суспензии: очистка природных, технических и сточных вод от магнитных и немагнитных примесей и взвесей; гидроклассификация ферропримесей по классам различной крупности; сгущение осадков с помощью феррочастиц; обогащение полезных ископаемых; извлечение и концентрирование ферромагнитной компоненты из хвостов обогащения руд и т.д.

Использование оборотных вод и очистка водных технологических жидкостей от примесей входят в состав мероприятий Программ Правительства Российской Федерации на 2007–2020 годы, в которых к приоритетным направлениям развития водохозяйственного комплекса отнесено внедрение в технологические схемы производственных объектов оборотного водоснабжения.

Технические средства магнитного разделения ферромагнитных суспензий, реализующие процесс разделения, называются магнитными сепараторами. Такие сепараторы надежно обеспечивают нормы чистоты от феррочастиц размером более 10 мкм. Однако эти требования трудно обеспечить за длительное время эксплуатации для ферромагнитных примесей размером менее 5–10 мкм, вследствие постепенного накопления тонких частиц в оборотных водах. Проблема заключается в том, что в настоящее время нет *технологически эффективной и экономически доступной техники очистки жидкости от тонкодисперсных ферромагнитных частиц.*

Решающую роль в процессе магнитного разделения играет агрегация феррочастиц в магнитном поле. При обогащении руд пульпа (высококонцентрированная смесь) структурируется во флоккулы (прядеобразные агрегаты), а в водной суспензии феррочастицы

объединяются в цепочечные и нитеобразные агрегаты, ориентированные вдоль магнитных силовых линий. Анализ состояния вопроса по математическому моделированию магнитной агрегации феррочастиц показывает, что в настоящее время разработаны только самые простые формулы, характеризующие продольные силы слипания в агрегаты и удержания феррочастиц в агрегатах.

Фундаментальной задачей в трудах ведущих ученых при исследовании коагуляции частиц является изучение кинетики процесса агрегации твердых примесей на основе нелинейного интегрально-дифференциального уравнения (ИДУ) М. Смолуховского:

$$\frac{\partial f(t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \int_0^m K(m', m - m') f(m') f(m - m') dm' - f(m) \int_0^\infty K(m, m') f(m') dm'.$$

Эта задача в общем виде не поддается решению. Поэтому и в теоретическом, и в прикладном плане *задача моделирования магнитного разделения суспензий осталась незавершенной*. А отсутствие прочной теоретической фундаментальной основы не позволяет обеспечить решающее понимание роли коагуляции при проектировании и эксплуатации эффективной и экономически доступной техники тонкой очистки водных технологических жидкостей (ВТЖ).

Цель работы. Разработка научных основ и аппарата математического моделирования, новых математических моделей, численных методов и комплексов программ, необходимых для создания эффективной техники тонкого разделения ферромагнитной суспензии в магнитных полях, в том числе при магнитной сепарации в стержневых (патронных) магнитных сепараторах.

В качестве критерия достижения цели положена стоимость постоянных магнитов, приходящаяся на единицу производительности сепаратора, поскольку является основной составляющей его себестоимости.

Учитывая, что система магнитного разделения суспензии относится к сложной системе, то в соответствии с принципом декомпозиции обобщенная математическая модель магнитного разделения ферромагнитной суспензии разбивается на три функционально-агрегированные (первичные) модели: математической модели распределения силового поля; математической модели траекторий

феррочастиц; математической модели стохастического процесса магнитной коагуляции. Физические процессы на множестве физических и стохастических величин, как правило, описываются системами ДУ (обыкновенными или в частных производных), выражающими законы природы. Такие модели являются первичными, их решение связано со значительными трудностями, преодоление которых требует значительных временных и ресурсных затрат, многократно повышающихся при решении *оптимизационных задач*, а задача математического моделирования магнитной коагуляции не решена в принципе.

Снижение временных и ресурсных затрат возможно на путях перехода к альтернативным математическим моделям. Для реализации технической проблемы в диссертации требуется разработка *методов* построения альтернативных математических моделей: экономичный схемный метод моделирования распределения силового поля; моделирование траекторий феррочастиц приближенным неоднородным линейным обыкновенным ДУ; моделирование магнитной коагуляции линейным оператором – сверткой функций случайных величин.

Дополнительно требуется разработка *методов* двух системно-функциональных макромоделей: стохастических моделей для описания *преобразования дисперсного состава феррочастиц при коагуляции и осаждении в магнитном поле*; дифференциальной суррогатной математической модели для описания *семейств аperiодических характеристик* распределения поля и характеристик качества разделения ферромагнитной суспензии.

В диссертационной работе решалось 8 задач: 1) разработка двух методов моделирования магнитного поля постоянного магнита (ПМ), учитывающих неэквипотенциальность его поверхности, на основе электрофизического и схемного подходов; 2) разработка схемного метода численного моделирования силового поля, создаваемого решеткой постоянных магнитов в неоднородной магнитной среде; 3) разработка научных основ магнитной сепарации водных сред с помощью поиска приближенного решения нелинейного уравнения траекторий ферромагнитных частиц в ламинарном потоке; 4) разработка численно-аналитического метода моделирования семейств характеристик эффективности разделения ферромагнитных суспензий в магнитных сепараторах; 5) разработка научных основ и метода математического моделирования магнитной коагуляции феррочастиц, направленных на

решение задач магнитной сепарации ВТЖ от феррочастиц; 6) разработка метода аппроксимации семейств аperiodических характеристик интегральными кривыми в классе линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами; 7) разработка метода параметрической оптимизации конструктивных параметров и методики расчета эффективных патронных магнитных сепараторов для тонкой очистки водных технологических жидкостей от феррочастиц; 8) разработка метода и конструкторско-технологических аспектов процесса и техники выделения связанной жидкости из отделяемых шламов.

Разработка схемного метода численного моделирования магнитных сил. На поверхность магнитной системы сепаратора, периодически погружаемой в жидкость решетки патронов из постоянных магнитов, осаждается слой феррошлама. Рабочая область сепаратора представляет собой дискретно-непрерывную неоднородную магнитную среду. Для реализации задач оптимизации технических средств очистки ВТЖ выбран численный метод моделирования магнитного поля – схемный метод.

Для реализации схемного метода *разработана методика синтеза* схем замещения постоянных магнитов. Методика позволила получить два типа новых схем замещения постоянных магнитов: с распределенными параметрами и с сосредоточенными параметрами [1, 2].

Основные принципы реализации алгоритма схемного метода моделирования магнитного поля состоят в замещении пассивной области сеткой магнитных сопротивлений, а постоянных магнитов – новыми схемами замещения. Для реализации *проблемно ориентированной методики проектирования и оптимизации магнитных сепараторов* на основе схемного метода разработана программа моделирования *семейства характеристик* распределения напряженности магнитного поля. Семейство характеристик аппроксимируется линейным дифференциальным уравнением (ЛДУ) первого порядка. Адекватность моделирования оценивалась по критерию Фишера при сопоставлении экспериментальных и расчетных зависимостей по схемной и аналитической модели.

Разработка метода математического моделирования характеристик качества магнитного разделения водной суспензии. Сначала проведено моделирование характера обтекания жидкой средой сетки цилиндрических патронов на программном пакете – FloEFD (слайд). На участках переноса ВТЖ отсутствуют вихри линий тока, что

позволило на основе потенциальной теории движения жидкости разработать математическую модель скорости течения жидкости $v_{жс}$ (усредненная $\langle v_{жс} \rangle$), необходимую для разработки метода приближенного решения системы нелинейных ДУ при условии, что реальная концентрация феррочастиц не более (0.01–1)%.

Дано. Традиционная система ДУ с метрической нелинейностью от неизвестной функции – система ДУ характеризуется направленным графом с параллельными нелинейными связями (||):

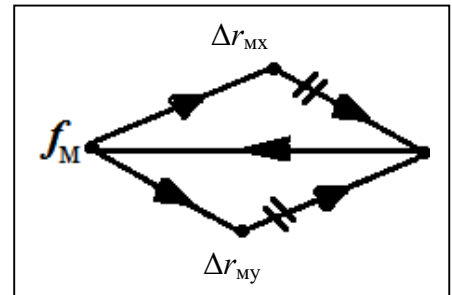
$$m \frac{d^2 \Delta r_M}{dt^2} + K_{c1} \frac{d \Delta r_M}{dt} = f_M(r); \quad \frac{d \Delta r_M}{dt} = v_M; \quad r = r(0) + \Delta r_M + \Delta r_{жс}; \quad v = v_M + v_{жс};$$

$$r = \sqrt{(x(0) - \Delta r_{Mx} - \langle v_{жс} \rangle t)^2 + (y(0) - \Delta r_{My})^2},$$

v_M, r_M – относительная скорость и перемещение;

$v_{жс}, r_{жс}$ – переносная скорость и перемещение;

$r(0)$ – начальная радиальная координата.



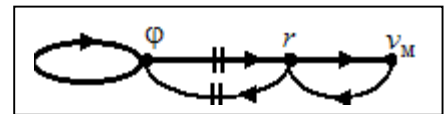
Определить: $r(t), v_M(t), r \in \{r \in r | R \leq r \leq 0.5a\}$

Решение. 1. Раскрытие метрической нелинейности на основе преобразования к системе ДУ с направленным графом последовательной структуры

$$m \frac{d v_M}{dt} + K_{c1} v_M - \alpha_{0k} r = -f_k; \quad \frac{dr}{dt} = -v_M - \langle v_{жс} \rangle \cos \varphi; \quad r \frac{d\varphi}{dt} = \langle v_{жс} \rangle \sin \varphi.$$

2. Линеаризация нелинейных связей по параметрической нелинейности из условия функционирования:

$$\langle r \rangle \frac{d\varphi}{dt} = \langle v_{жс} \rangle \sin \varphi.$$

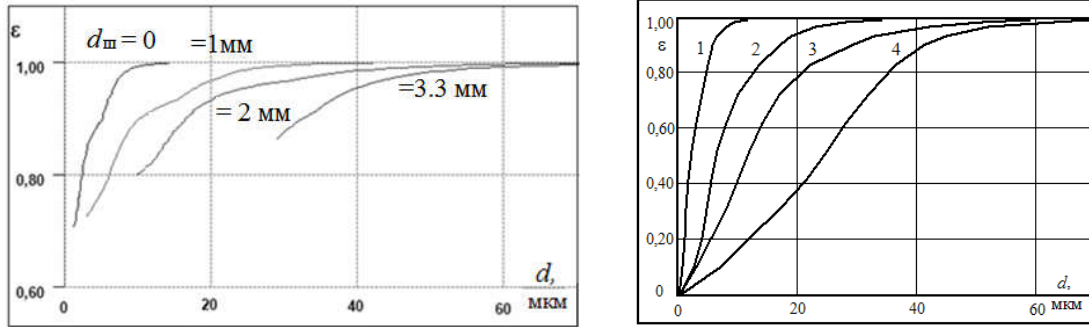


3. Приведение системы нелинейных ДУ к неоднородному ОЛДУ

$$m \frac{d^2 r_M}{dt^2} + K_{c1} \frac{dr_M}{dt} - \alpha_{0k} r_M = -f_k - f_{эк}.$$

Результатом дифференциальной линеаризации – *добавочная эквивалентная сила*, существенно компенсирующая влияние вырожденной метрической нелинейности исходной системы ДУ:

$$f_{эк} = \alpha_{0k} \langle r \rangle_{\varphi} \sigma(\varphi(t)), \quad tg \frac{\varphi}{2} = tg \frac{\varphi_H}{2} e^{\frac{\langle v_{жс} \rangle t}{\langle r \rangle}}.$$



Теоретические семейства характеристик

Вывод. Получено представление о характерных зонах в рабочей области магнитного сепаратора: раскрыты типы траекторий; зоны доминирования магнитной коагуляции; выявлены условия осаждения феррочастиц и разработана программа имитационного моделирования семейств характеристик разделения ферромагнитной суспензии [3–5].

Разработан дифференциальный метод моделирования систематических погрешностей математической модели степени очистки, обусловленных приближенными процедурами математического моделирования. Учтены: 1) отклонения аппроксимационных значений магнитной силы от точных значений

$$\Delta f_{mk}(r) = f_{0k} - \alpha_{0k}r - f_{mr}(r), \quad (k = 1, 2);$$

$$\Delta f_m(r) = 0.26f_m \left[1 - \left(\frac{2\alpha_{01}(r-R)}{0.94f_m} - 1 \right)^2 - 1 \right];$$

2) отклонения переносного сдвига феррочастицы за счет усреднения нелинейного уравнения системы ДУ:

$$\delta r_{жс} = \Delta r_{жр}^* - \Delta r_{жр} = \int_{\varphi_H}^{\varphi} r \operatorname{ctg} \varphi d\varphi - \bar{r}\sigma(\varphi(t)),$$

где $\Delta r_{жр}$ – модель, $\Delta r_{жр}^*$ – точное значение; 3) отклонения радиальной координаты r феррочастицы от её точного значения r^* за счет приближенного интегрирования исходной системы ДУ:

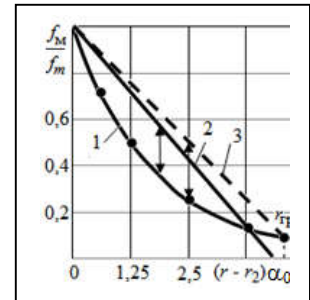
$$\delta r = r^* - r = \delta r_m - \delta r_{жс}.$$

Дифференциальные модели погрешностей траектории феррочастицы (соответственно систематической и разбросом исходных параметров [6]):

$$\frac{d^2\delta r_m}{dt^2} + \frac{K_{c1}}{m} \frac{d\delta r_m}{dt} = \frac{\Delta f_{mk}(r)}{m}; \quad \frac{d\Delta v_m}{dt} + \frac{K_{c1}}{m} \Delta v_m = -\frac{\Delta F_p}{m};$$

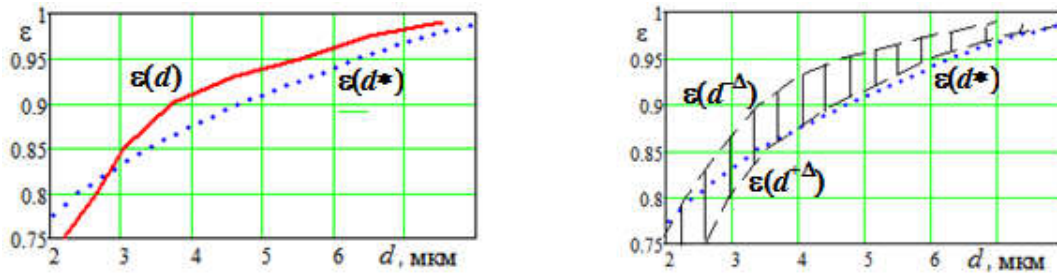
$$\Delta F_p =$$

$$\pm \left| v_m \frac{\partial K_c}{\partial \eta} \Delta \eta \right| \pm \left| v'_m V_\phi \Delta \rho_\phi \right| \pm$$



$$\sqrt{\left(\frac{\partial f_M}{\partial \alpha_1}\right)^2 (\Delta \alpha_1)^2 + \left(\frac{\partial f_M}{\partial \chi_{m0}}\right)^2 (\Delta \chi_{m0})^2 + \left(\frac{\partial f_M}{\partial \bar{H}_m}\right)^2 (\Delta \bar{H}_m)^2}.$$

Результаты моделирования погрешности характеристик качества очистки:



Погрешность степени очистки $\varepsilon(d)$ за счет погрешности модели:

$$\xi_1 = |\varepsilon(\bar{d}^*) - \varepsilon(\bar{d}_и)| / \varepsilon(\bar{d}^*) \leq 0.022 \quad (2.2\%).$$

Погрешность $\varepsilon(d)$ за счет $\pm 10\%$ погрешности исходных параметров:

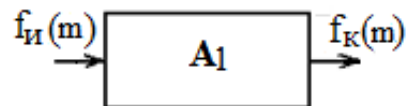
$$\xi_2 = |\varepsilon(d^{+\Delta}) - \varepsilon(\bar{d}_и)| / \varepsilon(\bar{d}_и) \leq 0.023 \quad (2.3\%).$$

Вывод. Адекватность моделирования характеристики качества процесса осаждения подтверждена экспериментально с использованием результатов испытаний опытно-промышленной установки на Западно-Сибирском металлургическом комбинате.

Разработка метода математического моделирования магнитной коагуляции. При известной плотности распределения дисперсного состава феррочастиц в суспензии, подаваемой на очиститель, требуется определить оператор преобразования при физических ограничениях.

Дано. Исходная плотность распределения $f_и(m)$.

Определить. Оператор A_1 преобразования стационарного распределения по массе агрегированных феррочастиц на выходе системы: $f_к(m) = A_1[f_и(m)]$ при специфических физических ограничениях:



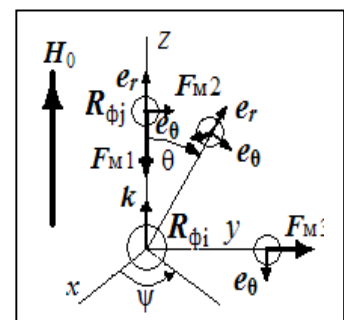
Утверждение 1. Установлена анизотропия магнитного диполь-дипольного взаимодействия во внешнем магнитном поле [7]:

- *притяжение частиц* вдоль магнитных линий: ($\theta = 0$,

$$\mathbf{e}_r = \mathbf{k}) \mathbf{F}_{mji} = -6\mu_0 V_{\phi j} H_0^2 \chi_{\phi j} \chi_{\phi i} \frac{R_{\phi i}^3}{r^4} \left(1 + 2\chi_{\phi i} \frac{R_{\phi i}^3}{r^3}\right) \mathbf{k};$$

- *отталкивание частиц* в поперечном направлении

$$(\theta = 90^\circ): \mathbf{F}_{mji} = 3\mu_0 V_{\phi j} H_0^2 \chi_{\phi j} \chi_{\phi i} \frac{R_{\phi i}^3}{r^4} \left(1 - \chi_{\phi i} \frac{R_{\phi i}^3}{r^3}\right) \mathbf{e}_r.$$

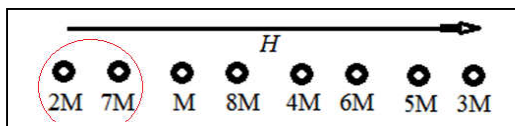


Допущения: 1) феррочастицы во внешнем магнитном поле структурируются в дискретные ряды вдоль магнитных линий; 2) из-за отталкивающих поперечных сил сближаться могут только лежащие на линиях поля соседние частицы; 3) принимается модель только парного объединения частиц в каждом акте процесса коагуляции.

В диссертации обосновано научное положение.

Утверждение 2. Магнитная коагуляция обусловлена двумя независимыми случайными величинами $\xi_1(m)$ и $\xi_2(m)$. Каждая характеризует количество возможных к объединению пар феррочастиц с фиксированной бинарной массой m_k , где $(m_i + m_j) = m_k$, $i + j = k$:

$\xi_1(m)$ – обусловлена вариацией детерминированных масс m_{i1} и m_{j1} ($m_{i1} + m_{j2} = m_k$) за счет случайного порядка следования частиц вдоль магнитной линии, которая описывается плотностью распределения $g(m)$;



$\xi_2(m)$ – обусловлена количеством введенных частиц со случайными массами m_{i2} и m_{j2} ($m_{i2} + m_{j2} = m_k$), которая задана плотностью распределения $f_i(m)$ исходных феррочастиц.

Для суммы двух независимых случайных величин применена из теории вероятностей формула свертки:

$$f_k(m) = \int_0^m f_i(\eta)g(m - \eta)d\eta,$$

где $f_i(m)$ – функция плотности вероятности распределения ферромагнитной суспензии по массе до коагуляции; $g(m)$ нормированная характеристика магнитной коагуляции (весовая функция, ядро свертки); $f_k(m)$ – выходная функция плотности вероятности распределения ферромагнитной суспензии по массе.

В результате применения оператора свертки получена *двухуровневая математическая модель магнитной коагуляции* [8].

Первый уровень – свертка $f_k = f_i(m) * g(m, \gamma_k)$ – является моделью, в которой весовая функция $g(m, \gamma_k)$ – зависит от параметра γ_k . Доказано, что в качестве параметра выступает *характеристика глубины коагуляции* [7],

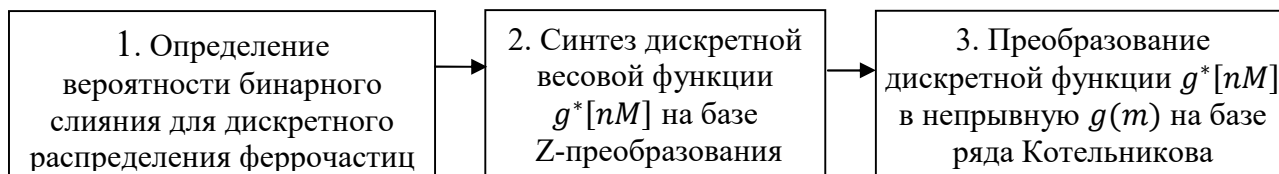
$$\gamma_k = \langle m_k(t) \rangle / \langle m_i \rangle = N_{vu} / N_{vk},$$

которая получена на основе выведенного уравнения сохранения массы $\langle m_k \rangle N_{vk} \equiv C$.

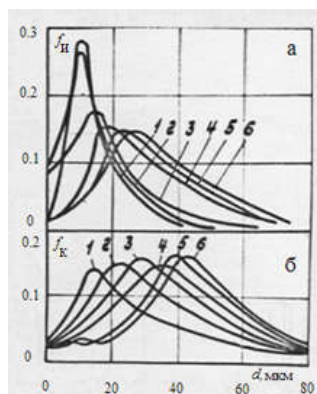
Второй уровень – функционал $\check{\gamma}_k(T, a, L)$, учитывающий нелинейность моделируемого процесса, относится к индивидуально-технической модели.

Математическое моделирование магнитной коагуляции сводится к определению весовой функции $g(m, \gamma_k)$ и коэффициента глубины коагуляции $\check{\gamma}_k(T, a, L)$. Весовая функция определяется в три этапа при однородном ($gradH_0^2 = 0$) и градиентном ($gradH_0^2 \neq 0$) распределениях поля, от которых зависят механизмы слияния феррочастиц.

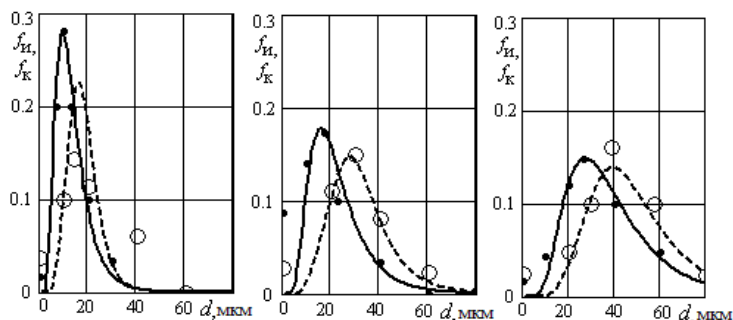
Этапы моделирования $g(m)$



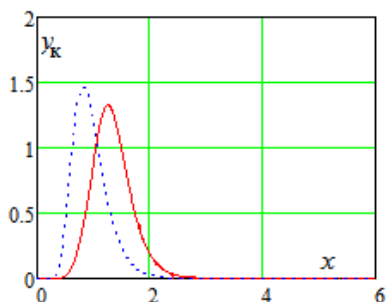
Получены и представлены примеры результатов моделирования: для однородного поля и проведено сопоставление с экспериментальными данными



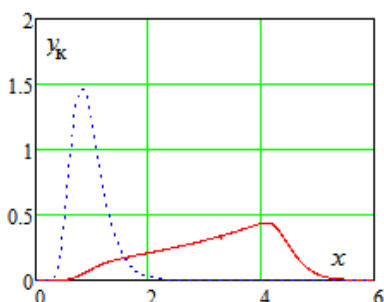
$gradH_0^2 = 0$



для градиентного магнитного поля.



при $\langle \gamma_k \rangle = 1.5$



при $\langle \gamma_k \rangle = 3.55$

$$f_n(d) = \left\{ \frac{1}{sd\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln d - \ln \bar{d}_n)^2}{2s^2}} \right.$$

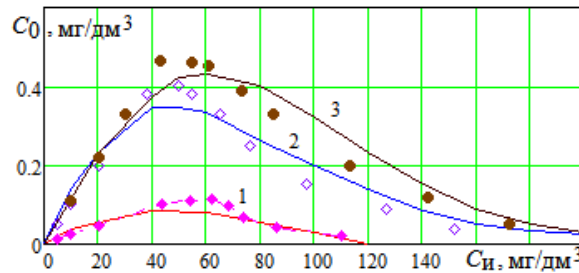
Разработан метод определения коэффициента глубины магнитной коагуляции на основе учета среднестатистической кинетики в каждом акте бинарного объединения полидисперсных феррочастиц [9].

$$\langle \gamma_k \rangle = \langle T_m \rangle \left(\sqrt[3]{\frac{[1 - \bar{\varepsilon}_0(\bar{d}_n)] C_n}{\gamma_{kv-1} \langle m_n \rangle}} \right) M_{v-1} C_{1k} \left(\frac{f_k}{\alpha_{ok}} - \langle r \rangle \right) \sum_{i=2}^N i(i-1) p_{ij},$$

где $\langle T_m \rangle$ усредненный интервал времени по всем траекториям:

$$\langle T_m \rangle = \left[\frac{4}{\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} t_{01}(\varphi_n) d\varphi_n \right].$$

Сопоставлены расчетные и экспериментальные зависимости остаточной концентрации ферропримесей в зависимости от исходной концентрации при сепарации ферромагнитной суспензии.



Экспериментальные (—) и теоретические (◆◆◆ ; ◇◇◇ ; ●●●) для сепаратора из феррито-бариевых магнитов: 1, 2, 3 – соответственно при $v_{жн} = 0.001; 0.025; 0.05$ м/с

Оценка адекватности проводилась по критерию Фишера.

Вывод. Решена задача построения общей математической модели магнитной коагуляции, имеющей двухуровневую структуру и удобную для применения.

Разработка метода аппроксимации семейств аperiodических характеристик интегральными кривыми в классе обыкновенных ЛДУ с постоянными коэффициентами. При использовании системы характеристик качества разделения ферросуспензии в задачах оптимизации и проектирования технических средств важно представить их гладкими непрерывными легко вычисляемыми зависимостями, называемыми суррогатными математическими моделями. Разработан метод математического моделирования многопараметрического семейства аperiodических характеристик неоднородными ЛДУ [10], основанный на приближении экспоненциального многочлена вида (1) к многопараметрическому семейству аperiodических характеристик $f_H = f(x, \mathbf{H})$, где $x \in X \subset R | (0, \infty)$ – основная независимая переменная, а область определения вектора параметров $\mathbf{H} \in V \subset R^m$:

$$y(x, \mathbf{H}) = \sum_{k=1}^r C_k(h^1, h^2, \dots, h^m) e^{p_k x} + y_0(x) \quad (1)$$

В свою очередь, экспоненциальным многочленом (1) описываются интегральные кривые ОЛДУ с ПК (2)

$$\begin{cases} L_r y(x) = Y_0(x), \\ y(0, \mathbf{H}), y'(0, \mathbf{H}), \dots, y^{(r-1)}(0, \mathbf{H}). \end{cases} \quad (2)$$

Проводится интерполяция экспоненциальным многочленом каждой исходной характеристики.

Дано: одиночная непрерывная кривая задана $2n$ отсчетами:

$$f: \{(x_v = v\tau) \rightarrow f(v\tau) | v = 0, 1, 2, \dots, 2n-1\}.$$

Определить: для $\forall x \in [0, x_m]$ построить многочлен:

$$y(x) = \sum_{k=1}^n A_k e^{-p_k x} \quad \text{при} \quad y(x_v) = f(v\tau), \quad (3)$$

который может содержать избыточное число постоянных интегрирования, $n > r$

Эквивалентное преобразование ОЛДУ

$$\text{Дано:} \quad y(x) = \sum_{k=1}^n A_k e^{-p_k x}. \quad (4)$$

$$L_n y(t) = v(x) = 0; \quad y(0), y'(0), \dots, y^{(n-1)},$$

$$H_n = L_n \left(\frac{d}{dx} = p \right) = \prod_{k=1}^n (p - p_k).$$

Определить дифференциальную модель (2): $L_r y(x) = Y_0(x)$, $n > r$.

Понижением порядка ОЛДУ на единицу [11]:

$$\begin{cases} L_{n-1} y(x) = F_1(x); & y(0), y'(0), \dots, y^{(n-2)}(0), F_1(0); \\ F_1'(x) + p_n F_1(x) = v(x) = 0. \end{cases}$$

получается ОЛДУ $(n-1)$ -порядка:

$$L_{n-1} y(x) = F_1(x) = e^{-p_n x} [A_n \mathbf{H}_{n-1} (-p_n)];$$

$$y(0), y'(0), \dots, y^{(n-2)}(0).$$

ОЛДУ r – порядка (приведение порядка ОЛДУ в норму):

$$L_r y(x) = F_{n-r}(x), \quad (5)$$

$$F_{n-r}(x) = \sum_{j=1}^{n-r} A_{n+1-j} \mathbf{H}_r (p = -p_{n+1-j}) e^{-p_{n+1-j} x}.$$

Необходимый признак адекватности ОЛДУ (5) и (2) – условие инвариантности постоянных интегрирования: $A_{n+1-j} (j = 1, 2, \dots, n-r)$.

Разработка метода идентификации математической модели.

Дано. Матрица многомерного числового массива для

$$f_H: \{ \mathbf{x}^{(\gamma)} \rightarrow f(\mathbf{x}^{(\gamma)}, \mathbf{H}_i) = \| f_{i_1 \dots i_m}^{(\nu)} \| : \left\{ f_{i_1 \dots i_m}^{(\nu)} = f_{i_1 \dots i_m}(v\tau_{i_j}) \right\} | v = 0, 1, \dots, 2r - 1 \} \}.$$

при дискретном ряде значений вектора параметров:

$$\mathbf{H}_i = \{(h_{i_1}^1, \dots, h_{i_m}^m) | i_j = 1, \dots, n_j; j = 1, \dots, m\}.$$

Определить. Матрицу числового массива:

$$C_k(\mathbf{H}_i) = \|C_{ki_1 \dots i_m}\|, (k = 1, \dots, r); \mathbf{H} \in D \subset R^m (D1 \leq D \leq D2).$$

Определение единого дифференциального оператора.

Выбирается базисная зависимость: $f_0(x) = f(x, h_{i_{10}}^1, \dots, h_{i_{m0}}^m)$.

Применение аффинного преобразования, переводящего каждую зависимость $f_H(x)$ в окрестность базисной зависимости $f_0(x)$:

$$\tilde{f}_H(\tilde{x}) = T_H^y f_H(T_H^x x) = f_0(x) + \Delta \tilde{f}_H(\tilde{x}), \quad \tilde{x} = T_H^x x;$$

при условии $f_0(x_0) = \tilde{f}_H(\tilde{x}_0)$, где $\tilde{x}_0 = x_0 = T_H^x x_{H0}$, $T_H^x = x_0/x_{H0}$;

при условиях $T_H^y f_H(x_{H0}) = 0.5$, $T_H^y: \{x_{Hm} \rightarrow f_0(x_m)/f_H(x_{Hm}) = 1\}$.

По средневзвешенной дискретной выборке отклонений $\Delta \tilde{f}_H(\tilde{x})$:

$$\overline{\Delta \tilde{f}}(v\tau) = \sum_{i_1=1}^{n_1} \dots \sum_{i_m}^{n_m} \Delta \tilde{f}_H(\tilde{x} = v\tau) / \prod_{i=1}^m n_i.$$

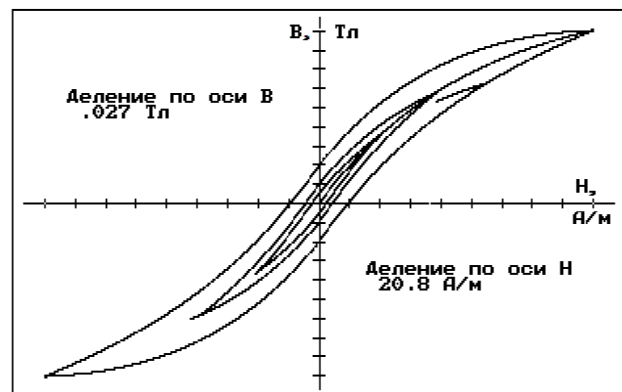
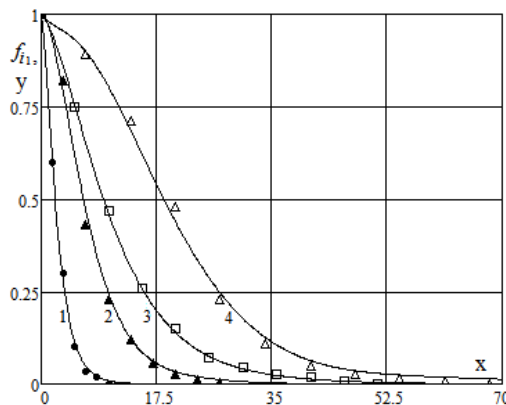
определяется дифференциальный оператор L_r и составляется СЛАУ для поиска коэффициентов C_{Hk} :

$$\Delta \tilde{f}_H(v\tau) = \sum_{k=1}^r C_{Hk} m_k^v + \varepsilon_{Hv}, \quad v = 0, 1, 2, \dots, 2r-1;$$

Матрица массива постоянных интегрирования C_{Hk} и обобщенная погрешность $\langle \varepsilon_H \rangle$ определяется учетом приближения экспоненциальных многочленов к отклонениям по методу наименьших квадратов:

$$C_{Hk} = \|C_{ki_1 \dots i_m}\|; \quad \langle \varepsilon_H \rangle = \frac{1}{2r} \sum_{v=0}^{2r-1} (|\varepsilon_{Hv}| + \sum_{k=1}^r |\Delta C_{Hk}| m_k^v).$$

Приведены примеры реализации суррогатной математической модели: 1) для статического однопараметрического семейства кривых (левый рисунок); 2) для класса задач с изменяющимися исходными данными (правый рисунок). На левом рисунке исходный массив обозначен точками. Базисной кривой выбрана кривая 1 – инвариант математической модели.



Суррогатная двухуровневая модель, определенная по разработанной методике для этого примера, является экспоненциальным многочленом:

$$y(x) = \Delta y_H(x) + y_0(x) = \sum_{k=1}^4 C_k(h^{(1)})e^{-\tilde{p}_k \lambda_H x} + \sum_{k=5}^7 C_k e^{-p_k x}.$$

Управляемые параметром $h^{(1)}$ постоянные интегрирования (для каждой кривой) $C_k(h^{(1)})$ и масштабные коэффициенты $\lambda_\eta(h^{(1)})$ аппроксимированы степенными полиномами, так как область определения вектора параметров ограничена условием задачи ($0 \leq h \leq 5$):

$$2C_1(h^{(1)}) = B(h^{(1)}) = 0.444h^{(1)} - 0.061h^{(1)^2} + 0.0066h^{(1)^3};$$

$$C_3(h^{(1)}) = 0.13h^{(1)} - 0.093h^{(1)^2} + 0.013h^{(1)^4};$$

$$\lambda(h^{(1)}) = 1 - 1.01h^{(1)^{0.5}} + 0.424h^{(1)} - 0.061h^{(1)^2} + 0.0066h^{(1)^3}.$$

Ко второму классу задач относятся гистерезисные зависимости магнитной индукции b от напряженности h магнитного поля ферритовых элементов. Двухуровневая модель состоит из дифференциальной модели и модели варьирования начальными условиями соответственно:

$$b'' + \sigma\beta_r b' = \mu_n (\sigma\beta_r - \beta) e^{-\beta h},$$

где в произвольной точке (h_0, b_0) , первая производная при переходе на новую ветвь описывается следующим выражением

$$b'_{+} = b'_{-} + \sigma\beta_r [(b - b_0) + \mu_n \beta^{-1} (e^{-\beta h} - e^{-\beta h_0})].$$

В качестве принципа конструирования модели использовался физический подход, по которому любое значение магнитной индукции b на гистерезисной ветви представляется суммой идеальной составляющей $b_n(h)$ и гистерезисного отклонения $b_r(h)$ от идеальной кривой

$$b(h) = b_n(h) + b_r(h).$$

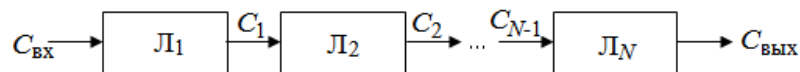
При этом единая идеальная составляющая является инвариантной кривой данной математической модели. Эта модель имеет три параметра: β , β_r , b'_{m+} , которые определяются по разработанной программе идентификации математической модели ферромагнетика. Идентификация модели проводится по экспериментальным данным, принадлежащим статическому симметричному предельному циклу ферромагнетика.

Вывод. Структура и параметры дифференциального оператора определяются непосредственно из условий решаемой задачи, что существенно расширяет область применения новой аппроксимации в отличие от существующих на основе жестко заданных структур аппроксимации (полиномы, сплайны, линейные и нелинейные регрессии).

Этот метод позволяет гарантировать адекватность модели не только в точках аппроксимации семейства, но и во всех точках, расположенных в пространстве существования семейства (в силу теорем о непрерывности по параметрам и начальным условиям дифференциальных уравнений).

Разработка метода параметрической оптимизации магнитных сепараторов. Представлена математическая формулировка задачи параметрической оптимизации. Минимальное количество магнитов в сепараторе, приходящее на единицу производительности, выступает *критерием оптимизации* при выполнении нормы качества очищенной ВТЖ. Разработана математическая модель целевой функции. Определены и учтены следующие базовые принципы разработки математического условия, обеспечивающего норму качества очистки [9, 12]:

многорядный сепаратор,



результатирующий коэффициент передачи которого:

$$\bar{L} = \prod_{k=1}^N \bar{L}_k = \prod_{k=1}^N (1 - \bar{\varepsilon}_k);$$

полидисперсное распределение феррочастиц:

$$\bar{\varepsilon}_k(\bar{d}_{k-1}) = \int_0^\infty \varepsilon_k(d_\phi) f_{k-1}(d_\phi) d(d_\phi);$$

суррогатная модель зависимости степени очистки ε_k от размера феррочастиц d_ϕ и толщины слоя $d_{шk}$ феррошлама, осаждаемого на поверхность постоянных магнитов в каждом k -ом ряде сепаратора:

$$\varepsilon_k(d_\phi, d_{шk}, a) = 1 - e^{-h(d_{шk}, a) d_\phi};$$

$$h(d_{шk}, a) = B_0(a) e^{-\gamma(a) d_{шk}} + B_1(a) d_{шk}.$$

Математическое выражение условия оптимизации принимает вид:

$$C_{вых}(a, N, d_{ш}, \bar{d}_{вх}) = C_{вх} e^{-\bar{d}_{вх} (\sum_{v=1}^N h_v)} \leq C_d.$$

В результате получены оптимальные параметры магнитного сепаратора в виде функциональных зависимостей от обобщенных параметров, определяемых по разработанным комплексам программ.

Представлены сравнительные результаты проектирования магнитных сепараторов по известной и новой методикам. В результате учета магнитной коагуляции уменьшается расчетное количество магнитных элементов, что снижает себестоимость сепаратора более чем в 2 раза.

Повышение эффективности обезвоживания удаляемого шлама.

Во время удаления осадка с поверхности магнитов при перемещении

шлакосъемного манжета происходит: 1) переориентация магнитных флокул; 2) разрыв и раскрытие стыков между флокулами; 3) истечение жидкости из шлама; 4) образование новых флокул.



Структура осадка при его удалении с поверхности патронов магнитной системы

Для повышения эффективности обезвоживания удаляемого шлама учетом механизма переориентации магнитных флокул известная схема непрерывного движения шламосъемных манжет заменена на прерывисто-шаговую схему. Переориентация цепочных агрегатов снижает расход СОЖ в 1,6 раза.

Выводы по диссертационной работе

Научная новизна. 1. Для проектирования и оптимизации магнитных сепараторов предложен экономичный схемный метод численных расчетов распределения напряженности магнитного поля на основе более строгих схем замещения постоянных магнитов. 2. Предложен метод преобразования системы нелинейных ДУ, описывающей траектории феррочастиц в магнитном поле, в приближенное неоднородное обыкновенное ЛДУ. Это позволило провести моделирование семейств характеристик качества очистки при систематической погрешности не более 2,5 %. Раскрыты положения научных основ тонкого разделения ферромагнитных суспензий. 3. Для произвольного дисперсного состава исходной ферромагнитной суспензии разработана полная математическая модель магнитной коагуляции в магнитных сепараторах. Предложена двухуровневая математическая модель для моделирования стохастического нелинейного процесса с помощью линейного оператора – свертки функций распределения случайных величин. 4. Реализован эффективный алгоритм

проектирования и оптимизации магнитного сепаратора на основе семейств характеристик свойств элементов системы очистки. Предложены легко вычисляемые суррогатные математические модели для описания таких семейств интегральными кривыми в классе линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, что приводит к двухуровневым моделям, состоящим из дифференциального оператора и модели варьирования начальными условиями. Это позволило описывать многопараметрические семейства характеристик для задач с произвольными характеристиками системы в ее текущем состоянии.

Практическая ценность. 1. Разработанные математические модели составили основу проектирования и оптимизации высокопроизводительной техники тонкой очистки. 2. Реализованы компьютерные программы моделирования семейств распределения магнитного поля в магнитных сепараторах, семейств характеристик качества очистки магнитных сепараторов, гистерезисных характеристик ферритов, проведения расчетов и проектирования высокоэффективных магнитных сепараторов тонкой очистки. 3. При использовании разработок на ЗАО «Системы водоочистки» снижены в 2–3 раза затраты на изготовление магнитных сепараторов и реализована разработанная автором новая схема удаления феррошлама. Общий суммарный расчетный годовой экономический эффект от реализации теоретико-экспериментальных исследований с учетом инфляции составляет 70 млн. руб. 4. Системы очистки СОЖ на основе магнитных сепараторов разрабатывались и совершенствовались в рамках нескольких отраслевых и государственных НИР и ОКР, проводимых в период 2004–2020 гг. 5. Результаты диссертационной работы, внедренные в ЗАО «Системы водоочистки» г. Ульяновск, использовались при разработке систем очистки СОЖ для ряда металлообрабатывающих и металлургических производств.

Список литературы

1. Булыжев Е.М., Меньшов Е.Н. Математическое моделирование поля постоянного магнита // *Электричество*. – 2010. – №9. – С. 65–69.
2. Булыжев Е.М., Меньшов Е.Н. Моделирование эквивалентных схем постоянного магнита для оптимизации магнитного сепаратора // *Электричество*. – 2010. – №10. – С. 68–73.
3. Булыжев Е.М., Меньшов Е.Н., Орлов Г.А. Расчет характеристик качества очистки СОЖ при проектировании патронного магнитного сепаратора // *Инженерный журнал. Справочник*. – 2014. – №2. – С. 36–45.

4. Bulyzhev E.M., Menshov E.N. The study on the magnetic separation efficiency of the reverse water technological liquids from scales in industrial production. Part 1. The problems analysis and solutions // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering, 2020. – V. 913 (022027). – 9 p.

5. Bulyzhev E. M., Menshov E.N. The study on the magnetic separation efficiency of the reverse water technological liquids from scales in industrial production. Part 2. Improving the design efficiency of magnetic separators by determining the cleaning modes' rational parameters // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering, 2020. – V. 913 (022028). – 10 p.

6. Меньшов Е.Н. Метод расчета погрешности математической модели характеристики степени очистки магнитного сепаратора // Инженерный журнал. Справочник. – 2016. – № 12. – С.16–23.

7. Булыжев Е.М., Меньшов Е.Н. Математическая теория магнитной коагуляции ферромагнитных частиц в слабозагрязненных сточных водах // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – 2014. – Т. 16. – №1. – С. 247–254.

8. Меньшов Е.Н. Математическая модель магнитной коагуляции при магнитной сепарации водно-технологических жидкостей от ферромагнитных частиц. [Электронный ресурс] // Интернет-журнал Науковедение. – 2015. – Т. 7. – №6. – 17 с. – <http://naukovedenie.ru/PDF/133TVN615.pdf>.

9. Menshov E.N. The study on the magnetic separation efficiency of the reverse water technological liquids from scales in industrial production. Part 3. Improving the magnetic separation technology parameters // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering, 2020. – V. 913 (022029). – 10 p.

10. Bulyzhev E.M., Menshov E.N. Approximation method for the characteristics class related to magnetic cleaning quality of reverse waters from ferrous admixtures // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering, 2020. – V. 913 (022025). – 10 p.

11. Савиновский Ю.А., Меньшов Е.Н. Понижение порядка линейных дифференциальных уравнений при моделировании энергетических объектов // Известия вузов. Энергетика. – 1989. – №12. – С. 45–48.

12. Меньшов Е. Н. Оптимизация патронных магнитных сепараторов // Инженерный журнал. Справочник. – 2014. – № 11. – С.39–45.

Е. Н. Меньшов

Меньшов Евгений Николаевич – докт. техн. наук, профессор
каф. «Электроснабжение» Ульяновского государственного технического
университета. E-mail: raynd2@rambler.ru

ИЗ ИСТОРИИ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

ФОРМУЛА ВОЗНЯЦКОГО, КОТОРУЮ СЛОЖНО ПРИНЯТЬ

Теория структурных чисел [1] не пользуется особой популярностью у отечественных специалистов, однако следует признать, что именно она наиболее полно использует понятие структуры электрической цепи в алгоритмах расчета. Отметим, что основные понятия теории структурных чисел не вызывают споров, просто получить некоторые из них для сложного графа достаточно трудно. По этой причине развитие теории замедлилось, и интерес научной общественности к ней ослаб. Однако некоторые новые результаты, полученные как приложение теории, продолжают удивлять специалистов тем, что они работают правильно, но удовлетворительное объяснение этого отсутствует.

Рассмотрим пункт 3 приложения 2, стр.294 цитируемого источника. Здесь приведен расчет двух электрических цепей, в каждой из которых определяется ток конкретной ветви. Численные значения токов предлагается получать по следующей общей формуле:

$$I_k = \frac{E}{\det_Y A} \sum_{i=1}^p \det_Y \left(\Pi_{i=1}^{wt} [\alpha_{ii}] \Pi_{r=1}^{v-wt} [P_{tr}] \right). \quad (1)$$

I_k – величина тока ветви k , E – источник напряжения, A – структурное число цепи, α_{ii} – ветви элементарного контура t , P_{tr} – структурное число узлов, не входящих в контур.

Применение формулы (1) показано на двух примерах. Рассмотрим пример **D2-3**, рис.1 [1].

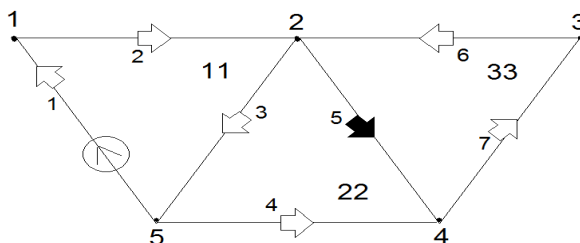


Рис. 1. Граф простой схемы.

Попробуем ввести понятия, которые не использовались при создании формулы для определения тока в конкретной ветви.

Запишем схемные контурные и узловые множества графа [2] на рис. 1: контурные схемные множества (1, 2, 3), (3, 4, 5), (5, 6, 7); узловые схемные множества графа (1, 2), (2, 3, 4, 5, 6), (6, 7), (4, 5, 7).

Приведем операционные формы этих схемных множеств: контурные множества $(1+2+3)$, $(3+4+5)$, $(5+6+7)$; узловые множества $(1+2)$, $(2+3+4+5+6)$, $(6+7)$, $(4+5+7)$.

Конечно, приведены только множества независимых узлов и контуров, что подтверждается формулой Эйлера:

$$n_K = n_B - (n_V - 1) = 7 - (5 - 1) = 3,$$

где n_K — число независимых контуров, n_V — число всех узлов графа, n_B — число ветвей графа.

Подготовка к работе формулы (1) начинается с записи контурных множеств цепи, рис.1, которые в тексте называют структурными числами. Для расчета тока I_5 выбирается контур максимального размера, в который одновременно входят ветви, содержащие как искомый ток, так и источник напряжения. Структурное число этого контура находят, суммируя множества двух контуров: $(1,2,3) + (3,4,5) = (1,2,4,5)$.

Эту операцию приводим в привычном формате контурных уравнений:

$$+ \begin{cases} R_1 I_1 + R_2 I_2 + R_3 I_3 = E_1 \\ -R_3 I_3 - R_4 I_4 + R_5 I_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow R_1 I_1 + R_2 I_2 - R_4 I_4 + R_5 I_5 = E_1.$$

Очевидно, что полученное уравнение обладает структурой, которая найдена с помощью операции структурного суммирования.

Напомним, что определитель полного графа цепи может быть получен с помощью декартового умножения контурных или узловых схемных множеств [2]. Запишем определитель полного графа, рис.1, сомножителями которого являются операционные формы узловых схемных множеств [2]:

$$\det_y A = (1+2) \times (2+3+5+6) \times (6+7) \times (4+5+7). \quad (2)$$

В формуле (2) используются традиционные знаки алгебраических операций, хотя структурная алгебра имеет свои правила: $a \oplus a = \emptyset$, $a \otimes a = \emptyset$. Под символами a можно понимать как одинаковые ветви, так и одинаковые комбинации ветвей. Знак суммирования, введенный в

уравнение (2), позволяет освобождаться от одинаковых сочетаний ветвей, которые возникают в процессе реализации декартового умножения.

Расширим понятие определителя, распространяя структуру формулы (2) на другие схемные множества ветвей. *Структурой определителя контура считаем произведение символов его ветвей, структурой определителя узла – произведение символов его ветвей, структурой определителя пути в графе – произведение символов его ветвей.*

Приведенные понятия, позволяют придать физический смысл формуле (1), так как соотношение определителей в теории цепей рассматривается как некоторая функция электрической цепи. Формулу для вычисления значения тока ветви 5 можно записать, используя новые понятия. Так, например, в формуле (3) можно выделить соотношение определителей максимального контура и всей схемы.

$$I_5 = E \frac{[\det_y M^{km} (1+2+4+5)] \cdot [M_n (6+7)]}{\det_y A} = \quad (3)$$

$$= E \frac{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot (6+7)}{(1+2) \cdot (2+3+5+6) \cdot (6+7) \cdot (4+5+7)}.$$

где M^{km} – максимальное контурное схемное множество, содержащее ветви источника и искомого тока; M_n – узловое схемное множество, не вошедшее в максимальный контур. Если все ветви выражения (3) получат размерность проводимости, то и дробь получит ту же размерность, а это значит, что результат будет иметь размерность [А] – ампер.

Формулу (3) предлагается читать следующим образом. Определитель максимального контура и определитель графа образуют некоторую схемную функцию цепи, значение которой умножается на операционную форму множества ветвей узла 3, а затем на номинал источника напряжения.

Числитель формулы (3) напоминает выражения, которые возникают при раскрытии определителей по Фойснеру [3]. Приведем уравнение, которое является фундаментальным для преобразования определителя, алгебраическое выражение которого известно:

$$N = w_a N_a + N_{a'}, \quad (4)$$

где N – определитель матрицы системы уравнений; N_a – определитель матрицы, из которой удалена ветвь a ; $N_{a'}$ – определитель, в котором узлы ветви a закорочены, т.е. $w_a=0$.

Если из схемы удаляются две ветви, (4) применяется дважды:

$$N = w_a w_b N_{ab} + w_a N_{ab'} + w_b N_{a'b} + N_{a'b'} . \quad (5)$$

В статье приводится еще более сложное уравнение, когда из выражения определителя удаляются три ветви:

$$\begin{aligned} \mathfrak{N} = & a b c \mathfrak{N}_{abc} + a b \mathfrak{N}_{ab'c} + a c \mathfrak{N}_{ab'c} + b c \mathfrak{N}_{a'b'c} + a \mathfrak{N}_{a'b'c} \\ & + b \mathfrak{N}_{a'b'c} + \mathfrak{N}_{a'b'c} . \end{aligned} \quad (6)$$

Удалим четыре ветви максимального контура из определителя, который содержит все узловые множества. Для удобства читателя приводим запись этого определителя:

$$N^0 = (1+2) \cdot (2+3+5+6) \cdot (6+7) \cdot (4+5+7) \cdot (1+3+4) = \emptyset .$$

Несмотря на то, что декартово произведение всех узловых схемных множеств равно пустому множеству, мы можем начать преобразование определителя по Фойснеру: отметим ветви, которые удаляются из схемы;

$$N^0 = (1' + 2') \cdot (2' + 3 + 5' + 6) \cdot (6 + 7) \cdot (4' + 5' + 7) \cdot (1' + 3 + 4') .$$

установим узлы, которые исчезают после удаления ветвей 1,2,4,5.

Узлы 1, 4, 5 перестают существовать после удаления отмеченных ветвей. Узел 2 становится устранимым, т.к. ветви 3 и 6 превращаются в единую ветвь. Тогда первое слагаемое преобразованного выражения определителя будет выглядеть следующим образом:

$$N_{1245}^0 = 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot (6 + 7) + \dots \quad (7)$$

Как следует из формулы (6), при дальнейшем раскрытии в выражении (7) должны появиться слагаемые, у которых в виде коэффициентов будут произведения трех ветвей. Количество таких слагаемых будет равно числу сочетаний из четырех по три. Далее последуют слагаемые с другими коэффициентами, содержащими по две ветви и по одной. Но нам достаточно первого слагаемого (7), т.к. оно совпадает с числителем формулы (3). Таким образом, формула (3) представляет собой соотношение первого слагаемого разложения определителя по Фойснеру и структуры определителя схемы.

Рассмотрим пример **D2-4** [1], рис.2. В графе рис.2 выбраны два контура, каждый из которых содержит как ветвь искомого тока, так и четыре источника каждый:

$$M_1^{km}(1+2+4+5+7+8), \quad M_2^{km}(1+3+4+6+7+9).$$

При выборе первого контура мы не охватываем узловое схемное множество (3, 9) со стороны источников $E1$, $E2$ и узловое множество (6, 9) со стороны источников $E4$, $E5$. Второй контур не охватывает узловое схемное множество (2, 8) со стороны источников $E1$, $E3$, а также узловое схемное множество (5, 8) со стороны источников $E4$, $E6$.

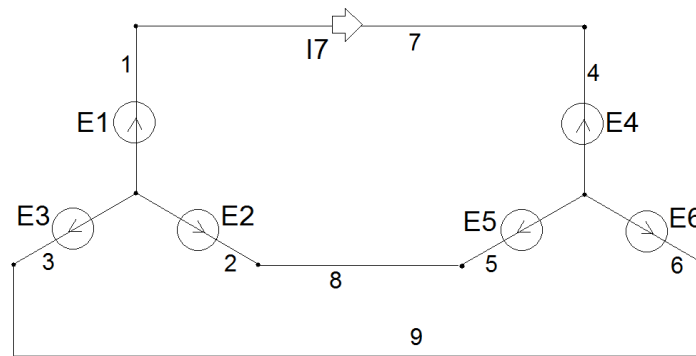


Рис. 2. Граф схемы примера D2- 4.

Запишем формулу для определения величины тока седьмой ветви:

$$I_7 = \frac{(E_1 + E_5 - E_2 - E_4) \left[\det_Y M_1^{km}(1+2+4+5+7+8) \right] \left[(3+9)(6+9) \right]}{\det_Y A} + \frac{(E_1 + E_6 - E_3 - E_4) \left[\det_Y M_2^{km}(1+3+4+6+7+9) \right] \left[(2+8)(5+8) \right]}{\det_Y A}. \quad (8)$$

Структура определителя «плавающей» матрицы [5] следует из декартового произведения:

$$N^0 = (1+7) \cdot (1+2+3) \cdot (4+7) \cdot (4+5+6) \cdot (2+8) \cdot (5+8) \cdot (3+9) \cdot (6+9) = \emptyset.$$

Находим первое слагаемое разложения определителя схемы по Фойснеру для каждого из контуров:

$$N_{124578} = 124578(3+9)(6+9), \quad N_{134679} = 134679(2+8)(5+8).$$

В результате обозначенных операций формула (8) упрощается:

$$I_7 = \frac{(E_1 + E_5 - E_2 - E_4) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8)(3 \cdot 6 + 3 \cdot 9 + 6 \cdot 9)}{\det_Y A} + \\ + \frac{(E_1 + E_6 - E_3 - E_4)(1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9)(2 \cdot 5 + 2 \cdot 8 + 5 \cdot 8)}{\det_Y A}. \quad (9)$$

Итак, в формулах (3), (9) выделены схемные функции в виде отношения определителей. В числителе находится определитель контура, а в знаменателе – определитель схемы. Отметим, что формулы (3), (9) стали проще и понятнее потому, что были введены новые понятия определителей контурного множества и узлового множества.

Вывод

Предложено обоснование и рассмотрено применение формулы (1) для нахождения тока в схеме с двухполюсными элементами. Вызывает удивление, что формула, приведенная в источнике [1], приведена без какого-либо доказательства.

Список литературы

1. Bellert S. Woźniacki H. Analiza i synteza układów elektrycznych metodą liczb strukturalnych. – Warszawa : Wydaw. Naukowo-techniczne, 1968.– 306 s.
2. Максимович Н.Г. Методы топологического анализа электрических цепей. – Львов: Изд. Львов. Универ., 1970. – 258 с.
3. Feussner W. Ueber Stromverzeigung in netzförmigen Leitern. // Annalen der Physik und Chemie.– Leipzig, 1902.– Bd. 9.– S.1304–1329.
4. Кирхгоф Г. О решении уравнений, к которым приводит изучение линейного распределения гальванических токов // Избранные труды. Г. Кирхгоф. – М.: Наука, 1988.– С. 170–178.
5. Величко Ю.Т. Анализ напряжений, токов и мощностей в линейном многополюснике // Изв. ВУЗов СССР – Радиоэлектроника.– 1968.– №12.

И. В. Ерохов

Ерохов Игорь Васильевич – профессор., doc. Phil., к.т.н., г. Запорожье.

От редактора

«Формула Возняцкого» [1] – не более чем теоретико-множественная интерпретация оригинальной (полувековой давности) формулы Вильгельма.Фойснера для разложения числителя передаточной функции по путям [2]. На десяток лет ранее Возняцки эта формула была повторена Мейсоном в статье (1957г.), а затем в известной книге с Циммерманом [3].

Формализация структурными числами вместо новизны только ухудшает восприятие этой топологической формулы, придавая ей лишнее наукообразие и сложность. Более интересен набросок методики Возняцкого для анализа схем с управляемыми источниками, опубликованный в приложении той же книги [1].

Аналогичную методику предложил Хуанг в серии статей несколько позже, но аргументированно, с обобщением на все типы управляемых источников и нуллары [4–7]. Для этого было введено понятие «цепей контуров передачи» (transfer link chains) [6]. Важно, что Хуанг вслед за Фойснером оперирует понятием схемного определителя и не использует при символьном анализе электронных схем матричных, графовых или теоретико-множественных промежуточных моделей.

Список литературы

1. Беллерт С., Возняцки Г. Анализ и синтез электрических цепей методом структурных чисел.– М.: Мир, 1972.– 334 с.
2. Feussner W. Zur Berechnung der Stromstarke in netzformigen Leitern // Annalen der Physik.– 1904.– Bd 15, N 12.– S. 385–394.
3. Мэзон С., Циммерман Г. Электронные цепи, сигналы и системы.– М.: Изд-во иностранной лит., 1963.– 620 с.
4. Hoang S. Direct topological rules for analysis of networks without magnetic coupling // Archiwum elektrotechniki.– 1974.– Т. 23, з. 2.– S. 387–405.
5. Hoang S. Direct and shortcut topological rules for analysis of networks with magnetic coupling // Archiwum elektrotechniki.– 1974.– Т. 23, з. 2.– S. 407–425.
6. Hoang S. Regular cycle sets and transfer link chains in the direct topological method of network analysis // Archiwum elektrotechniki.– 1974.– Т. 23, з. 4.– S. 1069–1082.
7. Hoang S. Direct topological method of analysis of networks containing operational amplifiers // Archiwum elektrotechniki.– 1981.– Т. 30, з. 118–4.– S. 911–922.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Синтез электрических и электронных цепей</i>		
Дмитриков В. Ф., Шушпанов Д. В., Фоченков Э. А.	Эквивалентная схема замещения диэлектрика в широком диапазоне частот (0 Гц – 500 МГц)	4
Дмитриков В. Ф., Шушпанов Д. В., Фоченков Э. А.	Эквивалентная схема замещения дросселя на нанокристаллическом сердечнике с большой магнитной проницаемостью	25
Курганов С. А., Филаретов В. В.	Методика синтеза квазилестничных фильтров на основе расширенного координатного базиса напряжений	56
Горшков К. С., Филаретов В. В.	Генерация структур электронных схем по заданной передаточной функции	65
<i>Диагностика электрических цепей</i>		
Курганов С. А., Прокофьев И. А.	Применение численных программ анализа для диагностики нелинейных электронных цепей в статическом режиме	79
<i>Моделирование электромагнитных устройств</i>		
Манин А. В., Юдин В. В., Юдин А. В.	Моделирование процессов регулирования мощности энергетических установок	86
Канов Л. Н.	Оптимизация пуска распределенного асинхронного электропривода на основе схемного моделирования	95
<i>Теория электромагнитного поля</i>		
Меньшов Е. Н.	Исследование дополнительного тока при кулоновской калибровке	108
<i>Матричный анализ</i>		
Недорезов М. В., Тимофеев В. Ф., Филаретов В. В.	Вычисление символьных определителей полных матриц на основе их половинного деления и наращивания строк	120

Кузьмин Н. П., Курганов Д. С., Филаретов В. В.	Параллельный расчет символьных определителей полных матриц высокого порядка при произвольном числе процессоров	135
Горшков К. С., Недорезов П. В., Филаретов В. В.	Генерация и вычисление компактных символьных определителей для разреженных матриц высокого порядка	142
Структурный синтез		
Свирщёва Э. А.	Алгоритм генерации неизоморфных корневых деревьев с применением кодирования их сверток	152
Недорезов П. В., Филаретов В. В.	Генерация неизоморфных корневых деревьев в частичном и полном лексикографическом порядке	164
Горшков К. С., Недорезов П. В., Филаретов В. В.	Параллельная генерация неизоморфных корневых деревьев с равномерной загрузкой процессоров	191
Из опыта работы		
Ерохов И.В.	Уравнения переменных состояния и законы теории цепей	213
Научные школы		
Соловьева Е. Б.	Электротехника сегодня	223
Защиты диссертаций		
Меньшов Е. Н.	Математическое моделирование разделения ферромагнитной суспензии в магнитных полях	227
Из истории электротехники		
Ерохов И. В.	Формула Возняцкого, которую сложно принять	244

TABLE OF CONTENTS

<i>Synthesis of electrical and electronic circuits</i>		
Dmitrikov V. F., Shushpanov D. V.	Equivalent Circuit of a Dielectric in a Wide Frequency Range (0 Hz – 500 MHz)	4
Dmitrikov V. F., Shushpanov D. V., Fochenkov E.A.	Equivalent Circuit of an Inductor on a nanocrystalline core with a high magnetic permeability	25
Kurganov S. A., Filaretov V. V.	Method of synthesis of quasi-linear filters based on the extended coordinate basis of voltages	56
Gorshkov K. S., Filaretov V. V.	Generation of electronic circuit structures according to a given network function	65
<i>Diagnostics of electrical circuits</i>		
Kurganov S. A., Prokof'ev I. A.	Application of numerical analysis programs for diagnostics of nonlinear electronic circuits in static mode	79
<i>Modeling of electromagnetic devices</i>		
Manin A.V., Yudin V. V., Yudin A. V.	Modeling of power regulation processes of energy systems	86
Kanov L. N.	Optimization of the start-up of a distributed asynchronous electric drive based on circuit modeling	95
<i>Electromagnetic field theory</i>		
Menshov E. N.	On research for addition current of coulomb calibration	108
<i>Matrix analysis</i>		
Nedorezov M. V., Timofeev V. F., Filaretov V. V.	Calculation of symbolic determinants of complete matrices based on their half division and row increment	120

Kurganov D. C., Кузьмин Н. П. Filaretov V. V.	Parallel calculation of symbolic determinants of high-order complete matrices with an arbitrary number of processors	135
Gorshkov K. S., Nedorezov P. V., Filaretov V. V.	Generation and calculation of compact symbolic determinants for sparse high-order matrices	142
<i>Structural synthesis</i>		
Svirshchova E. A.	Algorithm for generating non-isomorphic root trees using coding of their convolutions	152
Nedorezov P. V., Filaretov V. V.	Generation of non-isomorphic root trees in partial and full lexicographic order	164
Gorshkov K. S., Nedorezov P. V., Filaretov V. V.	Parallel generation of non-isomorphic root trees with uniform CPU load	191
<i>From work experience</i>		
Yerokhov I. V.	Equations of state variables and the laws of circuit theory	213
<i>Scientific schools</i>		
Solovyeva E. B.	Electrical Engineering today	223
<i>Defense of dissertations</i>		
Menshov E. N.	Mathematical modeling of ferromagnetic suspension separation in magnetic fields	227
<i>From the history of electrical engineering</i>		
Erochov I. V.	The Wozniacki formula which is difficult to accept	244

Synthesis, analysis and diagnosis of electronic networks : The international scientific transactions.— Issue 17 / under edition V.V. Filaretov. – Ulyanovsk: Ulyanovsk state technical university, 2022. – 256 p.

This collection of scientific works continues a series of specialized collections published in Ulyanovsk State Technical University during international conferences: «Continual algebraic logic calculus and neuralmathematics in science and technics», «Conference on logic, computer science, sociology of science» and «Volgin's Readings».

In this volume discusses the theoretical questions and practical application of the modern theory of electrical and electronic networks and modeling of electromagnetic devices. Including: matrix analysis, structural synthesis, synthesis of analog and digital filters, topological analysis, decomposition and transformation of electronic circuits presented nullor and mirror pathological elements, neural networks and robotics.

Recommended for specialists in the field of circuit theory, computer algebra, electronic circuitry analog and mixed discrete electronic circuits, undergraduates and graduate students of corresponding specialties.

Научное издание

**СИНТЕЗ, АНАЛИЗ И ДИАГНОСТИКА
ЭЛЕКТРОННЫХ ЦЕПЕЙ**

Международный сборник научных трудов
Выпуск 17

Под редакцией В. В. Филаретова

Компьютерная верстка В. В. Филаретов

ЛР № 020640 от 22.10.97.

Подписано в печать 20.11.2022. Формат 60×84/16.
Усл. печ. л. 15,11. Тираж 50 экз. Заказ 67.

Ульяновский государственный технический университет
432027, Ульяновск, Северный Венец, 32.

ИПК «Венец» УлГТУ 432027, Ульяновск, Северный Венец, 32.