

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«УЛЬЯНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

АНДРЕЕВ ВАСИЛИЙ АНДРЕЕВИЧ
УЧЕНЫЙ, ПЕДАГОГ, ОРГАНИЗАТОР

Международный сборник научных трудов
«Синтез, анализ и диагностика электронных цепей»

Выпуск 14

Ульяновск
УлГТУ
2017

УДК 516.7.24/25+519.873

ББК 32.85

A65

УДК 516.7.24/25+519.873

Андреев Василий Андреевич: ученый, педагог, организатор :
Международный сборник научных трудов «Синтез, анализ и диагностика электронных цепей» / под ред. В. В. Филаретова. — Ульяновск : УлГТУ, 2017. — 271 с.

Сборник (вып. 14) посвящается памяти доктора технических наук, профессора, заведующего кафедрой «Электроснабжение» (1964–1988 гг.), ректора Ульяновского политехнического университета (1969–1980 гг.) Андреева Василия Андреевича (01.01.1923–26.08.2014).

Сборник продолжает серию специализированных сборников, изданных в Ульяновском государственном техническом университете (УлГТУ) в рамках международных конференций: «Континуальные логико-алгебраические исчисления и нейроматематика», «Конференция по логике, информатике, науковедению», «Волгинские чтения», «Синтез, анализ и диагностика электронных цепей», проходивших в УлГТУ в течение 2003–2015 гг.

В статьях рассматриваются теоретические вопросы и практические приложения современной теории электрических и электронных цепей, в том числе: символьный анализ сложных цепей и систем по частям, структурный синтез и топологические преобразования, аномальные элементы в моделях активных компонентов. Обсуждается автоматизация проектирования и эксплуатация электрооборудования, моделирование электронных цепей и электроэнергетических систем с позиций матричного анализа, схемной алгебры и теории графов.

Рекомендуется для специалистов в области схемотехники и моделирования аналоговых и аналого-дискретных электронных цепей, магистрантов и аспирантов соответствующих направлений и специальностей.

Статьи печатаются в авторской редакции.

Редакционная коллегия:

Горшков К. С., канд. техн. наук (ответственный секретарь), Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики (НИУ ИТМО);

Grishkevich A., д-р техн. наук, Czestochowa university of technology (Polska);

Дубов А. Л., канд. техн. наук, доцент;

Кузнецов А. В., д-р техн. наук, профессор;

Курганов С. А., д-р техн. наук (зам. ответственного редактора);

Мауко G., канд. техн. наук, Broadcom Corporation (USA);

Соловьева Е. Б., д-р техн. наук, СПбГЭУ — ЛЭТИ им. В. И. Ленина;

Филаретов В. В., д-р техн. наук (ответственный редактор).

© Колл. авторов, 2017

© Оформление. УлГТУ, 2017

ISBN 978-5-9795-1754-4

УЧЕНЫЙ, ПЕДАГОГ, ОРГАНИЗАТОР



Андреев Василий Андреевич (01.01.1923–26.08.2014 гг.)

95 лет назад родился крупный ученый и талантливый педагог в области релейной защиты и автоматики систем электроснабжения, один из первых организаторов высшего технического образования в Киргизии и Ульяновске, доктор технических наук, профессор, заслуженный деятель науки РФ Василий Андреевич Андреев. Василий Андреевич родился в Южно-Казахстанской области, школу окончил в Чимкенте в 1940 г. и поступил в Среднеазиатский индустриальный институт. В мае 1943 г. призван в армию и направлен на курсы переводчиков в Военный институт иностранных языков, по окончании которых был переводчиком штаба стрелковой дивизии 1-го Украинского фронта.

После войны Василий Андреевич продолжил учебу в Московском энергетическом институте (МЭИ), который окончил с отличием в 1949 г. По направлению работал на ГРЭС №10 в Новомосковске, затем снова вернулся в МЭИ, чтобы продолжить учебу в аспирантуре на кафедре «Релейная защита и автоматизация энергосистем». Диссертацию защитил в 1955 г. и был направлен Минвузом СССР во вновь организованный Фрунзенский политехнический институт проректором по учебной и научной работе. В этот период формировалась

и Киргизская академия наук, Василий Андреевич много сделал для организации совместных с академией научных исследований, развития вузовской науки и подготовки научных кадров. В центре его внимания был также процесс создания кафедр и условий для их работы. Здесь в соавторстве с проф. В. Л. Фабрикантом он написал первый свой учебник «Релейная защита распределительных электрических сетей». За работу во Фрунзе В. А. Андреев был награжден медалью «За трудовое отличие».

В 1963 г. Минвуз РСФСР с согласия руководства Киргизии направляет В. А. Андреева проректором по учебной и научной работе в Ульяновский политехнический институт (УлПИ), реорганизованный в 1962 г. из вечернего в дневной вуз. В 1969 г. Василий Андреевич был назначен ректором института и до 1981 г. проработал в этой должности. Бурное развитие в Ульяновске и области промышленных предприятий требовало подготовки инженеров соответствующего профиля. В институте были организованы радиотехнический, энергетический, строительный, самолетостроительный и другие факультеты, начато строительство учебной базы, формирование кафедр и научных направлений, организация учебного процесса на требуемом уровне. Успешно решались задачи, связанные с бытом, отдыхом и лечением студентов и преподавателей. В институте была создана аспирантура.

Работа ректора В. А. Андреева была отмечена награждением его орденом Трудового Красного Знамени. Характерным для Василия Андреевича является плодотворное сочетание административной, научной, педагогической и общественной деятельности, что проявилось и в Киргизии, и в Ульяновске. В УлПИ он был одним из организаторов кафедры «Электроснабжение промышленных предприятий и городов», которой бессменно руководил 24 года. В процессе формирования кафедры складывалась научная школа проф. В. А. Андреева, позволившая через аспирантуру успешно готовить научные кадры (основной состав кафедры — бывшие его аспиранты).

Имя проф. В. А. Андреева широко известно в России и странах ближнего зарубежья по работам в области совершенствования плавких предохранителей. Ему и его ученикам принадлежат оригинальные разработки устройств релейной защиты для сетей 6–10 кВ и ВЛ–0,38 кВ. Проф. В. А. Андреев — один из авторов идеи создания управляемых предохранителей. На их основе под его руководством разработаны устройства защиты и коммутации, не имеющие аналогов в мировой электроэнергетике для электроустановок 0,4–110 кВ. Отдельные разработки внедрены на промышленных предприятиях ряда регионов страны и отмечены медалями и дипломами ВДНХ.

Проф. В. А. Андреевым теоретически обоснована и практически реализована возможность создания у нас в стране жидкометаллических самовосстанавливающихся предохранителей. Многолетняя работа по совершенствованию предохранителей обобщена в его монографии «Управляемые плавкие предохранители». Результаты научных исследований и педагогической деятельности Василия Андреевича легли в основу учебников и учебных пособий. Его административная и научно-педагогическая работа всегда сочеталась с активной деятельностью в государственных и общественных организациях.

За ратные подвиги В. А. Андреев награжден орденами Красной Звезды и Отечественной войны II степени, медалями. Деятельность В. А. Андреева оказала существенное положительное влияние на экономику и культуру Ульяновска и Ульяновской области. Василий Андреевич занесен в Золотую Книгу Почета и удостоен звания «Почетный гражданин Ульяновской области».

АНАЛИЗ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЭЛЕКТРОННЫХ ЦЕПЕЙ

ОБ ОПЕРАТОРАХ КИРХГОФА, ВВЕДЕННЫХ ПЕНФИЛДОМ

И. В. Ерохов

Дан анализ известным обобщениям теоремы Зеляха-Теллегена (закону сохранения мощностей и псевдомощностей), что расширяет наши представления о взаимосвязи элементов электрической цепи и роли уравнений Кирхгофа, которые вправе называться законами.

The analysis of the known generalizations of Zeljah-Tellegen's theorem (the structural law of conservation power) is presented. This expands our understanding of the relationship between elements of the electric circuit and the role of the Kirchhoff equations, which may be called laws.

С разрывом в один год, в разных странах были опубликованы работы, содержащие подобные утверждения о балансе мощностей электрической цепи [1] и [2]. Второй автор назвал свой результат теоремой, и это положение обычно называется «теоремой Теллегена» [3–5].

По сравнению с первоисточником [2] книга [3] написана несколько сумбурно. Одновременно появилась статья [4], которая содержит несколько новых понятий. Спустя тридцать лет вышла в свет работа [5]. Ниже разобраны новые понятия, содержащиеся в работах [3–5].

В начале [4] напоминает, что доказательство теоремы основано только на законах Кирхгофа. Однако математические выражения [4] сложны для понимания. Рассматривается электрическая цепь с \mathbf{b} ветвями, часть токов j_β называются независимыми. Токи ветвей получаются так:

$$i_\alpha = \sum_\beta B_{\beta\alpha} j_\beta, \quad (1)$$

где $B_{\beta\alpha}$ — матрица.

Очевидно, обозначения строк и столбцов записаны в виде индекса к символу матрицы, а перестановка букв указывает на транспонирование.

Если предположить, что независимыми токами названы токи контурные, то сомножителем этого вектора может быть только транспонированная матрица контурных инцидентий, и (1) имеет вид:

$$\bar{I}^b = [B]^t \cdot \bar{I}_C^b, \quad (2)$$

где $[B]$ — матрица контурных инцидентий; \bar{I}^b — вектор токов ветвей; \bar{I}_C^b — вектор независимых (контурных) токов, равных токам ветвей связи.

Далее, выражение (2) умножается на вектор напряжений ветвей:

$$(\bar{U}^b)^t \bar{I}^b = (\bar{U}^b)^t [B]^t \cdot \bar{I}_C^b, \quad (3)$$

где \bar{U}^b — вектор напряжений ветвей по второму закону Кирхгофа:

$$[B] \cdot \bar{U}^b = \bar{0}.$$

Если учесть (2), то выражение (3) следует приравнять нулю, как матричную запись уравнения баланса мощностей электрической цепи.

Следуя Теллегену, в [4] используется понятие состояния цепи, что позволяет получить разные значения одной и той же переменной, соответствующие, например, разным моментам времени [2]. По вектору токов для одного состояния (один штрих) и вектору напряжений для другого состояния (два штриха), записывается теорема Теллегена:

$$\sum_{n=1}^b i'_n v''_n = 0. \quad (4)$$

или в современной записи (разные состояния отмечены цифрами):

$$\left[\bar{I}_1^b \right]^t \cdot \bar{U}_2^b = 0, \quad (4^*)$$

где \bar{I}_1^b — вектор токов ветвей, характеризующих первое состояние электрической цепи; \bar{U}_2^b — вектор напряжений ветвей, характеризующих второе состояние цепи. Состояния электрической цепи, переменные которой участвуют в выражении (4*), можно создавать по-разному.

Обобщение теоремы Теллегена сводится к введению понятия оператора Кирхгофа [5]: «Оператор \mathbb{k}_1 называется оператором Кирхгофа по току, если он применяется к узловым уравнениям, определяющим распределение токов таким образом, что из равенства $[A] \cdot \bar{I}^b = \bar{0}$ следует $[A] \cdot \mathbb{k}_1 \bar{I}^b = \bar{0}$. Отсюда также следует, что контурный ток имеет такое значение \tilde{I}_k , что возможно следующее равенство $\mathbb{k}_1 \bar{I}^b = [B]^t \tilde{I}_k$ ».

Оператор Кирхгофа по напряжению \mathbb{k}_2 определяется как двойственный оператору по току — заменяются название оператора, матрицы и вектора: «из равенства $[B] \cdot \bar{U}^b = \bar{0}$ следует $[B] \cdot \mathbb{k}_2 \bar{U}^b = \bar{0}$ », а также выполняется «равенство $\mathbb{k}_2 \bar{U}^b = [A]^t \tilde{\varphi}$ », где $\tilde{\varphi}$ — вектор узловых потенциалов (произведение исходного вектора на оператор Кирхгофа).

Пример 1. В качестве примера выбираем электрическую цепь, рис. 1. Назначим следующие величины параметров элементов: $R_1 = 10$ Ом; $R_2 = 15$ Ом; $R_3 = 20$ Ом; $R_4 = 25$ Ом; $R_5 = 30$ Ом; $R_6 = 35$ Ом; $E_6 = 20$ В.

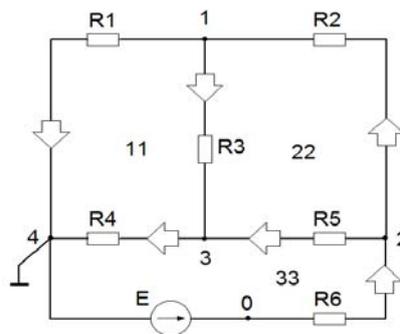


Рис. 1. Схема моста Уинтстона

Для электрической цепи рис. 1 составим матрицы инцидентий:

$$\begin{array}{cccccc}
 1 & 4 & 6 & 2 & 3 & 5 & 1 & 4 & 6 & 2 & 3 & 5 \\
 [A_f] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{matrix}, & [B_f] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \{1,2,6\} \\ \{1,3,4\} \\ \{4,5,6\} \end{matrix}.
 \end{array}$$

Значения контурных токов и узловых потенциалов:

$$\bar{I}_k = \begin{bmatrix} 0.259623 \\ -0.00906 \\ 0.123774 \end{bmatrix} \begin{matrix} \{1,2,6\} \\ \{1,3,4\} \\ \{4,5,6\} \end{matrix}, \quad \bar{\varphi} = \begin{bmatrix} 2.348025 \\ 6.358719 \\ -2.86793 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{matrix}.$$

Модифицированные значения векторов получаются умножением этих векторов на операторы Кирхгофа. Значения главной диагонали выражений операторов Кирхгофа назначаются произвольно.

Новый вектор токов ветвей, отвечающий первому закону Кирхгофа:

$$\tilde{I}^b = [B_f]^t \cdot \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 \end{bmatrix} \bar{I}_k = [B_f]^t \cdot \begin{bmatrix} 0.129812 \\ -0.007248 \\ 0.074264 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.13706 \\ 0.067016 \\ 0.204076 \\ 0.129812 \\ -0.00725 \\ 0.074264 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 4 \\ 6 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{matrix}.$$

Новый вектор напряжений ветвей, отвечающий второму закону Кирхгофа:

$$\tilde{U}^b = [A_f]^t \cdot \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix} \bar{\varphi} = [A_f]^t \cdot \begin{bmatrix} 0.93921 \\ 3.815231 \\ -0.286205 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.93921 \\ 3.815231 \\ -0.286205 \\ -0.65301 \\ -2.87602 \\ -3.52903 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 4 \\ 6 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{matrix}.$$

Уравнение баланса мощностей будет иметь вид:

$$P = (\tilde{I}^b)^t \cdot \tilde{U}^b = 4,8 \cdot 10^{-6}.$$

Сравнивая исходные и скорректированные вектора токов и напряжений ветвей, находим операторы Кирхгофа: для токов ветвей и для напряжений ветвей (5) и (6). Очевидно, что операторы Кирхгофа для контурных токов и потенциалов узлов являются основными, так как входят отдельным блоком в выражения для операторов токов и напряжения ветвей. Достаточно умножить оператор Кирхгофа (5) на исходный вектор токов ветвей, чтобы получить модифицированный вектор токов ветвей.

$$\mathbb{k}_1 = \begin{bmatrix} 0.510117 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.584200 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.532283 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6 \end{bmatrix}; \quad (5)$$

$$\mathbb{k}_2 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1.270385 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.717088 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.009254 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

В текст теоремы Теллегена вводится существенное дополнение [4]. Переменные для математического выражения теоремы предлагается измерять на разных схемах N' и N'' , которые имеют одинаковую структуру: «если i'_1, i'_2, \dots, i'_b являются токами ветвей цепи N' из b ветвей, а $v''_1, v''_2, \dots, v''_b$ являются напряжениями ветвей другой цепи N'' из b ветвей, где N' и N'' имеют общий линейный граф, однако, могут быть разными, то справедливо равенство:

$$\sum_{\alpha=1}^b i'_{\alpha} v''_{\alpha} = 0, \quad (7)$$

где суммирование производится по всем ветвям цепи. Правило знаков, принятых для напряжений и токов, таково, что если бы N' и N'' были тождественны, то $i'_{\alpha} v''_{\alpha}$ соответствовало мгновенной мощности».

Однако в случае, когда полного тождества между цепями нет, эта величина только обладает размерностью мощности, но отсутствует реальный элемент цепи, которому это значение соответствует. Мощность, которую нельзя измерить, является нереальной величиной (псевдомощностью). Уравнение (7) выражает баланс псевдомощностей.

Понятие оператора Кирхгофа используется при обобщении теоремы Теллегена [4]: «Пусть Λ' — оператор Кирхгофа по току, действие которого по отношению к множеству токов ветвей i_{α} , принадлежащих цепи из b — ветвей, заключается в создании нового множества «токов $\Lambda' i_{\alpha}$ » b ветвей, которое подчиняется закону Кирхгофа».

Цель введения в выражение (7) оператора Кирхгофа по току (как и по напряжению) изложена ясно. С их помощью создается простая технология тиражирования векторов переменных, подчиняющихся законам Кирхгофа на одном и том же графе. Обобщенная форма теоремы Теллегена:

$$\sum_{\alpha} \Lambda' i_{\alpha} \cdot \Lambda'' v_{\alpha} = \sum_p \Lambda' i_p \cdot \Lambda'' v_p. \quad (8)$$

«где i_p и v_p есть ток и напряжение узла соответственно, а индексы α и p используются для всех ветвей и полюсов цепи» [4].

Так как (8) равно нулю, то, вероятно, в правой части (8) приведены токи внешних узлов электрической цепи и разности потенциалов между соответствующими парами внешних узлов. Токи подчиняются первому, а разности потенциалов — второму закону Кирхгофа.

Действительно, часть электрической цепи может быть выделена замкнутым сечением из схемы бóльшего размера. Токи сечения являются внешними для части цепи, заключенной внутри сечения. Напряжения

между внешними узлами образуют невидимый контур, т. к. каждое из них является разностью соответствующих потенциалов пары узлов.

Включение этих переменных в математическое выражение теоремы имеет смысл только тогда, когда они измерены на разных схемах. Кроме того, заметим, что размерность операторов Кирхгофа в правой части может отличаться от размерности операторов Кирхгофа в левой части равенства (8), а поэтому их нельзя обозначать одинаковыми символами.

Запишем обобщенную форму теоремы в современных обозначениях:

$$\left[k_1 \bar{I}_{N1}^b \right]^t \cdot \left[k_2 \bar{U}_{N2}^b \right] = \left[k_1^J \bar{J}_{N1} \right]^t \left[k_2^V \bar{V}_{N2} \right], \quad (9)$$

где k_1, k_2 — операторы Кирхгофа для ветвей цепи; k_1^J, k_2^V — операторы Кирхгофа для внешних токов и разностей потенциалов.

В [5] делается еще одно обобщение: «Оператор, тока или напряжения, плохо определен как оператор Кирхгофа. Пусть \mathbb{k}_1 и \mathbb{k}_2 есть операторы Кирхгофа определенного типа, тогда $\alpha \mathbb{k}_1, \mathbb{k}_1 + \mathbb{k}_2, \mathbb{k}_1 \cdot \mathbb{k}_2$ тоже являются операторами Кирхгофа». Подчеркивается, что элементами оператора Кирхгофа могут быть комплексные числа, функции любых аргументов, то есть операторы Кирхгофа не нарушают (7):

$$\begin{aligned} \left(\mathbb{k}_2 \bar{U}^b \right)^t \mathbb{k}_1 \bar{I}^b &= \left([A]^t \tilde{\varphi} \right)^t \mathbb{k}_1 \bar{I}^b = \tilde{\varphi}^t [A] \mathbb{k}_1 \bar{I}^b = 0, \\ \left(\mathbb{k}_1 \bar{I}^b \right)^t \mathbb{k}_2 \bar{U}^b &= \left([B]^t \tilde{I}_k \right)^t \mathbb{k}_2 \bar{U}^b = \tilde{I}_k^t [B] \mathbb{k}_2 \bar{U}^b = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Как видно, второе уравнение в (10) повторяет уравнение в [7]:

$$\left(\bar{I}^b \right)^t \bar{U}^b = \left(\bar{I}_{kk} \right)^t B_f \cdot \bar{U}^b = \left(\bar{I}_{kk} \right)^t B_f \cdot A_f^t \bar{\varphi} = 0.$$

Чтобы это стало очевидным, продолжим преобразование (10):

$$\tilde{I}_k^t [B] \mathbb{k}_2 \bar{U}^b = \tilde{I}_k^t [B] [A]^t \tilde{\varphi} = 0. \quad (11)$$

В уравнении (11) второй сомножитель был заменен эквивалентным выражением из первого уравнения (10). Другими словами, равенства, справедливые для рассчитанных векторов переменных справедливы и для модифицированных векторов контурных токов и узловых потенциалов.

Приведем разностную и суммарную формы теоремы, взятые из [5]: «Образуем разность и соответственно сумму из элементов $(\mathbb{k}_2 \bar{U}^b)^t \mathbb{k}_1 \bar{I}^b$ и $(\mathbb{k}_1 \bar{U}^b)^t \mathbb{k}_2 \bar{I}^b$, которые содержатся в двух формах:

$$\begin{aligned} (\mathbb{k}_2 \bar{U}^b)^t \mathbb{k}_1 \bar{I}^b - (\mathbb{k}_1 \bar{U}^b)^t \mathbb{k}_2 \bar{I}^b &= 0, \\ (\mathbb{k}_2 \bar{U}^b)^t \mathbb{k}_1 \bar{I}^b + (\mathbb{k}_1 \bar{U}^b)^t \mathbb{k}_2 \bar{I}^b &= 0. \end{aligned} \quad \text{»}. \quad (12)$$

Пример 2. Подставим в уравнение разностной формы теоремы (12)

$$(\mathbb{k}_2 \bar{U}^b)^t \mathbb{k}_1 \bar{I}^b - (\mathbb{k}_1 \bar{U}^b)^t \mathbb{k}_2 \bar{I}^b = 0$$

значения величин предыдущего примера. Первое слагаемое там найдено:

$$(\mathbb{k}_2 \bar{U}^b)^t \mathbb{k}_1 \bar{I}^b = (\tilde{U}^b)^t \tilde{I}^b = 0.$$

Находим сомножители второго слагаемого:

$$\begin{aligned} (\mathbb{k}_1 \bar{U}^b)^t &= [1.197767 \quad 3.714764 \quad -1.52655 \quad 0.259953 \quad -3.20856 \quad -2.09447] \\ (\mathbb{k}_2 \bar{I}^b)^t &= [0.107473 \quad 0.068828 \quad 0.03834 \quad -0.32982 \quad -0.0065 \quad 0.124919]. \end{aligned}$$

В результате получаем значение для второго слагаемого:

$$(\mathbb{k}_1 \bar{U}^b)^t \mathbb{k}_2 \bar{I}^b = -0.00065 = -6.5 \cdot 10^{-4}.$$

Первое слагаемое разностной формы теоремы дает такой же результат. В сумме получается ноль. Матрицы инцидентий можно считать операторами Кирхгофа, поэтому разностная форма теоремы:

$$(\bar{I}_k)^t [B] \cdot [A]^t \bar{\varphi} - \bar{\varphi}^t [B] \cdot [A]^t \bar{I}_k = 0. \quad (13)$$

После подстановки матриц, векторов и выполнения операций получаем результат: $-1.11022 \cdot 10^{-16} - 1.66533 \cdot 10^{-16} = -2.77555 \cdot 10^{-16}$.

Вывод: Проведенный анализ обобщений известной теоремы [1, 2] расширяет наши представления о взаимосвязи элементов электрической цепи и роли уравнений Кирхгофа, которые вправе называться законами.

Список литературы

1. Зелях Э. В. Основы общей теории линейных электрических схем. — М. : Изд. АН СССР, 1951. — 334 с.
2. Tellegen B. D. H. A general network theorem, with applications // Philips Res. Rept., vol.7, pp. 259–269, August 1952.
3. Penfield P., Spence R., Duinker S. Tellegen's Theorem and Electrical Networks. — Cambridge, Mass. : M. I. T. Press, 1970. — 143 p. [Пенфилд П., Спенс Р., Дюинкер С. Энергетическая теория электрических цепей. — М. : Энергия, 1974. — 152 с.]
4. Penfield P., Spence R., Duinker S. A Generalized Form of Tellegen's Theorem // IEEE Transactions on Circuit Theory, vol. CT-17, no. 3, August 1970. — P. 302–305.
5. Wagner Paul-Jürgen Der Satz von Tellegen. Ursprung, traditionelle und neuere Anwendungen, 9825610, 1.8.2004, 1–20 s.
6. Ерохов И. В. Главная теорема общей теории цепей. — Запорожье, 2011. — 88 с.

Ерохов Игорь Васильевич — профессор, канд. техн. наук, Запорожье (Украина).

E-mail: yerokhov@bigmir.net.

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЕРЕНОСА II-РОДА КАК КОРРЕКЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ В ДИАКОПТИКЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

В. П. Булавочкин

Доказано соответствие преобразований переноса II-рода алгоритму Вудбери–Шермана–Моррисона, используемого для коррекции параметров обратной матрицы. Показано как этот алгоритм может использоваться для расчета параметров эквивалентных многомерных генераторов, являющихся базовыми элементами расчета сложных цепей по частям

Proven compliance transformation transfer II-sort algorithm, Woodbury–Sherman–Morrison used for correction of parameters of the inverse matrix. It is shown how this algorithm can be used to calculate parameters of the equivalent multivariate generators, which are basic elements diakoptic (calculation of complex circuits in parts).

Общая теория преобразования электрических схем. При анализе электрических цепей промежуточным звеном, связующим физический объект и его математическую модель, является схема. Разработчик систем мыслит в основном схемными образами и их трансфигурациями, что позволяет получить эффективные схемные решения, представленные рамках общей теории преобразования электрических схем (ОТПЭС) [1, 2].

В ОТПЭС схема цепи рассматривается как схемное уравнение в схемных символах, но, как и система уравнений, она не позволяет сразу найти неизвестные токи и напряжения. Для этого требуется преобразование схемы к виду с явным выделением искомым переменных.

Классификация схемных методов анализа цепей в ОТПЭС, показывает, что классические методы анализа (метод контурных токов, метод узловых напряжений) не охватывают всех видов преобразований. Целесообразно представление схемных преобразований матричными уравнениями и алгоритмами их решения, как наиболее эффективной формой преобразования численной информации. В данной работе представлено соответ-

ствии преобразований переноса II–рода алгоритму коррекции параметров обратной матрицы [3–5] и его применение для расчета параметров эквивалентных многомерных генераторов (ЭМГ) [2].

Взаимное соответствие преобразований переноса II–рода и алгоритма Вудбери–Шермана–Мориссона [4, 5]. Рассмотрим случай, когда можно выбрать дерево графа схемы так, чтобы оно включало все множество u –ветвей, а все множество z –ветвей входило в дополнение [6]:

$$\begin{bmatrix} Y_{TB} & N+II \\ M-II^t & Z_{NB} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} U_{TB} \\ I_{NB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -J_{TB} \\ E_{NB} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где Y_{TB} и Z_{NB} — диагональные матрицы проводимости T –ветвей дерева и сопротивления N –ветвей хорд; J_{TB} и E_{NB} — соответственно векторы источников ветвей; N и M — матрицы с управляющими связями между z – и u –ветвями; II — матрица главных сечений для хорд.

Воспользовавшись формулой Фробениуса [3] выполним поблочное обращение расширенной матрицы в (1), полагая, что Y_{TB} — невырожденная матрица (без разомкнутых u –ветвей), но возможно, что хорды представлены короткозамкнутыми ветвями так, что $\det Z_{NB} = 0$.

Шаг 1А (обращение матрицы Y_{TB})

$$\begin{array}{cc} \text{матрица коэффициентов} & \text{вектор правой части} \\ \left[\begin{array}{cc} (Y_{TB})^{-1} & -(Y_{TB})^{-1} \cdot (N+II) \\ (M-II^t) \cdot (Y_{TB})^{-1} & Z'_N \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} -(Y_{TB})^{-1} \cdot (-J_{TB}) \\ -E'_N \end{array} \right], \end{array} \quad (2)$$

где $Z'_N = Z_{NB} - (M - II^t) \cdot (Y_{TB})^{-1} \cdot (N + II)$ — матрица контурных сопротивлений схемы с учетом управляющих связей между ветвями; $E'_N = E_{NB} + (M - II^t) \cdot (Y_{TB})^{-1} \cdot (-J_{TB})$ — вектор контурных ЭДС.

Шаг 2А (обращение подматрицы Z'_N)

матрица коэффициентов

$(Y_{TB})^{-1} - (Y_{TB})^{-1} \cdot (N + \Pi) \cdot (Z'_N)^{-1} \cdot (M - \Pi^t) \cdot (Y_{TB})^{-1}$	$-(Y_{TB})^{-1} \cdot (N + \Pi) \cdot (Z'_N)^{-1}$
$-(Z'_N)^{-1} \cdot (M - \Pi^t) \cdot (Y_{TB})^{-1}$	$(Z'_N)^{-1}$

вектор правой части

$-(Y_{TB})^{-1} \cdot J_{TB} + (Y_{TB})^{-1} \cdot (N + \Pi) \cdot (Z'_N)^{-1} \cdot E'_N$, (3)
$(Z'_N)^{-1} \cdot E'_N$	

где $(Y_{TB})^{-1} \cdot J_{TB} + (Y_{TB})^{-1} \cdot (N + \Pi) \cdot (Z'_N)^{-1} \cdot E'_N = U_{TB}$ — вектор Т-ветвей дерева; $(Z'_N)^{-1} \cdot E'_N = I_N$ — вектор контурных токов (N-ветвей).

Теперь вместо условия $\det Y = 0$ предположим, что отсутствуют короткозамкнутые Z-ветви хорд ($\det Y_{NB} = 0$). Данное условие позволяет изменить процедуру обращения расширенной матрицы в (1). В результате выполнения шагов 2А и 2Б получаем две идентичные обратные матрицы (3) и (5), поэтому определение их коэффициентов будет аналогичным.

Шаг 1Б (обращение подматрицы Z_{TB})

матрица коэффициентов

вектор правой части

Y'_T	$(N + \Pi) \cdot (Z_{NB})^{-1}$	$-J'_T$, (4)
$-(Z_{NB})^{-1} \cdot (M - \Pi^t)$	$(Z_{NB})^{-1}$	$(Z_{NB})^{-1} E_{NB}$	

где $Y'_T = Y_{TB} - (N + \Pi) \cdot (Z_{NB})^{-1} \cdot (M - \Pi^t)$ — матрица проводимостей сечений ветвей дерева или матрица узловых проводимостей при выборе звездного дерева; $J'_T = J_{TB} - (N + \Pi) \cdot (Z_{NB})^{-1} \cdot E_{NB}$ — вектор токов сечений, он же вектор узловых токов при выборе звездного дерева.

Шаг 2Б (обращение подматрицы Y'_T)

матрица коэффициентов

$(Y'_T)^{-1}$	$-(Y'_T)^{-1} \cdot (N + \Pi) \cdot (Z_{NB})^{-1}$
$-(Z_{NB})^{-1} \cdot (M - \Pi^t) \cdot (Y'_T)^{-1}$	$(Z_{NB})^{-1} - (Z_{NB})^{-1} \cdot (M - \Pi^t) \cdot (Y'_T)^{-1} \cdot (N + \Pi) \cdot (Z_{NB})^{-1}$

вектор правой части

$(Y'_T)^{-1} \cdot J'_T$, (5)
$(Z_{NB})^{-1} \cdot (M - \Pi^t) \cdot (Y'_T)^{-1} \cdot J'_T$	

где $(Y'_T)^{-1} \cdot J'_T = U_{TB}$ — вектор напряжений ветвей дерева;

$(Z_{NB})^{-1} \cdot E_{NB} + (M - \Pi^t) \cdot (Y'_T)^{-1} \cdot J'_T = I_{NB}$ — вектор контурных токов (хорд).

Сравнение методов расчета параметров ЭМГ. На основании взаимного соответствия матричного и схемного методов сопоставим методы расчета параметров ЭМГ. Определим параметры эквивалентного многомерного генератора эдс (ЭМГЭ). В первом случае из (5) получаем:

$$Z_{TT}^{\text{ЭМГ}} = (Y'_T)^{-1}, \quad (6)$$

$$E_T^{\text{ЭМГ}} = (Y'_T)^{-1} \cdot (-J'_T). \quad (7)$$

Уравнения (6) и (7) известны, они применяются в ОТПЭС для расчета параметров ЭМГ. Во втором случае из (3) получаем:

$$Z_{TT}^{\text{ЭМГ}} = Z_{TB} - Z_{TB} \cdot (N + \Pi) \cdot (Z'_N)^{-1} \cdot (M - \Pi^t) \cdot Z_{TB}, \quad (8)$$

$$E_T^{\text{ЭМГ}} = Z_{TB} \cdot J_{TB} - Z_{TB} \cdot (N + \Pi) \cdot (Z'_N)^{-1} \cdot E'_N. \quad (9)$$

где $Z_{TB} = (Y_{TB})^{-1}$ — диагональная матрица сопротивлений T-ветвей.

Выражения (7)–(8) представляют собой тождество Вудбери [4], используемое для коррекции коэффициентов обратной матрицы $(Y_{TB})^{-1}$, что соответствует преобразованию переноса II рода группы Z-ветвей хорд в Z-ветви дерева. В случае переноса одной ветви уравнения (8) и (9) переходят в выражения Шермана–Моррисона [5]:

$$Z_{TT}^{*\text{ЭМГ}} = Z_{TT}^{\text{ЭМГ}} - Z_{TT}^{\text{ЭМГ}} \cdot (N_K + \Pi_K) \cdot \left\{ Z_{NK} + (M_K - \Pi_K^t) \cdot Z_{TT}^{\text{ЭМГ}} \cdot (N_K + \Pi_K) \right\}^{-1} \cdot (M_K - \Pi_K^t) \cdot Z_{TT}^{\text{ЭМГ}} \quad (10)$$

$$E_{TT}^{*\text{ЭМГ}} = Z_{TT}^{\text{ЭМГ}} \cdot J_{TB} - Z_{TT}^{\text{ЭМГ}} \cdot (N_K + \Pi_K) \cdot \left\{ Z_{NK} + (M_K - \Pi_K^t) \cdot Z_{TT}^{\text{ЭМГ}} \cdot (N_K + \Pi_K) \right\}^{-1} \cdot \left\{ E_{NK} + (M_K - \Pi_K^t) \cdot Z_{TT}^{\text{ЭМГ}} \cdot J_{TB} \right\} \quad (11)$$

где Z_{NK} и E_{NK} — параметры к-й переносимой или растворяемой ветви; M_K и N_K — вектора управляющих связей от к-й переносимой ветви; Π_K — матрица главных сечений для к-й ветви.

Вывод: С помощью уравнений (10) и (11) выполняется расчет новых параметров ЭМГЭ при переносе II-рода к-й ветви дополнения. Алгоритм переноса с применением LU-разложения не требует операций обращения матриц и реализуется в виде компактной программы. Важно, что эти алгоритмы могут использоваться при многовариантных расчетах.

Выводы

1. Представлена матричная интерпретация преобразований переноса II-рода как коррекции параметров обратной матрицы на основе алгоритма Вудбери–Шермана–Моррисона.

2. Полученные выражения позволяют рассчитывать и корректировать параметры эквивалентных многомерных генераторов, используемых в диакоптических алгоритмах расчета сложных электрических цепей.

Список литературы

1. Шакиров М. А., Булавочкин В. П. Общая теория преобразования электрических схем — проблемы нелинейной электротехники : Тез. докл. II Всесоюз. научно-техн. конф. — Киев : Наукова думка, 1984. — Ч. I. — С. 24–25.
2. Шакиров М. А. Преобразования и диакоптика электрических цепей. — Ленинград : Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. — 196 с.
3. Евтушенко Ю. Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. — М. : Наука, 1982. — 432 с.
4. Woodbery M. Inverting Modified Matrices // Memorandum Report 42, Statistical Reseach Group, Princeton, 1950.
5. Sherman T., Morrisson W.T. Adjustment of on inverse matrix corresponding to change in one element of a given matrix. — Math. Statistics, 124. — 1950.
6. Сигорский В. П., Петренко А. И. Алгоритмы анализа электронных схем. — М. : Сов. Радио, 1976. — 608 с.

Булавочкин Валерий Петрович — канд. техн. наук, доцент, г. Ульяновск.
E-mail: ulgtu_ron@mail.ru.

НЕЯВНОЕ ВЫДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ УПРАВЛЯЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ В ПРОГРАММЕ CIRSYM¹

М. В. Недорезов, В. В. Филаретов

Рассмотрено применение нового аномального элемента — неудаляемого управляемого источника (нуллора с параметром), как в моделях активных элементов, так и в неявных формулах выделения параметров управляемых источников и двухполюсников. Обоснованы преимущества неявных формул выделения параметров для получения выражений, оптимальных по вычислительной сложности.

The paper describes the application of a new pathological elements — nullor with parameter, both in the models of active elements and implicit formulas for the allocation of parameters of controlled sources and one-port elements. The advantages of implicit formulas for the allocation of options to obtain expressions for optimal computational complexity is considered.

Символьный анализ и схемные определители. Разработка современных электро- и радиотехнических устройств и систем невозможна без использования автоматизированных систем проектирования. Представленные на рынке программы компьютерного анализа и моделирования электрических цепей основаны на использовании численных матричных методов. Поскольку задача анализа выполняется в практике проектирования многократно, то недостатком такого подхода являются большие вычислительные затраты на многократное формирование и решение численной модели при различных параметрах элементов.

Для решения широкого круга задач проектирования аналоговых цепей и систем более эффективными являются символьные функции, которые предусматривают однократное формирование и удобны для исследования известными методами математического анализа и получающими всё

¹ Поддержано Российским Фондом Фундаментальных Исследований (РФФИ), проект №15-07-05847.

большее распространение системами компьютерной алгебры. Генерация символьных выражений выполняется матричными, топологическими и схемными методами. Недостатком матричных и топологических методов является избыточность формируемых выражений, то есть наличие многочисленных слагаемых, равных по модулю, но противоположных по знаку, что обусловлено промежуточным звеном (матрицей или графом) при переходе от схемы к схемной функции или отклику.

Безызыбыточные компактные выражения получаются схемными методами, обеспечивающими прямой путь к результату анализа [1]. В этом случае для решения задачи теории электрических цепей не подбирается метод из арсенала математики, а разрабатывается специальный метод на собственно схемной основе, который оказывается более эффективным. Например, метод схемных определителей (МСО), не использующий каких-либо промежуточных моделей в виде матриц или графов и базирующийся на понятии схемного определителя, альтернативного матричному определителю, реализован в программе символьного анализа и диагностики CIRSYM [[http:// intersyn.net/cirsym.html](http://intersyn.net/cirsym.html)]. Эта программа не имеет аналогов в своем классе по числу режимов работы, набору линейных элементов и сложности моделируемых схем (сотни узлов и элементов) [2]. В частности, отказ от матричных представлений позволил в программе CIRSYM задавать параметры элементов, как проводимостями, так и сопротивлениями, допускать все типы управляемых источников и аномальных элементов.

Схемно-матричный символьный метод разложения определителей [3]. Этот метод реализован в новых версиях программы CIRSYM и сочетает два подхода: 1) схемный — для выделения произвольных линейных элементов; 2) матричный — для алгебраического разложения определителей производных схем, содержащих только аномальные элементы (нуллорные, зеркальные, нуллорно-зеркальные).

На втором этапе определители производных схем, соответствующих суммарно-разностным алгебраическим дополнениям и содержащих исключительно нуллорные и зеркальные элементы, раскладываются специализированным матричным алгоритмом [4]. Этот алгоритм использует опе-

рацию сравнения вместо трудоемкого сложения номеров строк и столбцов, восходящего к началам теории матриц.

Реализация схемно-матричного метода привела к многократному сокращению кода программы, прежде всего, за счет удаления ряда объемных функций выделения аномальных элементов [5], что повысило быстродействие программы CIRSYM и облегчило ее сопровождение. Однако сложность формул, генерируемых программой CIRSYM, попрежнему определяется степенью заполнения (разреженности) схемы, то есть степенью отличия ее от полной структуры.

Проблема состоит в том, что при увеличении сложности электрических цепей и систем в аналитическом виде вычислительные затраты растут по нелинейному или даже комбинаторному закону («проклятие размерности»), что ограничивает возможности символьного анализа и, тем более, подчиненных ему задач диагностики и синтеза. Полные схемы представляют наибольшую сложность для символьного анализа, поскольку невозможно их деление на сопоставимые по сложности части и, соответственно, многократное сокращение числа шагов разложения.

Например, выражение определителя полной u -схемы, содержащей 11 узлов, 55 проводимостей, 10 управляемых источников тока, полученное с помощью CIRSYM заняло около 100 Мб дисковой памяти. Поэтому важно уменьшить сложность результата в случаях, когда деление на подсхемы неэффективно.

Существующий набор аномальных нулловых и зеркальных элементов, ориентирован только на их использование в моделях активных компонентов [5]. При этом не учитываются требования к синтезу оптимальных выражений в традиционных формулах выделения параметров [6–8] — минимизация количества используемых скобок, избыточных умножений на 1 или -1 и т. д., что препятствует формированию компактных символьных выражений и ограничивает сложность символьного моделирования [2].

Целесообразно применение нового аномального элемента — взвешенного нуллора (нуллора с параметром) [9], который обобщает традиционный нуллок (идеальный усилитель Теллегена, 1954 г.) и может быть

использован, как в моделях активных элементов, так и в коде программ эффективного формульного вывода.

В данной статье предлагается на первом этапе схмно-матричного метода использовать неявное разложение схемных определителей на основе неудаляемого управляемого источника — нуллора с параметром [9], заменяющего (для экономии операций) традиционный нулор в формулах выделения по Фойснеру (1902–1904 гг.) [4, 5] и Хашемяну (1977 г.) [6].

Формируемое выражение теперь не только не будет содержать взаимно уничтожающихся слагаемых, но и, за счет использования неявных формул выделения, в результате будут отсутствовать избыточные пары скобок и множители вида «*1» и «*(-1)», обусловленные явным (традиционным — по Фойснеру) выделением параметров.

Предварительно нами установлено, что переход на неявные формулы выделения, как для двухполюсников (отказ от формул Фойснера), так и для управляемых источников, приводит к уменьшению длины упомянутого выше выражения определителя 11-узловой активной схемы на треть при сокращении времени генерации в 1,5 раза. При подключении бисекции по двум узлам разрыв между временем генерации по двум традиционным и по одной новой неявной формулой выделения увеличивается до 2,5 раз. *Таким образом, требуется обоснование для различных классов структур преимуществ неявных формул выделения с использованием взвешенного нуллора для получения выражений, близких к оптимальным по сложности, без деления на подсхемы по единой формуле для всех неидеальных элементов.*

К истокам схемного подхода. Минуло еще десятилетие со времени обсуждения достижений в области схемного подхода к символьному анализу электронных цепей [1]. Двадцать с лишним лет назад этот подход реализован в программе символьного анализа и диагностики CIRSYM (CIRcuit SYMbol), которая теперь имеет online-сервис на сайте <http://intersyn.net/cirsym.html>.

Напомним, что первоисточником схемного подхода, воплотившегося в методе схемных определителей, явились формулы *Фойснера* [6, 7]. *Фойснер* обратил внимание на трудности построения ССФ с помощью топологических формул *Кирхгофа* и *Максвелла*, объяснив в 1902 году, почему

они не находят применения у специалистов и отсутствуют в справочниках по физике [6].

Нахождение ССФ по *Фойснеру* предусматривает разложение определителей исходной схемы и производных от нее схем. Важно, что на каждом шаге расчета приходится иметь дело со схемой, менее сложной, чем исходная схема, а не с абстрактными сочетаниями ветвей исходной схемы. Схемный определитель в зависимости от типа элементов схемы раскрывается по одной из двух формул [6, 7]

$$\Delta = z\Delta^z + \Delta_z \quad (1)$$

или

$$\Delta = y\Delta_y + \Delta^y, \quad (2)$$

где нижний индекс при символе Δ указывает на замену y - или z -ветви идеальным проводником (замыкание), а верхний — на их удаление (размыкание).

Чтобы упростить разложение определителей сложных схем, *Фойснер* предложил следующие формулы [6]

$$\Delta = \Delta_1 \Delta_2 \quad (3)$$

и

$$\Delta = \Delta_1 \Delta_2(a,b) + \Delta_1(a,b) \Delta_2, \quad (4)$$

где Δ_1 и Δ_2 — определители первой и второй подсхем. Обозначение в скобках после Δ указывает на объединение внешних узлов a и b в соответствующих подсхемах. Формула (3) применяется, когда первая и вторая подсхемы имеют единственный общий узел. Для использования (4) необходимо, чтобы схема делилась на подсхемы по узлам a и b .

Рекурсивное применение формул (1)–(4) позволяет представить определитель схемы сразу в окончательной форме, то есть в компактном виде с вынесенными за скобки общими множителями. Между тем развернутые символьные выражения, составленные из произведений параметров ветвей деревьев и дополнений деревьев схемы по *Максвеллу* и *Кирхгофу*, нуждаются в дополнительных трудоемких преобразованиях.

Управляемые источники и формула выделения их параметров.

Сопротивление и проводимость являются частными случаями источника напряжения, управляемого током, (ИНУТ) и источника тока, управляемого напряжением, (ИТУН) соответственно. Схемы замещения представлены на рис. 1,а и рис. 1,б.



Рис. 1. Замещение сопротивления (а) и проводимости (б) управляемыми источниками

Наряду с ИТУН и ИНУТ, в практических схемах используются безразмерные типы управляемых источников: источник напряжения, управляемый напряжением, и источник тока, управляемый током. Четырем типам УИ соответствуют четыре типа схемных функций и откликов, которые подлежат нахождению в рамках теории электрических цепей. Поэтому метод схемных определителей (МСО) требует еще одну (пятую) базовую формулу — формулу выделения УИ.

Сорок лет назад *Хашемян* предложил формулу выделения параметра произвольного УИ на основе направленного нумерованного нуллора [8]. В соответствии с этой формулой определитель схемы

$$\Delta = \chi \Delta(\text{УИ} \Rightarrow \text{нуллор}) + \Delta(\chi=0), \quad (5)$$

где χ — параметр УИ; $\Delta(\text{УИ} \Rightarrow \text{нуллор})$ — определитель исходной схемы, в которой УИ заменен на нуллор, причем управляемая ветвь — на нора́тор, а управляющая ветвь — на нулла́тор; $\Delta(\chi=0)$ — определитель исходной схемы, в которой нейтрализован УИ.

Хашемян предложил использовать формулу (5) для одновременного разложения схемного определителя по параметрам всех n УИ, что требует перебора 2^n слагаемых и не обеспечивает формирование оптимальных по вычислительной сложности выражений. Формула *Хашемяна* оказалась незамеченной специалистами.

Неудаляемый управляемый источник (НУИ). В соответствии с (5) нуллок формально имеет параметр, равный единице. В [9] предложен другой аномальный элемент — неудаляемый управляемый источник (НУИ) — параметр которого может быть равным параметру любого элемента, который исключается из схемы замыканием, размыканием или обеими этими операциями. Генератор и приемник, образующие НУИ, аналогично норатору и нуллатору, нельзя ни замыкать, ни размыкать. Именно поэтому аномальный управляемый источник получил название неудаляемого УИ.

Понятие неудаляемого элемента плодотворно используется в других математических аппаратах — матриц и графов [10, 11]. В [10] введен «неудаляемый элемент матрицы», без которого определитель равен нулю. Аналогично этому «неудаляемая дуга» должна оставаться в графе до окончания его разложения (стягивается последней) [11].

Неявная формула выделения на основе НУИ отличается от формулы (5) первым слагаемым и имеет вид:

$$\Delta = \Delta(\chi \Rightarrow \text{НУИ}) + \Delta(\chi = 0), \quad (6)$$

где $\Delta(\chi \Rightarrow \text{НУИ})$ — определитель исходной схемы, в которой УИ заменен на НУИ, причем генератор УИ — на генератор НУИ, а приемник УИ — на приемник НУИ. Так спустя 20 лет после результата *Хашемяна* была предложена формула выделения УИ в неявном виде, когда вместо традиционного нуллора (без параметра) используется неудаляемый управляемый источник (НУИ) с параметром выделяемого элемента [9].

Определители простейших схем с нуллокром и НУИ показаны на рис. 2. Удобно рассматривать нуллок как частный случай НУИ при $\chi = 1$ и использовать это обобщающее название.



Рис. 2. Простейшие схемы с нуллокром и НУИ

Схемно-алгебраические выражения для выделения управляемых источников всех типов по формулам (5) и (6) показаны на рис. 3.

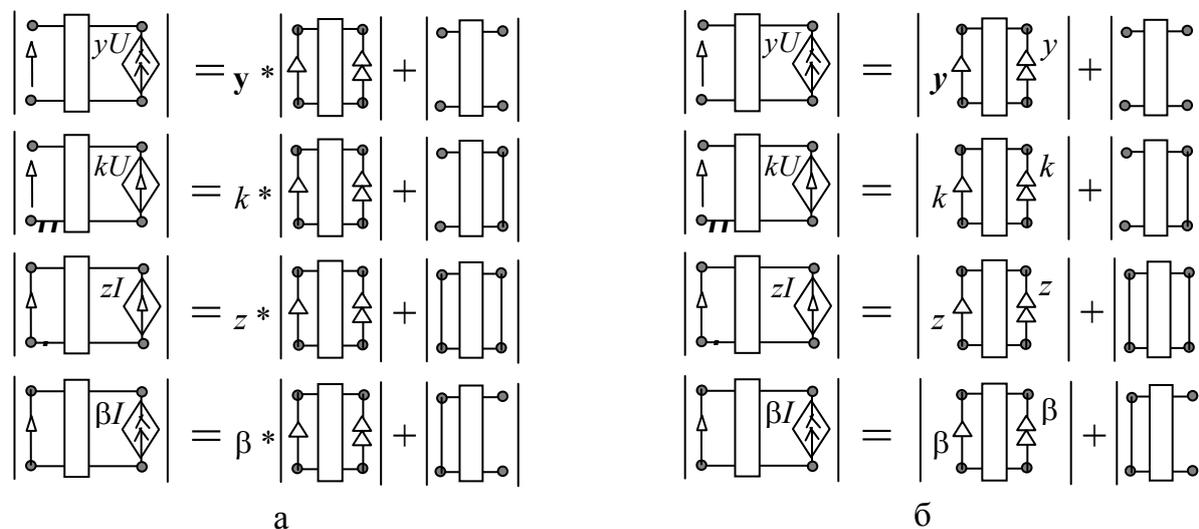


Рис. 3. Явное — с нуллором (а) и неявное — с НУИ (б) выделение параметров УИ

Нуллоры и НУИ изображены на рис. 3 одинаково, но рядом с НУИ указаны выделяемые параметры.

Оптимизация разложения схемных определителей. Предпочтительность использования МСО в конкуренции с матричными и графовыми методами определяется эффективностью программных реализаций. В программе CIRSYM изначально использовались явные формулы (1) и (2) для выделения двухполюсников и неявные формулы для выделения параметров УИ [2].

Выбор формулы (6) (рис. 3,б) вместо (5) (рис. 3,а) не случаен. Качество формулы определяется количеством используемых операций и пар скобок. Исключая частные случаи соединения, нельзя заранее знать, существует второе слагаемое в явных формулах (1), (2) и (5) или нет.

В неявной формуле (6) выделяемый параметр вместо вынесения за скобки оказывается параметром НУИ, который замещает УИ. Обработка НУИ выполняется на заключительных шагах разложения. Например, подразложения схемы часто завершаются схемами, показанными на рис. 4, где выделение параметра χ не потребовало пары скобок.

Параметр элемента, выделяемого по формуле (6), будет сохраняться на самой схеме, а при компьютерной реализации — в том же формате, что

и остальные элементы схемы. Например, структура CIRSYM для управляемого источника SOURCE {char v1; char v2; char v3; char v4; int kol; char *reb;} (номера узлов подключения, количество объединяемых элементов, обозначение параметра) будет описывать соответствующий НУИ после выполнения оператора act[first].kol= -act[first].kol.



Рис. 4. Образование короткозамкнутых и разомкнутых ветвей с выделением параметров

В случае рекурсивного применения явной формулы (5) второй сомножитель первого слагаемого автоматически заключается в скобки, хотя в этом сомножителе могут быть другие, кроме χ , общие множители. Эти общие множители, например, соответствующие последовательным и параллельным соединениям генераторов и приемников НУИ (рис. 4), могут быть записаны перед единственной парой скобок, минимизировав количество скобок и множителей вида 1 и -1 . Это позволило формуле (6) стать пятой формулой метода схемных определителей [12].

Разложение определителей аномальных схем из нуллов и НУИ.

В ходе выделения двухполюсников и УИ могут образовываться схемы из нуллов и (или) НУИ с большим количеством аномальных элементов, чем показанные на рис. 2. Определители схем, состоящих исключительно из нуллов, могут принимать значения 1, -1 и 0, то есть отличаться знаком. При наличии НУИ с неединичными параметрами модуль определителя будет равен произведению параметров НУИ.

В число аномальных элементов могут входить три типа зеркальных (нулловно-зеркальных) элементов [5]. В этом случае модуль определителя аномальной схемы может принимать значения кратные двум.

Учитывая многообразие аномальных элементов, нецелесообразно программировать на схемном уровне специальные формулы выделения [5]. Поэтому для схем из аномальных элементов был разработан алгебраический алгоритм [3], предусматривающий объединение аномальных эле-

ментов в многократное суммарно-разностное алгебраическое дополнение и его разложение без использования порядковой нумерации индексов [4].

Алгебраический блок в составе программы CIRSYM сокращает время генерации формул, что иллюстрируется в следующем разделе. Для оценки эффективности недавней версии программы в последнем столбце табл. 1 после символа «/» указано время при отключении соответствующей функции. Заметим, что для рассматриваемых тестовых схем длина формул при отключении алгебраического блока не изменяется.

Схемы из аномальных элементов могут образоваться в результате деления схемы на подсхемы по одному, двум — формулы (3) и (4) — или большему числу узлов [13]. В столбцах табл. 1 приводятся размер и время генерации формул при трёх вариантах деления схемы: по одному узлу, по одному и двум узлам, по одному, двум и трем узлам.

Анализ полных схем проводимостей с источниками тока, управляемыми напряжением. Полные схемы с большим числом узлов являются схемами, наиболее сложными для символьного анализа, что позволяет использовать их при сравнении программ [14].

Полная схема с q узлами включает $q(q-1)/2$ ветвей — число сочетаний из q по 2, то есть между каждой парой узлов имеется единственная ветвь. Чтобы придать полной схеме активный характер, к её узлам подключается некоторое соединение УИ, как показано на рис. 5 для девяти узлов. Пассивная подсхема этой схемы ($q=9$, 36 ветвей) обозначается в табл. 1 как «36g». Подключаемая активная подсхема содержит восемь ИТУН («8G»), соединение которых является удобным для воспроизведения при любом числе узлов.

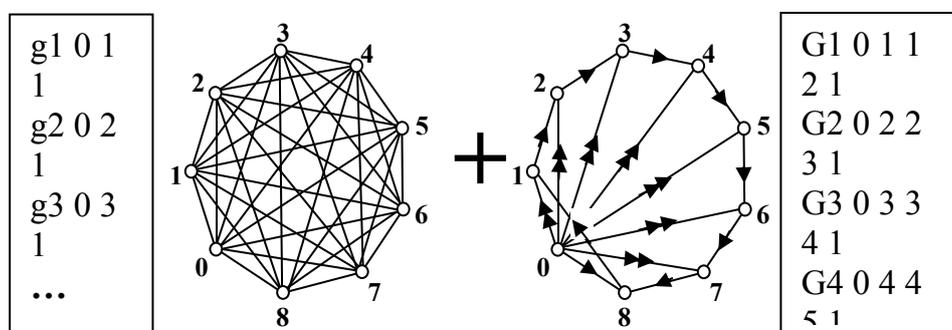


Рис. 5. Объединение пассивной подсхемы (36g) с активной подсхемой (8G)

В табл. 1 приводятся длина и время генерации формул определителей трех полных схем (36g, 45g, 55g) и трёх полных схем с ИТУН (36g+8G, 45g+9G, 55g+10G). Вычисления проводились на компьютере с тактовой частотой 2,4 ГГц. Видно, что подключение к схеме управляемых источников в несколько раз увеличивает сложность формулы определителя. При этом безусловны преимущества неявной формулы (6) в экономии операций.

Таблица 1. Размеры формул и время генерации определителей полных схем с ИТУН

Схе- мы	Фор- мулы	РЕЖИМ ПРОВЕДЕНИЯ БИСЕКЦИИ					
		по 2 и 3 узлам		по двум узлам		по одному узлу	
		Размер, байт	Вре- мя,с	Размер, байт	Время, с	Размер, байт	Время, с
36 g	(2)	1112617	2	1259123	2	1493681	1
	(6)	1188623	3	1317935	4	1516514	2
36 g, 8 G	(2) и (6)	3656222	13	4593764	18	6700063	13
	(6)	3116557	10	3968400	13/12	5036500	11/8
45 g	(2)	10509117	17	12336153	14	14603488	8
	(6)	11292564	45	12722196	39	14856172	14/19
45 g, 9 G	(2) и (6)	40837162	118	51438298	148/209	75218585	139/179
	(6)	33123596	94/127	42304383	109/162	54214397	81/113
55 g	(2)	114095104	106	132631782	113	157520979	80
	(6)	118585664	252	135618725	350	160413555	143
55 g, 10 G	(2) и (6)	488474918	1538	632554986	2475	921241876	1656/ 2253
	(6)	414372507	1004	530929172	1186	693045314	1036/ 1472

В табл. 2 приведены результаты расчетов по формулам из табл. 1 при всех параметрах, равных 1. Для полной схемы с 11 узлами и 55 ИТУН (строка «55 g, 10 G») выражения определителей длиной около 0,5–1 Гбт рассчитываются с погрешностью, поскольку 18-разрядной мантиссы интерпретатора не хватает для получения всех верных цифр. Наличие каких-либо ошибок в формулах маловероятно, поскольку предыдущие формулы табл. 1 также не маленькие и рассчитаны в трех режимах бисекции.

Таблица 2. Результаты вычислений по формулам из табл. 1

Схе- мы	Фор- мулы	РЕЖИМ ПРОВЕДЕНИЯ БИСЕКЦИИ		
		по 2 и 3 узлам	по двум узлам	по одному узлу
36 g	(1)	4782969	4782969	4782969
	(2)	4782969	4782969	4782969
36 g, 8 G	(1) и (2)	1864135	1864135	1864135
	(2)	1864135	1864135	1864135
45 g	(1)	100000000	100000000	100000000
	(2)	100000000	100000000	100000000
45 g, 9 G	(1) и (2)	38742049	38742049	38742049
	(2)	38742049	38742049	38742049
55 g	(1)	2357947691	2357947691	2357947691
	(2)	2357947691	2357947691	2357947691
55 g, 10 G	(1) и (2)	909090925	909090909	909090865
	(2)	909090909	909090925	909090937

Данные по символьному анализу сложных схем, представленные в табл. 1, позволяет сделать обобщающие заключения. Безусловно, предпочтительно использование неявной формулы выделения параметров УИ (6). Эта формула (при использовании преобразования на рис. 1) достаточно эффективна даже в схемах с двухполюсниками (без УИ), то есть вместо пяти формул в базовом МСО [12] можно оставить три формулы: (3), (4) и (6).

Выводы

1. Рассмотрено применение нового аномального элемента — неудаляемого управляемого источника (взвешенного нуллора — нуллора с параметром), как в моделях активных элементов, так и в неявных формулах выделения параметров управляемых источников и двухполюсников. Обоснованы преимущества неявных формул выделения параметров с неудаляемым управляемым источником для получения выражений, оптимальных по вычислительной сложности.

2. Реализован в программе CIRSYM вариант схемно-матричного символьного метода разложения определителей, состоящего в *выделении параметров элементов* и управляемых источников по неявным формулам

для приведения задачи символьного анализа к производным схемам, содержащим только взвешенные нуллары и другие аномальные элементы.

3. Показано, что применение неявных формул выделения всех параметров обеспечивает значительное (до двух и более раз) сокращение объема результата и времени генерации при анализе полных схем с большим числом узлов и управляемых источников.

4. Неявные формулы выделения приводят к схемам с аномальными элементами (нуллорами, неудаляемыми управляемыми источниками и зеркальными элементами). Определители таких схем раскрываются на основе алгебраического алгоритма, что снижает затраты времени примерно в 1,5 раза.

Список литературы

1. Филаретов В. В. Состояние и проблемы развития схемного подхода к символьному анализу электрических цепей // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей : Тр. международ. конф. «Континуальные алгебраические логики, исчисления и нейроинформатика в науке, технике и экономике — КЛИН–2007». — Т. 3. — С. 196–207.

2. Филаретов В. В. Программа символьного анализа CIRSYM: история создания, структура и функции // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей : Международ. сб. науч. тр. — Ульяновск : УлГТУ, 2010. — Вып. 10. — С. 158–171.

3. Недорезов М. В., Филаретов В. В. Алгебраический анализ зеркально-нуллорных схем на основе выделения аномальных элементов // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей : Международ. сб. науч. тр. — Ульяновск : УлГТУ, 2016. — Вып. 13. — С. 33–46.

4. Недорезов М. В., Филаретов В. В. Эффективные алгоритмы разложения матричных определителей // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей : Международ. сб. науч. тр. — Ульяновск : УлГТУ, 2015. — Вып. 12. — С. 195–215.

5. Филаретов В. В. О взаимосвязи нуллорных и зеркальных аномальных элементов электрических цепей // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей : Международ. сб. науч. тр. — Ульяновск : УлГТУ, 2015. — Вып. 12. — С. 29–50.

6. Feussner W. Ueber Stromverzweigung in netzformigen Leitern // Annalen der Physik. — 1902. — Bd 9, N13. — S. 1304–1329.

7. Feussner W. Zur Berechnung der Stromstarke in netzformigen Leitern // Annalen der Physik. — 1904. — Bd 15, N12. — S. 385–394.

8. Hashemian R. Symbolic representation of network transfer functions using norator-nullator pairs // Electronic circuits and systems. — 1977. — Vol. 1, No. 6 (November). — P. 193–197.

9. Филаретов В. В. Схемный подход к символьному анализу активных электрических цепей // Электроника и связь: Науч.-техн. сб. — Киев, 1997. — Вып. 2. — Ч. 1. — С. 97–101.

10. Филаретов В. В. Схемное отображение матрицы для символьного решения систем линейных алгебраических уравнений // Логико-алгебраические методы, модели, прикладные применения : Тр. Международ. конф. КЛИН–2001. — Ульяновск : УлГТУ, 2001. — Т. 3. — С. 13–15.

11. Тимкин Ю. В., Филаретов В. В., Шеин Д. В. Неудаляемые дуги в унисторных графах и их применение для раскрытия суммарных алгебраических дополнений // Схемно-топологические модели активных электрических цепей: синтез, анализ, диагностика : Тр. Международ. конф. «Континуальные алгебраические логики, исчисления и нейроинформатика в науке, технике и экономике — КЛИН–2006». — Т. 4. — С. 82–86.

12. Миланцей Т., Славский Г. Н., Филаретов В. В. Пять формул метода схемных определителей // Схемно-топологические модели активных электрических цепей: синтез, анализ, диагностика : Тр. международ. конф. «Континуальные алгебраические логики, исчисления и нейроинформатика в науке, технике и экономике — КЛИН–2006». — Т. 3. — С. 102–113.

13. Филаретов В. В. Метод двоичных векторов для топологического анализа электронных схем по частям // Электричество. — 2001. — №8. — С. 33–42.

14. Филаретов В. В. Оптимальная реализация дешифраторного метода анализа электрических цепей // Электричество. — 1996. — №10. — С. 43–49.

Недорезов Максим Владимирович — магистрант факультета аэромеханики и летательных аппаратов Московского физико-технического Института.

E-mail: nedmv@rambler.ru.

ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ РАСЧЕТЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ НЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАМЫКАНИЯХ В ТРЕХФАЗНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ С ВЗАИМОИНДУКТИВНОСТЯМИ²

С. А. Курганов, В. А. Соловьев

Операторные модели линий передачи с сосредоточенными взаимными индуктивностями, полученные по аналогии с комплексными моделями, применены для расчета переходных процессов при несимметричных коротких замыканиях. Расчет выполняется операторным методом с помощью программы символьного анализа CIRSYM.

Operator models of transfer lines with mutually inductances are considered for the calculation of transients with asymmetric short circuits. The calculation is an operational method using the program for symbolic analysis CIRSYM.

Анализ переходных процессов в трехфазных электрических цепях при коммутациях и коротких замыканиях позволяет обеспечить надежную работу электротехнического и энергетического оборудования. Наиболее сложным оказывается расчет при несимметричных замыканиях, при которых в отличие от симметричных замыканий [1] не удается развязать взаимноиндуктивные связи и свести расчет к однофазной цепи. Расчет таких цепей выполняется, как правило, численными методами [2]. Однако точный и детальный анализ может быть выполнен только аналитическими методами.

Известны комплексные модели электрических линий передачи с сосредоточенными взаимноиндуктивностями, которые используются для анализа установившихся режимов после однофазного замыкания [3]. При этом один из линейных проводов разделяется на две части, каждая из которых образует индуктивную связь с соответствующими частями других линейных проводов. Комплексное сопротивление индуктивной связи

² Поддержано Российским Фондом Фундаментальных Исследований (РФФИ), проект №15-07-05847.

этого провода также делится на две части, пропорциональные отрезкам проводов.

В настоящей работе комплексные модели с учетом аналогии между комплексными и операторными изображениями представляются в операторной форме и используются для аналитического расчета переходных процессов в трехфазных цепях при несимметричных замыканиях.

Операторные модели линий для анализа несимметричных замыканий. Операторная модель трехпроводной линии с дополнительным отводом (рис. 1) для анализа однофазного замыкания получена из комплексной модели линии путем замены комплексной частоты $j\omega$ оператором Лапласа p и добавлением соответствующих операторных источников ЭДС, отражающих начальные условия.

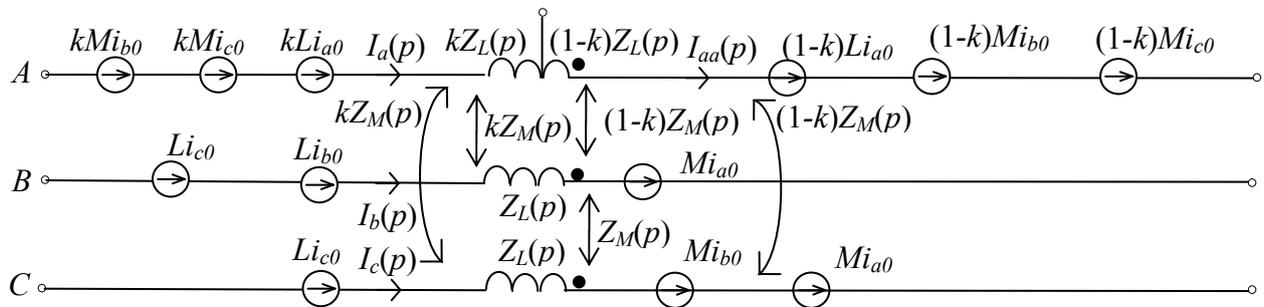


Рис. 1. Операторная модель трехпроводной линии для расчета трехфазных цепей при однофазном коротком замыкании

На рис. 1: параметры L и M — коэффициенты само- и взаимной индукции для исходной симметричной трехпроводной линии; сопротивления $Z_L(p) = pL$, $Z_M(p) = pM$ — соответствующие операторные сопротивления симметричной линии; k — относительная длина отрезка линии от начала (слева) до точки замыкания; i_{a0} , i_{b0} , i_{c0} — значения токов в момент замыкания.

Для автоматизированного формирования операторных токов и напряжений необходимо применить программу символьного анализа CIRSYM [4], для которой взаимной индуктивности на рис. 1 преобразуются в источники напряжения, управляемые током (ИНУТ). Полученная при этом операторная модель линии представлена на рис. 2, где индуктивности $L_1=kL$ и $L_2=(1-k)L$; параметры ИНУТ $H_{ab} = H_{ac} = H_{ba} = H_{ca} = kpM$; $H_{aab} = H_{aac} = H_{baa} = H_{caa} = (1-k)pM$; $H_{bc} = H_{cb} = pM$; I_a , I_b , I_c , I_{aa} — операторные токи.

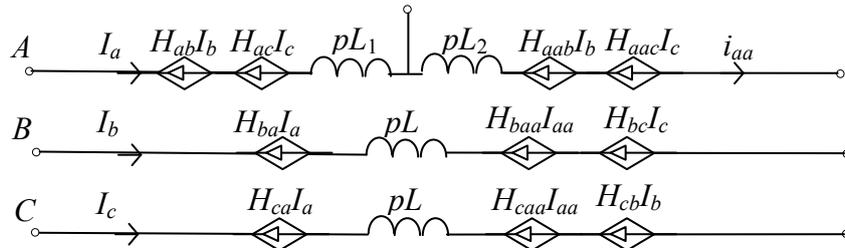


Рис. 2. Операторная модель линии на основе ИНУТ для анализа однофазного замыкания: источники ЭДС для начальных условий не показаны

Модель линии передачи при двух разделенных на части проводах для анализа двухфазных замыканий получается аналогично. При этом появляется дополнительный управляющий ток и соответствующие ИНУТ (рис. 3).

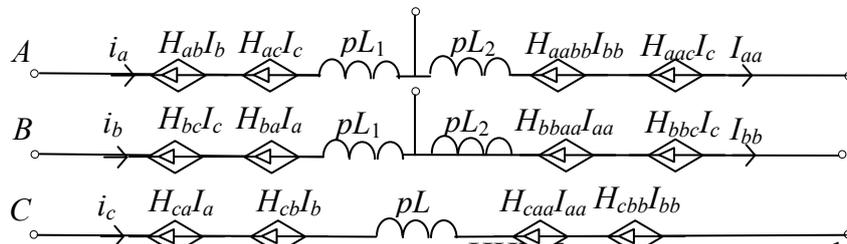


Рис. 3. Операторная модель линии на основе ИНУТ для анализа двухфазного замыкания: источники ЭДС для учета начальных условий не показаны

Параметры ИНУТ на рис. 3 имеют вид $H_{ab}=H_{ac}=H_{ba}=H_{bc}=H_{ca}=H_{cb}=kpM$; $H_{aabb}=H_{aac}=H_{bbaa}=H_{bbc}=H_{caa}=H_{cbb}=(1-k)pM$.

Расчет переходного процесса в трехфазной электрической цепи при однофазном коротком замыкании операторным методом. Трехфазная симметричная электрическая цепь с заземленной нейтралью представлена на рис. 4,а в виде схемы замещения с сосредоточенными параметрами. Генератор является идеальным с фазной ЭДС $E = 10$ кВ и частотой $f = 50$ Гц. Параметры линии и нагрузки: $R_{л} = 2$ Ом; $L = 190$ мГн; $M = 35$ мГн; $R_{н} = 20$ Ом. В цепи наблюдается однофазное короткое замыкание на землю через сопротивление $R_0 = 0.2$ Ом. Точка замыкания находится на середине линии передачи. Требуется найти функции переходных токов.

Схема замещения для расчета (рис. 4,б) получена с помощью модели на рис. 2. Параметры ИНУТ имеют вид (все численные значения здесь и далее приведены в основных единицах системы СИ):

$$\begin{aligned}
H_{ab}=H_{ac}=H_{ba}=H_{ca}=H_{aab}=H_{aac}=H_{baa}=H_{caa}=pM/2=0.0175p; \\
H_{bc}=H_{cb}=pM=0.035p;
\end{aligned}
\tag{1}$$

начальные значения токов с учетом установившегося режима до замыкания —

$$i_{a0}=-241.1927354; i_{b0}=26.22593104; i_{c0}=214.9668045; \tag{2}$$

операторные функции ЭДС –

$$\begin{aligned}
E_A(p)&=4.442882938 \cdot 10^6 / (p^2 + 98696.04404); \\
E_B(p)&=-7071.067810 (1.732050808p + 314.1592654) / (p^2 + 98696.04404); \\
E_C(p)&=7071.067810 (1.732050808p - 314.1592654) / (p^2 + 98696.04404).
\end{aligned}
\tag{3}$$

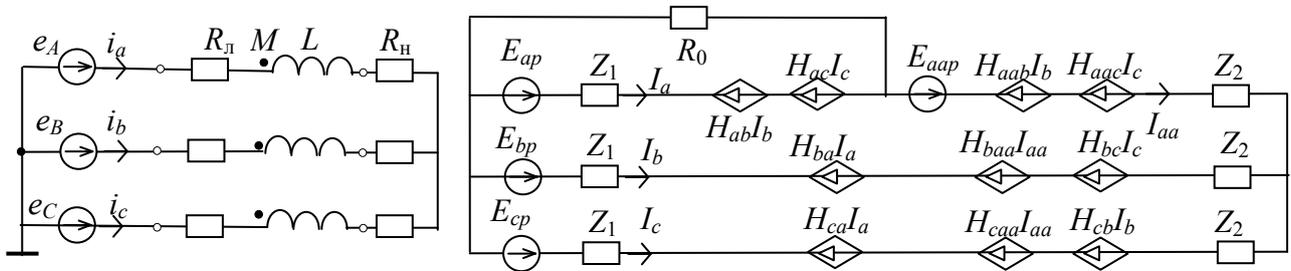


Рис. 4. Симметричная трехфазная цепь с взаимными индуктивностями (а) и ее операторная схема при однофазном замыкании на землю (б)

Символьные операторные выражения для токов формируются по схеме на рис. 4,б, в которой приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
Z_1=R_{\Gamma}/2+pL/2; Z_2=R_H+R_{\Gamma}/2+pL/2; E_{ap}=E_A(p)+Li_{a0}/2+Mi_{b0}/2+Mi_{c0}/2; \\
E_{bp}=E_B(p)+Li_{b0}+Mi_{a0}+Mi_{c0}; E_{cp}=E_C(p)+Li_{c0}+Mi_{a0}+Mi_{b0}; \\
E_{aap}=Li_{a0}/2+Mi_{b0}/2+Mi_{c0}/2.
\end{aligned}
\tag{4}$$

Операторные токи, полученные по программе CIRSYM на сайте <http://intersyn.net/cirsym.html>, приведены в Приложении. После подстановки в них с помощью системы Maple [5] символьных выражений для параметров ИТУН из (1), а также сопротивлений $Z_1=R_1+pL/2$ и $Z_2=R_2+pL/2$, где $R_1=R_{\Gamma}/2$ и $R_2=R_{\Gamma}/2 + R_H$, получим следующие выражения операторных токов (индексы записаны в одну строку с символами, как в Maple):

$$I_a = (((-E_{bp}-E_{cp}+2*E_{aap}-2*E_{ap})^*M+4*E_{ap}*L)^*p+(4* E_{aap} +4*E_{ap}-2*E_{bp}-2*E_{cp})^*R_0+2*E_{ap}^*(R_1+3*R_2))/D_1; \quad (5)$$

$$I_b = (1/4)^*((3*(L-M))^*((-2/3)*E_{aap}+E_{bp}-(1/3)*E_{cp})^*L-(2/3*(E_{ap}-(1/2)*E_{bp}+(1/2)*E_{cp}))^*M)^*p^2+(((8*E_{bp}-2*E_{cp}-6*E_{aap})^*L-2*M*(E_{ap}+2*E_{bp}-2*E_{aap}))^*R_1+((-4*E_{ap}+8*E_{bp}-4*E_{cp}-4*E_{aap})^*R_0+4*R_2*(E_{bp}-(1/2)*E_{cp}-(1/2)*E_{aap}))^*L+(4*((E_{ap}-2*E_{bp}+E_{cp}+E_{aap})^*R_0-(1/2)*E_{ap}*R_2))^*M)^*p+(4*E_{bp}-4*E_{aap})^*R_1^2+((-4*E_{ap}+8*E_{bp}-4*E_{cp}-4*E_{aap})^*R_0+8*R_2*(E_{bp}-(1/2)*E_{cp}-(1/2)*E_{aap}))^*R_1-4*R_0*R_2*(E_{ap}-2*E_{bp}+E_{cp}+E_{aap}))/D_2; \quad (6)$$

$$I_c=(1/4)^*(-(L-M)^*(E_{bp}-3*E_{cp}+2*E_{aap})^*L+2*M*(E_{ap}+(1/2)*E_{bp}-(1/2)*E_{cp}))^*p^2+((-2*E_{bp}+8*E_{cp}-6*E_{aap})^*L-2*M*(E_{ap}+2*E_{cp}-2*E_{aap}))^*R_1+((-4*E_{ap}-4*E_{bp}+8*E_{cp}-4*E_{aap})^*R_0-2*R_2*(E_{bp}-2*E_{cp}+E_{aap}))^*L+(4*((E_{ap}+E_{bp}-2*E_{cp}+E_{aap})^*R_0-(1/2)*R_2*E_{ap}))^*M)^*p+(4*E_{cp}-4*E_{aap})^*R_1^2+((-4*E_{ap}-4*E_{bp}+8*E_{cp}-4*E_{aap})^*R_0-4*R_2*(E_{bp}-2*E_{cp}+E_{aap}))^*R_1-4*R_0*R_2*(E_{ap}+E_{bp}-2*E_{cp}+E_{aap}))/D_2; \quad (7)$$

$$I_{aa}=-1/2)^*((E_{bp}+E_{cp}-2*E_{aap})^*L-2*M*E_{ap})^*p+(2*E_{bp}+2*E_{cp}-4*E_{aap})^*R_1-(4*(E_{aap}+E_{ap}-(1/2)*E_{bp}-(1/2)*E_{cp}))^*R_0)/D_1, \quad (8)$$

где $D_1=((L-M)^*(L+(1/2)*M)^*p^2+(((5/2)*L-M)^*R_1+((3/2)*R_2+3*R_0)^*L-3*M*R_0)^*p+R_1^2+(3*R_0+3*R_2)^*R_1+3*R_0*R_2$; $D_2=D_1*((L-M)^*p+R_1+R_2)$.

Анализируемая схема на рис. 4,б обладает третьим порядком сложности — при четырех индуктивностях имеет одно индуктивное сечение. Однако операторные выражения (5) и (8) для токов I_a и I_{aa} содержат знаменатель второго порядка, поскольку имеют общий для числителя и знаменателя сокращающийся множитель $((L-M)p+R_1+R_2)$. Поэтому составляющая, соответствующая корню $p=-\frac{R_1+R_2}{L-M}$, отсутствует в функциях этих токов.

При этом в токах I_b и I_c эта составляющая имеет ненулевое символьное выражение. Такое исследование можно было сделать только при символьном решении задачи. При численном и численно-символьном, в том числе, операторном решении составляющая корня $p=-\frac{R_1+R_2}{L-M}$ присутствует в токах I_a , I_{aa} и отражает погрешность численного решения.

Численно-символьные операторные выражения получаются после подстановки в (5)–(8) численных значений параметров, начальных токов (2) и операторных функций из формул (1) и (3):

$$I_a = \frac{[-0.70710678 \cdot (54.85282815 p^3 + 8617.8419 p^2 - 5.974516228 \cdot 10^6 p - 1.178921949 \cdot 10^9)]}{(0.1608125000 p^2 + 32.59000000 p + 386.0000000) \cdot (p^2 + 98696.04404)}; \quad (9)$$

$$I_b = \frac{[0.70710678 \cdot (0.924479774 p^4 - 2802.87265 p^3 - 7.90172792 \cdot 10^5 p^2 - 5.723506667 \cdot 10^7 p - 5.948139053 \cdot 10^8)]}{[(0.1608125000 p^2 + 32.59000000 p + 386.0000000) \cdot (0.155000 + 22) \times (p^2 + 98696.04404)]}; \quad (10)$$

$$I_c = \frac{[0.70710678 \cdot (7.57770859 \cdot p^4 + 4116.1683 \cdot p^3 + 1.011395106 \cdot 10^6 \cdot p^2 + 8.921145369 \cdot 10^7 p + 9.813439356 \cdot 10^8)]}{[(0.1608125000 p^2 + 32.59000000 p + 386.0000000) \cdot (0.155000 + 22) \times (p^2 + 98696.04404)]}; \quad (11)$$

$$I_{aa} = \frac{[-0.70710678 \cdot (54.852828 p^3 + 687.3125459 p^2 + 1.329686697 \cdot 10^6 p + 1.75695468 \cdot 10^7)]}{(0.1608125000 p^2 + 32.59000000 p + 386.0000000) \cdot (p^2 + 98696.04404)}; \quad (12)$$

Токи (9)–(12) преобразуем с помощью Maple во временные функции

$$i_a(t) = -497.5483134 \cos(314.1592654t) + 33.98094951 \sin(314.1592654t) + 1.763769234 \cdot 10^{-55} \exp(-101.3291877t) (1.680311057 \cdot 10^{57} \sinh(88.69776411t) + 1.453453055 \cdot 10^{57} \cosh(88.69776411t)); \quad (13)$$

$$i_b(t) = -2.862736349 \cdot 10^{-7} \exp(-141.9354839t) - 249.2346281 \sin(314.1592654t) - 27.80788520 \cos(314.1592654t) + 8.79437486010 \cdot 10^{-35} \exp(-101.3291877t) \cdot (-6.122099684 \cdot 10^{35} \sinh(88.69776411t) + 6.144133875 \cdot 10^{35} \cosh(88.69776411t)); \quad (14)$$

$$i_c(t) = 1.682674772 \cdot 10^{-7} \exp(-141.9354839t) + 168.5234441 \sin(314.1592654t) + 160.9329883 \cos(314.1592654t) + 3.517749944 \cdot 10^{-34} \exp(-101.3291877t) \cdot (-1.530524904 \cdot 10^{35} \sinh(88.69776411t) + 1.536033452 \cdot 10^{35} \cosh(88.69776411t)); \quad (15)$$

$$i_{aa}(t) = -133.1251031 \cos(314.1592654t) + 80.71118406 \sin(314.1592654t) + 3.380557696 \cdot 10^{-32} (3.185275572 \cdot 10^{33} \sinh(88.69776411t) - 3.196739771 \cdot 10^{33} \cosh(88.69776411t)) \exp(-101.3291877t). \quad (16)$$

Графики токов по формулам (13)–(16) приведены на рис. 5,а. Наблюдается хорошее соответствие функций (13)–(16) с соответствующими численными функциями на рис. 5,б, построенными по программе Simulink [2]. Так, ударный ток I_{a_max} имеет значения 739.9 и 735.4 по функции (13) и по программе Simulink соответственно. При этом в первом значении 3 первых цифры являются точными, поскольку получены по аналитической формуле.

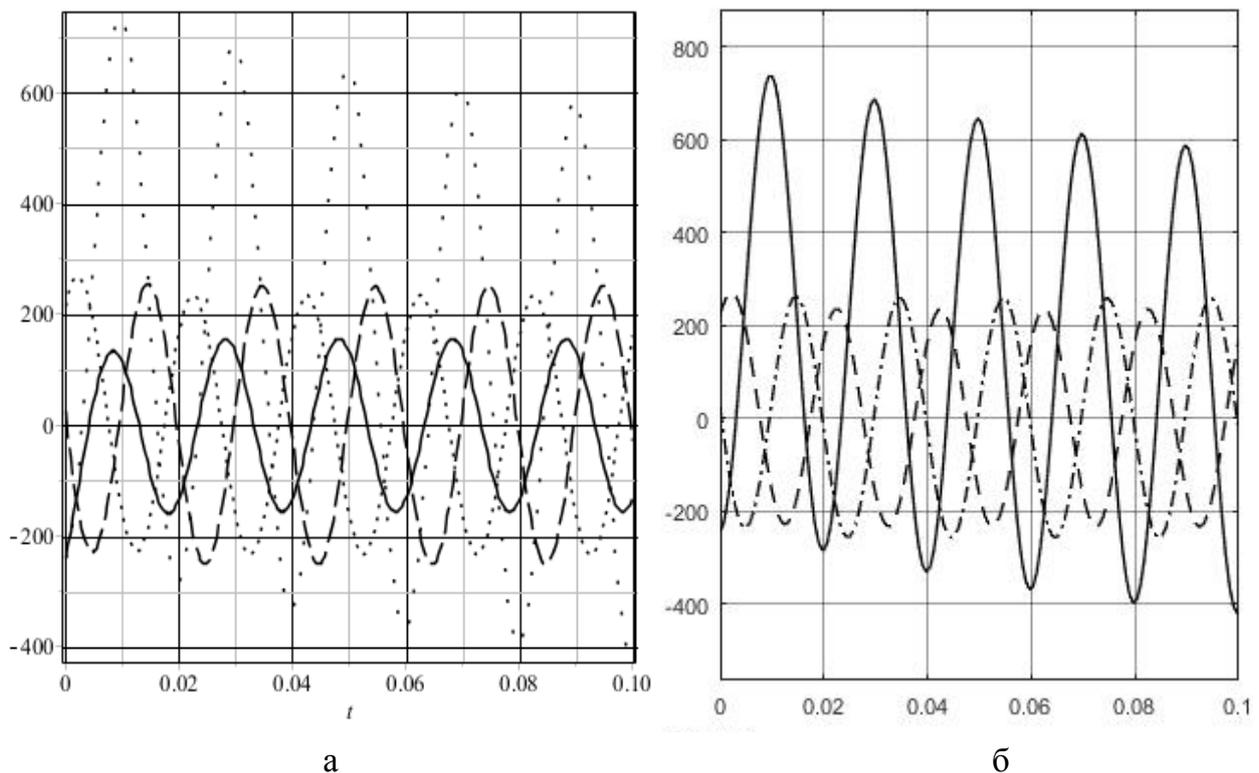


Рис. 5. Графики токов: а — i_a (· · ·), i_b (---), i_c (···), i_{aa} (—) по формулам (13)–(16); б — i_a (—), i_b (---), i_c (· - · - ·) по программе Simulink

Как видно из графиков, наиболее интенсивно переходный процесс проходит на генераторном участке фазы А, при этом ударный коэффициент составляет 1,7.

Выводы. 1. Операторные модели линий с индуктивными связями, полученные по аналогии с комплексными моделями, позволяют провести аналитический расчет переходных процессов при несимметричных — однофазных и двухфазных — коротких замыканиях в трехфазных цепях.

2. С помощью символьных выражений токов и напряжений в отличие от численных функций можно выполнить детальный анализ переходных процессов каждого тока и напряжения цепи и выявить тождественно нулевые составляющие, которые появляются при наличии одинаковых сомножителей в числителе и знаменателе операторных функций.

3. Для автоматизации формирования операторных функций искомым токов и напряжений удобно применять программу символьного анализа CIRSYM, которая не требует построения уравнений электрической цепи.

Приложение. Операторные выражения токов в схеме на рис. 4,б по CIRSYM

В приведенных ниже формулах цифры 1, 2, 3 и 4 при символах Н соответствуют а, b, с и аа на рис. 4,б.

$$I_a = (((2 * E_{ap} - E_{bp} - E_{cp} + 2 * E_{aap}) * Z_1 + (2 * E_{ap} - E_{bp} - E_{cp} + 2 * E_{aap}) * Z_2 + (-E_{bp} + E_{cp}) * H_{12} + (E_{bp} - E_{cp}) * H_{13} + (-H_{23} - H_{32}) * E_{ap} + (-E_{bp} + E_{cp}) * H_{42} + (E_{bp} - E_{cp}) * H_{43} + (E_{cp} - E_{aap}) * H_{23} + H_{32} * (E_{bp} - E_{aap})) * R_0 + Z_1^2 * E_{ap} + (4 * Z_2 * E_{ap} + (-E_{bp} + E_{aap}) * H_{12} + (-E_{cp} + E_{aap}) * H_{13} - E_{ap} * (H_{24} + H_{34} + H_{42} + H_{43})) * Z_1 + 3 * Z_2^2 * E_{ap} + ((-2 * E_{bp} + E_{cp} + E_{aap}) * H_{12} + (E_{bp} - 2 * E_{cp} + E_{aap}) * H_{13} - E_{ap} * (H_{23} + H_{24} + H_{32} + H_{34} + H_{42} + H_{43})) * Z_2 + ((-E_{cp} + E_{aap}) * H_{24} + (E_{bp} - E_{aap}) * H_{34} + (E_{bp} - E_{cp}) * H_{43} + (E_{cp} - E_{aap}) * H_{23}) * H_{12} + ((E_{cp} - E_{aap}) * H_{24} + (-E_{bp} + E_{aap}) * H_{34} + (-E_{bp} + E_{cp}) * H_{42} + H_{32} * (E_{bp} - E_{aap})) * H_{13} - ((-H_{32} + H_{42} - H_{43}) * H_{24} + (-H_{23} - H_{42} + H_{43}) * H_{34} - H_{23} * H_{42} + H_{32} * (H_{23} - H_{43})) * E_{ap}) / D;$$

$$I_b = (((-E_{ap} + 2 * E_{bp} - E_{cp} - E_{aap}) * Z_1 + (-E_{ap} + 2 * E_{bp} - E_{cp} - E_{aap}) * Z_2 + (-E_{ap} + E_{cp} - E_{aap}) * H_{21} + (E_{ap} - E_{bp} + E_{aap}) * H_{31} + (-E_{bp} + E_{cp}) * H_{13} + (-E_{ap} + E_{cp} - E_{aap}) * H_{24} + (E_{ap} - E_{bp} + E_{aap}) * H_{34} + (-E_{bp} + E_{cp}) * H_{43} + H_{23} * (E_{ap} - E_{cp} + E_{aap})) * R_0 + (E_{bp} - E_{aap}) * Z_1^2 + ((2 * E_{bp} - E_{cp} - E_{aap}) * Z_2 - E_{ap} * H_{21} + (E_{cp} - E_{aap}) * H_{24} + (-E_{bp} + E_{aap}) * H_{34} + (-E_{bp} + E_{cp}) * H_{43} - (E_{cp} - E_{aap}) * H_{23}) * Z_1 - E_{ap} * (2 * H_{21} - H_{31}) * Z_2 + ((E_{cp} - E_{aap}) * H_{13} + E_{ap} * (H_{34} + H_{43})) * H_{21} + ((-E_{bp} + E_{aap}) * H_{13} + E_{ap} * (H_{23} - H_{24} - H_{43})) * H_{31}) / D;$$

$$I_c = (((-E_{ap}-E_{bp}+2*E_{cp}-E_{aap})*Z_1+(-E_{ap}-E_{bp}+2*E_{cp}-E_{aap})*Z_2+(E_{ap}-E_{cp}+E_{aap})*H_{21}+(-E_{ap}+E_{bp}-E_{aap})*H_{31}+(E_{bp}-E_{cp})*H_{12}+(E_{ap}-E_{cp}+E_{aap})*H_{24}+(-E_{ap}+E_{bp}-E_{aap})*H_{34}+(E_{bp}-E_{cp})*H_{42}+H_{32}*(E_{ap}-E_{bp}+E_{aap}))*R_0+(E_{cp}-E_{aap})*Z_1^2+((-E_{bp}+2*E_{cp}-E_{aap})*Z_2-E_{ap}*H_{31}+(-E_{cp}+E_{aap})*H_{24}+(E_{bp}-E_{aap})*H_{34}+(E_{bp}-E_{cp})*H_{42}-H_{32}*(E_{bp}-E_{aap}))*Z_1+ E_{ap}*(H_{21}-2*H_{31})*Z_2+((-E_{cp}+E_{aap})*H_{12}+E_{ap}*(H_{32}-H_{34}-H_{42}))*H_{21}+H_{31}*((E_{bp}-E_{aap})*H_{12}+E_{ap}*(H_{24}+H_{42}))/D;$$

$$I_{aap} = (((2*E_{ap}-E_{bp}-E_{cp}+2*E_{aap})*Z_1+(2*E_{ap}-E_{bp}-E_{cp}+2*E_{aap})*Z_2+(-E_{bp}+E_{cp})*H_{12}+(E_{bp}-E_{cp})*H_{13}+(-E_{bp}+E_{cp})*H_{42}+(E_{bp}-E_{cp})*H_{43}+(-E_{ap}+E_{cp}-E_{aap})*H_{23}-H_{32}*(E_{ap}-E_{bp}+E_{aap}))*R_0+(-E_{bp}-E_{cp}+2*E_{aap})*Z_1^2+((-E_{bp}-E_{cp}+2*E_{aap})*Z_2+E_{ap}*H_{21}+E_{ap}*H_{31}+(-E_{bp}+E_{cp})*H_{42}+(E_{bp}-E_{cp})*H_{43}+(E_{cp}-E_{aap})*H_{23}+H_{32}*(E_{bp}-E_{aap}))*Z_1+E_{ap}*(H_{21}+H_{31})*Z_2+((E_{cp}-E_{aap})*H_{12}+(-E_{cp}+E_{aap})*H_{13}-E_{ap}*(H_{32}-H_{42}+H_{43}))*H_{21}-((E_{bp}-E_{aap})*H_{12}+(-E_{bp}+E_{aap})*H_{13}+E_{ap}*(H_{23}+H_{42}-H_{43}))*H_{31}/D,$$

где $D = ((3*Z_1^2+(6*Z_2-H_{12}-H_{13}-H_{21}-H_{23}-H_{24}-H_{31}-H_{32}-H_{34}-H_{42}-H_{43})*Z_1+3*Z_2^2+(-H_{23}-H_{12}-H_{13}-H_{21}-H_{34}-H_{24}-H_{31}-H_{32}-H_{42}-H_{43})*Z_2+(-H_{21}+H_{23}-H_{24}+H_{31}+H_{34})*H_{12}+(H_{21}+H_{24}-H_{31}+H_{32}-H_{34})*H_{13}+(H_{32}-H_{42}+H_{43})*H_{24}+(H_{23}+H_{42}-H_{43})*H_{34}+(-H_{21}+H_{23}+H_{31})*H_{42}+(H_{21}-H_{31}+H_{32})*H_{43}+(H_{31}-H_{32})*H_{23}+H_{21}*H_{32})*R_0+Z_1^3+(4*Z_2-H_{24}-H_{34}-H_{42}-H_{43})*Z_1^2+(3*Z_2^2+(-H_{23}-H_{24}-H_{32}-H_{34}-H_{42}-H_{43})*Z_2-H_{21}*H_{12}-H_{31}*H_{13}+(H_{32}-H_{42}+H_{43})*H_{24}+(H_{23}+H_{42}-H_{43})*H_{34}+H_{23}*H_{42}-H_{32}*(H_{23}-H_{43}))*Z_1+((-2*H_{21}+H_{31})*H_{12}+H_{13}*(H_{21}-2*H_{31}))*Z_2+(-H_{24}*H_{31}+H_{21}*H_{34}+(H_{21}-H_{31})*H_{43}+H_{23}*H_{31})*H_{12}+(H_{24}*H_{31}-H_{21}*H_{34}+(-H_{21}+H_{31})*H_{42}+H_{21}*H_{32})*H_{13}).$

Список литературы

1. Канов Л. Н., Костюков В. В. Применение метода схемных коэффициентов к анализу переходных процессов в симметричных трехфазных цепях // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей : Международ. сб. науч. тр. — Вып. 13. — Ульяновск : УЛГТУ, 2016. — С. 56–62.
2. Черных И. В. Моделирование электротехнических устройств в MatLab, SimPowerSystems и Simulink. — М. : ДМК Пресс, 2008. — 288 с.
3. Шакиров М. А. Системные схемы замещения трехфазных машин и их применение для расчета несимметричных режимов электрических систем // Электротехника. — 2003. — №10. — С. 26–35.
4. Филаретов В. В. Программа символьного анализа CIRSYM: история создания, структура и функции // Синтез, анализ и диагностика элект-

ронных цепей : Международ. сб. науч. тр. — Ульяновск : УлГТУ, 2010. — Вып. 10. — С. 158–171.

5. Дьяконов В. П. Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании. — М. : Солон-Пресс, 2006. — 720 с.

Соловьев Владимир Алексеевич — студент второго курса энергетического факультета Ульяновского государственного технического университета.

E-mail: soloviev247@yandex.ru.

ОПТИМИЗАЦИЯ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ³

К. С. Горшков, С. А. Курганов, В. В. Филаретов

Рассмотрены формулы на основе суммарных алгебраических дополнений (МСАД) для формирования полиномиальных функций относительной чувствительности, учитывающие особенности структуры схемы и расположение варьируемого элемента. Предложены МСАД-формулы для каскадных схем, позволяющие исключить избыточные сомножители и получить компактные полиномиальные функции относительной чувствительности.

Formulas to get the symbolic functions of the relative sensitivity are generalized on arbitrary parameters using higher order summative cofactors (HOSC). Expansion of the HOSC by the method of circuit determinants reduces the amount of calculations for formation free-cancelled expressions. Accounting topological features of circuits leads to a twofold reduction in the number of the HOSC in sensitivity expressions.

Формулы относительной чувствительности. Относительной чувствительностью называют отношение изменения схемной функции F к соответствующему изменению параметра W элемента схемы [1–10]:

$$S = \frac{dF}{F} \frac{W}{dW}. \quad (1)$$

После дифференцирования формула (1) обычно записывается в виде выражений с разностью отношений (произведений) алгебраических дополнений, содержащих избыточные взаимно уничтожающиеся слагаемые [3–6]. Их больше при операциях с расширенной узловой матрицей [6] и меньше в случае использования модифицированного графа Коутса [4].

³ Поддержано Российским Фондом Фундаментальных Исследований (РФФИ), проект №15-07-05847.

Варьируемый параметр в разностных формулах чувствительности не представляется в явном виде, поэтому нахождение частных производных по узловым проводимостям умножает число избыточных слагаемых [4]. Полученные формулы чувствительности представляются в виде последовательной (вложенной) формулы [3, 4], малоприспособленной для формирования полиномиального выражения и неудобной для аналитического исследования.

Не имеет отмеченных недостатков формула Боде [1] для чувствительности коэффициента передачи напряжения $K = U_3/U_1$ Y-схемы на рис. 1,а в виде отношения произведений определителя и алгебраических дополнений матрицы узловых проводимостей

$$S_Y^K = -Y \frac{\Delta_{15} \Delta_{73}}{\Delta_{11} \Delta_{13}}, \quad (2)$$

где Y — передаточная проводимость заземленного источника тока, управляемого напряжением (ИТУН); Δ_{11} , Δ_{15} , Δ_{13} , Δ_{73} — алгебраические дополнения узловой матрицы.

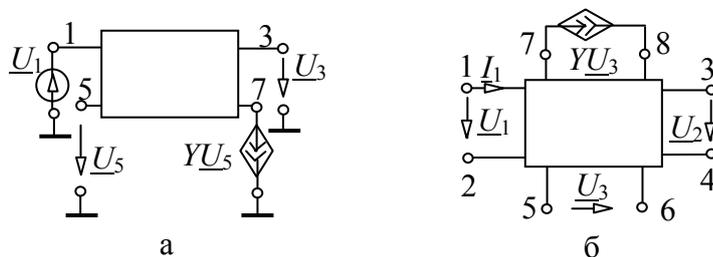


Рис. 1. Схемы для нахождения чувствительности: с заземленными (а) и незаземленными (б) элементами

Формула (2) получена из (1) с помощью тождества Якоби в виде

$$\Delta_{13,75} \Delta = \Delta_{13} \Delta_{75} - \Delta_{15} \Delta_{73}, \quad (3)$$

и справедлива для дуальной Z-схемы с источником напряжения, управляемым напряжением (ИНУТ), заданной контурной матрицей [1].

Для смешанного координатного базиса в [2] предложены формулы чувствительности передаточного $S_Y^{Z_{пер}}$, входного $S_Y^{Z_{вх}}$ и выходного $S_Y^{Z_{вых}}$ сопротивлений на основе многократных суммарных алгебраических до-

полнений (МСАД) обратной матрицы схемы. Однако элементы обратной матрицы приводят к взаимно сокращающимся множителям, а чувствительности других схемных функций находятся опосредованным образом — в виде разности двух чувствительностей $S_Y^{Z_{\text{пер}}}$, $S_Y^{Z_{\text{вх}}}$ или $S_Y^{Z_{\text{вых}}}$.

При нахождении чувствительности в символьном виде разностные формулы [2] обладают повышенной трудоемкостью — требуют раскрыть пять МСАД (определителей) вместо четырех по формуле (2) и увеличивают число взаимно уничтожающихся слагаемых. Таким образом, прямой и содержащей только произведения и отношения полиномов формулой относительной чувствительности является формула Боде (2).

В [7, 8] предложено ее обобщение на другие типы функций и параметров, получены МСАД-формулы, позволяющие избежать сокращающихся сомножителей для различных вариантов включения воздействий, откликов и варьируемых элементов. В данной статье результаты [7, 8] систематизируются, выводятся их новые следствия — минимальные формулы, учитывающие каскадную структуру типовых электронных цепей.

МСАД-формулы чувствительности для произвольных линейных электрических цепей и схемных функций [7, 8]. Формулы чувствительности для одной схемной функции внешне отличаются только множителем — параметром УИ. Если параметр произвольного УИ обозначить χ , то получится обобщенная формула чувствительности для коэффициента передачи напряжения K в строке 1 из табл. 1. При этом $\chi = Y, Z, \beta$ и μ для ИТУН, ИНУТ, ИТУТ (источника тока, управляемого током) и ИНУН (источника напряжения, управляемого напряжением) соответственно. Номера полюсов различных УИ для подключения управляемой и управляющей ветвей такие же, как у ИТУН на рис. 1,б.

Не отличается внешне и формула для чувствительности передаточной проводимости $Y_{\text{пер}}$ (строка 2 из табл. 1). Формулы для чувствительности коэффициента передачи по току B (строка 3) и передаточного сопротивления $Z_{\text{пер}}$ (строка 4) отличаются тем, что в них вместо алгебраического дополнения $\Delta_{(1+2)(1+2)}$ используется определитель Δ . В формулах чувствительности по параметру двухполюсной проводимости и сопротивления будут совпадать пары полюсов управляющей и управляемой ветвей ИТУН и ИНУТ.

Таблица 1. Формулы для чувствительности на основе МСАД

№	Чувствительность	МСАД-формула
1	S_{χ}^K	$-\frac{\chi \Delta_{(1+2)(5+6)} \Delta_{(1+2)(1+2), (7+8)(3+4)}}{\Delta_{(1+2)(1+2)} \Delta_{(1+2)(3+4)}}$
2	$S_{\chi}^{Y_{\text{пер}}}$	
3	S_{χ}^B	$-\frac{\chi \Delta_{(1+2)(5+6)} \Delta_{(7+8)(3+4)}}{\Delta \Delta_{(1+2)(3+4)}}$
4	$S_{\chi}^{Z_{\text{пер}}}$	

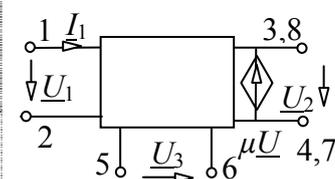
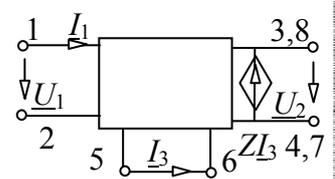
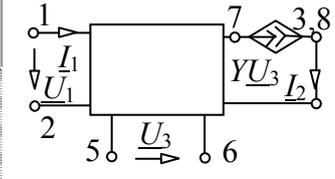
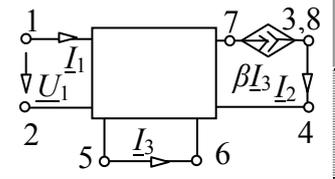
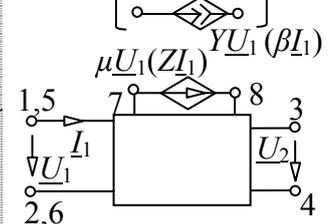
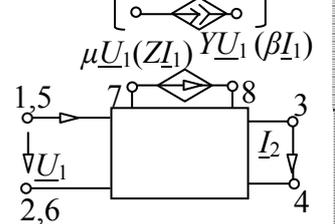
Применение метода схемных определителей для раскрытия МСАД и построения полиномиальных функций [9]. Эффективным методом раскрытия МСАД в формулах чувствительности из табл. 1 является метод схемных определителей (МСО), который в отличие от матричных методов не создает избыточных взаимно сокращающихся слагаемых и позволяет использовать особенности структуры схемы для формирования компактных символьных выражений [10].

МСО основан на формулах выделения элементов из схемных определителей и формулах деления их по одному, двум и более узлам на под-схемы, как без управляющих связей, так и с управляющими связями между ними [7]. При построении функции в виде полинома от комплексной частоты p используется алгоритм формирования полиномиальных коэффициентов путем набора степени p рекурсивным выделением реактивных элементов.

Сокращенные МСАД-формулы для чувствительности схем с варьируемыми элементами на входе или выходе схемы. В числителе и знаменателе формул из табл. 1 можно сократить отдельные МСАД для схем, в которых элементы с варьируемыми параметрами находятся на входе или выходе схемы. При этом получаются сокращенные формулы в виде отношения двух МСАД (табл. 2 и 3).

Так, если выходное напряжение снимается с генератора ИНУН или ИНУТ, то в формулах чувствительности K и $Z_{\text{пер}}$ по μ и Z в строках 1 и 4 из табл. 1 совпадают индексы МСАД $3 \equiv 8$ и $4 \equiv 7$. При этом из них следуют формулы в строке 1 из табл. 2, содержащие всего два МСАД. При выводе этих формул учитывается тождество $\chi \Delta_{(1+2)(5+6)} = \Delta_{(1+2)(7+8)}$, где $\chi = \mu$ и $\chi = Z$ для ИНУН и ИНУТ соответственно.

Таблица 2. Формулы чувствительности для схем со съемом отклика с генератора УИ и подачей воздействия на вход УИ

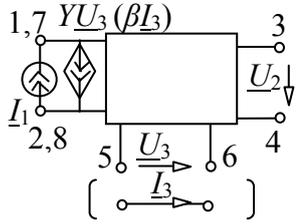
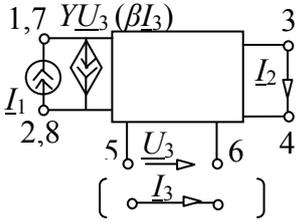
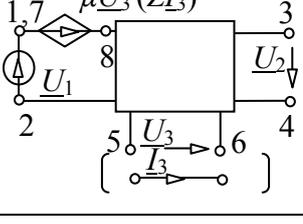
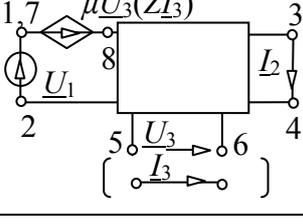
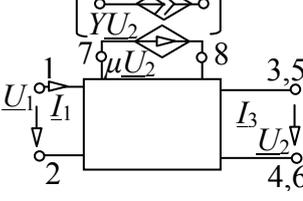
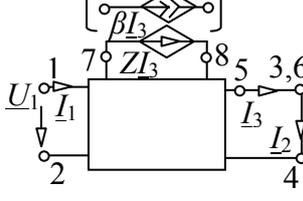
№	Обозначение чувствительности				Формула
		Схема	Схема		
1	S_{μ}^K			S_Z^K	$\frac{\Delta_{(1+2)(1+2),(3+4)(3+4)}}{\Delta_{(1+2)(1+2)}}$
	$S_{\mu}^{Z_{пер}}$			$S_Z^{Z_{пер}}$	$\Delta_{(3+4)(3+4)} / \Delta$
2	$S_Y^{Y_{пер}}$			$S_{\beta}^{Y_{пер}}$	$\Delta_{(1+2)(1+2)}^0 / \Delta_{(1+2)(1+2)}$
	S_Y^B			S_{β}^B	Δ^0 / Δ
3	S_{μ}^K			$S_{\mu}^{Y_{пер}}$	$\chi \frac{\Delta_{(1+2)(1+2),(7+8)(3+4)}}{\Delta_{(1+2)(3+4)}}$
	S_Y^K			$S_Y^{Y_{пер}}$	
	$S_Z^{Z_{пер}}$			S_Z^B	$\chi \frac{\Delta_{(7+8)(3+4)}}{\Delta_{(1+2)(3+4)}}$
	$S_{\beta}^{Z_{пер}}$			S_{β}^B	

Аналогично получаются формулы с двумя МСАД для чувствительности передаточной проводимости $Y_{пер}$ и коэффициента передачи тока B по параметру ИТУН Y и ИТУТ β в строке 2 из табл. 2 для схем, в которых выходной переменной является ток генератора ИТУН и ИТУТ. Эти формулы следуют из формул в строках 2 и 3 табл. 1. В дуальном случае входная переменная подается непосредственно на управляющую ветвь УИ. При этом формулы с двумя МСАД (строка 3 в табл. 2) следуют из табл. 1 при учете эквивалентности полюсов $1 \equiv 5$ и $2 \equiv 6$.

Сокращенные формулы для схем с генератором УИ на входе или управляемой ветвью на выходе сведены в табл. 3.

Безызыточные МСАД-формулы для каскадных схем. При делении каскадной схемы воздействие и отклик оказываются в разных подсхемах. Это приводит к сокращению в числителе и знаменателе формул в табл. 1 одной или двух пар одинаковых сомножителей (табл. 4).

Таблица 3. Формулы чувствительности для схем с генератором УИ на входе схемы или с управляемой ветвью УИ на выходе

№	Обозначение чувствительности		Формула
	Схема	Схема	
1 1	$S_Y^{Z_{\text{пер}}}$ $S_{\beta}^{Z_{\text{пер}}}$ 	 S_Y^B S_{β}^B	$- \chi \frac{\Delta_{(1+2)(5+6)}}{\Delta}$
2	S_{μ}^K S_Z^K 	 $S_{\mu}^{Y_{\text{пер}}}$ $S_Z^{Y_{\text{пер}}}$	$- \chi \frac{\Delta_{(1+2)(5+6)}}{\Delta_{(1+2)(1+2)}}$
3	S_{μ}^K S_Y^K 	 $S_Z^{Y_{\text{пер}}}$ $S_{\beta}^{Y_{\text{пер}}}$	$- \chi \frac{\Delta_{(1+2)(1+2), (7+8)(3+4)}}{\Delta_{(1+2)(1+2)}}$
	$S_{\mu}^{Z_{\text{пер}}}$ $S_Y^{Z_{\text{пер}}}$ 	 S_Z^B S_{β}^B	$- \chi \Delta_{(7+8)(3+4)} / \Delta$

Если УИ с варьируемым параметром находится в одной из подсхем (строки 1 и 1' табл. 4), то в числителе и знаменателе формул для чувствительности в табл. 1 можно выделить по одному сокращающемуся сомножителю. Для доказательства второе (справа) МСАД в числителе и знаменателе формулы в строке 1 табл. 1 представляется произведением МСАД подсхем 1 и 2, поскольку они имеют нулльную связь. Отсюда:

$$\underline{S}_K^Y = - \frac{Y \Delta_{(1+2)(5+6)} \delta_{(1+2)(1+2), (7+8)(9+10)} d_{(9+10)(3+4)}}{\Delta_{(1+2)(1+2)} \delta_{(1+2)(9+10)} d_{(9+10)(3+4)}}, \quad (10)$$

где символами δ и d с индексами обозначены МСАД подсхем 1 и 2.

После сокращения в числителе и знаменателе (10) одинаковых множителей получается формула в строке 1 табл. 4. Формула для схемы с ИТУН во второй подсхеме (строка 1') получается аналогично. Так же можно получить и другие сокращенные формулы для формул из табл. 1.

Таблица 4. МСАД-формулы для каскадных схем (δ и d — МСАД подсхемы 1 и 2)

№	Исходная схема	Формула
1		$\underline{S}_K^Y = - \frac{Y \Delta_{(1+2)(5+6)} \delta_{(1+2)(1+2), (7+8)(9+10)}}{\Delta_{(1+2)(1+2)} \delta_{(1+2)(9+10)}}.$
1'		$\underline{S}_K^Y = - \frac{Y d_{(9+10)(5+6)} \Delta_{(1+2)(1+2), (7+8)(3+4)}}{\Delta_{(1+2)(1+2)} d_{(9+10)(3+4)}},$
2		$\underline{S}_K^Y = - \frac{Y \delta_{(1+2)(5+6)} \delta_{(1+2)(1+2), (7+8)(9+10)}}{\delta_{(1+2)(1+2)} \delta_{(1+2)(9+10)}}.$
2'		$\underline{S}_K^Y = - \frac{[Y \delta_{(1+2)(5+6), (9+10)(9+10)} \times \delta_{(1+2)(1+2), (7+8)(9+10)}]}{[\delta_{(1+2)(1+2), (9+10)(9+10)} \times \delta_{(1+2)(9+10)}]}.$
3		$\underline{S}_K^Y = - \frac{Y \delta_{(1+2)(5+6)} \Delta_{(1+2)(1+2), (7+8)(3+4)}}{\delta_{(1+2)(1+2)} \Delta_{(1+2)(3+4)}}.$
3'		$\underline{S}_K^Y = \frac{-[Y \delta_{(1+2)(5+6), (1'+n')(1'+n'), \dots, ((n+1)'+n')((n+1)'+n')} \times \Delta_{(1+2)(1+2), (7+8)(3+4)}]}{[\delta_{(1+2)(1+2), (1'+n')(1'+n'), \dots, ((n+1)'+n')((n+1)'+n')} \times \Delta_{(1+2)(3+4)}]}.$

Схемы, разделенные по двум узлам с генератором напряжения между ними или генератором тока в сечении, и сокращенные МСАД-формулы

приведены в строках 2 и 2' табл. 4. Здесь при выводе используется деление схемы на подсхемы как с нулловой связью, так и без нее.

Схемы, разделенные по n узлам с генераторами напряжения между ними или генераторами тока в сечении, и сокращенные МСАД-формулы приведены в строках 3 и 3' табл. 4. Получаются также из формулы 1 в табл. 1 путем сокращения в числителе и знаменателе определителей подсхемы 2 с разомкнутыми и замкнутыми полюсами соответственно.

Формулы для схем, разделенных на подсхемы с нулловыми связями, упрощаются при делении по n полюсам на подсхемы с $(n-1)$ -й или $(n-2)$ -мя нулловыми связями (рис. 2). Подсхемы имеют k нулловых связей, если в одной подсхеме нораторов (нуллаторов) на k больше, чем в другой.

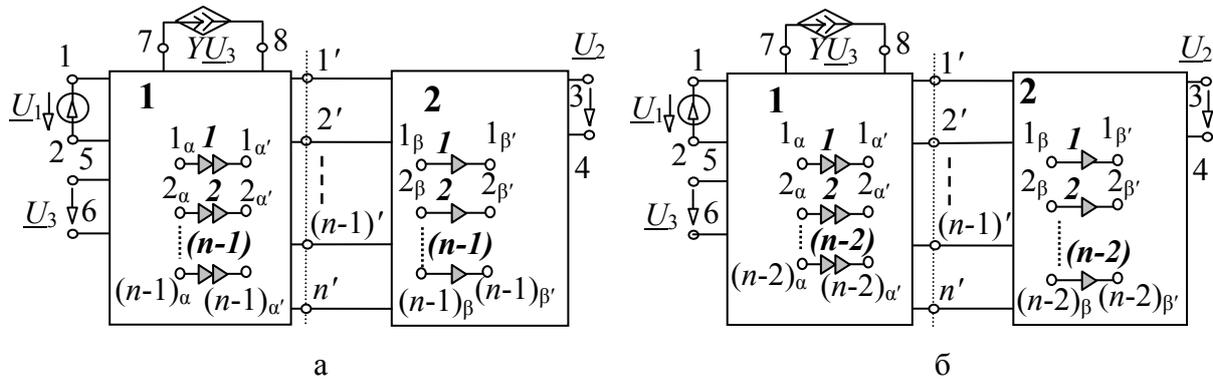


Рис. 2. Схемы, содержащие подсхемы с $(n-1)$ -й (а) и $(n-2)$ -мя (б) нулловыми связями

Сокращенные формулы для схем с числом нулловых связей $(n-1)$ и $(n-2)$ имеют вид соответственно

$$\underline{S}_K^Y = - \frac{[Y\delta_{(1+2)(5+6), (1_\alpha+1_{\alpha'}) (1'+n'), (2_\alpha+2_{\alpha'}) (2'+n'), \dots, ((n-1)_\alpha+(n-1)_{\alpha'}) ((n-1)'+n')} \times \Delta_{(1+2)(1+2), (7+8)(3+4)}]}{[\delta_{(1+2)(1+2), (1_\alpha+1_{\alpha'}) (1'+n'), (2_\alpha+2_{\alpha'}) (2'+n'), \dots, ((n-1)_\alpha+(n-1)_{\alpha'}) ((n-1)'+n')} \times \Delta_{(1+2)(3+4)}]}; \quad (11)$$

$$\underline{S}_{K}^Y = - \frac{[Y\Delta_{(1+2)(5+6)} \times \delta_{(1+2)(1+2), (7+8)((n-1)'+n'), (1_{\alpha}+1_{\alpha'})(1'+n'), \dots, ((n-2)_{\alpha}+(n-2)_{\alpha'})}]{\Delta_{(1+2)(1+2)} \delta_{(1+2)((n-1)'+n'), (1_{\alpha}+1_{\alpha'})(1'+n'), \dots, ((n-2)_{\alpha}+(n-2)_{\alpha')}}}. \quad (12)$$

При выводе формул (11) и (12) учитывается, что знаменатель и числитель передаточной функции схем на рис. 2,а и 2,б с $(n-1)$ и $(n-2)$ нулловыми связями представляется в виде произведения определителей первой и второй подсхемы. Полюса подсхем 1 и 2 соединяются между собой $(n-1)$ -м нуллатором и норатором соответственно.

Пример построения полиномиальной функции чувствительности для коэффициента передачи напряжения каскадного фильтра. Схема дана на рис. 3 [6]. Операционные усилители считаются идеальными и представляются нуллорами. Требуется получить функции относительной чувствительности коэффициента передачи напряжения $S_{C_5}^K, S_{C_6}^K$ и $S_{R_{10}}^K$ при изменении емкостей C_5, C_6 и сопротивления R_{10} соответственно.

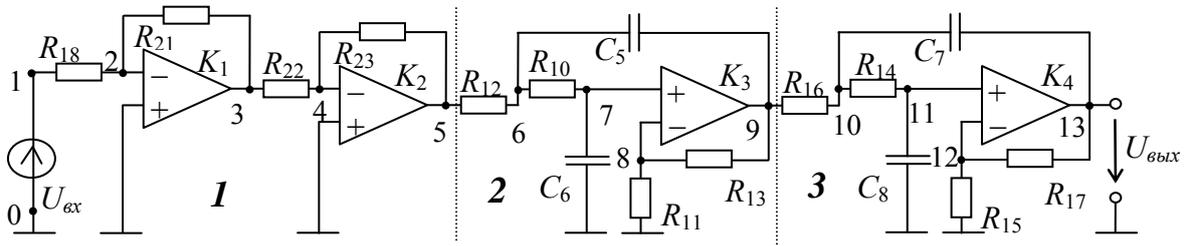


Рис. 3. Активный фильтр нижних частот четвертого порядка

Схема делится (пунктир на рис. 3) по двум узлам на три подсхемы. Между каждой парой полюсов включен норатор, а варьируемые элементы C_5, C_6 и R_{10} находятся в подсхеме 2, поэтому МСАД-формулы в соответствии со строкой 2 в табл. 4 содержат МСАД только подсхемы 2:

$$\begin{aligned} S_{C_5}^K &= - \frac{pC_5 \delta_{(5+0)(6+9)} \delta_{(5+0)(5+0), (6+9)(9+0)}}{\delta_{(5+0)(5+0)} \delta_{(5+0)(9+0)}}, \\ S_{C_6}^K &= - \frac{pC_6 \delta_{(5+0)(7+0)} \delta_{(5+0)(5+0), (7+0)(9+0)}}{\delta_{(5+0)(5+0)} \delta_{(5+0)(9+0)}}, \\ S_{R_{10}}^K &= \frac{R_{10} \delta_{(5+0)(6+7)} \delta_{(5+0)(5+0), (6+7)(9+0)}}{\delta_{(5+0)(5+0)} \delta_{(5+0)(9+0)}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Для получения символьных выражений переходим от МСАД $\delta_{(5+0)(5+0)}$ к САФ путем объединения полюсов 5 и 0:

$$\Delta_{(5+0)(5+0)} = \left| \begin{array}{ccc} 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 9 \end{array} \right| = p^2 C_5 C_6 R_{12} R_{10} R_{11} + p [C_6 (R_{12} + R_{10}) R_{11} - C_5 R_{12} R_{13}] + R_{11}. \quad (14)$$

Каждый полиномиальный коэффициент в (14) находится отдельно путем первоочередного выделения проводимостей конденсаторов до набора требуемой степени оператора p . Оставшийся определитель раскрывается с помощью формул выделения сопротивлений. Аналогично находятся и другие МСАД в (13). Искомые функции имеют вид:

$$S_{C_5}^K = - \frac{p C_5 R_{12} (p C_6 R_{10} R_{11} - R_{13})}{p^2 C_5 C_6 R_{12} R_{10} R_{11} + p [C_6 (R_{12} + R_{10}) R_{11} - C_5 R_{12} R_{13}] + R_{11}}; \quad (15)$$

$$S_{C_6}^K = - \frac{p C_6 R_{11} (p C_5 R_{12} R_{10} + R_{12} + R_{10})}{p^2 C_5 C_6 R_{12} R_{10} R_{11} + p [C_6 (R_{12} + R_{10}) R_{11} - C_5 R_{12} R_{13}] + R_{11}}; \quad (16)$$

$$S_{R_{10}}^K = - \frac{R_{10} p C_6 R_{11} (p C_5 R_{12} + 1)}{p^2 C_5 C_6 R_{12} R_{10} R_{11} + p [C_6 (R_{12} + R_{10}) R_{11} - C_5 R_{12} R_{13}] + R_{11}}. \quad (17)$$

В (15)–(17) мультипликативных и аддитивных операций в 3...3,5 и 6...9 раз соответственно меньше (табл. 5), чем в последовательных формулах (приложение), рассчитанных по программе STAINS [3].

Таблица 5. Сравнение числа мультипликативных и аддитивных операций в полиномиальных и последовательных функциях чувствительности

Функция чувствительности	Полиномиальная функция по МСАД-формуле		Последовательная функция по STAINS	
	«*» и «/»	«+» и «-»	«*» и «/»	«+» и «-»
$S_{C_5}^K$	17	5	60	37
$S_{C_6}^K$	17	6	51	32
$S_{R_{10}}^K$	17	5	58	32

При использовании сокращенных МСАД-формул число аналитических операций уменьшается примерно в 3 раза, поскольку анализируется только одна из трех равновеликих подсхем. Полученные формулы (15)–(17) компактны, не содержат избыточных сокращающихся сомножителей и удобны для аналитического исследования.

Вывод. Предложен комплект сокращенных формул, исключающих образование избыточных множителей в числителе и знаменателе функций чувствительности путем учета особенностей как структуры (каскадные схемы), так и подключения варьируемых элементов.

Приложение

Последовательные функции чувствительности для активного фильтра, рассчитанные по программе STAINS <http://rodanski.net/ben/work/symbolic/> [3]

П1. Функция чувствительности STv_C5 коэффициента передачи напряжения при изменении емкости C_5

$$\begin{aligned}
 &G_{10}=1/R_{10}; \quad G_{11}=1/R_{11}; \quad G_{12}=1/R_{12}; \quad G_{13}=1/R_{13}; \quad G_{14}=1/R_{14}; \quad G_{15}=1/R_{15}; \\
 &G_{16}=1/R_{16}; \quad G_{17}=1/R_{17}; \quad G_{18}=1/R_{18}; \quad G_{21}=1/R_{21}; \quad G_{22}=1/R_{22}; \quad G_{23}=1/R_{23}; \\
 &x_1 = G_{23} \cdot G_{21} / (G_{22}); \quad x_2 = -G_{18} \cdot G_{12} / (x_1); \quad d_1 = -G_{17} / (G_{15} + G_{17}); \quad x_3 = G_{17} + \\
 &+ s \cdot C_7 + G_{17} \cdot d_1; \quad x_4 = -d_1; \quad d_2 = -G_{13} / (G_{11} + G_{13}); \quad x_5 = G_{13} + G_{16} + s \cdot C_5 + G_{13} \cdot d_2; \\
 &x_6 = -d_2; \quad d_3 = -x_6; \quad x_7 = G_{10} \cdot d_3 - s \cdot C_5; \quad x_8 = -(G_{10} + s \cdot C_6) \cdot d_3; \quad d_4 = -x_4; \\
 &x_9 = -(G_{14} + s \cdot C_8) \cdot d_4; \quad x_{10} = G_{14} \cdot d_4 - s \cdot C_7; \quad d_5 = -x_9 / (G_{14}); \quad x_{11} = x_3 + s \cdot C_7 \cdot d_5; \\
 &x_{12} = x_{10} - (G_{14} + G_{16} + s \cdot C_7) \cdot d_5; \quad x_{13} = G_{16} \cdot d_5; \quad Z_{21} = x_2 \cdot G_{10} \cdot G_{16}; \\
 &Z_{oi} = Z_{21}; \quad Z_{11} = -1 \cdot x_{12} \cdot ((G_{10} + G_{12} + s \cdot C_5) \cdot x_8 + G_{10} \cdot x_7); \quad Z_{ii} = Z_{11}; \quad T_v = Z_{oi} / Z_{ii}; \\
 &Z_{13} = 0; \quad Z_{14} = 0; \quad Z_{ik} = Z_{13} - Z_{14}; \quad Z_{23} = -G_{18} \cdot G_{10} \cdot G_{16}; \quad Z_{24} = 0; \\
 &Z_{ok} = Z_{23} - Z_{24}; \quad Z_{31} = x_2 \cdot G_{10} \cdot G_{16} \cdot x_8; \quad Z_{41} = x_2 \cdot G_{10} \cdot G_{16} \cdot x_{12}; \quad Z_{ki} = Z_{31} - Z_{41}; \\
 &D_{00} = G_{18} \cdot Z_{11}; \quad STv_C5 = s \cdot C_5 \cdot Z_{ki} \cdot (Z_{ik} \cdot Z_{oi} - Z_{ok} \cdot Z_{ii}) / (Z_{oi} \cdot D_{00} \cdot Z_{ii}).
 \end{aligned}$$

П2. Чувствительность STv_C6 коэффициента передачи напряжения при изменении емкости C_6

$$\begin{aligned}
 &G_{10}=1/R_{10}; \quad G_{11}=1/R_{11}; \quad G_{12}=1/R_{12}; \quad G_{13}=1/R_{13}; \quad G_{14}=1/R_{14}; \quad G_{15}=1/R_{15}; \\
 &G_{16}=1/R_{16}; \quad G_{17}=1/R_{17}; \quad G_{18}=1/R_{18}; \quad G_{21}=1/R_{21}; \quad G_{22}=1/R_{22}; \quad G_{23}=1/R_{23}; \\
 &x_1 = 1 \cdot (G_{11} + G_{13}); \quad x_2 = G_{23} \cdot G_{21} / (G_{22}); \quad x_3 = -G_{18} \cdot G_{12} / (x_2); \quad d_1 = -G_{17} / (G_{15} + \\
 &+ G_{17}); \quad x_4 = G_{17} + s \cdot C_7 + G_{17} \cdot d_1; \quad x_5 = -d_1; \quad d_2 = -x_1 / (G_{13}); \quad x_6 = G_{16} \cdot d_2; \\
 &x_7 = s \cdot C_5 \cdot d_2 - G_{10}; \quad d_3 = -x_5; \quad x_8 = -(G_{14} + s \cdot C_8) \cdot d_3; \quad x_9 = G_{14} \cdot d_3 - s \cdot C_7;
 \end{aligned}$$

$d4 = -x8/(G14)$; $x10 = x4+s*C7*d4$; $x11 = x9-(G14+G16+s*C7)*d4$; $d5 = -10/(G10+G12+s*C5)$; $x12 = -x3*d5$; $x13 = G10+s*C6-x7*d5$; $Z21 = -x12*x6*1$; $Zoi = Z21$; $Z11 = -1*x11*x13$; $Zii = Z11$; $Tv = Zoi/Zii$; $Z13 = 0$; $Zik = -Z13$; $Z23 = G18*x6*1$; $Zok = -Z23$; $Z31 = x12*1*x11$; $Zki = -Z31$; $D00 = G18*Z11$; $STv_C6 = s*C6*Zki*(Zik*Zoi-Zok*Zii)/(Zoi*D00*Zii)$.

ПЗ. Чувствительность STv_R10 коэффициента передачи напряжения при изменении сопротивления R_{10}

$G10=1/R10$; $G11=1/R11$; $G12=1/R12$; $G13=1/R13$; $G14=1/R14$; $G15=1/R15$; $G16=1/R16$; $G17=1/R17$; $G18=1/R18$; $G21=1/R21$; $G22=1/R22$; $G23=1/R23$; $x1 = 1*(G11+G13)$; $x2 = G23*G21/(G22)$; $x3 = -G18*G12/(x2)$; $d1 = -G17/(G15+G17)$; $x4 = G17+s*C7+G17*d1$; $x5 = -d1$; $d2 = -x1/(G13)$; $x6 = G16*d2$; $x7 = s*C5*d2-G10$; $d3 = -x5$; $x8 = -(G14+s*C8)*d3$; $x9 = G14*d3-s*C7$; $d4 = -x8/(G14)$; $x10 = x4+s*C7*d4$; $x11 = x9-(G14+G16+s*C7)*d4$; $Z21 = -x3*G10*x6*1$; $Zoi = Z21$; $Z11 = -1*x11*((G10+G12+s*C5)*(G10+s*C6)+G10*x7)$; $Zii = Z11$; $Tv = Zoi/Zii$; $Z13 = 0$; $Z14 = -0$; $Zik = Z13-Z14$; $Z23 = G18*G10*x6*1$; $Z24 = (G10+G12+s*C5)*G18*x6*1$; $Zok = Z23-Z24$; $Z31 = x3*1*x11*(G10+s*C6)$; $Z41 = x3*G10*1*x11$; $Zki = Z31-Z41$; $D00 = G18*Z11$; $STv_R10 = G10*Zki*(Zok*Zii-Zik*Zoi)/(Zoi*D00*Zii)$.

Список литературы

1. Боде Г. Теория цепей и проектирование усилителей с обратной связью / пер. с англ. — М. : ГИИЛ, 1948. — 641 с.
2. Калниболотский Ю. М., Казанджан Н. Н., Нестер В. В. Расчет чувствительности электронных схем. — Киев : Техника, 1982. — 176 с.
3. Balik F., Rodanski B. Calculation of symbolic sensitivities for large-scale circuits in the sequence of expressions form via the transimpedance method // Analog Integrated Circuits and Signal Processing. — Vol. 40. — 2004. — P. 265–276.
4. Asenova I. N. Calculation of first-, second-order and multiparameter symbolic sensitivity of active circuits by using nullor model and modified Coates flow graph // International Journal of microelectronics and computer science. — Vol. 2, N. 4. — 2011. — P. 129–135.
5. Rodriguez-Chavez S., Palma-Rodriguez A. A., Tlelo-Cuautle E., Tan S. X.-D. Graph-based symbolic and symbolic sensitivity analysis of analog

integrated circuits // *Analog/RF and Mixed-Signal Circuit Systematic Design: Lecture Notes in Electrical Engineering*. — Springer. — Vol. 233. — 2013. — P. 101–122.

6. Mandache L., Iordache M., Dumitriu L., Sirbu I., Niculae D. Sensitivity analysis of analog circuits based on a modified nodal approach // *International Conference on Optimization of Electrical and Electronic Equipment*, May 22–24, 2014, Moieciu, Romania. — P. 83–88.

7. Filaretov V. V, Gorshkov K. S., Kurganov S. A. Cancellation-Free Symbolic Sensitivity Technique Based on Network Determinant Expansion // *Adv. Electr. Eng.* — 2015. — Vol. 2015. — P. 1–13.

8. Курганов С. А., Филаретов В. В. Обобщенные безызбыточные формулы для чувствительности схемных функций линейных электрических цепей // *Электричество*. — 2017.— №2. — С. 44–50.

9. Бондаренко А. В., Курганов С. А., Филаретов В. В. Формулы для анализа чувствительности схемных функций линейных электрических цепей // *Синтез, анализ и диагностика электронных цепей : Международ. сб. науч. тр.* — Ульяновск : УлГТУ, 2013. — Вып. 11. — С. 79–96.

10. Недорезов М. В, Филаретов В. В. Алгебраический анализ зеркально-нулловых схем на основе выделения аномальных элементов // *Синтез, анализ и диагностика электронных цепей : Международ. сб. науч. тр.* — Ульяновск : УлГТУ, 2016. — С. 34–47.

Горшков Константин Сергеевич — канд. техн. наук, доцент кафедры электротехники и прецизионных электромеханических систем Научно-исследовательского университета информационных технологий, механики и оптики (ИТМО).

E-mail: k.gorshkov@list.ru.

Курганов Сергей Александрович — д-р техн. наук, профессор кафедры «Электроснабжение» Ульяновского государственного технического университета.

432027, Ульяновск, ул. Северный Венец, 32. Тел. 8-8422-77-81-05.

E-mail: sak@ulstu.ru.

Филаретов Владимир Валентинович — д-р техн. наук, ответственный редактор международного сборника «Синтез, анализ и диагностика электронных цепей».

E-mail: vvfil@mail.ru.

НАХОЖДЕНИЕ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ В КЛАССИЧЕСКОМ МЕТОДЕ АНАЛИЗА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОГРАММЫ CIRSYM⁴

С. А. Курганов, И. А. Прокофьев

Для нахождения начальных значений производных искоемых переменных от 1-го до (n-1)-го порядка при анализе электрической цепи n-го порядка классическим методом предлагается алгоритм на основе системы уравнений состояния в нормальной форме, построенной с помощью программы символьного анализа CIRSYM. Алгоритм исключает трудоемкое формирование и решение (n-1)-й системы алгебраических уравнений n-го порядка относительно производных.

For finding the initial values for the (n-1)-th derivative of the desired variable in the analysis of electric circuit n-th order classical method is proposed to use the equation of state is the formation and solution of (n-1)-th system of algebraic equations with respect to derivatives of state variables. Equations of state are generated by using a program for symbolic analysis and diagnosis CIRSYM.

Классический метод предусматривает нахождение функции искомого тока и напряжения в виде суммы свободной и принужденной составляющей и является самым распространенным аналитическим методом анализа переходных процессов в линейных электрических цепях [1]. Однако этот метод из-за большого объема вычислений используется лишь для анализа цепей «первого, второго, а иногда и третьего порядка» [2, с. 291]. Наиболее трудоемким этапом является нахождение начальных условий — значений производных искоемых переменных от 1-го до (n-1)-го порядка в момент после коммутации, по которым рассчитываются постоянные интегрирования для цепи n-го порядка, что требует составления и решения (n-1)-й системы из n линейных уравнений.

⁴ Поддержано Российским Фондом Фундаментальных Исследований (РФФИ), проект №15-07-05847.

Не нужны начальные значения производных при нахождении постоянных интегрирования по матрице схемных коэффициентов, связывающих свободную составляющую базисной переменной и остальных переменных [3]. Однако этот метод не является общим, поскольку, например, в симметричных трехфазных цепях определитель матрицы оказывается равным нулю [1]. Постоянные интегрирования приходится находить традиционным путем — через начальные значения для $(n-1)$ -й производной, которые получаются в результате решения $(n-1)$ -й системы линейных алгебраических уравнений.

Не требуется формирование $(n-1)$ -й системы уравнений относительно производных при использовании уравнений состояния (УС) в явной форме относительно производных [4]:

$$p\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{v}, \quad (1)$$

где \mathbf{x} , \mathbf{v} — векторы переменных состояния и воздействий соответственно; \mathbf{A} , \mathbf{B} — вещественные матрицы; $p = d/dt$ — оператор дифференцирования.

Трудоемкая процедура построения УС может быть автоматизирована на основе схемно-алгебраической методики [5] с использованием программы символьного анализа и диагностики CIRSYM [6] в online-режиме (<http://intersyn.net/cirsym.html>). Далее изложен алгоритм нахождения начальных значений производных на основе УС, построенных с помощью CIRSYM.

Уравнение состояния для определения производных любого порядка. В соответствии с упомянутой схемно-алгебраической методикой исходные уравнения для построения УС формируются в виде

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_L \\ \mathbf{I}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{LL} & \mathbf{A}_{LC} \\ \mathbf{A}_{CL} & \mathbf{A}_{CC} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{J}_L \\ \mathbf{E}_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{LL} & \mathbf{B}_{LC} \\ \mathbf{B}_{CL} & \mathbf{B}_{CC} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где \mathbf{U}_L , \mathbf{I}_C — векторы мгновенных напряжений и токов независимых катушек индуктивности и независимых конденсаторов; \mathbf{J}_L , \mathbf{E}_C — векторы параметров источников тока и ЭДС, замещающих эквивалентным образом независимые катушки индуктивности и независимые конденсаторы;

\mathbf{E} , \mathbf{J} — векторы функций независимых источников ЭДС и тока; \mathbf{A}_{LL} ; \mathbf{A}_{LC} ; \mathbf{A}_{CL} ; \mathbf{A}_{CC} ; \mathbf{B}_{LL} ; \mathbf{B}_{LC} ; \mathbf{B}_{CL} ; \mathbf{B}_{CC} — подматрицы, элементы которых — дробно-рациональные выражения, содержащие параметры элементы.

При отсутствии в схеме вырожденных индуктивных сечений из трех и более катушек индуктивности и вырожденных емкостных контуров из трех и более конденсаторов подматрицы \mathbf{A}_{LL} ; \mathbf{A}_{LC} ; \mathbf{A}_{CL} ; \mathbf{A}_{CC} не содержат p , и уравнения (2) записаны явно при учете операторных уравнений катушки индуктивности $U_L = LpI_L$ и конденсатора $I_C = CpU_C$. При наличии вырожденных сечений или контуров хотя бы одна из подматриц \mathbf{A}_{LL} ; \mathbf{A}_{LC} ; \mathbf{A}_{CL} и \mathbf{A}_{CC} содержит p . После переноса слагаемых с оператором p из правой части в левую часть и учета $\mathbf{J}_L = \mathbf{I}_L$, $\mathbf{E}_C = \mathbf{U}_C$ уравнение (2) приводится к виду

$$\mathbf{T} \cdot \begin{bmatrix} p\mathbf{I}_L \\ p\mathbf{U}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{LL} & \tilde{\mathbf{A}}_{LC} \\ \tilde{\mathbf{A}}_{CL} & \tilde{\mathbf{A}}_{CC} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_L \\ \mathbf{U}_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{LE} & \mathbf{B}_{LJ} \\ \mathbf{B}_{CE} & \mathbf{B}_{CJ} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix},$$

или кратко:

$$\mathbf{T} \cdot p\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{v}, \quad (3)$$

где $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_L \\ \mathbf{U}_C \end{bmatrix}$; $\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{LL} & \tilde{\mathbf{A}}_{LC} \\ \tilde{\mathbf{A}}_{CL} & \tilde{\mathbf{A}}_{CC} \end{bmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{LE} & \mathbf{B}_{LJ} \\ \mathbf{B}_{CE} & \mathbf{B}_{CJ} \end{bmatrix}$; $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix}$; \mathbf{T} — недиагональная матрица индуктивностей, взаимоиндуктивностей и емкостей; $\tilde{\mathbf{A}}_{LL}$, $\tilde{\mathbf{A}}_{LC}$, $\tilde{\mathbf{A}}_{CL}$, $\tilde{\mathbf{A}}_{CC}$ — модифицированные подматрицы после переноса в левую часть слагаемых, содержащих оператор p .

После умножения (3) на обратную матрицу \mathbf{T}^{-1} и дифференцирования уравнения $(k-1)$ раз получается выражение:

$$p^k \mathbf{x} = \hat{\mathbf{A}} \cdot p^{k-1} \mathbf{x} + \hat{\mathbf{B}} \cdot p^{k-1} \mathbf{v}, \quad (4)$$

$$\text{где } \hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}_{LL} & \hat{\mathbf{A}}_{LC} \\ \hat{\mathbf{A}}_{CL} & \hat{\mathbf{A}}_{CC} \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{LL} & \tilde{\mathbf{A}}_{LC} \\ \tilde{\mathbf{A}}_{CL} & \tilde{\mathbf{A}}_{CC} \end{bmatrix}; \quad \hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{B}}_{LE} & \hat{\mathbf{B}}_{LJ} \\ \hat{\mathbf{B}}_{CE} & \hat{\mathbf{B}}_{CJ} \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{LE} & \mathbf{B}_{LJ} \\ \mathbf{B}_{CE} & \mathbf{B}_{CJ} \end{bmatrix}.$$

В случае, когда в схеме отсутствуют конденсаторы или катушки индуктивности, в уравнении (4) не будет соответствующих подматриц.

Алгоритм нахождения начальных значений производных.

А. Построить схему для формирования с помощью программы CIRSYM уравнений вида (2). Для этого в исходной цепи независимые катушки индуктивностей и конденсаторы заменить независимыми источниками тока и напряжения соответственно. Остальные катушки индуктивности и конденсаторы — операторными сопротивлениями $Z_L = pL$ и проводимостями $Y_C = pC$. Взаимоиндуктивности представить источниками напряжения, управляемыми током (ИНУТ), с параметром $Z_M = pM$.

Б. Сформировать программой CIRSYM символьные выражения напряжений и токов независимых катушек индуктивности и конденсаторов. Выражения получаются эквивалентными (2).

В. При наличии в схеме вырожденных сечений или контуров перенести выражения, содержащие оператор p , из правой части выражения (2) в левую часть и получить недиагональную матрицу параметров \mathbf{T} , как в формуле (3).

Г. Сформировать символьную или численную обратную матрицу \mathbf{T}^{-1} , например, с помощью любой компьютерной математической системы. По формуле (4) получить уравнения состояния в нормальной форме.

Д. Найти рекурсивно начальные значения для всех производных порядка $k=1 \dots (n-1)$, подставляя в (4) значения k , начальные значения производных и функций источников $(k-1)$ -го порядка.

Анализ переходного процесса при включении трехфазной симметричной схемы с трансформатором. В симметричной трехфазной цепи на рис. 1,а действующее значение напряжения трехфазного источника ЭДС $E=220$ В, частота сети $f=50$ Гц. Параметры элементов: $R_1=1$ Ом, $R_2=2$ Ом, $L_1=20$ мГн, $L_2=15$ мГн, коэффициент связи обмоток трансформатора $k_{св}=0,3$. Требуется найти токи во всех ветвях после включения цепи. Начальные значения токов принять нулевыми.

Схема имеет четвертый порядок, поскольку на 6 катушек индуктивности приходится 2 индуктивных сечения, и обладает двумя парами кратных действительных отрицательных корней характеристического уравнения: $p_1=p_2=-153.8461538 \text{ с}^{-1}$; $p_3=p_4=-47.61904762 \text{ с}^{-1}$. Определитель матрицы коэффициентов связи переменных состояния равен нулю. Поэтому

в расчете постоянных интегрирования используются начальные значения производных.

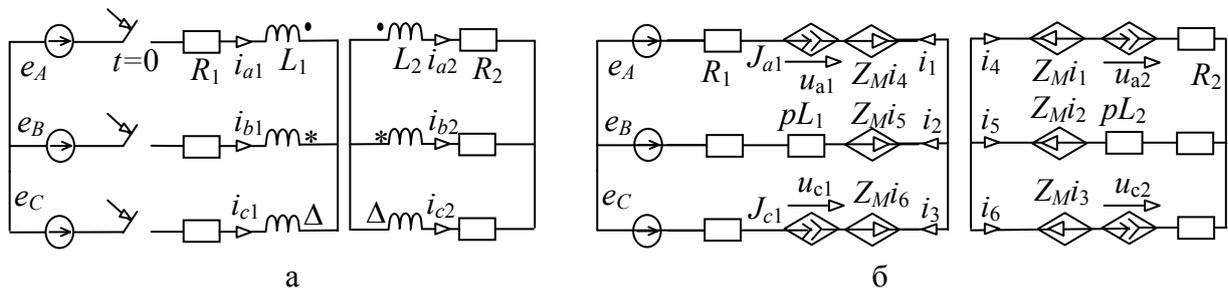


Рис. 1. Симметричная трехфазная цепь с трансформатором: исходная схема (а), схема замещения для построения уравнений вида (2) (б)

Построим на рис. 1,б в соответствии с пунктом А алгоритма схему замещения для формирования уравнений, эквивалентных (2). Вектор независимых переменных имеет вид

$$\mathbf{x} = \mathbf{I}_L = \begin{bmatrix} i_{a1} & i_{a2} & i_{c1} & i_{c2} \end{bmatrix}^T,$$

где индекс T означает транспонирование.

Выполним п. Б — по программе CIRSVM получим символьные выражения для напряжений на независимых катушках индуктивности

$$\begin{aligned} u_{a1} &= -L_1 * p * J_{a1} * i_{a2} + 2 * M * p * J_{a2} * i_{c1} - J_{c1} * L_1 * p + J_{c2} * M * p - 2 * J_{a1} * R_1 - J_{c1} * R_1 + e_a - e_b; \\ u_{a2} &= 2 * J_{a1} * M * p - J_{a2} * L_2 * p + J_{c1} * M * p - J_{c2} * L_2 * p - 2 * J_{a2} * R_2 - J_{c2} * R_2; \\ u_{c1} &= -J_{a1} * L_1 * p + J_{a2} * M * p - J_{c1} * L_1 * p + 2 * J_{c2} * M * p - J_{a1} * R_1 - 2 * J_{c1} * R_1 - e_b + e_c; \\ u_{c2} &= J_{a1} * M * p - J_{a2} * L_2 * p + 2 * J_{c1} * M * p - J_{c2} * L_2 * p - J_{a2} * R_2 - 2 * J_{c2} * R_2, \end{aligned} \quad (5)$$

где индексы записаны в одну строку с основными символами в соответствии с форматом выходных данных программы.

По п. В алгоритма находим недиагональную матрицу параметров для выражения (3)

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 2L_1 & -2M & L_1 & -M \\ -2M & 2L_2 & -M & L_2 \\ L_1 & -M & 2L_1 & -2M \\ -M & L_2 & -2M & 2L_2 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Матрицы $\tilde{\mathbf{A}}$ и \mathbf{B} для формулы (3) имеют вид

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -2R_1 & 0 & -R_1 & 0 \\ 0 & -2R_2 & 0 & -R_2 \\ -R_1 & 0 & -2R_1 & 0 \\ 0 & -R_2 & 0 & -2R_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Вектор независимых источников в формуле (3):

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} e_a & e_b & e_c \end{bmatrix}^T. \quad (8)$$

По п. Г обратим матрицу \mathbf{T} в численном виде, и после подстановки численных матриц (6) и (7) в формулу (4) получим рекурсивную численно-аналитическую формулу для определения производных любого порядка (численные значения здесь и далее — в основных единицах системы СИ):

$$p^k \begin{bmatrix} i_{a1} \\ i_{a2} \\ i_{c1} \\ i_{c2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -54.9450549 & -38.0670507 & 0 & 0 \\ -19.0335253 & -146.520146 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -54.9450549 & -38.06705077 \\ 0 & 0 & -19.0335253 & -146.5201466 \end{bmatrix} \cdot p^{k-1} \begin{bmatrix} i_{a1} \\ i_{a2} \\ i_{c1} \\ i_{c2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 36.63003664 & -18.31501832 & -18.31501832 \\ 12.68901692 & -6.344508458 & -6.344508462 \\ -18.31501832 & -18.31501832 & 36.63003664 \\ -6.344508458 & -6.344508442 & 12.68901690 \end{bmatrix} p^{k-1} \begin{bmatrix} e_a \\ e_b \\ e_c \end{bmatrix}. \quad (9)$$

В соответствии с п. Д находим по формуле (9) начальные значения производных порядка 1, 2 и 3 соответственно:

$$p \begin{bmatrix} i_{a1} \\ i_{a2} \\ i_{c1} \\ i_{c2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 14804.60834 \\ 5128.466762 \end{bmatrix}; p^2 \begin{bmatrix} i_{a1} \\ i_{a2} \\ i_{c1} \\ i_{c2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.370517838 \cdot 10^6 \\ 1.860401954 \cdot 10^6 \\ -3.693924543 \cdot 10^6 \\ -1.963408567 \cdot 10^6 \end{bmatrix}; p^3 \begin{bmatrix} i_{a1} \\ i_{a2} \\ i_{c1} \\ i_{c2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.659034131 \cdot 10^8 \\ -3.748062539 \cdot 10^8 \\ -1.183452216 \cdot 10^9 \\ -1.481720645 \cdot 10^8 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

При получении начальных условий (10) необходимые по формуле (9) начальные значения ЭДС источников и их производных имеют вид:

$$\begin{bmatrix} e_a \\ e_b \\ e_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -269.4438717 \\ 269.4438717 \end{bmatrix}; p \begin{bmatrix} e_a \\ e_b \\ e_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 97743.42463 \\ -48871.71232 \\ -48871.71232 \end{bmatrix}; p^2 \begin{bmatrix} e_a \\ e_b \\ e_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2.659304422 \cdot 10^7 \\ -2.659304422 \cdot 10^7 \end{bmatrix}.$$

По начальным условиям из выражения (10) рассчитываются постоянные интегрирования (табл. 1), которые соответствуют критическому режиму переходного процесса. При этом свободная составляющая тока представляется в виде

$$i_{св} = (A_1 + A_2 t) e^{p_1 t} + (A_3 + A_4 t) e^{p_3 t}.$$

Как видно, из табл. 1 четные постоянные интегрирования практически равны нулю, поскольку отличаются от нечетных постоянных на пять порядков. Это является следствием симметрии трехфазной электрической цепи.

Таблица 1. Постоянные интегрирования для независимых токов

Ток	i_{a1}	i_{a2}	i_{c1}	i_{c2}
A_1	8.4751993	22.0192225	-7.831930	-20.3479444
A_2	0.000074	0.000024	-0.000021	-0.0000254
A_3	42.92093288	-8.260136182	-27.09464022	5.214366764
A_4	-0.000051	-0.000045	-0.00001	-0.000094

Используя постоянные интегрирования из табл. 1, запишем функции независимых токов:

$$\begin{aligned}
i_{a1}(t) &= 8.4751993e^{(-153.8461538t)} + 0.000074e^{(-153.8461538t)}t + 42.92093288e^{(-47.61904762t)} - \\
&\quad - 0.000051e^{(-47.61904762t)}t + 52.48920038 \sin(314.1592654t - 1.3666359014); \\
i_{a2}(t) &= 22.0192225e^{(-153.8461538t)} + 0.000024e^{(-153.8461538t)}t - 8.260136182e^{(-47.61904762t)} - \\
&\quad - 0.000045e^{(-47.61904762t)}t + 16.73771967 \sin(314.1592654t - 0.9649855115); \\
i_{c1}(t) &= -7.831930e^{(-153.8461538t)} - 0.000021e^{(-153.8461538t)}t - 27.09464022e^{(-47.61904762t)} - \\
&\quad - 0.00001e^{(-47.61904762t)}t + 52.48920038 \sin(314.1592654t + 0.7280360889); \\
i_{c2}(t) &= -20.3479444e^{(-153.8461538t)} + 0.0000254e^{(-153.8461538t)}t + 5.214366764* \\
&\quad *e^{(-47.61904762t)} - 0.000094e^{(-47.61904762t)}t + 16.73771965 \sin(314.1592654t + \\
&\quad + 1.129409591), \tag{11}
\end{aligned}$$

где принужденные составляющие найдены так же, как и свободная составляющая, по программе CIRSYM.

Графики независимых токов i_{a1} , i_{b1} , i_{c1} приведены на рис. 2, а графики i_{a2} , i_{b2} , i_{c2} — на рис. 3. Зависимые токи найдены по формулам

$$i_{b1} = -(i_{a1} + i_{c1}) \text{ и } i_{b2} = -(i_{a2} + i_{c2}).$$

Как видно из графиков, наиболее интенсивно переходный процесс проходит в фазе А на первичной стороне трансформатора, где наблюдается наибольший ударный ток. Полученные функции токов соответствуют с различием в 2-х последних десятичных разрядах функциям, начальные условия для которых получены традиционным путем — на основе построения и решения $(n-1)$ -й системы уравнений относительно производных. Важно, что начальные условия получены автоматизированным путем — с помощью программы CIRSYM.

Вывод. Предложен алгоритм на основе схемно-алгебраической методики формирования уравнений состояния и программы символьного анализа CIRSYM для нахождения начальных условий в классическом методе анализа электрических цепей. Алгоритм снижает трудоемкость метода за счет исключения формирования и решения $(n-1)$ -й системы из n уравнений для нахождения начальных условий и тем самым позволяет проводить анализ более сложных электрических цепей.

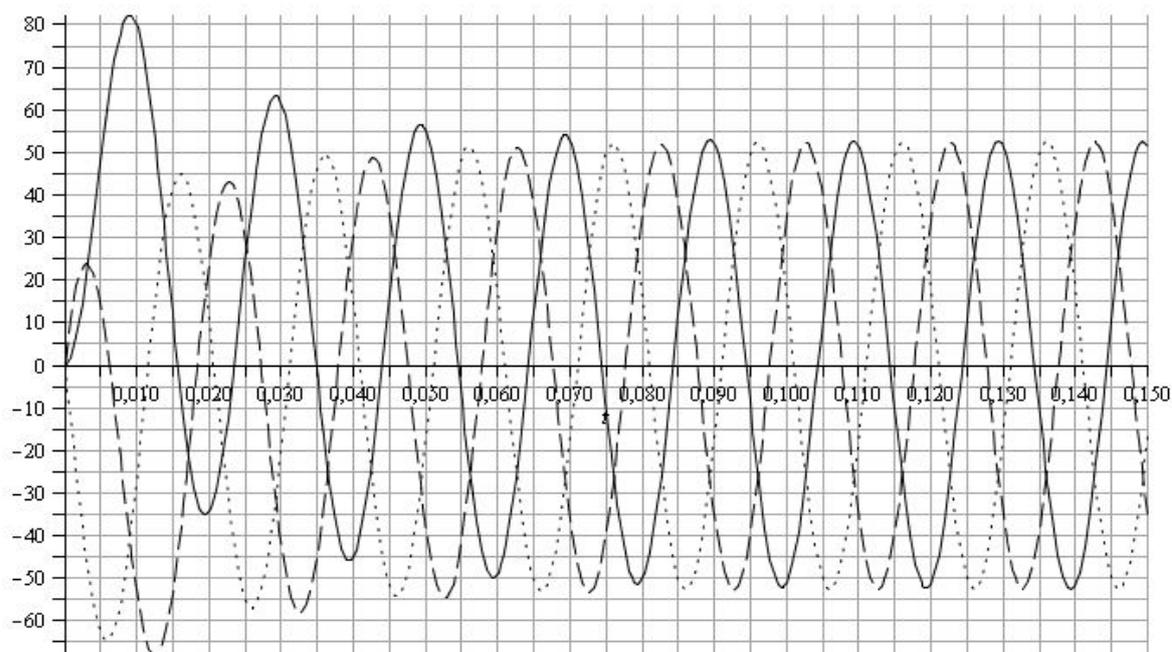


Рис. 2. Графики токов i_{a1} (—), i_{b1} (---), i_{c1} (···)

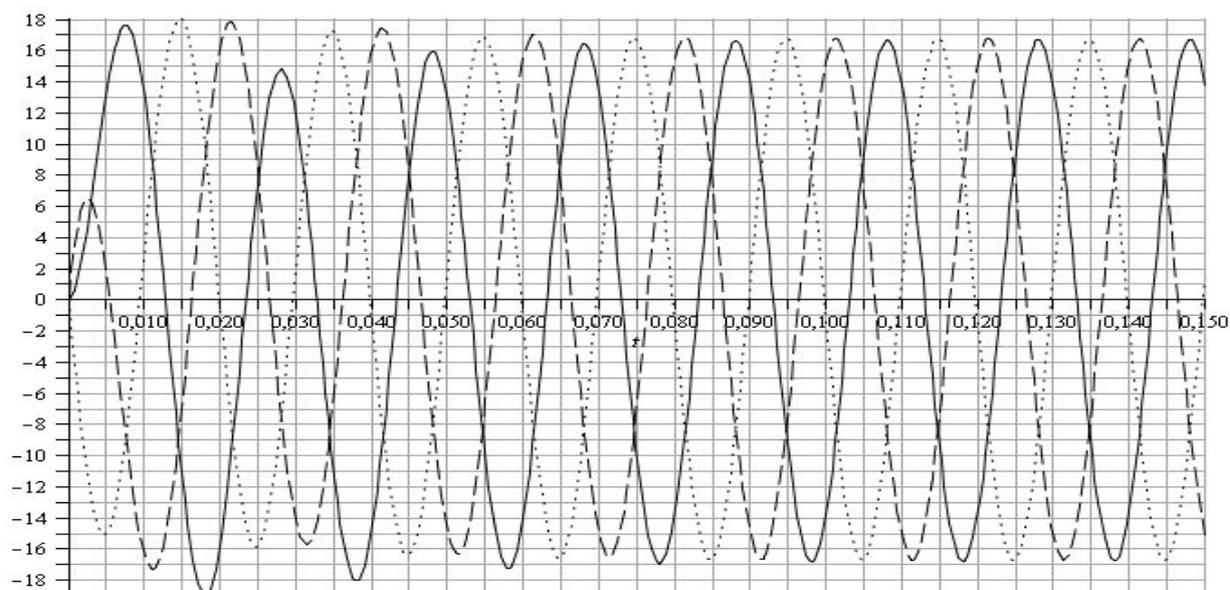


Рис. 3. Графики токов i_{a2} (—), i_{b2} (---), i_{c2} (···)

Список литературы

1. Канов Л. Н., Костюков В. В. Применение метода схемных коэффициентов к анализу переходных процессов в симметричных трехфазных цепях // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей : Международ. сб. науч. тр. — Вып. 13. — Ульяновск : УЛГТУ, 2016. — С.56–62.
2. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи : учебник. — 10-е изд. — М. : Гардарики, 2002. — 638 с.

3. Канов Л. Н., Костюков В. В. Метод моделирования нестационарных режимов электротехнических систем на основе схемных коэффициентов // Электротехника и электромеханика. — Запорожье (Украина). — 2007. — №1. — С. 35–40.

4. Бычков Ю. А., Золотницкий В. М., Чернышев Э. П. Основы теории электрических цепей : учебник для вузов. — СПб. : Лань, 2002. — 464 с.

5. Курганов С. А., Филаретов В. В. Формирование уравнений состояния линейных электрических цепей с обобщенными индуктивными сечениями и емкостными контурами // Электричество. — 2013. — №9. — С. 49–55.

6. Филаретов В. В. Программа символьного анализа CIRSYM: история создания, структура и функции // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей : Международ. сб. науч. труд. — Ульяновск : УлГТУ, 2010. — Вып. 10. — С.158–171.

Прокофьев Иван Алексеевич — студент второго курса энергетического факультета Ульяновского государственного технического университета.
E-mail: prokofev.ivan.2015@yandex.ru.

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА РЕЗИСТИВНЫХ ЦЕПЕЙ С ИДЕАЛЬНЫМИ ДИОДАМИ

Д. В. Шушпанов, О. Д. Лучанский

Рассмотрен аналитический метод расчета резистивных цепей с идеальными диодами, имеющими прямоугольную вольтамперную характеристику. Предложено совместить данный метод с методом схемных определителей.

The analysis of resistive circuits with ideal diodes having a rectangular current-voltage curve is considered. The combination of this method and the method of circuit determinants is proposed.

Схемотехническое моделирование и его автоматизация. Машинный анализ электронных цепей интенсивно развивается более полувека [1, 2]. Совершенствование полупроводниковой базы (высокоскоростные транзисторы, диоды) обуславливает моделирование радиоэлектронных устройств, состоящих из новых приборов. Использование ключевых методов усиления сигналов (переключение при нуле напряжения, переключение при нуле тока и т. д.), увеличение частоты переключения ключевых приборов требует корректного моделирования как медленных процессов (ниже частоты переключения), так и быстрых процессов, проходящих при переключении ключевых приборов.

При реализации ключевых режимов усиления необходимо оценить величину электромагнитных помех, создаваемые ключевыми приборами. Эти помехи возникают как на частотах, кратных частоте коммутации (десятки килогерц — сотни мегагерц), так и на частотах, создаваемых паразитными элементами цепи (паразитные элементы, возникающие из-за разводки печатной платы, паразитные параметры дросселей, трансформаторов, конденсаторов и т. д.). Поэтому необходимо использовать программы моделирования, способные для одной и той же цепи считать как медленные (мкс — мс и выше), так и быстрые (доли мкс — нс и ниже) процессы, то есть решать жесткие задачи с приемлемыми скоростью и точностью.

К одной из эффективных и удобных в использовании относится программа FASTMEAN для быстрого расчета и оптимизации переходных и стационарных процессов в электрических цепях радиотехнических и телекоммуникационных устройств. Эта программа разработана на кафедре «Теория электрических цепей» СПбГУТ им. М. А. Бонч-Бруевича д. т. н., профессором А. Д. Артымом, д. т. н., профессором В. А. Филином и к. т. н. В. С. Смирновым [3].

Большинство программ схемотехнического моделирования используют численные методы, имеющие ограничения по точности и времени вычислений при многовариантных расчетах. До сих пор, несмотря на распространение систем компьютерной алгебры, например, Mathematica и Maple, формульный вывод схемных функций и откликов относится к интеллектуальным задачам. Кандидатские и докторские диссертации наполняются такими формулами в качестве творческих результатов, поскольку программы символьного анализа [4–6 и др.] не получили широкого распространения.

Между тем, находится в открытом доступе программа символьного анализа и диагностики CIRSYM [<http://intersyn.net/cirsym.html>]. Эта программа не имеет аналогов в своем классе по числу режимов работы, набору линейных элементов и сложности моделируемых схем (сотни узлов и элементов) [6]. В частности, отказ от матричных представлений позволил в программе CIRSYM задавать параметры элементов, как проводимостями, так и сопротивлениями, допускать все типы управляемых источников и аномальных элементов. Программа CIRSYM в виде символьного модуля встроена в программу FASTMEAN, начиная с версии 3.0 [7].

Программы символьного моделирования позволяют получить аналитическое решение жестких задач, но, как правило, для линейных цепей. В данной статье предлагается схемно-символьный метод анализа произвольных нелинейных резистивных схем, не требующий формирования и численного решения системы уравнений.

Использование кусочно-линейных аппроксимаций характеристик нелинейных элементов. Метод схемных определителей (МСО), разработанный ульяновской научной школой [8–10], позволяет уменьшить

объем вычислений для цепей значительного размера по сравнению с другими методами.

МСО реализован в программе CIRSYM [6]. Этот метод можно применить для анализа нелинейных резистивных схем с диодами [11]. Однако такой подход требует определения полярности токов диодов (нелинейных элементов) после составления схемных функций, хотя это проще, чем использовать комбинаторные алгоритмы [1, 2]. Известен также другой подход к аналитическому расчету нелинейных цепей [4, 5].

При расчете цепей с нелинейными элементами чаще всего используют метод Ньютона — Рафсона [1, 2]. Для упрощения расчета применяется кусочно-линейная аппроксимация вольтамперной характеристики (ВАХ) нелинейного элемента. Это позволяет сократить время расчета, но накладывает дополнительные ограничения, связанные с моментом переключения, то есть моментом перехода от одного участка кусочно-линейной аппроксимации к другому (рис. 1).

Для такой ВАХ необходимо для каждого состояния ключа составлять уравнение системы, что приводит к ошибке в определении «момента переключения», а также тока и напряжения в «момент переключения». Первый недостаток можно устранить, используя более сложные методы при составлении уравнения цепи. Второе усложнение возникает из-за того, что в момент перехода от одного участка кусочно-линейной аппроксимации к другому участку могут возникать всплески напряжения или тока (в зависимости от того, что является условием переключения: ток или напряжение).

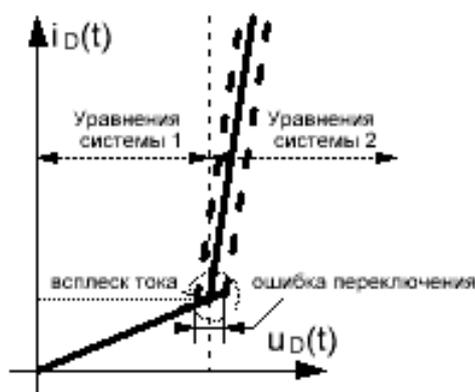


Рис. 1. Кусочно-линейная аппроксимация диода

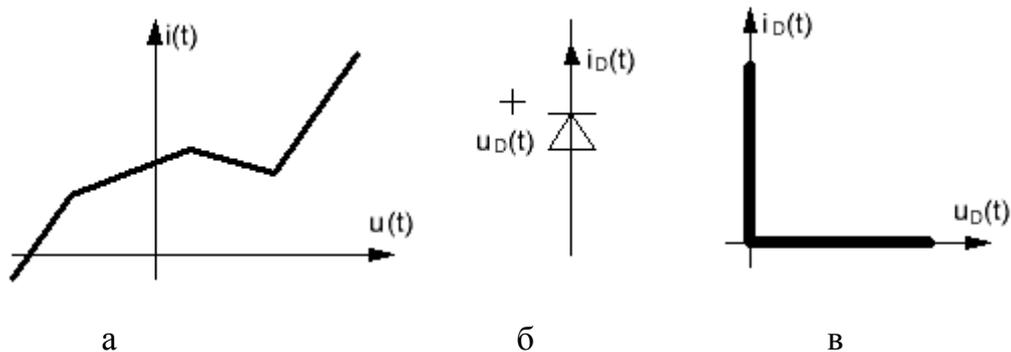


Рис. 2. Кусочно-линейная аппроксимация нелинейного элемента (а) и используемый для неё идеальный диод (б) со своей вольтамперной характеристикой

Использование сплайнов на границе перехода [2] также не избавляет от сложности учета нелинейного элемента.

Более предпочтителен другой вариант — приближать, но не допускать приближения к точке перехода, убрав эту точку ВАХ элемента из рассмотрения. Однако при этом снижается точность, что может привести к большим ошибкам. Трудно определить время перехода от одного участка ВАХ к другому.

Необходимо каждый раз определять условие перехода (возможна в дальнейшем его корректировка), поэтому из-за выбора шага и точности может произойти переключение раньше или позже. Это приведет к дополнительной погрешности в расчетах, особенно в схемах с большим числом нелинейных элементов.

Перечисленные проблемы не присущи кусочно-линейной аппроксимации нелинейного элемента идеальным диодом с ВАХ, описываемой нелинейной функцией, названной «передачей модуля» [4, 5]. Эта модель положена в основу предлагаемого аналитического метода анализа нелинейных резистивных цепей.

Итак, для представления кусочно-линейной аппроксимации ВАХ любого нелинейного элемента (рис. 2,а) используется идеальный диод (рис. 2,б) с ВАХ (рис. 2,в) в виде [4, 5]:

$$\begin{cases} u_D(t) \geq 0, \\ i_D(t) \geq 0, \\ i_D(t) \cdot u_D(t) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Выражение (1) восходит к идее Бокховена и Леенартса, которая формулируется как линейная проблема взаимозависимости (linear complementarity problem — LCP) [12].

Нелинейные схемы с одним диодом. Для одного диода по методу эквивалентного генератора, можно записать уравнение, связывающее ток и напряжение идеального диода

$$\begin{cases} u_D(t) = R_D \cdot i_D(t) + u_D(t), \\ u_D(t), i_D(t) \geq 0, \\ i_D(t) \cdot u_D(t) = 0 \end{cases}, \quad (2)$$

Решением уравнения (2) будет функция, названная в [4, 5] передачей модуля (modulus transform):

$$y = \lfloor x \rfloor \rightarrow \begin{cases} y = x, & x \geq 0 \\ y = 0, & x < 0 \end{cases} \rightarrow y = \frac{x + |x|}{2}. \quad (3)$$

Тогда получаем следующее решение уравнения (2):

$$\begin{cases} u_D(t) = \lfloor u_D(t) \rfloor, & i_D(t) = 0 \\ i_D(t) = \lfloor -u_D(t) / R_D \rfloor, & u_D(t) = 0 \end{cases}. \quad (4)$$

Рассмотрим решение задачи простейшей цепи с одним диодом (рис. 3). По закону напряжений Кирхгофа (ЗНК):

$$-u_0(t) + i_D(t)R - u_D(t) = 0. \quad (5)$$

Решение уравнения (5) по аналогии с (2) будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} u_D(t) = \lfloor -u_0(t) \rfloor \\ i_D(t) = \left\lfloor \frac{u_0(t)}{R} \right\rfloor \end{cases}.$$

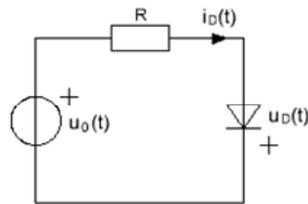


Рис. 3. Пример простейшей схемы с идеальным диодом

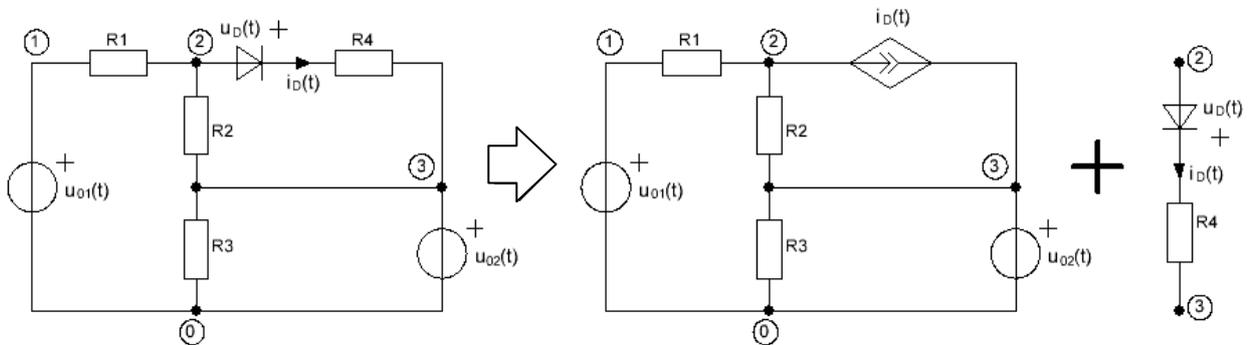


Рис. 4. Пример разветвленной цепи с идеальным диодом

Рассмотрим решение задачи с одним диодом в более сложной разветвленной ветви (рис. 4). Сначала заменим ветвь с диодом на источник тока и для полученной цепи (рис. 4) составим уравнение по методу узловых напряжений:

$$\begin{cases} u_1(t) = u_{01}(t) \\ -\frac{1}{R_1}u_1(t) + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)u_2(t) - \frac{1}{R_2}u_3(t) = -i_D(t) \\ u_3(t) = u_{02}(t) \end{cases} \quad (6)$$

Далее составляем уравнение по ЗНК для ветви, содержащий диод (рис. 4):

$$-u_2(t) - u_D(t) + i_D(t)R_4 + u_3(t) = 0. \quad (7)$$

Объединив (6) и (7), получаем систему уравнений для данной цепи (рис. 4)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/R_1 & 1/R_1 + 1/R_2 & -1/R_2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 1 & R_4 \end{array} \right) \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ i_D(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{01}(t) \\ 0 \\ u_{02}(t) \\ u_D(t) \end{pmatrix}, \quad (8)$$

которую можно представить так [5]:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{A}_1 \\ -\mathbf{A}_2^T & \mathbf{R}_D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_y \\ \mathbf{I}_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_0 \\ \mathbf{U}_D - \mathbf{U}_{D0} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где \mathbf{G} — матрица проводимости линейной части цепи (диод замещен источником тока), \mathbf{R}_D — матрица сопротивлений, последовательных диоду, \mathbf{A}_1 — узловая матрица для линейной части цепи (диод замещен источником тока), \mathbf{A}_2 — узловая матрица цепи с диодом, \mathbf{U}_0 — вектор источников возмущения линейной части цепи (диод замещен источником тока), \mathbf{U}_{D0} — вектор источников возмущения для ветви с диодом, \mathbf{U}_y — вектор узловых напряжений, \mathbf{I}_D — вектор токов диодов, \mathbf{U}_D — вектор напряжений на диодах.

Для данного варианта (рис. 4) согласно (8) получается:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_D = R_4,$$

$$\mathbf{U}_0 = \begin{pmatrix} u_{01}(t) \\ 0 \\ u_{02}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}_{D0} = 0, \quad \mathbf{U}_y = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I}_D = i_D(t), \quad \mathbf{U}_D = u_D(t). \quad (10)$$

Для нахождения тока и напряжения на диоде необходимо систему (9) свести к уравнению (2). Для этого необходимы преобразования [5]:

$$\begin{cases} R_3 = \mathbf{A}_2^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{A}_1 + \mathbf{R}_D \\ u_3(t) = -\mathbf{A}_2^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{U}_0 + \mathbf{U}_{D0} \end{cases}. \quad (11)$$

Тогда, подставляя (10) в (11), получаем

$$R_{\mathcal{D}} = (0 \quad 1 \quad -1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{R_2}{R_1 + R_2} & \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} & \frac{R_1 R_2}{R_1 R_3 + R_2 R_3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + R_4 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_4,$$

$$u_{\mathcal{D}}(t) = (0 \quad -1 \quad 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{R_2}{R_1 + R_2} & \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} & \frac{R_1 R_2}{R_1 R_3 + R_2 R_3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{01}(t) \\ 0 \\ u_{02}(t) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{R_2(u_{02}(t) - u_{01}(t))}{R_1 + R_2},$$

учитывая которые в (4), находим ток и напряжение на диоде

$$i_{\mathcal{D}}(t) = \left\lfloor \frac{-u_{\mathcal{D}}(t)}{R_{\mathcal{D}}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{R_2(u_{01}(t) - u_{02}(t))}{R_1(R_2 + R_4) + R_2 R_4} \right\rfloor, \quad (12)$$

$$u_{\mathcal{D}}(t) = \lfloor u_{\mathcal{D}}(t) \rfloor = \left\lfloor \frac{R_2(u_{02}(t) - u_{01}(t))}{R_1 + R_2} \right\rfloor. \quad (13)$$

Нелинейные схемы с двумя диодами. В случае с двумя диодами вместо уравнения (2) для нахождения решения токов и напряжений на диодах используем такую систему уравнений [4, 5]

$$\begin{bmatrix} u_{\mathcal{D}1}(t) \\ u_{\mathcal{D}2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{\mathcal{D}11} & R_{\mathcal{D}12} \\ R_{\mathcal{D}21} & R_{\mathcal{D}22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{\mathcal{D}1}(t) \\ i_{\mathcal{D}2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{\mathcal{D}1}(t) \\ u_{\mathcal{D}2}(t) \end{bmatrix}, \quad (14)$$

или в матричном виде [4, 5]:

$$\begin{cases} \mathbf{U}_{\mathcal{D}} = \mathbf{R}_{\mathcal{D}} \cdot \mathbf{I}_{\mathcal{D}} + \mathbf{U}_{\mathcal{D}}, \\ \mathbf{I}_{\mathcal{D}}, \mathbf{U}_{\mathcal{D}} \geq 0, \\ \mathbf{I}_{\mathcal{D}}^T \cdot \mathbf{U}_{\mathcal{D}} = 0 \end{cases}, \quad (15)$$

где $\mathbf{U}_{\mathcal{D}}$ и $\mathbf{I}_{\mathcal{D}}$ — векторы напряжений на диодах и токов диодов, $\mathbf{R}_{\mathcal{D}}$ и $\mathbf{U}_{\mathcal{D}}$ — матрицы линейных компонентов цепи и источников возмущения.

Для нахождения $u_{D1}(t)$ в системе (14) приравняем $i_{D1}(t) = 0$, тогда $u_{D1}(t) = \left[R_{\mathcal{E}12} \hat{i}_{D2}(t) + u_{\mathcal{E}1}(t) \right]$ и $\hat{u}_{D2}(t) = R_{\mathcal{E}22} \hat{i}_{D2}(t) + u_{\mathcal{E}2}(t)$. Решение для $\hat{i}_{D2}(t)$ аналогично решению уравнения (2), т.е. $\hat{i}_{D2}(t) = \left[-u_{\mathcal{E}2}(t) / R_{\mathcal{E}22} \right]$. Подставляя $\hat{i}_{D2}(t)$ в выражение $u_{D1}(t)$, получаем $u_{D1}(t) = \left[R_{\mathcal{E}12} \left[-u_{\mathcal{E}2}(t) / R_{\mathcal{E}22} \right] + u_{\mathcal{E}1}(t) \right]$. Чтобы найти $i_{D1}(t)$, приравняем $u_{D1}(t)$ к нулю и получим $0 = R_{\mathcal{E}11} i_{D1}(t) + R_{\mathcal{E}12} \hat{i}_{D2}(t) + u_{\mathcal{E}1}(t)$. Подставляем в это уравнение $\hat{i}_{D2}(t)$ и находим $i_{D1}(t)$. По аналогии находим $u_{D2}(t)$ и $i_{D2}(t)$, а с учетом [4, 5]:

$$\begin{aligned} u_{D1}(t) &= \left[R_{\mathcal{E}12} \left[\frac{-u_{\mathcal{E}2}(t)}{R_{\mathcal{E}22}} \right] + u_{\mathcal{E}1}(t) \right], & i_{D1}(t) &= \left[-\frac{R_{\mathcal{E}12}}{R_{\mathcal{E}11}} \left[\frac{-u_{\mathcal{E}2}(t)}{R_{\mathcal{E}22}} \right] - \frac{u_{\mathcal{E}1}(t)}{R_{\mathcal{E}11}} \right], \\ u_{D2}(t) &= \left[R_{\mathcal{E}21} \left[\frac{-u_{\mathcal{E}1}(t)}{R_{\mathcal{E}11}} \right] + u_{\mathcal{E}2}(t) \right], & i_{D2}(t) &= \left[-\frac{R_{\mathcal{E}21}}{R_{\mathcal{E}22}} \left[\frac{-u_{\mathcal{E}1}(t)}{R_{\mathcal{E}11}} \right] - \frac{u_{\mathcal{E}2}(t)}{R_{\mathcal{E}22}} \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Для варианта цепи с двумя диодами (рис. 5) по аналогии цепи с одним диодом (рис. 4) заменим ветви с диодами на источники тока (рис. 5) и составим уравнения по методу узловых напряжений:

$$\begin{cases} u_1(t) = u_{01}(t) \\ -\frac{1}{R_1} u_1(t) + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) u_2(t) - \frac{1}{R_2} u_3(t) = -i_{D1}(t) \\ -\frac{1}{R_2} u_2(t) + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) u_3(t) = i_{D2}(t) \\ u_4(t) = u_{02}(t) \end{cases} \quad (17)$$

Далее составляем уравнения по ЗНК для ветвей, содержащих диоды (рис. 5):

$$\begin{cases} -u_2(t) - u_{D1}(t) + i_{D1}(t) R_4 + u_4(t) = 0 \\ -u_4(t) - u_{D2}(t) + u_3(t) = 0 \end{cases} \quad (18)$$

Объединив (17) и (18), получаем систему уравнений для данной цепи (рис. 5)

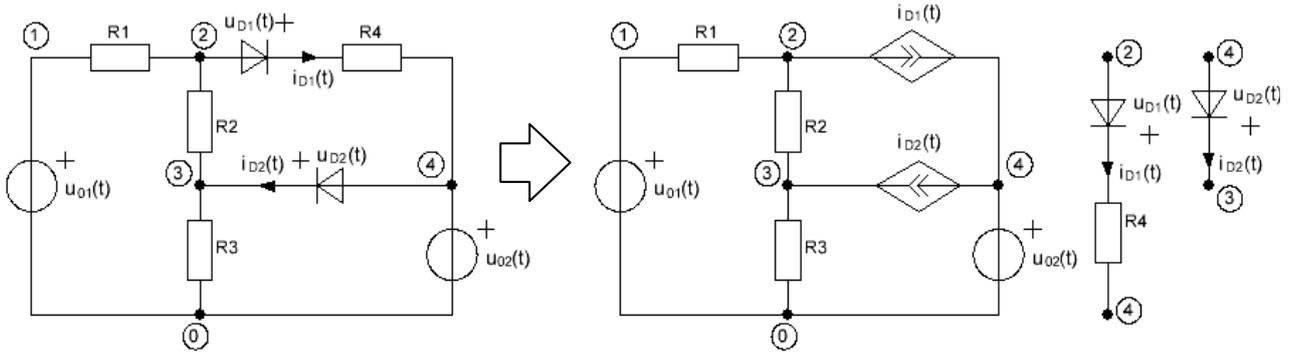


Рис. 5. Пример разветвленной цепи с двумя идеальными диодами

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/R_1 & 1/R_1 + 1/R_2 & -1/R_2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/R_2 & 1/R_2 + 1/R_3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 1 & R_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \\ i_{D1}(t) \\ i_{D2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{01}(t) \\ 0 \\ 0 \\ u_{01}(t) \\ u_{D1}(t) \\ u_{D2}(t) \end{pmatrix}, \quad (19)$$

Используя (11) для (19), находим [5]

$$\mathbf{R}_3 = \begin{pmatrix} R_4 + \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} & -\frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \\ -\frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} & \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}_3 = \begin{pmatrix} u_{02}(t) - \frac{u_{01}(t)(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} \\ \frac{u_{01}(t)R_3}{R_1 + R_2 + R_3} - u_{02}(t) \end{pmatrix},$$

подставляя которые в (16), определяем токи и напряжения на диодах для данной схемы (рис. 5)

$$u_{D1}(t) = \left[u_{02}(t) - \frac{u_{01}(t)(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \left[u_{02}(t) - \frac{u_{01}(t)R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \right] \right], \quad (20)$$

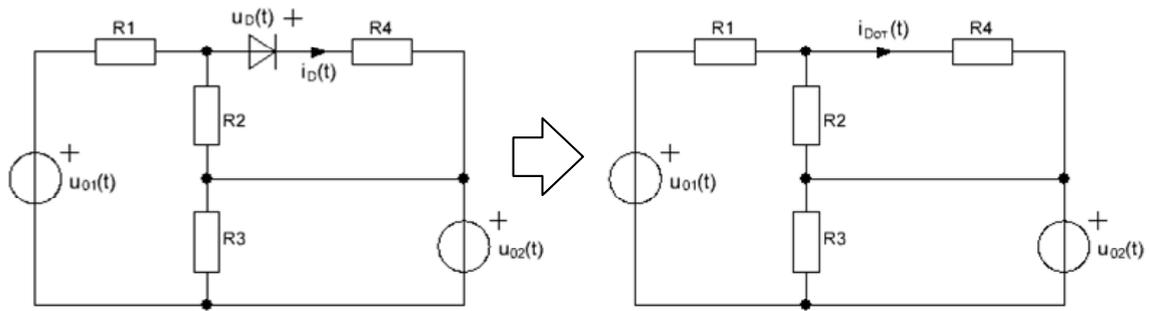


Рис. 6. Схемное решение разветвленной цепи с одним идеальным диодом

$$u_{D2}(t) = \left[\frac{u_{01}(t)R_3}{R_1 + R_2 + R_3} - u_{02}(t) - \frac{R_1R_3 \left[\frac{u_{01}(t)(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} - u_{02}(t) \right]}{(R_2 + R_3)(R_1 + R_4) + R_1R_4} \right], \quad (21)$$

$$i_{D1}(t) = \left[\frac{\frac{u_{01}(t)(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} - u_{02}(t)}{R_4 + \frac{R_1R_2 + R_1R_3}{R_1 + R_2 + R_3}} + \frac{R_1 \left[u_{02}(t) - \frac{u_{01}(t)R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \right]}{(R_2 + R_3) \left(R_4 + \frac{R_1R_2 + R_1R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \right)} \right], \quad (22)$$

$$i_{D2}(t) = \left[\frac{u_{02}(t)(R_1 + R_2 + R_3) - u_{01}(t)R_3}{R_3(R_1 + R_2)} + \frac{R_1 \left[\frac{u_{01}(t)(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} - u_{02}(t) \right]}{(R_1 + R_2) \left(R_4 + \frac{R_1R_2 + R_1R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \right)} \right]. \quad (23)$$

Использование метода схемных определителей. Описанная выше методика решения нелинейных цепей [4, 5] при расчете цепей с большим числом диодов требует автоматизации. Систему уравнений увеличенной размерности (количество узловых напряжений плюс количество диодов) необходимо решать аналитически, чтобы перейти от расширенной системы узловых уравнений (9) к символьным выражениям для эквивалентных сопротивлений и напряжений на диодах (11), а затем к решению в виде системы (15).

Предлагаемая здесь модификация символьного метода [4, 5] заключается в том, чтобы заменить наиболее трудоемкий этап формирования и решения системы уравнений вида (9) использованием МСО или его ре-

лизаций в программах (CIRSYM и FASTMEAN), позволяющего находить любые отклики в аналитическом виде для линейной цепи произвольной структуры и состава элементов, минимизировав промежуточные выкладки.

Алгоритм предлагаемого метода заключается в переборе всех возможных состояний диодов (закрыт или открыт). Схемное решение разветвленной цепи состоит в нахождении токов через диоды в виде символьных выражений. При этом просто учитываются внутренние сопротивления включенных или выключенных диодов.

Для автоматизации анализа нелинейных резистивных цепей целесообразно использовать символьный модуль CIRSYM в составе управляющей программы, подобной FASTMEAN, с развитым редактором схем и выводом графиков численного расчета.

В случае цепи с одним диодом (рис. 6) определяем ток, когда диод открыт $i_{D_{от}}(t)$ и используем функцию (3), тогда ток диода будет равен

$$i_D(t) = \lfloor i_{D_{от}}(t) \rfloor.$$

Находим по МСО $i_{D_{от}}(t)$ (рис. 7) и получаем ток через диод

$$i_D(t) = \left\lfloor \frac{R_2(u_{01}(t) - u_{02}(t))}{R_1(R_2 + R_4) + R_2R_4} \right\rfloor, \quad (24)$$

что соответствует выражению (12). Далее для расчета остальных токов и напряжений в цепи, ветвь с диодом замещается источником тока $i_D(t)$. Напряжение на диоде можно получить через законы Кирхгофа.

В случае цепи с двумя диодами (рис. 7) решение можно найти, используя алгоритм решения системы (4), описанный выше. Приравняв $i_{D1}(t) = 0$, получим схему замещения (рис. 7а), из которой находим ток, когда диод D2 открыт $\hat{i}_{D2_{от}}(t)$. Диод D2 заменяется на источник тока (схема замещения на рис. 7,а) с использованием функции (3):

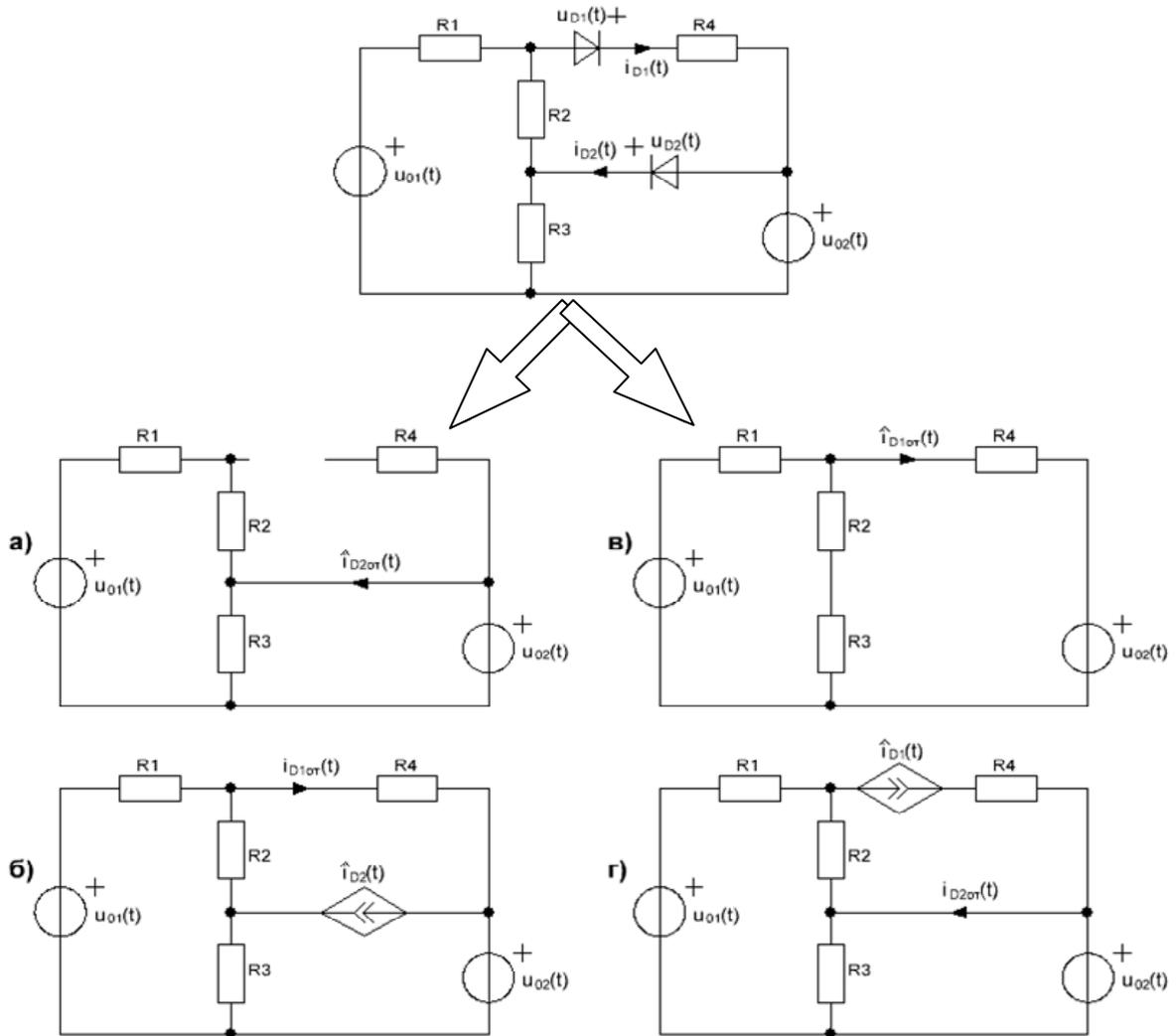


Рис. 7. Схемное решение разветвленной цепи с двумя идеальными диодами

$$\hat{i}_{D2}(t) = \left[\hat{i}_{D2or}(t) \right] = \left[\frac{u_{02}(t)(R_1 + R_2 + R_3) - u_{01}(t)R_3}{R_3(R_1 + R_2)} \right]. \quad (25)$$

Из схемы замещения (рис. 7б) определяем искомый ток через диод D1, используя функцию (3)

$$i_{D1}(t) = \left[i_{D1or}(t) \right] = \left[\frac{u_{01}(t)(R_2 + R_3) - u_{02}(t)(R_1 + R_2 + R_3)}{(R_2 + R_3)(R_1 + R_4) + R_1R_4} + \frac{\hat{i}_{D2}(t)R_1R_3}{(R_2 + R_3)(R_1 + R_4) + R_1R_4} \right]. \quad (26)$$

Аналогично можно найти решения для тока через диод D2. Приравняем $i_{D2}(t) = 0$ и получаем схему замещения (рис. 7в), из которой находим ток, когда диод D1 открыт $\hat{i}_{D1от}(t)$, и получаем

$$\hat{i}_{D1}(t) = \left[\hat{i}_{D2от}(t) \right] = \left[\frac{u_{01}(t)(R_2 + R_3) - u_{02}(t)(R_1 + R_2 + R_3)}{(R_2 + R_3)(R_1 + R_4) + R_1 R_4} \right]. \quad (27)$$

Далее диод D1 заменяем на источник тока и получаем схему замещения (рис. 7,г), из которой находим ток через диод D2

$$i_{D2}(t) = \left[i_{D2от}(t) \right] = \left[\frac{u_{02}(t)(R_1 + R_2 + R_3) - u_{01}(t)R_3}{R_3(R_1 + R_2)} + \hat{i}_{D1}(t) \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right]. \quad (28)$$

Получили, что выражения (25)–(28) полностью соответствуют выражениям (22) и (23). Из чего следует, что с помощью МСО можно найти токи через диоды, не используя громоздкие математические преобразования, что заметно упрощает расчет.

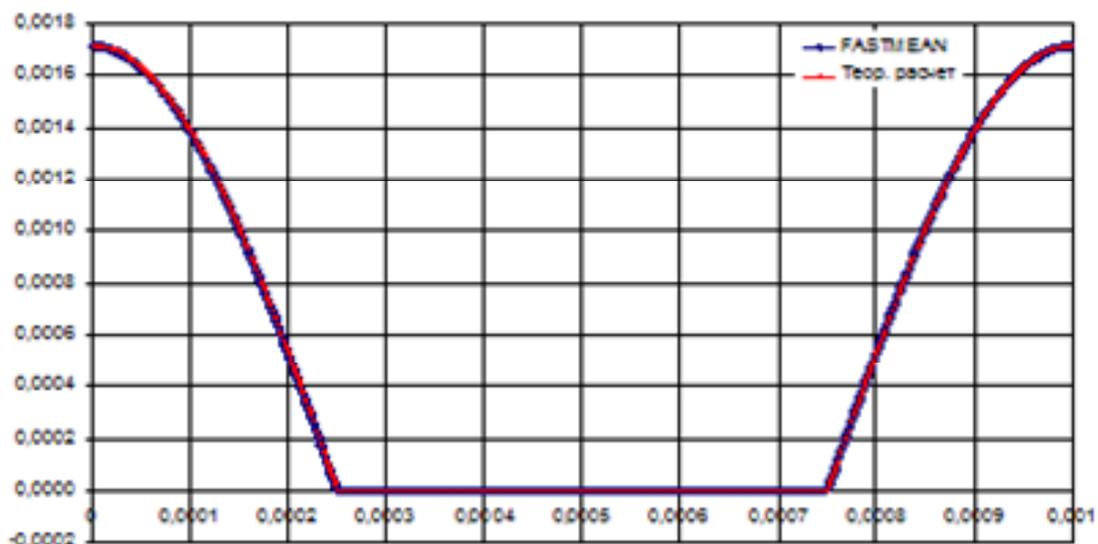
Результаты расчета схем с диодами. Рассчитаем схему с одним диодом (рис. 4) с помощью полученного программой FASTMEAN [3] аналитического выражения (12) при следующих значениях схемы: $R_1 = 2$ кОм, $R_2 = 3$ кОм, $R_4 = 4$ кОм, $R_4 = 200$ Ом. Расчет тока диода данной схемы этими методами показывает практически полное совпадение при следующих значениях источников напряжения (рис. 8):

а) $u_{01}(t) = 5 \cos(2\pi 10^3 t)$, $u_{02}(t) = \cos(2\pi 10^3 t)$;

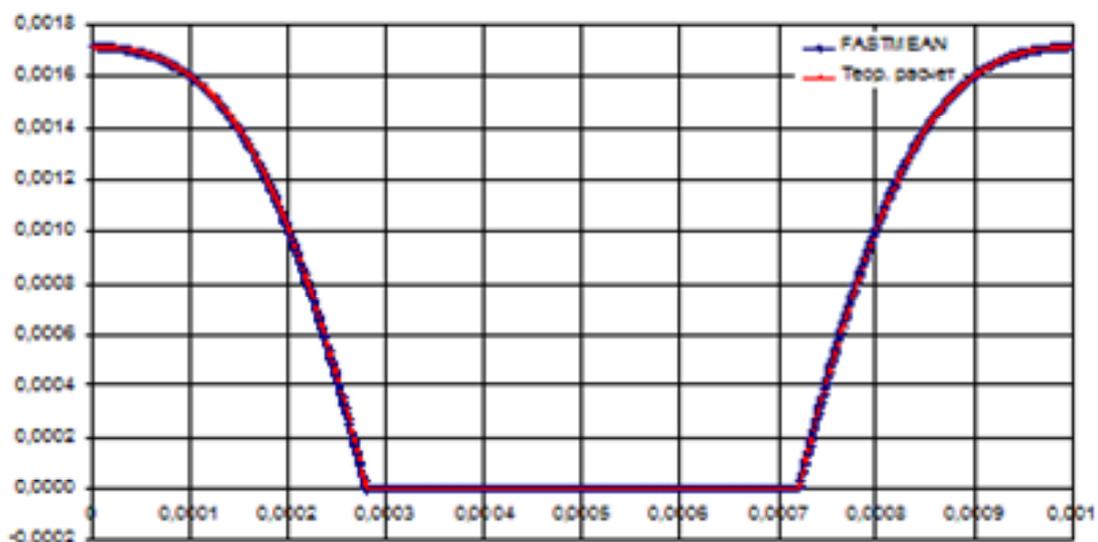
б) $u_{01}(t) = 5 \cos(2\pi 10^3 t)$, $u_{02}(t) = \cos(4\pi 10^3 t)$;

в) $u_{01}(t) = 5 \cos(2\pi 10^3 t)$, $u_{02}(t) = 1$.

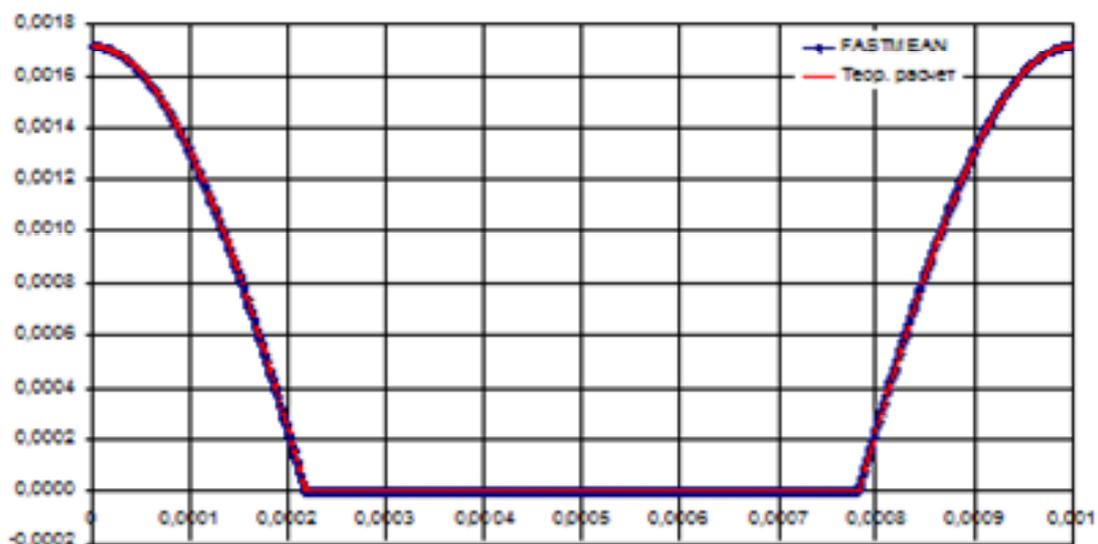
На рис. 9 приведены временные диаграммы токов через диоды (слева D1, справа D2) схемы с двумя диодами (рис. 5) при тех же параметрах схемы. Видно, что токи, рассчитанные двумя методами, немного отличаются лишь в те моменты времени, когда проводят оба диода. Это связано с тем, что в теоретических расчетах используются идеальные диоды, а в программе FASTMEAN — с конечными значениями во включенном и выключенном состояниях, и происходит ошибка в определении токов через диоды, когда открыты оба диода.



a)



б)



в)

Рис. 8. Расчет тока диода схемы (рис. 4): $R_1 = 2 \text{ кОм}$, $R_2 = 3 \text{ кОм}$, $R_3 = 4 \text{ кОм}$, $R_4 = 200 \text{ Ом}$ при различных значениях входного напряжения.

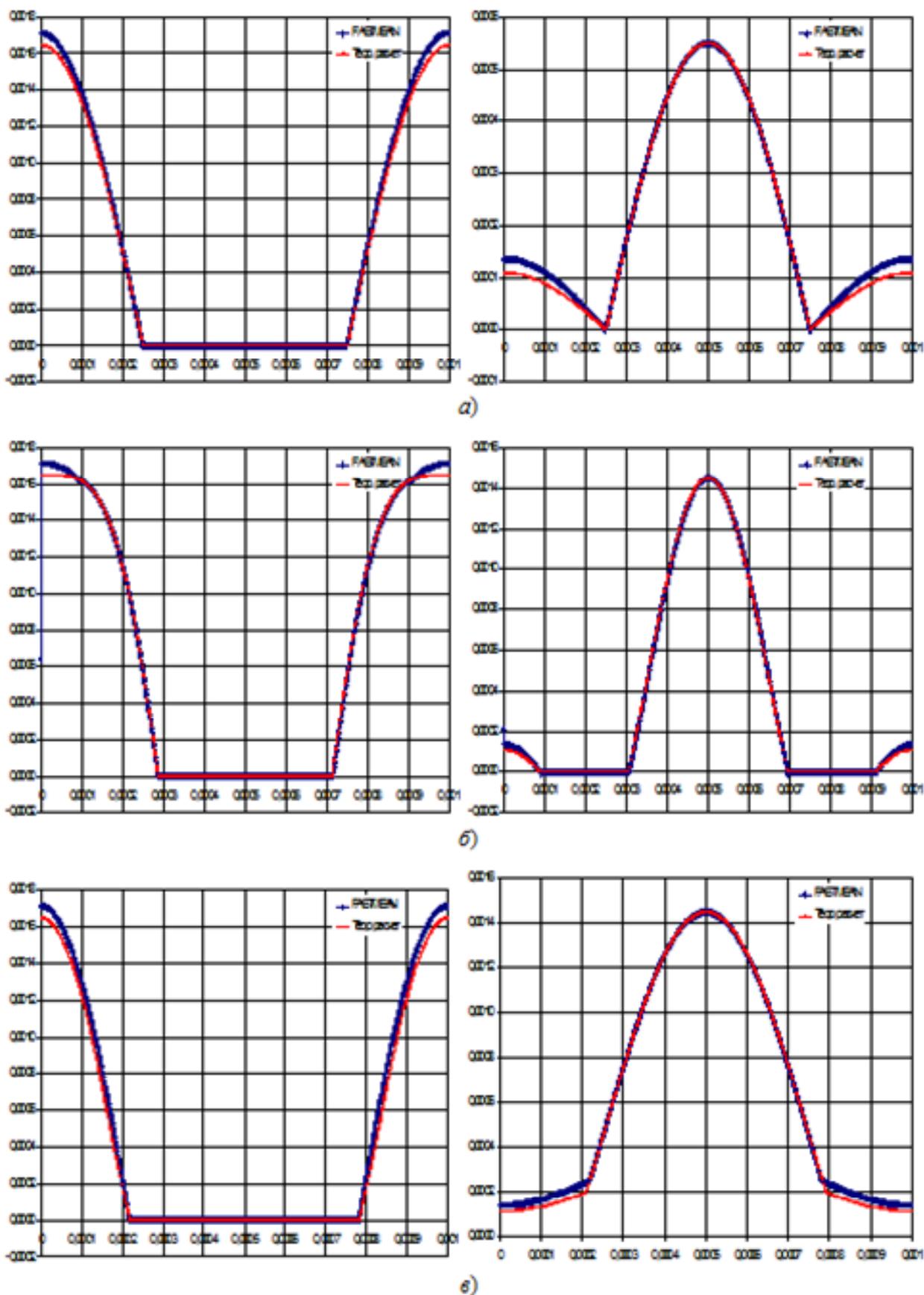


Рис. 9. Расчет токов через диоды (слева D1, справа D2) схемы (рис. 4):
 $R_1 = 2 \text{ кОм}$, $R_2 = 3 \text{ кОм}$, $R_3 = 4 \text{ кОм}$, $R_4 = 200 \text{ Ом}$
 при различных значениях входного напряжения.

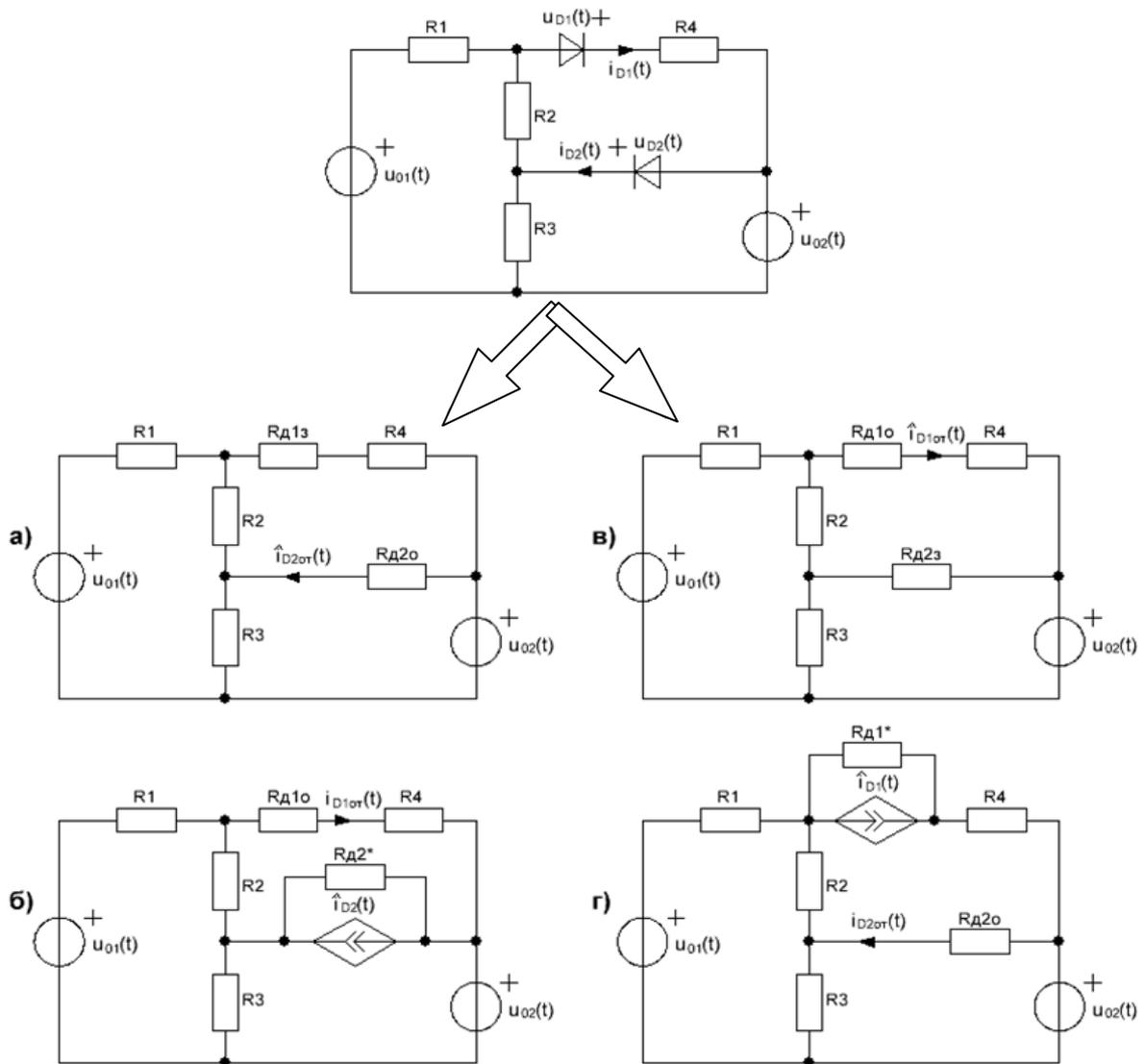


Рис. 10. Схемное решение разветвленной цепи с двумя идеальными диодами (с учетом сопротивлений включенного и выключенного состояний диода)

При учете сопротивлений включенного и выключенного диода в аналитическом методе (рис. 10) получаем близкие значения токов через диоды (рис. 11). В данной схеме (рис. 10) сопротивления R_{D2^*} и R_{D1^*} представляют сопротивления открытого (R_{D2o} , R_{D1o}) или закрытого (R_{D23} , R_{D13}) диода в зависимости от того открыт или закрыт конкретный диод.

Данная усложненная схема расчета токов через диоды (рис. 10) была взята лишь для сравнения полученных результатов с численным методом, реализованном в программе FASTMEAN (рис. 11). В дальнейших работах будет рассмотрено решение резистивных цепей с нелинейными элементами, схемы замещения которых используют идеальные диоды (рис. 2б), имеющие прямоугольные ВАХ (рис. 2в).

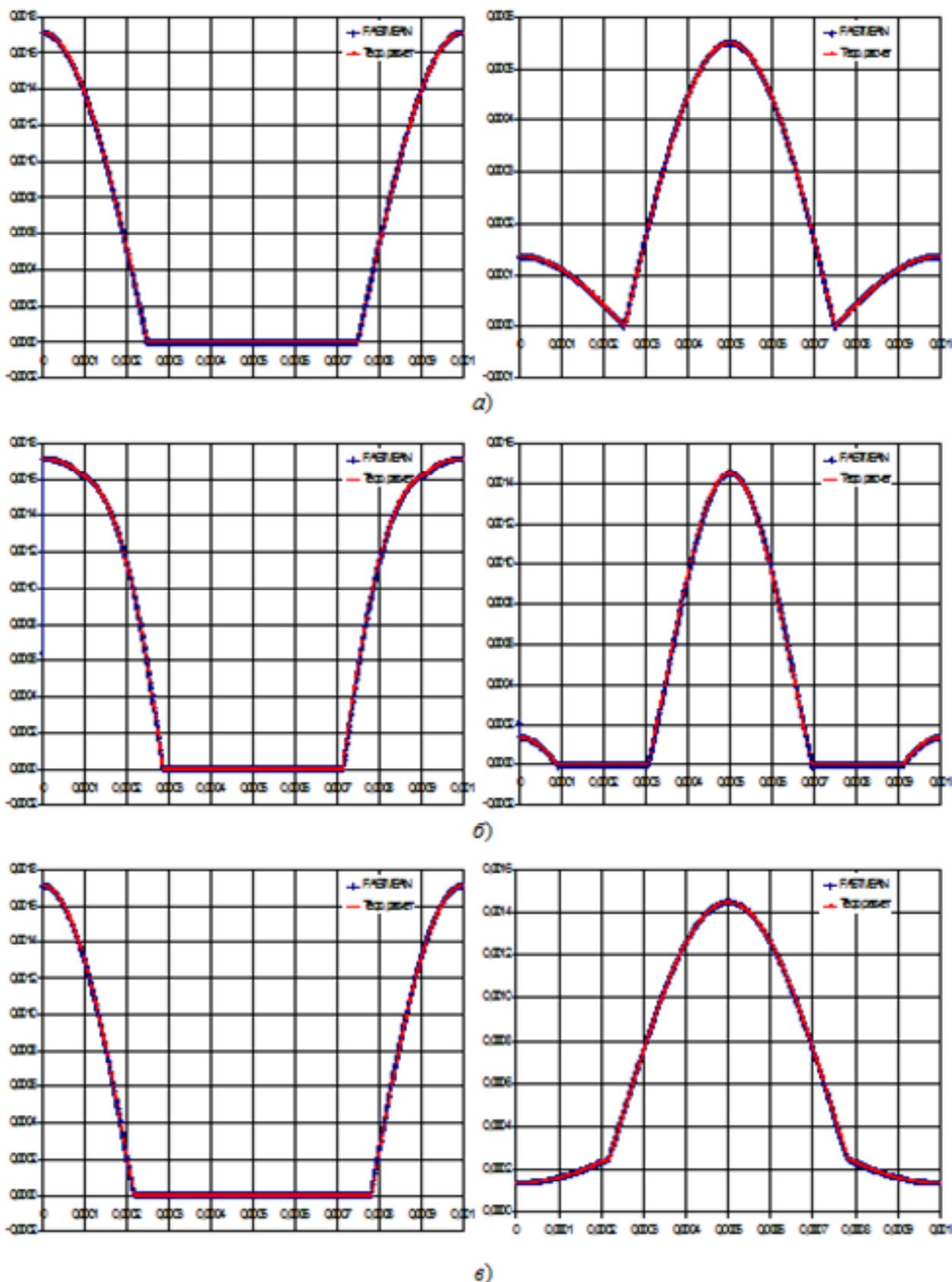


Рис. 11. Расчет токов через диоды (слева D1, справа D2) схемы (рис. 10):
 $R_1 = 2 \text{ кОм}$, $R_2 = 3 \text{ кОм}$, $R_3 = 4 \text{ кОм}$, $R_4 = 200 \text{ Ом}$, $R_{D13} = R_{D23} = 10 \text{ ГОм}$,
 $R_{D10} = R_{D20} = 10 \text{ мкОм}$ при различных значениях входного напряжения

Для расширения возможностей и повышения уровня «интеллекта» целесообразно оснащение FASTMEAN символьным модулем для нелинейных резистивных схем, подобно встроенному ранее символьному модулю для линейных схем [7].

Выводы

1. Исследована кусочно-линейная аппроксимация нелинейного элементов идеальными диодами с ВАХ, описываемой нелинейной функцией, названной «передачей модуля» [4, 5], которая лишена недостатков, присущих другим кусочно-линейным аппроксимациям.

2. Предложен схемно-символьный метод анализа произвольных нелинейных резистивных схем, не требующий формирования и численного решения системы уравнений. Нелинейные элементы представляются идеальными диодами с прямоугольной характеристикой. Схемное решение произвольной цепи состоит в нахождении токов через диоды в виде символьных выражений.

3. Рассмотрены примеры разветвленных схем с одним и двумя диодами. Показано совпадение решений, полученных предложенным методом, с расчетами, проведенными с помощью программы FASTMEAN.

Список литературы

1. Чуа Л. О., Пен-Мин-Лин. Машинный анализ электронных схем / пер. с англ. — М. : Энергия, 1980. — 640 с.
2. Влах И., Сингхал К. Машинные методы анализа и проектирования электронных схем / пер. с англ. — М. : Радио и связь, 1988. — 560 с.
3. Артым А. Д., Есполов К. Ж., Смирнов В. С., Филин В. А. Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ №2002610191 от 15.02.2002 «Автоматизированная компьютерная программа быстрого расчета и оптимизации переходных и стационарных процессов в электрических цепях радиотехнических и телекоммуникационных устройств» (FASTMEAN). <http://www.fastmean.ru>.
4. Manthe A., Li Z., Shi C.-J. R., and Mayaram K. Symbolic Analysis of Nonlinear Analog Circuits // Proceedings of the Design, Automation and Test in Europe Conference and Exhibition (DATE'03). — Mar. — 2003. — P. 11108–11109.

5. Manthe A., Li Z., Shi C.-J. R. Symbolic Analysis of Analog Circuits with Hard Nonlinearity // Proceedings of the Design Automation Conference (DAC'03). — June 2–6. — 2003. — P. 542–545.

6. Филаретов В. В. Программа символьного анализа CIRSYM: история создания, структура и функции // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей : Международ. сб. науч. тр. — Ульяновск : УлГТУ, 2010. — Вып. 10. — С. 158–171.

7. Смирнов В. С. Символьный анализ линейных моделей мощных ключевых устройств в программе FASTMEAN // Схемно-алгебраические модели активных электрических цепей: Синтез, анализ, диагностика : Тр. международ. конф. «Континуальные алгебраические логики, исчисления и нейроиформатика в науке, технике и экономике». — 2006. — Т. 3. — С. 180–186.

8. Курганов С. А., Филаретов В. В. Символьный анализ и диакоптика электрических цепей методом схемных определителей : учебное пособие. — Ульяновск : УлГТУ, 2003. — 228 с.

9. Курганов С. А., Филаретов В. В. Символьный анализ линейных аналоговых и дискретно-аналоговых электрических цепей : учебное пособие. — Ульяновск : УлГТУ, 2008. — 284 с.

10. Курганов С. А., Филаретов В. В. Топологические правила и формулы для анализа электрических цепей без избыточности. — Ульяновск : УлГТУ, 2010. — 109 с.

11. Горшков К. С., Кузнецов А. М., Филаретов В. В. Символьный анализ резистивных электрических цепей с диодами // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей : Международ. Сб. науч. тр. / под ред. В. В. Филаретова. — Ульяновск : УлГТУ, 2011. — Вып. 9. С. 45–55.

12. Leenaerts D. M. W., van Bokhoven W. M. G. Piecewise Linear Modeling and Analysis. — Kluwer Academic Publishers, 1998.

Шушпанов Дмитрий Викторович — канд. техн. наук, доцент кафедры «Теория электрических цепей и связи» Санкт-Петербургского государственного университета телекоммуникаций им. проф. М. А. Бонч-Бруевича.
E-mail: dimasf@inbox.ru.

Лучанский Олег Денисович — магистрант факультета фундаментальной подготовки Санкт-Петербургского государственного университета телекоммуникаций им. проф. М. А. Бонч-Бруевича.

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА РЕЗИСТИВНЫХ ЦЕПЕЙ⁵ С НЕЛИНЕЙНЫМИ РЕЗИСТИВНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Д. В. Шушпанов, А. С. Улитина

Рассмотрен аналитический метод расчета резистивных цепей с произвольными нелинейными элементами с кусочно-линейной аппроксимацией ВАХ. Предложена методика составления матриц для системы относительно токов нелинейных элементов и нахождения решения такой системы произвольного порядка.

The analysis of resistive circuits with any nonlinear elements which used the piecewise-linear approximation of their current-voltage curves is considered. The method of determining the matrixes needed for finding the nonlinear elements currents and the method for finding of that system solution for any order is proposed.

Схема замещения нелинейного элемента, использующая идеальные диоды с прямоугольными ВАХ. В предыдущей работе [1] предложен аналитический метод расчета резистивных цепей с идеальными диодами, имеющими прямоугольную вольтамперную характеристику [2, 3], что вытекает из линейной проблемы взаимозависимости (linear complementarity problem — LCP) [4]. В [1] совмещается метод расчета резистивных цепей с идеальными диодами [2, 3] с методом схемных определителей [5], что позволяет уменьшить объем вычислений.

Здесь предлагается обобщить метод [1] на резистивные цепи, содержащие любые нелинейные элементы (НЭ). По аналогии с [3] вольтамперной характеристикой НЭ является его кусочно-линейная аппроксимация (рис. 1,а), то есть в схеме замещения нелинейного элемента (рис. 1,б) используются идеальные диоды (рис. 1,в) с прямоугольной ВАХ (рис. 1г). На рис. 1,д показана схема замещения НЭ [3], в которой сложно определять значения резисторов и источников напряжения из-за взаимосвязей идеальных диодов. Здесь предлагается схема замещения НЭ на рис. 1,е,

⁵ Публикуется в порядке обсуждения.

где каждый идеальный диод открывается после открытия предыдущего, и проще определить параметры элементов. Рассмотрим схемы из [1] с НЭ общего вида (рис. 1,б) со схемой замещения рис. 1,е.

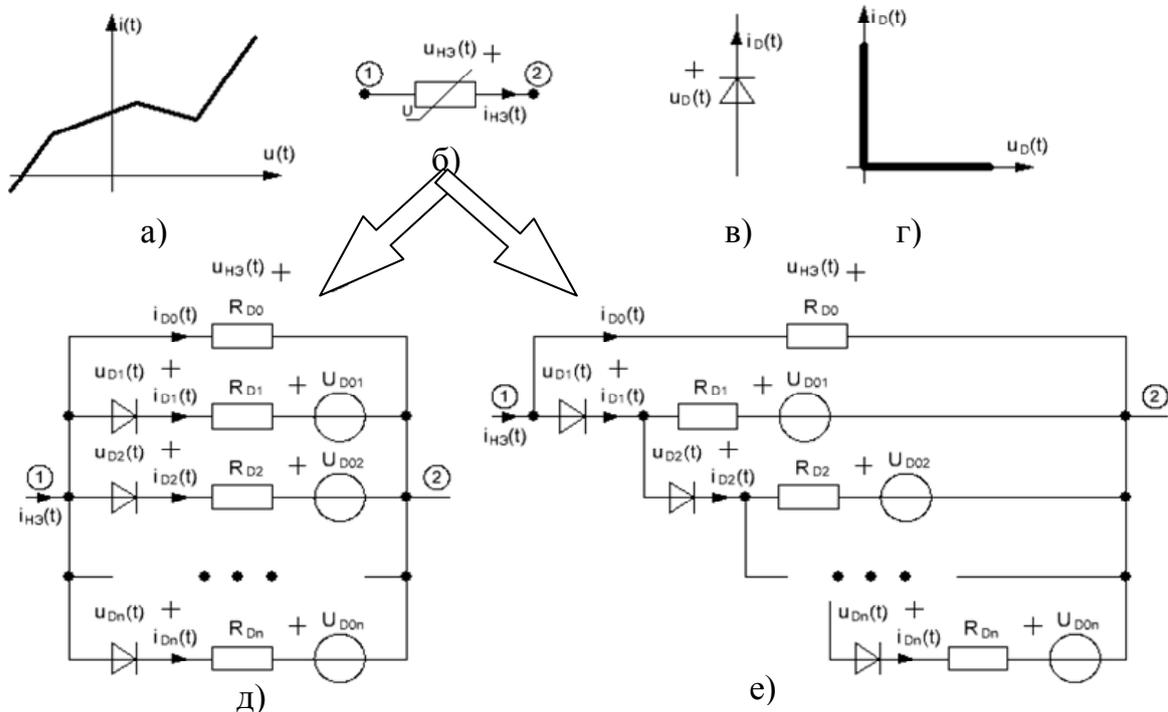


Рис. 1. Кусочно-линейная аппроксимация ВАХ (а) нелинейного элемента (б), идеальный диод (в) со своей ВАХ (г) и схемы замещения (д, е) нелинейного элемента, использующие идеальные диоды

Схема с одним нелинейным элементом. На рис. 2 заменим нелинейный элемент на источник тока $i_{HЭ}(t)$ и составим уравнения по методу узловых напряжений:

$$\begin{cases} u_1(t) = u_{01}(t) \\ -\frac{1}{R_1}u_1(t) + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)u_2(t) - \frac{1}{R_2}u_3(t) = -i_{HЭ}(t) \\ u_3(t) = u_{02}(t) \\ -\frac{1}{R_4}u_3(t) + \frac{1}{R_4}u_4(t) = i_{HЭ}(t) \end{cases} \quad (1)$$

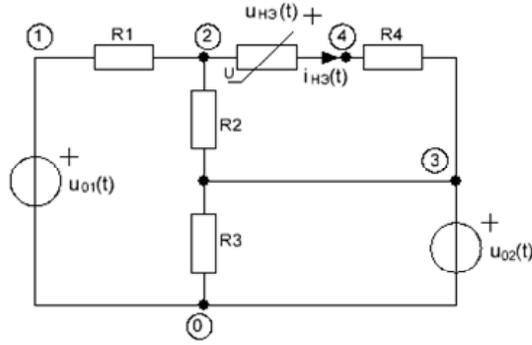


Рис. 2. Пример разветвленной цепи с одним нелинейным элементом

Уравнения по закону напряжений Кирхгофа для схемы на рис. 1,е:

$$\begin{cases}
 i_{HЭ}(t) = i_{D0}(t) + i_{D1}(t), & u_{HЭ}(t) = u_4(t) - u_2(t), \\
 \left. \begin{aligned}
 & i_{D0}(t)R_{D0} = u_2(t) - u_4(t) \\
 & -u_2(t) - u_{D1}(t) + (i_{D1}(t) - i_{D2}(t))R_{D1} + U_{D01} + u_4(t) = 0 \\
 & -u_2(t) - u_{D2}(t) + (i_{D2}(t) - i_{D3}(t))R_{D2} + U_{D02} + u_4(t) = 0 \\
 & \dots \\
 & -u_2(t) - u_{Dn}(t) + i_{Dn}(t)R_{Dn} + U_{D0n} + u_4(t) = 0
 \end{aligned} \right\}. \quad (2)
 \end{cases}$$

Объединив (1) и (2), получаем систему уравнений для схемы на рис. 2 в следующем виде [1]:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{A}_1 \\ -\mathbf{A}_2^T & \mathbf{R}_D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_y \\ \mathbf{I}_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_0 \\ \mathbf{U}_D - \mathbf{U}_{D0} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$\text{где } \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/R_1 & 1/R_1 + 1/R_2 & -1/R_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/R_4 & 1/R_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}_0 = \begin{pmatrix} u_{01}(t) \\ 0 \\ u_{02}(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}_y = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & \dots & -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{U}_{D0} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_{D01}(t) \\ \vdots \\ u_{D0n}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I}_D = \begin{pmatrix} i_{D0}(t) \\ i_{D1}(t) \\ \vdots \\ i_{Dn}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}_D = \begin{pmatrix} 0 \\ u_{D1}(t) \\ \vdots \\ u_{Dn}(t) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R}_D = \begin{pmatrix} R_{D0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{D1} & -R_{D1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{Dn-1} & -R_{Dn-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{Dn} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Перепишем систему (3) относительно матриц \mathbf{I}_{D^*} и \mathbf{U}_{D^*} :

$$\mathbf{U}_{D^*} = \mathbf{R}_{\mathcal{E}^*} \cdot \mathbf{I}_{D^*} + \mathbf{U}_{\mathcal{E}^*}. \quad (5)$$

Для этого необходимо сделать следующие преобразования [1, 3].

$$\begin{cases} \mathbf{R}_{\mathcal{E}^*} = \mathbf{A}_2^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{A}_1 + \mathbf{R}_D \\ \mathbf{U}_{\mathcal{E}^*} = -\mathbf{A}_2^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{U}_0 + \mathbf{U}_{D0} \end{cases}. \quad (6)$$

Подставляя (4) в (6), получаем

$$\mathbf{R}_{\mathcal{E}^*} = \left(\begin{array}{cc|cccc} R_{D0} + R_{\mathcal{E}H\mathcal{E}} & R_{\mathcal{E}H\mathcal{E}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ R_{\mathcal{E}H\mathcal{E}} & R_{D1} + R_{\mathcal{E}H\mathcal{E}} & -R_{D1} & 0 & \dots & 0 \\ R_{\mathcal{E}H\mathcal{E}} & R_{\mathcal{E}H\mathcal{E}} & R_{D2} & -R_{D2} & 0 & 0 \\ R_{\mathcal{E}H\mathcal{E}} & R_{\mathcal{E}H\mathcal{E}} & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & 0 & R_{Dn-1} & -R_{Dn-1} \\ R_{\mathcal{E}H\mathcal{E}} & R_{\mathcal{E}H\mathcal{E}} & 0 & 0 & 0 & R_{Dn} \end{array} \right),$$

$$\mathbf{U}_{\mathcal{E}^*} = (u_{\mathcal{E}H\mathcal{E}}(t) \quad U_{D01} + u_{\mathcal{E}H\mathcal{E}}(t) \quad \dots \quad U_{D0n} + u_{\mathcal{E}H\mathcal{E}}(t))^T, \quad (7)$$

где $R_{\mathcal{E}H\mathcal{E}} = R_4 + R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$ — эквивалентное сопротивление для нелинейного элемента (рис. 2), $u_{\mathcal{E}H\mathcal{E}}(t) = (u_{02}(t) - u_{01}(t)) R_2 / (R_1 + R_2)$ — эквива-

лентное напряжение на НЭ (рис. 2), которые соответствуют $R_{\text{Э}}$ и $U_{\text{Э}}$ в случае использования в данной цепи идеального диода [1].

Из (3) и (4) видно, что в матрицы \mathbf{I}_{D^*} и \mathbf{U}_{D^*} системы (5) входят как токи и напряжения через идеальные диоды (\mathbf{I}_{D} и \mathbf{U}_{D}), так и через резистор схемы замещения нелинейного элемента (рис. 1,е), т.е. $\mathbf{I}_{\text{D}^*} = (i_{\text{D}0}(t) \quad \mathbf{I}_{\text{D}})$, $\mathbf{U}_{\text{D}^*} = (0 \quad \mathbf{U}_{\text{D}})$. Для нахождения \mathbf{I}_{D} и \mathbf{U}_{D} согласно (7) из системы (5) выразим $i_{\text{D}0}(t)$

$$i_{\text{D}0}(t) = \frac{u_{\text{ЭНЭ}}(t) - i_{\text{D}1}(t)R_{\text{ЭНЭ}}}{R_{\text{D}0} + R_{\text{ЭНЭ}}}$$

и получим систему уравнений относительно напряжений и токов идеальных диодов [1–3]:

$$\begin{cases} \mathbf{U}_{\text{D}} = \mathbf{R}_{\text{Э}} \cdot \mathbf{I}_{\text{D}} + \mathbf{U}_{\text{Э}}, \\ \mathbf{I}_{\text{D}}, \mathbf{U}_{\text{D}} \geq 0, \\ \mathbf{I}_{\text{D}}^T \cdot \mathbf{U}_{\text{D}} = 0 \end{cases}, \quad (8)$$

где для данной схемы (рис. 2) получается

$$\mathbf{R}_{\text{Э}} = \left(\begin{array}{c|ccccc} R_{\text{D}1} + R_{\text{ЭНЭ}}^0 & -R_{\text{D}1} & 0 & 0 & 0 \\ R_{\text{ЭНЭ}}^0 & R_{\text{D}2} & -R_{\text{D}2} & 0 & 0 \\ R_{\text{ЭНЭ}}^0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & R_{\text{D}n-1} & -R_{\text{D}n-1} \\ R_{\text{ЭНЭ}}^0 & 0 & 0 & 0 & R_{\text{D}n} \end{array} \right), \quad \mathbf{U}_{\text{Э}} = \begin{pmatrix} U_{\text{D}01} + u_{\text{ЭНЭ}}^0(t) \\ U_{\text{D}02} + u_{\text{ЭНЭ}}^0(t) \\ U_{\text{D}03} + u_{\text{ЭНЭ}}^0(t) \\ \vdots \\ U_{\text{D}0n} + u_{\text{ЭНЭ}}^0(t) \end{pmatrix},$$

$$\text{где } R_{\text{ЭНЭ}}^0 = \frac{R_{\text{D}0}R_{\text{ЭНЭ}}}{R_{\text{D}0} + R_{\text{ЭНЭ}}}, \quad u_{\text{ЭНЭ}}^0(t) = u_{\text{ЭНЭ}}(t) \frac{R_{\text{D}0}}{R_{\text{D}0} + R_{\text{ЭНЭ}}}. \quad (9)$$

Как видно из (9), в схеме с одним нелинейным элементом можно сразу формировать матрицы $\mathbf{R}_{\text{Э}}$ и $\mathbf{U}_{\text{Э}}$, минуя этапы формирования системы (3) и решения системы (6). Для нахождения $R_{\text{ЭНЭ}}$, $R_{\text{ЭНЭ}}^0$, $u_{\text{ЭНЭ}}(t)$ и $u_{\text{ЭНЭ}}^0(t)$ можно использовать метод схемных определителей [5].

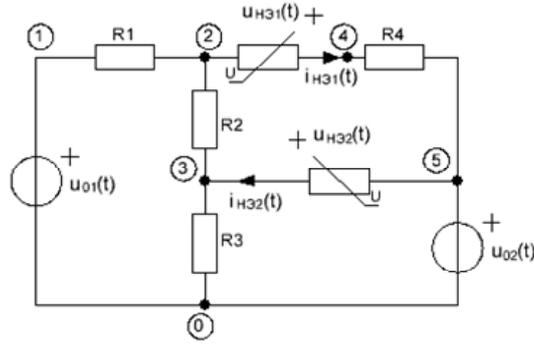


Рис. 3. Пример разветвленной цепи с двумя нелинейными элементами

Схема с двумя нелинейными элементами. Со схемой на рис. 3 поступаем аналогично схеме на рис. 2, уравнения по методу узловых напряжений будут иметь вид:

$$\begin{cases} u_1(t) = u_{01}(t) \\ -u_1(t)/R_1 + (1/R_1 + 1/R_2)u_2(t) - u_3(t)/R_2 = -i_{HЭ1}(t) \\ -u_2(t)/R_2 + (1/R_2 + 1/R_3)u_3(t) = i_{HЭ2}(t) \\ -u_5(t)/R_4 + u_4(t)/R_4 = i_{HЭ1}(t) \\ u_5(t) = u_{02}(t) \end{cases} \quad (10)$$

Далее составляем уравнения по ЗНК для каждого нелинейного элемента (рис. 1,е) в цепи (рис. 3) и объединяем их с (9). Получаем следующие матрицы системы (3) для данной схемы (рис. 3):

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/R_1 & 1/R_1 + 1/R_2 & -1/R_2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/R_2 & 1/R_2 + 1/R_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/R_4 & -1/R_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{U}_y = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \\ u_5(t) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & | & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & | & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & | & -1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & 0 & \dots & 0 & | & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & | & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{U}_0 = \begin{pmatrix} u_{01}(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_{02}(t) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R}_D = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} R_{D10} & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{D20} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{D11} & -R_{D11} & 0 & 0 & 0 & R_{D21} & -R_{D21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{D1n-1} & R_{D1n-1} & 0 & 0 & 0 & R_{D2n-1} & -R_{D2n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{D1n} & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{D2n} \end{array} \right),$$

$$\mathbf{U}_{D0} = \begin{pmatrix} 0 \\ U_{D101} \\ \vdots \\ U_{D10n} \\ 0 \\ U_{D201} \\ \vdots \\ U_{D20m} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I}_D = \begin{pmatrix} i_{D10}(t) \\ i_{D11}(t) \\ \vdots \\ i_{D1n}(t) \\ i_{D20}(t) \\ i_{D21}(t) \\ \vdots \\ i_{D2m}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}_{D0} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_{D11}(t) \\ \vdots \\ u_{D1n}(t) \\ 0 \\ u_{D21}(t) \\ \vdots \\ u_{D2m}(t) \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Подставляя (11) в (6), находим матрицы $\mathbf{R}_{\mathcal{E}^*}$ (не показана из-за больших размеров) и $\mathbf{U}_{\mathcal{E}^*}$:

$$\mathbf{U}_{\mathfrak{A}^*} = \begin{pmatrix} u_{\mathfrak{A}\mathfrak{H}\mathfrak{A}1}(t) \\ U_{D101} + u_{\mathfrak{A}\mathfrak{H}\mathfrak{A}1}(t) \\ \vdots \\ U_{D10n} + u_{\mathfrak{A}\mathfrak{H}\mathfrak{A}1}(t) \\ u_{\mathfrak{A}\mathfrak{H}\mathfrak{A}2}(t) \\ U_{D201} + u_{\mathfrak{A}\mathfrak{H}\mathfrak{A}2}(t) \\ \vdots \\ U_{D20m} + u_{\mathfrak{A}\mathfrak{H}\mathfrak{A}2}(t) \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где $u_{\mathfrak{A}\mathfrak{H}\mathfrak{A}1}(t) = u_{02}(t) - u_{01}(t) \frac{R_2 + R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$, $u_{\mathfrak{A}\mathfrak{H}\mathfrak{A}2}(t) = u_{01}(t) \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} - u_{02}(t)$,

эквивалентные напряжения для НЭ, которые соответствуют элементам матрицы $\mathbf{U}_{\mathfrak{A}}$ в случае использования в данной цепи идеальных диодов вместо нелинейных элементов [1], т. е.

$$\mathbf{R}_{\mathfrak{A}} = \begin{pmatrix} R_{\mathfrak{A}\mathfrak{H}\mathfrak{A}1} & R_{\mathfrak{A}\mathfrak{H}\mathfrak{A}12} \\ R_{\mathfrak{A}\mathfrak{H}\mathfrak{A}12} & R_{\mathfrak{A}\mathfrak{H}\mathfrak{A}2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}_{\mathfrak{A}} = \begin{pmatrix} u_{\mathfrak{A}\mathfrak{H}\mathfrak{A}1}(t) \\ u_{\mathfrak{A}\mathfrak{H}\mathfrak{A}2}(t) \end{pmatrix}.$$

Для нахождения токов через идеальные диоды избавимся от токов через резисторы, т.е. выразим $i_{D10}(t)$ и $i_{D20}(t)$. Для этого согласно (6) и (12) надо решить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} (R_{D10} + R_{\mathfrak{A}\mathfrak{H}\mathfrak{A}1})i_{D10}(t) + R_{\mathfrak{A}\mathfrak{H}\mathfrak{A}12}i_{D20}(t) = u_{\mathfrak{A}\mathfrak{H}\mathfrak{A}1}(t) - R_{\mathfrak{A}\mathfrak{H}\mathfrak{A}1}i_{D11}(t) - R_{\mathfrak{A}\mathfrak{H}\mathfrak{A}12}i_{D21}(t) \\ R_{\mathfrak{A}\mathfrak{H}\mathfrak{A}12}i_{D10}(t) + (R_{D20} + R_{\mathfrak{A}\mathfrak{H}\mathfrak{A}2})i_{D20}(t) = u_{\mathfrak{A}\mathfrak{H}\mathfrak{A}2}(t) - R_{\mathfrak{A}\mathfrak{H}\mathfrak{A}12}i_{D11}(t) - R_{\mathfrak{A}\mathfrak{H}\mathfrak{A}2}i_{D21}(t) \end{cases}. \quad (13)$$

Решением системы уравнений (13) будет

$$\begin{cases} i_{D10}(t) = i_{01}(t) - K_{11}i_{D11}(t) - K_{12}i_{D21}(t) \\ i_{D20}(t) = i_{02}(t) - K_{21}i_{D11}(t) - K_{22}i_{D21}(t) \end{cases}, \quad (14)$$

где $i_{01}(t) = \frac{u_{\mathfrak{A}\mathfrak{H}\mathfrak{A}1}(t)(R_{D20} + R_{\mathfrak{A}\mathfrak{H}\mathfrak{A}2}) - u_{\mathfrak{A}\mathfrak{H}\mathfrak{A}2}(t)R_{\mathfrak{A}\mathfrak{H}\mathfrak{A}12}}{(R_{D10} + R_{\mathfrak{A}\mathfrak{H}\mathfrak{A}1})(R_{D20} + R_{\mathfrak{A}\mathfrak{H}\mathfrak{A}2}) - R_{\mathfrak{A}\mathfrak{H}\mathfrak{A}12}^2}$, $K_{11} = \frac{R_{\mathfrak{A}\mathfrak{H}\mathfrak{A}1}(R_{D20} + R_{\mathfrak{A}\mathfrak{H}\mathfrak{A}2}) - R_{\mathfrak{A}\mathfrak{H}\mathfrak{A}12}^2}{(R_{D10} + R_{\mathfrak{A}\mathfrak{H}\mathfrak{A}1})(R_{D20} + R_{\mathfrak{A}\mathfrak{H}\mathfrak{A}2}) - R_{\mathfrak{A}\mathfrak{H}\mathfrak{A}12}^2}$,

$i_{02}(t) = \frac{u_{\mathfrak{A}\mathfrak{H}\mathfrak{A}2}(t)(R_{D10} + R_{\mathfrak{A}\mathfrak{H}\mathfrak{A}1}) - u_{\mathfrak{A}\mathfrak{H}\mathfrak{A}1}(t)R_{\mathfrak{A}\mathfrak{H}\mathfrak{A}12}}{(R_{D10} + R_{\mathfrak{A}\mathfrak{H}\mathfrak{A}1})(R_{D20} + R_{\mathfrak{A}\mathfrak{H}\mathfrak{A}2}) - R_{\mathfrak{A}\mathfrak{H}\mathfrak{A}12}^2}$, $K_{12} = \frac{R_{\mathfrak{A}\mathfrak{H}\mathfrak{A}12}R_{D20}}{(R_{D10} + R_{\mathfrak{A}\mathfrak{H}\mathfrak{A}1})(R_{D20} + R_{\mathfrak{A}\mathfrak{H}\mathfrak{A}2}) - R_{\mathfrak{A}\mathfrak{H}\mathfrak{A}12}^2}$,

$$K_{21} = \frac{R_{\text{ЭНЭ}2} R_{\text{D}10}}{(R_{\text{D}10} + R_{\text{ЭНЭ}1})(R_{\text{D}20} + R_{\text{ЭНЭ}2}) - R_{\text{ЭНЭ}12}^2}, \quad K_{22} = \frac{R_{\text{ЭНЭ}2}(R_{\text{D}10} + R_{\text{ЭНЭ}1}) - R_{\text{ЭНЭ}12}^2}{(R_{\text{D}10} + R_{\text{ЭНЭ}1})(R_{\text{D}20} + R_{\text{ЭНЭ}2}) - R_{\text{ЭНЭ}12}^2}. \quad (15)$$

Тогда матрицы $\mathbf{R}_{\text{Э}}$ и $\mathbf{U}_{\text{Э}}$ для схемы (рис. 3) в системе уравнений (8) будут равны:

$$\mathbf{R}_{\text{Э}} = \left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc} R_{\text{D}11} + R_{\text{ЭНЭ}1}^0 & -R_{\text{D}11} & 0 & \cdots & 0 & R_{\text{ЭНЭ}12}^0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ R_{\text{ЭНЭ}1}^0 & R_{\text{D}12} & -R_{\text{D}12} & 0 & 0 & R_{\text{ЭНЭ}12}^0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ R_{\text{ЭНЭ}1}^0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & R_{\text{ЭНЭ}12}^0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & R_{\text{D}1n-1} & -R_{\text{D}1n-2} & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{\text{ЭНЭ}1}^0 & 0 & 0 & 0 & -R_{\text{D}n} & R_{\text{ЭНЭ}12}^0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline R_{\text{ЭНЭ}21}^0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & R_{\text{D}21} + R_{\text{ЭНЭ}2}^0 & -R_{\text{D}21} & 0 & \cdots & 0 \\ R_{\text{ЭНЭ}21}^0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & R_{\text{ЭНЭ}2}^0 & R_{\text{D}22} & -R_{\text{D}22} & 0 & 0 \\ R_{\text{ЭНЭ}21}^0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & R_{\text{ЭНЭ}2}^0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & R_{\text{ЭНЭ}2}^0 & 0 & 0 & R_{\text{D}2m-1} & -R_{\text{D}2m} \\ R_{\text{ЭНЭ}21}^0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & R_{\text{ЭНЭ}2}^0 & 0 & 0 & 0 & R_{\text{D}2m} \end{array} \right),$$

$$\mathbf{U}_{\text{Э}} = \left(U_{\text{D}101} + u_{\text{ЭНЭ}1}^0(t) \quad \cdots \quad U_{\text{D}10n} + u_{\text{ЭНЭ}1}^0(t) \mid U_{\text{D}201} + u_{\text{ЭНЭ}2}^0(t) \quad \cdots \quad U_{\text{D}20m} + u_{\text{ЭНЭ}2}^0(t) \right)^{\text{T}},$$

$$\text{где } R_{\text{ЭНЭ}1}^0 = (1 - K_{11})R_{\text{ЭНЭ}1} - K_{21}R_{\text{ЭНЭ}12}, \quad R_{\text{ЭНЭ}2}^0 = -K_{12}R_{\text{ЭНЭ}12} + (1 - K_{22})R_{\text{ЭНЭ}2},$$

$$R_{\text{ЭНЭ}12}^0 = -K_{12}R_{\text{ЭНЭ}1} + (1 - K_{22})R_{\text{ЭНЭ}12}, \quad R_{\text{ЭНЭ}21}^0 = (1 - K_{11})R_{\text{ЭНЭ}12} - K_{21}R_{\text{ЭНЭ}2},$$

$$u_{\text{ЭНЭ}1}^0(t) = u_{\text{ЭНЭ}1}(t) - R_{\text{ЭНЭ}1}i_{01}(t) - R_{\text{ЭНЭ}12}i_{02}(t), \quad u_{\text{ЭНЭ}2}^0(t) = u_{\text{ЭНЭ}2}(t) - R_{\text{ЭНЭ}12}i_{01}(t) - R_{\text{ЭНЭ}2}i_{02}(t).$$

Как видно, нет необходимости составлять систему (3) [3] и использовать преобразования (6), чтобы получить систему (5) и в дальнейшем — систему (8) для нахождения напряжений и токов нелинейных элементов (идеальные диоды). Достаточно лишь найти элементы матриц $\mathbf{R}_{\text{Э}^*}$ и $\mathbf{U}_{\text{Э}^*}$.

Для этого согласно (5) необходимо схему на рис. 3 преобразовать в схему на рис. 4 (пунктиром выделена преобразуемая часть схемы на рис. 3), т.е. использовать метод контурных токов: $R_{\text{ЭНЭ}1} = R_4 + R_{11} + R_{12}$, $R_{\text{ЭНЭ}2} = R_{22} + R_{12}$ — эквивалентные сопротивления каждого нелинейного элемента; $R_{\text{ЭНЭ}12} = R_{12}$ — сопротивление, через которое протекают токи обоих НЭ (в зависимости от взаимного направления токов нелинейных элементов может быть как положительным, так и отрицательным); $u_{\text{ЭНЭ}1}(t)$, $u_{\text{ЭНЭ}2}(t)$ — эквивалентные напряжения на нелинейных элементах. Данные параметры можно легко определить различными методами. Далее, используя их, а также параметры схем замещения НЭ, можно составить

матрицы $\mathbf{R}_{\mathcal{E}^*}$ и $\mathbf{U}_{\mathcal{E}^*}$. Данная методика легко обобщается на большее число нелинейных элементов. Затем, по аналогии с (13), составляется матрица, и определяются коэффициенты перехода от матриц $\mathbf{R}_{\mathcal{E}^*}$ и $\mathbf{U}_{\mathcal{E}^*}$ к $\mathbf{R}_{\mathcal{E}}$ и $\mathbf{U}_{\mathcal{E}}$.

Решение системы уравнений относительно напряжений и токов идеальных диодов. Разберем подробно решение системы (8), в случае матриц $\mathbf{R}_{\mathcal{E}}$ и $\mathbf{U}_{\mathcal{E}}$ произвольной размерности.

В одномерном случае получаем простое решение системы (8) [1–3]:

$$i_{D}(t) = \lfloor -u_{\mathcal{E}}(t)/R_{\mathcal{E}} \rfloor, \quad u_{D}(t) = \lfloor u_{\mathcal{E}}(t) \rfloor \quad (16)$$

В двумерном случае имеем систему

$$\begin{cases} u_{D1}(t) = R_{\mathcal{E}11}i_{D1}(t) + R_{\mathcal{E}12}i_{D2}(t) + u_{\mathcal{E}1}(t) \\ u_{D2}(t) = R_{\mathcal{E}21}i_{D1}(t) + R_{\mathcal{E}22}i_{D2}(t) + u_{\mathcal{E}2}(t) \end{cases} \quad (17)$$

Приравняем $i_{D1}(t) = 0$ и получим

$$\begin{cases} u_{D1}(t) = \lfloor R_{\mathcal{E}12}\hat{i}_{D2}(t) + u_{\mathcal{E}1}(t) \rfloor \\ \hat{u}_{D2}(t) = R_{\mathcal{E}22}\hat{i}_{D2}(t) + u_{\mathcal{E}2}(t) \end{cases}, \quad (18)$$

где $\hat{i}_{D2}(t)$ — ток через идеальный диод D2, когда $i_{D1}(t) = 0$. Из второго уравнения находим $\hat{i}_{D2}(t)$ и подставим его в первое:

$$\begin{cases} u_{D1}(t) = \lfloor R_{\mathcal{E}12} \lfloor -u_{\mathcal{E}2}(t)/R_{\mathcal{E}22} \rfloor + u_{\mathcal{E}1}(t) \rfloor \\ \hat{i}_{D2}(t) = \lfloor -u_{\mathcal{E}2}(t)/R_{\mathcal{E}22} \rfloor \end{cases}. \quad (19)$$

Приравняем в (17) $u_{D1}(t) = 0$ и выразим $i_{D1}(t)$:

$$-R_{\mathcal{E}12}i_{D2}(t) = R_{\mathcal{E}11}i_{D1}(t) + u_{\mathcal{E}1}(t). \quad (20)$$

В левой части выражения (20) « $-R_{\mathcal{E}12}i_{D2}(t)$ » — напряжение при $i_{D1}(t) = 0$. Получается, что в (20) $i_{D2}(t) = \hat{i}_{D2}(t)$, и вместо (20) следует использовать

$$-R_{\mathcal{E}12}\hat{i}_{D2}(t) = R_{\mathcal{E}11}i_{D1}(t) + u_{\mathcal{E}1}(t), \quad (21)$$

что и будет также сделано в дальнейших расчетах (для больших порядков). Тогда подставляем (19) в (21) и получаем

$$i_{D1}(t) = \left[-\frac{R_{\mathcal{E}12}}{R_{\mathcal{E}11}} \left[\frac{-u_{\mathcal{E}2}(t)}{R_{\mathcal{E}22}} \right] - \frac{u_{\mathcal{E}1}(t)}{R_{\mathcal{E}11}} \right].$$

Аналогично находим ток и напряжение через второй идеальный диод и получаем выражения для напряжений и токов через диоды [1–3]:

$$\begin{aligned} u_{D1}(t) &= \left[R_{\mathcal{E}12} \left[\frac{-u_{\mathcal{E}2}(t)}{R_{\mathcal{E}22}} \right] + u_{\mathcal{E}1}(t) \right], & i_{D1}(t) &= \left[-\frac{R_{\mathcal{E}12}}{R_{\mathcal{E}11}} \left[\frac{-u_{\mathcal{E}2}(t)}{R_{\mathcal{E}22}} \right] - \frac{u_{\mathcal{E}1}(t)}{R_{\mathcal{E}11}} \right], \\ u_{D2}(t) &= \left[R_{\mathcal{E}21} \left[\frac{-u_{\mathcal{E}1}(t)}{R_{\mathcal{E}11}} \right] + u_{\mathcal{E}2}(t) \right], & i_{D2}(t) &= \left[-\frac{R_{\mathcal{E}21}}{R_{\mathcal{E}22}} \left[\frac{-u_{\mathcal{E}1}(t)}{R_{\mathcal{E}11}} \right] - \frac{u_{\mathcal{E}2}(t)}{R_{\mathcal{E}22}} \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

В трехмерном случае имеем систему

$$\begin{cases} u_{D1}(t) = R_{\mathcal{E}11}i_{D1}(t) + R_{\mathcal{E}12}i_{D2}(t) + R_{\mathcal{E}13}i_{D3}(t) + u_{\mathcal{E}1}(t) \\ u_{D2}(t) = R_{\mathcal{E}21}i_{D1}(t) + R_{\mathcal{E}22}i_{D2}(t) + R_{\mathcal{E}23}i_{D3}(t) + u_{\mathcal{E}2}(t) \\ u_{D3}(t) = R_{\mathcal{E}31}i_{D1}(t) + R_{\mathcal{E}32}i_{D2}(t) + R_{\mathcal{E}33}i_{D3}(t) + u_{\mathcal{E}3}(t) \end{cases} \quad (23)$$

Приравняем $i_{D1}(t) = 0$ и получим

$$\begin{cases} u_{D1}(t) = \left[R_{\mathcal{E}12}\hat{i}_{D2}(t) + R_{\mathcal{E}13}\hat{i}_{D3}(t) + u_{\mathcal{E}1}(t) \right] \\ \hat{u}_{D2}(t) = R_{\mathcal{E}22}\hat{i}_{D2}(t) + R_{\mathcal{E}23}\hat{i}_{D3}(t) + u_{\mathcal{E}2}(t) \\ \hat{u}_{D3}(t) = R_{\mathcal{E}32}\hat{i}_{D2}(t) + R_{\mathcal{E}33}\hat{i}_{D3}(t) + u_{\mathcal{E}3}(t) \end{cases}, \quad (24)$$

где $\hat{i}_{D2}(t)$, $\hat{i}_{D3}(t)$ — токи через идеальные диоды D2, D3, когда $i_{D1}(t) = 0$. Второе и третье уравнение системы (24) представляет двумерный случай. Поэтому по алгоритму, описанному выше, получаем

$$\hat{i}_{D2}(t) = \left[-\frac{R_{\mathcal{E}23}}{R_{\mathcal{E}22}} \left[\frac{-u_{\mathcal{E}3}(t)}{R_{\mathcal{E}33}} \right] - \frac{u_{\mathcal{E}2}(t)}{R_{\mathcal{E}22}} \right], \hat{i}_{D3}(t) = \left[-\frac{R_{\mathcal{E}32}}{R_{\mathcal{E}33}} \left[\frac{-u_{\mathcal{E}2}(t)}{R_{\mathcal{E}22}} \right] - \frac{u_{\mathcal{E}3}(t)}{R_{\mathcal{E}33}} \right]. \quad (25)$$

Подставляя (25) в (24), находим напряжение на идеальном диоде D1. Для нахождения тока через диод D1 приравняем в (23) $u_{D1}(t) = 0$:

$$0 = R_{\mathcal{E}11}i_{D1}(t) + R_{\mathcal{E}12}\hat{i}_{D2}(t) + R_{\mathcal{E}13}\hat{i}_{D3}(t) + u_{\mathcal{E}1}(t). \quad (26)$$

Подставляя (26) в (25), находим ток $i_{D1}(t)$ через МТ(x) — альтернативную форму записи $[x]$.

$$i_{D1}(t) = \text{MT} \left(\begin{aligned} & \left[-\frac{R_{\mathcal{E}12}}{R_{\mathcal{E}11}} \left[-\frac{R_{\mathcal{E}23}}{R_{\mathcal{E}22}} \left[\frac{-u_{\mathcal{E}3}(t)}{R_{\mathcal{E}33}} \right] - \frac{u_{\mathcal{E}2}(t)}{R_{\mathcal{E}22}} \right] - \right. \\ & \left. -\frac{R_{\mathcal{E}13}}{R_{\mathcal{E}11}} \left[-\frac{R_{\mathcal{E}32}}{R_{\mathcal{E}33}} \left[\frac{-u_{\mathcal{E}2}(t)}{R_{\mathcal{E}22}} \right] - \frac{u_{\mathcal{E}3}(t)}{R_{\mathcal{E}33}} \right] - \frac{u_{\mathcal{E}1}(t)}{R_{\mathcal{E}11}} \right] \end{aligned} \right), \quad (27)$$

Аналогичным образом находим токи $i_{D2}(t)$, $i_{D3}(t)$.

$$i_{D2}(t) = \text{MT} \left(\begin{aligned} & \left[-\frac{R_{\mathcal{E}21}}{R_{\mathcal{E}22}} \left[-\frac{R_{\mathcal{E}13}}{R_{\mathcal{E}11}} \left[\frac{-u_{\mathcal{E}3}(t)}{R_{\mathcal{E}33}} \right] - \frac{u_{\mathcal{E}1}(t)}{R_{\mathcal{E}11}} \right] - \right. \\ & \left. -\frac{R_{\mathcal{E}23}}{R_{\mathcal{E}22}} \left[-\frac{R_{\mathcal{E}31}}{R_{\mathcal{E}33}} \left[\frac{-u_{\mathcal{E}1}(t)}{R_{\mathcal{E}11}} \right] - \frac{u_{\mathcal{E}3}(t)}{R_{\mathcal{E}33}} \right] - \frac{u_{\mathcal{E}2}(t)}{R_{\mathcal{E}22}} \right] \end{aligned} \right). \quad (28)$$

$$i_{D3}(t) = \text{MT} \left(\begin{aligned} & \left[-\frac{R_{\mathcal{E}31}}{R_{\mathcal{E}33}} \left[-\frac{R_{\mathcal{E}12}}{R_{\mathcal{E}11}} \left[\frac{-u_{\mathcal{E}2}(t)}{R_{\mathcal{E}22}} \right] - \frac{u_{\mathcal{E}1}(t)}{R_{\mathcal{E}11}} \right] - \right. \\ & \left. -\frac{R_{\mathcal{E}32}}{R_{\mathcal{E}33}} \left[-\frac{R_{\mathcal{E}21}}{R_{\mathcal{E}22}} \left[\frac{-u_{\mathcal{E}1}(t)}{R_{\mathcal{E}11}} \right] - \frac{u_{\mathcal{E}2}(t)}{R_{\mathcal{E}22}} \right] - \frac{u_{\mathcal{E}3}(t)}{R_{\mathcal{E}33}} \right] \end{aligned} \right). \quad (29)$$

Используя этот алгоритм, увеличиваем размерность матриц $\mathbf{R}_{\mathcal{E}}$ и $\mathbf{U}_{\mathcal{E}}$. Как видно из выражений (22), (27)–(29), нахождение тока идеального дио-

да подобно нахождению определителя матрицы: для одномерного случая: $i_D = \lfloor -i \rfloor$, где $i = u_{\ominus} / R_{\ominus}$; для двумерного случая:

$$i_{D1} = \left\lfloor -\frac{R_{\ominus 12}}{R_{\ominus 11}} \hat{i}_2^1 - i_1 \right\rfloor, \quad i_{D2} = \left\lfloor -\frac{R_{\ominus 21}}{R_{\ominus 22}} \hat{i}_1^2 - i_2 \right\rfloor, \quad (30)$$

где $i_i = u_{\ominus i} / R_{\ominus i}$, \hat{i}_l^k — ток через l -ый диод, когда k -ый диод закрыт для одномерного случая, т.е. $\hat{i}_l^k = \lfloor -i_l \rfloor$; для трехмерного случая:

$$i_{D1} = \left\lfloor -\frac{R_{\ominus 12}}{R_{\ominus 11}} \hat{i}_2^1 - \frac{R_{\ominus 13}}{R_{\ominus 11}} \hat{i}_3^1 - i_1 \right\rfloor, \quad i_{D2} = \left\lfloor -\frac{R_{\ominus 21}}{R_{\ominus 22}} \hat{i}_1^2 - \frac{R_{\ominus 23}}{R_{\ominus 22}} \hat{i}_3^2 - i_2 \right\rfloor, \\ i_{D3} = \left\lfloor -\frac{R_{\ominus 31}}{R_{\ominus 33}} \hat{i}_1^3 - \frac{R_{\ominus 32}}{R_{\ominus 33}} \hat{i}_2^3 - i_3 \right\rfloor, \quad (31)$$

где \hat{i}_l^k — ток через l -ый диод, когда k -ый диод закрыт для двумерного случая (30): $\hat{i}_2^1 = i_{D2}|_{1 \rightarrow 3}$, $\hat{i}_3^1 = i_{D1}|_{1 \rightarrow 3}$, $\hat{i}_1^2 = i_{D1}|_{2 \rightarrow 3}$, $\hat{i}_3^2 = i_{D2}|_{2 \rightarrow 3}$, $\hat{i}_1^3 = i_{D1}$, $\hat{i}_2^3 = i_{D2}$;

Для четырехмерного случая выражения получаются по аналогии с описанным выше трехмерным случаем. Такова методика итеративного решения системы (8) посредством учета решений этой системы меньшего порядка. Предложенная методика ограничена схемами, в которых параллельно НЭ не подключен какой-либо компонент, и которые не содержат источников, управляемых током или напряжением нелинейного элемента.

Выводы

1. Предложена схема замещения нелинейного элемента (рис. 1,е), для которой проще найти параметры по сравнению со схемой [3] (рис. 1,д).
2. Рассмотрена методика нахождения матриц для системы, определяющей токи и напряжения на идеальных диодах с меньшим количеством преобразований, чем в [3], что позволяет ускорить расчет схемы.

3. Разработан итеративный алгоритм, позволяющий определить токи и напряжения на нелинейных элементах для системы произвольного порядка.

Список литературы

Шушпанов Д. В., Лучанский О. Д. Аналитический метод расчета резистивных цепей с идеальными диодами // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей : Международ. сб. науч. тр. — Вып. 14. — Ульяновск : УлГТУ, 2017. — С. 64–82.

Manthe A., Li Z., Shi C.-J. R., and Mayaram K. Symbolic Analysis of Nonlinear Analog Circuits // Proceedings of the Design, Automation and Test in Europe Conference and Exhibition (DATE'03). — Mar. — 2003. — P. 11108–11109.

3. Manthe A., Li Z., Shi C.-J. R. Symbolic Analysis of Analog Circuits with Hard Nonlinearity // Proceedings of the Design Automation Conference (DAC'03). — June 2–6. — 2003. — P. 542–545.

4. Leenaerts D. M. W., van Bokhoven W. M. G. Piecewise Linear Modeling and Analysis. — Kluwer Academic Publishers, 1998.

5. Курганов С. А., Филаретов В. В. Символьный анализ и диакоптика электрических цепей методом схемных определителей : учебное пособие. — Ульяновск : УлГТУ, 2003. — 228 с.

Шушпанов Дмитрий Викторович — канд. техн. наук, доцент кафедры «Теория электрических цепей и связи» Санкт-Петербургского государственного университета телекоммуникаций им. проф. М. А. Бонч-Бруевича.
E-mail: dimasf@inbox.ru.

Улитина Анастасия Сергеевна — студент-бакалавр факультета фундаментальной подготовки Санкт-Петербургского государственного университета телекоммуникаций им. проф. М. А. Бонч-Бруевича.

ПРОЕКТИРОВАНИЕ СИСТЕМ ЭЛЕКТРОСНАБЖЕНИЯ И СВЯЗИ

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭМПИРИЧЕСКИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН В ИМИТАЦИОННЫХ МОДЕЛЯХ НАДЕЖНОСТИ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А. А. Гришкевич

Исследованы распределения продолжительности состояний системы. Представлено моделирование показателей структурной надежности для произвольных распределений случайных величин. Предложен способ численного задания закона распределения при моделировании структурной надежности.

The distributions of the duration of the states of the system are investigated. Modeling of structural reliability indicators for arbitrary distributions of random variables is presented. A method is proposed for the numerical specification of the distribution law in the modeling of structural reliability.

Расчет структурной надежности системы электроснабжения [1] основан на суммировании вклада состояний отказа в результирующие показатели надежности системы. Для высоконадежных систем учитываются одновременные отказы одного, двух и трех элементов.

Для расчета вклада состояний отказа в результирующие показатели надежности традиционно использовались аналитические методы с предположением об экспоненциальном характере распределений случайных величин [2]. Нахождение установившихся вероятностей состояний в рамках марковских моделей функционирования элементов сводится к решению систем линейных уравнений, что требует относительно небольшого количества математических операций. Распределение некоторых случайных величин, например, времени профилактического ремонта, существенно неэкспоненциальное, что может привести к значительным погрешностям.

Цифровые технологии привели к доступности вычислительных ресурсов. Технологии многоядерности и объединения распределенных вычислительных ресурсов в систему с параллельной организацией вычислений привели к резкому повышению производительности систем и снижению стоимости отдельных математических операций. Создание вычислительного кластера не требует покупки дополнительного оборудования, выполняется на основе существующей компьютерной сети. Если вычислительной мощности сконфигурированного кластера недостаточно, можно использовать более мощный кластер или суперкомпьютер. Поэтому методы имитационного моделирования, оценивающие показатели надежности при большой серии испытаний, начинают конкурировать с аналитическими методами. Распределенные имитационные модели на языке программирования C++ 11/14/17 с использованием библиотеки MPI [3] и инструментов AMP [4] позволяют проводить вычисления за приемлемое время (часы) с приемлемыми ресурсами (десятки/сотни вычислительных ядер CPU/GPU) с точностью (доли процента), сопоставимой с аналитическими методами [5, 6].

Методы имитационного моделирования позволяют использовать при расчетах структурной надежности электроэнергетических систем произвольных, в том числе опытных, распределений случайных величин, чем обеспечивается адаптация метода под конкретную систему электроснабжения, в частности, учет способов проведения аварийных и профилактических ремонтов элементов этой системы.

Показатели надежности состояний в рамках имитационной модели. Каждый элемент E электроэнергетической системы (трансформатор, выключатель, ...) может находиться в одном из четырех состояний [2]. Предположим, что E_n — состояние нормальной работы элемента, E_s — состояние между отказом элемента и завершением оперативных переключений, E_r — состояние аварийного ремонта элемента, E_m — состояние профилактического ремонта (преднамеренного отключения) элемента; $t_{E_{xy}}$ [ч] — случайное время перехода элемента E из состояния E_x в состояние E_y . Переходы между состояниями задаются

$$E_n \rightarrow E_m \rightarrow E_n \rightarrow \dots, E_n \rightarrow E_s \rightarrow E_r \rightarrow E_n \rightarrow \dots$$

Состояние системы S_i определяется состоянием каждого элемента системы. В состоянии профилактического ремонта (отключения) может находиться только один элемент. Диаграммы переходов между состояниями для одного, двух и трех элементов описаны в [2, 7].

Процесс моделирования заключается в генерации последовательности состояний системы, начиная от некоторого начального состояния (например, когда все элементы системы находятся в рабочем состоянии). Для каждого состояния S_i генерируются случайные величины

$$t_{S_i \rightarrow S_j} = t_{\text{Exy}} \quad (j \neq i), \quad (1)$$

описывающие выход из этого состояния. Вычисляется случайное время пребывания в этом состоянии

$$t_{S_i} = \min_j \{t_{S_i \rightarrow S_j}\}, \quad (2)$$

Проводится коррекция суммарного времени пребывания в соответствующем состоянии и количества наступлений этого состояния за время моделирования соответственно

```

if ( (int)  $t_{S_i} \geq \text{INTERVAL}-1$  )
  {TSi[INTERVAL-1] +=  $t_{S_i}$ ;
  NSi[INTERVAL-1] += 1;} else {TSi[(int)  $t_{S_i}$ ] +=  $t_{S_i}$ ;
  NSi[(int)  $t_{S_i}$ ] += 1;},

```

где TSi, NSi — векторы INTERVAL, $\text{TSi}[k]/\text{NSi}[k] = \alpha \approx k+0,5$, $\alpha \in [k, k+1]$.

Использование векторов и оператора $(\text{int})t_{\text{Exy}}$ позволяет проводить набор статистики в процессе моделирования для интервалов времени $[0, 1)$, $[1, 2)$, ..., $[\text{INTERVAL}-1, \infty)$ [ч] пребывания в состоянии.

Процесс моделирования заканчивается при достижении суммарного времени моделирования

$$T = \sum_i \sum_k T_{Si} [k] > T_0. \quad (3)$$

Рекомендуемые оценки T_0 для модели одного и двух элементов представлены в [3, 4].

Величины

$$P_{Si} [k] = T_{Si} [k] / T, \quad (4)$$

$$f_{Si} [k] = N_{Si} [k] / T, \quad (5)$$

где $k=0, 1, 2, \dots, \text{INTERVAL}-1$ представляют статистические оценки вероятности и частоты наступления состояния S_i продолжительностью $[k, k+1)$ по результатам моделирования соответственно. Если состояние S_i является МС-состоянием отказа [1, 2], то представленные величины можно трактовать как вклад соответствующего подсостояния состояния S_i в результирующие показатели надежности системы.

Показатели надежности состояний $P_{Si}[k]$, $f_{Si}[k]$ позволяют исследовать продолжительность состояний системы. Это важно при анализе длительных отказов, имеющих весьма серьезные системные последствия, и для коммерческих клиентов с нелинейными функциями затрат [8].

Неэкспоненциальные распределения. Средние показатели надежности (вероятность, частота, продолжительность состояния) подобны для различных распределений с одинаковыми характеристиками. Выбранный закон распределения обычно не вносит существенных погрешностей в асимптотические значения для больших интервалов времени [1]. Однако расчеты продолжительностей состояний без учета фактического закона распределения приводят к серьезным ошибкам [9].

Методы моделирования позволяют проводить расчеты надежности для произвольных распределений случайных величин. Псевдослучайные числа генерируются на основе библиотеки случайных чисел (определена в заголовочном (подключаемом) файле `<random>` C++11/14/17 [10]). Тестовые числовые показатели надежности T_{Exy0} элемента I электроэнергетической системы [2, 3, 4]: $T_{Ins0}=1/0.01$ [год] — среднее время перехода

элемента I из состояния In в состояние Is; $T_{Inm0}=1/2.2$ [год]; $T_{Isr0}=2/8760$ [год]; $T_{Irn0}=11.39/8760$ [год]; $T_{Imn0}=7.96/8760$ [год].

В процессе моделирования поведения одного элемента ($T_0=10^{12}$) случайное время перехода между состояниями моделировалось экспоненциальным $t_{Exy} = \text{EXPO_tExy}$ (generator) и логарифмически нормальным распределениями $t_{Exy} = \text{LogN_tExy}$ (generator).

Параметры m, s логарифмически нормального распределения определялись из решения нелинейной системы уравнений

$$\begin{aligned} \exp(m+(1/2)*s^2) &= TExy0, \\ \exp(s^2+2*m)*(\exp(s^2)-1) &= (TExy0/4)^2, \end{aligned}$$

где выражения в левой части представляют математическое ожидание и дисперсию указанного распределения соответственно, $TExy0$ — параметр экспоненциального распределения.

Этот подход позволил сравнить результаты моделирования для экспоненциального и логарифмически нормального распределений времени перехода в случае модели одного элемента (рис. 1).

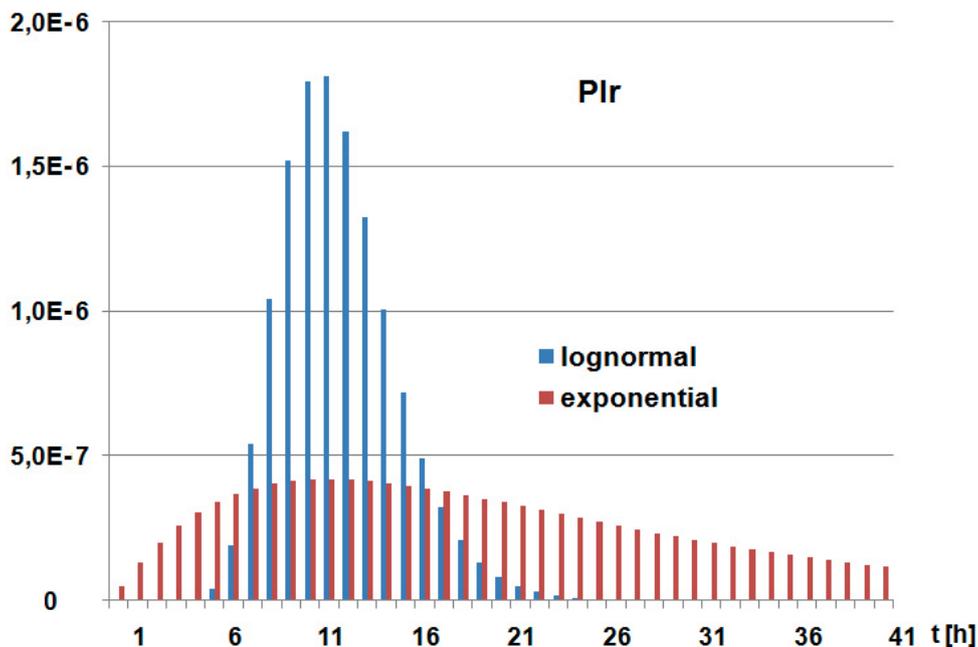


Рис. 1. Вероятности различных продолжительностей состояния PIr для экспоненциального и логарифмически нормального распределений

Для пребывания в состоянии I_r моделированием получена оценка вероятности $1.3 \cdot 10^{-5}$. Результаты для экспоненциального и логарифмически нормального распределений отличаются меньше чем 10^{-4} %. Однако закон логарифмически нормального распределения позволяет получить более сжатый интервал относительно среднего значения 11.39 [ч] моделируемой величины, что более адекватно описывает состояния ремонтов элементов.

Численное задание закона распределения. Современные системы управления энергетических систем производят мониторинг и архивацию событий и состояний систем. Статистический анализ этой информации позволяет получить эмпирическую оценку распределения случайной величины. Эмпирические оценки не всегда описываются теоретическими законами с достаточной точностью. Представляется целесообразным непосредственное использование полученной эмпирической зависимости (численного представления закона распределения случайной величины) в имитационной модели.

Генерация случайной величины t_{Exy} с законом распределения $y=F(x)$ основана на методе обратной функции [11]

$$t_{Exy} = F^{-1}(\text{urand}(\text{generator})).$$

Численное задание закона распределения F^{-1} представляет матрицу в памяти компьютера в виде координат функции распределения. Каждая координата состоит из случайного числа y и соответствующего значения функции $F^{-1}(y)$. Приближенный метод обратной функции основан на кусочно-линейной аппроксимации функции распределения случайной величины.

В качестве примера рассматривается численное задание экспоненциального распределения величины t_{Exy} в виде вектора

```
#define N 5000
double Num_EXPO_tExy [N];
со значениями
for (int i = 0; i<N; i++) {
  Num_EXPO_tExy [i] =
  -(log(1 - (y*(double)i) )) / TExy0;}
```

Вычисление случайной величины с численным (эмпирическим) законом распределения Num_EXPO_tExy осуществляется

```

y=urd (generator);
n1 = (int)(y * (double)N);
n2 = n1 + 1;
if (n1 >= N-1)
{tExy = -(log(1 — y)) / TExy0;}
else {double x2, x1, y2, y1;
x1 = Num_EXPO_tExy [n1];
x2 = Num_EXPO_tExy [n2];
y1 = n1/(double)N;
y2 = n2/(double)N;
tExy = (x2-x1)*(y-y1)/(y2-y1)+x1;}.

```

На рис. 2–3 показаны результаты моделирования продолжительности совокупного состояния PIr для разных временных интервалов. На интервале [0;70] относительная погрешность не превышает 1%. На интервале [89;96] — меняется от 2% до 40%. Виден линейный рост вероятности состояний из-за кусочно-линейной аппроксимации эмпирического распределения. Это противоречит результатам для экспоненциального распределения. При $t > 100$ погрешность не превышает долей 1% (за счет использования аналитического выражения для F^{-1}).

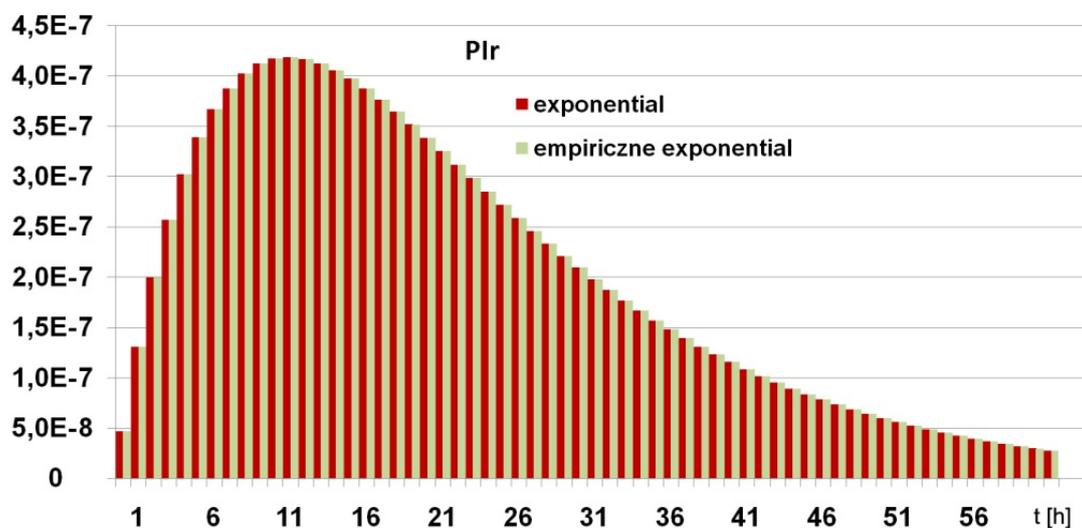


Рис. 2. Распределение длительности состояний для интервала [0;60] ч

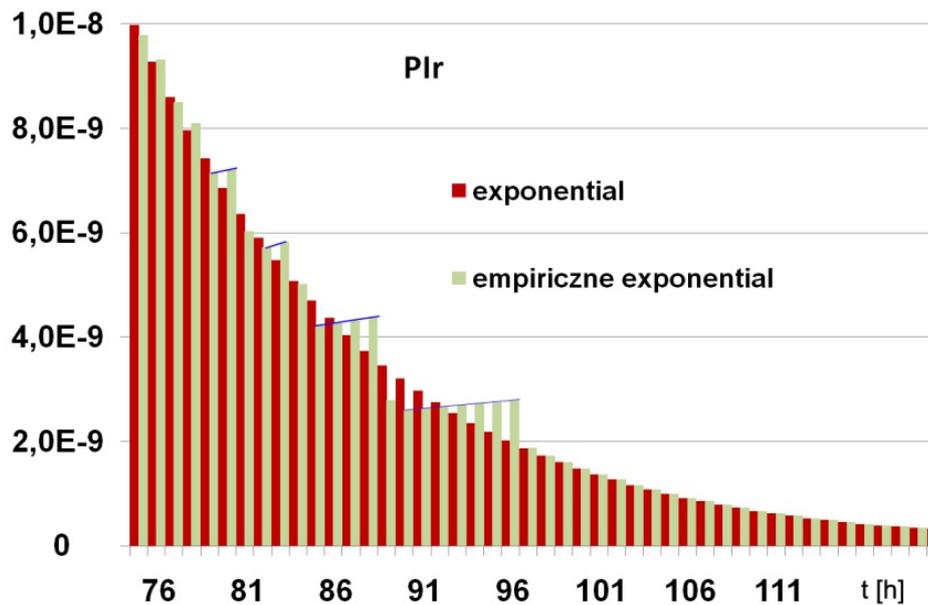


Рис. 3. Распределение длительности состояний для интервала [75;115] ч

Приближение функции распределения F^{-1} к 1 влечет значительный рост погрешности. На интервале $[1-\alpha; 1]$ при малых α рекомендуется использовать аналитическое выражение, которое обеспечивает

$$F^{-1}(y) \xrightarrow{y \rightarrow 1-0} +\infty \quad (6)$$

Длительный ремонт является маловероятным событием. Его анализ из-за ограниченности выборки при построении эмпирического распределения невозможен без учета поведения распределения на бесконечности. Представление эмпирических функций распределения может быть использовано при практических вычислениях показателей надежности систем электроснабжения.

Выводы

1. Использование методов имитационного моделирования при расчетах структурной надежности сложных систем позволяет: определять показатели надежности подсостояний анализируемого состояния, отличающиеся длительностью; использовать при расчетах различные законы распределения случайных величин; численно задавать закон распределения на основе обработки статистических данных.

2. Распределения длительности состояний, получаемые через имитационные модели, позволяют рассчитывать показатели надежности системы на основе распределений исследуемой системы, а не на основе средних значений в предположении экспоненциальности распределения.

Список литературы

1. Эндрени Дж. Моделирование при расчетах надежности в электроэнергетических системах / пер. с англ. — М. : Энергоатомиздат, 1983. — 336 с.

2. Grishkevich A. A., Hudym V. I., Kruczynin A. M., Sawicki A., Zagadnienia energetyczne wybranych współczesnych urządzeń i systemów elektrostalowniczych. — Częstochowa, Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej, 2010. — 272 с.

3. DeinoMPI. (<http://mpi.deino.net/>).

4. Грегори К., Миллер Э. С++ AMP. Построение массивно параллельных программ с помощью Microsoft Visual C++. — М. : ДМК-Пресс, 2013. — 412 с.

5. Grishkevich A., Rozproszone modele symulacyjne pozwalające oszacować wskaźniki niezawodności strukturalnej systemów elektroenergetycznych // Przegląd Elektrotechniczny (Electrical Review), R91 (2015), nr. 12. — S. 106–109.

6. Grishkevich A., Modele symulacyjne do szacowania wskaźników niezawodności strukturalnej systemów elektroenergetycznych tworzone na bazie kart graficznych // Przegląd Elektrotechniczny (Electrical Review), R93 (2017), nr. 3. — S. 44–47.

7. Grishkevich A., Burmutaew A. Modelling the organization of maintenance and emergency repairs for calculating the reliability of electric power systems // Forecasting in electric power engineering: Works of 10th international scientific conference, Polska: Częstchowa, 2010. — P. 195–197.

8. Wang P., Goel L., Power Distribution System Reliability Evaluation Using Both Analytical Reliability Network Equivalent Technique and Time-sequential Simulation Approach // Faulin J., Juan A.A., Martorell S., Ramírez-Márquez J.-E. (Editors), Simulation Methods for Reliability and Availability of Complex Systems. — London, Dordrecht, Heidelberg, New York : Springer, 2010. — P. 145–173.

9. Zapata C. J., Garcés L. P., Gómez O., Reliability Assessment of Energy Limited Systems Using Sequential Montecarlo Simulation // 2006 IEEE/PES Transmission and Distribution Conference and Exposition. — Latin America : Venezuela. — P. 1–6.

10. <random> (<https://msdn.microsoft.com/en-us/library/bb982398.aspx>).

11. Saucier R. Computer Generation of Statistical Distributions / Army Research Lab Aberdeen Proving Ground MD., Storming Media, 2000.

Гришкевич Андрей Александрович — д-р техн. наук, чл.-кор. АЭН, профессор Ченстоховского политехнического института.

Polska, 42-200, Czestochowa, al. Armii Krajowej, 17, Politechnika Czestochowska (Czestochowa university of technology).

E-mail: a.grischkevich@el.pcz.czest.pl; grishkev_amb@rambler.ru

УТОЧНЕНИЕ РАСЧЕТА ТЕХНИКО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ПРИ УСТАНОВКЕ КОМПЕНСИРУЮЩИХ УСТРОЙСТВ В СЕТИ ПОТРЕБИТЕЛЯ

А. В. Кузнецов, Д. А. Ребровская, В. В. Чикин

Предложен расчет основных технико-экономических показателей при установке компенсирующих устройств в сети потребителя. Уточнение расчета позволяет получить более правдивые технико-экономические показатели, которые в свою очередь оказывают прямое влияние на принятие решения об установке компенсирующих устройств.

Calculation of the main technical and economic indexes at installation of the compensating devices in network of the consumer is offered. Specification of calculation allows to receive more truthful technical and economic indicators which in turn exert direct impact on making decision on installation of the compensating devices.

Проблема энергосбережения в системах передачи электроэнергии является важной и актуальной. Одним из путей решений проблемы энергосбережения является снижение потерь мощности. Достичь снижения потерь мощности возможно за счет компенсации реактивной мощности (КРМ). Для КРМ необходима установка в сеть компенсирующих устройств (КУ). Одним из условий эффективной реализации установки КУ является качественное и объективное определение показателей технико-экономической эффективности предлагаемых инженерно-технических решений. Результаты определения показателей технико-экономической эффективности фиксируются в документе, озаглавленном как технико-экономическое обоснование, которое содержит: 1) необходимую информацию о причинах выбора КУ; 2) информацию о сути предлагаемых инженерно-технических решений, а именно установка КУ в сети потребителя; 3) предполагаемые результаты от их внедрения, то есть результаты снижения потерь мощности; 4) результаты расчета экономической эффективности от установки КУ.

Основными показателями технико-экономической эффективности любого проекта являются: инвестиции, натуральная экономия, годовое сбережение, период окупаемости, чистый доход, индекс доходности. Инвестиции K (рублей) — это денежные средства, вложенные в установку КУ. Натуральная экономия ΔP (кВт) подразумевает снижение потерь мощности. Годовое сбережение D (рублей) характеризует ежегодное снижение потерь электроэнергии, выраженное в денежном эквиваленте.

$$D = \Delta P \cdot \tau \cdot \beta, \quad (1)$$

где τ — время потерь, ч.; β — тариф на электроэнергию, руб/кВт·ч.

Период окупаемости T позволяет потребителям узнать период окупаемости средств, затраченных на покупку и установку КУ.

$$T = \frac{K}{D} = \frac{K}{\Delta P \cdot \tau \cdot \beta} \quad (2)$$

Чистый доход будем определять по формуле:

$$ЧД = D \cdot T_{чд} - K = \Delta P \cdot \tau \cdot \beta \cdot \left(\frac{K}{\Delta P \cdot \tau \cdot \beta} + k \right) - K \quad (3)$$

где

$$T_{чд} = T + k = \frac{K}{\Delta P \cdot \tau \cdot \beta} + k \quad (4)$$

Индекс доходности ИД отражает эффективность установки КУ и является решающим в технико-экономическом обосновании установки КУ в сети потребителя.

$$ИД = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{D}{(1+r)^i}}{K} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\Delta P \cdot \tau \cdot \beta}{(1+r)^i}}{K}, \quad (5)$$

где n — расчетный период, равный $T_{чд}$; r — ставка дисконтирования.

Во всех технико-экономических показателях (кроме инвестиции) присутствует величина снижения потерь мощности ΔP . Снижение потерь мощности происходит на всех участках сети от генераторов электрических станций до непосредственного места установки КУ. В условиях ве-

домственной принадлежности электрических сетей, сети разделены между потребителем и сетевой организацией границей балансовой принадлежности. Если КУ установлены в сети сетевой организации, то снижение потерь происходит от генераторов электрических станций до места установки КУ, снижение потерь в сети потребителя не происходит.

Если же КУ установлены в сети потребителя, то снижение потерь мощности происходит в сети сетевой организации (участке сети от генераторов до границы балансовой принадлежности) и сети потребителя (участке сети от этой границы до непосредственного места установки КУ). Величина ΔP представляет собой сумму двух составляющих.

Первая составляющая ΔP_n — снижение потерь мощность в сети потребителя от места установки КУ до границы балансовой принадлежности. Расчет ΔP_n для потребителя требует составления схемы замещения сети и расчета ее параметров. Затем по известным выражениям проводится расчет снижения потерь мощности ΔP_n после установки КУ.

Вторая составляющая ΔP_c — снижение потерь мощности в сети сетевой организации от границы с потребителем до генераторов. Расчет этой составляющей сложен для потребителя, которому неизвестны конфигурации сети и параметры схемы замещения. В таком случае приходится не учитывать эту составляющую и принимать значение снижения потерь мощности ΔP , равное ΔP_n .

Информация о ΔP_c для нахождения технико-экономических показателей получается расчетами потерь сетевой организации при изменении потребления реактивной мощности каждым потребителем. Для получения величины снижения потерь мощности ΔP_c в сетевой организации используется компьютерная программа [1, 2].

В [3] предлагается схема замещения сети в виде трехлучевой звезды (рис. 1). Здесь R_1 — сопротивление линии электропередач, ответвления от узла нагрузок с мощностью P_1 , $\operatorname{tg} \varphi_1$. Реактивная составляющая этой нагрузки может изменяться за счет установки КУ. R_2 — эквивалентное сопротивление ответвлений к остальным потребителям и других ветвей, не участвующих в питании нагрузки P_1 , $\operatorname{tg} \varphi_1$. Нагрузка этой ветви P_2 , $\operatorname{tg} \varphi_2$ равна сумме мощностей всех нагрузок сети, кроме P_1 , $\operatorname{tg} \varphi_1$. R_3 — эквивалентное сопротивление R_3 всех ветвей сети, участвующих в питании на-

грузки $P_1, tg \varphi_1$, кроме отвления к ней. Этот третий луч соединяет источник питания G с центральным узлом.

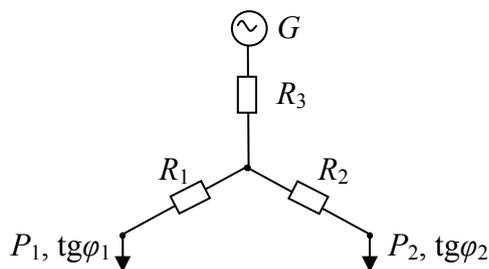


Рис. 1. Эквивалентная схема замещения электрической сети сетевой организации

Предложенная схема замещения пригодна для расчета изменения потерь мощности $\delta\Delta P_{KV}^*$ в сети при установке КУ мощностью Q_{KV} в системе электроснабжения потребителя с нагрузкой $P_1, tg \varphi_1$ или при изменении реактивной составляющей этой нагрузки на величину $Q_1 - Q_{KV}$. Изменение снижения потерь мощности $\delta\Delta P_{KV}^*$ имеет вид:

$$\delta\Delta P_{KV}^* = \frac{\sum_1^3 \Delta P_i - \sum_1^3 \Delta P_{i,нов}}{\sum_1^3 \Delta P_i} = 1 - \frac{\sum_1^3 \Delta P_{i,нов}}{\sum_1^3 \Delta P_i} = 1 - \left(\frac{\Delta P_{1,нов}}{\sum_1^3 \Delta P_i} + \frac{\Delta P_{2,нов}}{\sum_1^3 \Delta P_i} + \frac{\Delta P_{3,нов}}{\sum_1^3 \Delta P_i} \right), \quad (6)$$

или

$$\delta\Delta P_{KV}^* = 1 - \left(\frac{(1 + tg^2 \varphi_{1,нов})}{(1 + tg^2 \varphi_1)} \cdot \frac{\Delta P_1}{\sum_1^3 \Delta P_i} + \frac{\Delta P_2}{\sum_1^3 \Delta P_i} + \frac{(1 + tg^2 \varphi_{3,нов})}{(1 + tg^2 \varphi_3)} \cdot \frac{\Delta P_3}{\sum_1^3 \Delta P_i} \right), \quad (7)$$

где $\Delta P_1, \Delta P_2, \Delta P_3$ и $\Delta P_{1,нов}, \Delta P_{2,нов}, \Delta P_{3,нов}$ — потери в ветвях схемы замещения до и после компенсации реактивной мощности; $tg \varphi_1, tg \varphi_3$ и $tg \varphi_{1,нов}, tg \varphi_{3,нов}$ — коэффициенты мощности в ветвях схемы до и после компенсации реактивной мощности.

Выводы

1. Математическая модель позволяет каждому потребителю узнать его вклад в снижение потерь мощности при установке в своих сетях КУ.
2. Установка КУ требует затрат, связанных с их покупкой, монтажом и эксплуатацией, поэтому потребитель вправе претендовать на воз-

мещение части затрат в виде оплаты услуг по снижению потерь в сетевой организации в силу (7). Однако нормативно-правовая база РФ не предусматривает снижение тарифов таких потребителей [4, 5].

Список литературы

1. Кузнецов А. В., Аргентова И. В. Математическая модель оценки снижения потерь мощности в сетевой организации при компенсации реактивной мощности у потребителя // Материалы 49-й науч.-техн. конф. — Ульяновск : УлГТУ, 2015. — С. 44–47.

2. Кузнецов А. В., Ребровская Д. А., Аргентова И. В. Программная модель оценки снижения потерь мощности в сетевой организации при компенсации реактивной мощности в сети потребителя // Промышленная энергетика. — 2016. — №6. — С. 48–54.

3. Кузнецов А. В., Аргентова И. В. Математическая модель оценки снижения потерь мощности в сетевой организации при компенсации реактивной мощности в сети потребителя // Электротехника. — 2016. — №10. — С. 68–73.

4. Кузнецов А. В., Магазинник Л. Т. Повышение эффективности управления режимами потребления электрической энергии. — М.: Энергоатомиздат, 2006. — 103 с.

5. Кузнецов А. В., Магазинник Л. Т. Повышение эффективности функционирования устройств управления передачей электроэнергии в системах электроснабжения потребителей. — Ульяновск : УлГТУ, 2013. — 151 с.

Кузнецов Анатолий Викторович — доктор технических наук, заведующий кафедрой «Электроснабжение» ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (УлГТУ).

Ребровская Диана Андреевна — старший преподаватель, заместитель заведующего кафедрой «Электроснабжение» ФГБОУ ВО УлГТУ.

Чикин Владислав Владимирович — студент 3 курса кафедры «Электроснабжение» ФГБОУ ВО УлГТУ.

E-mail: chikin_vladislav@mail.ru.

СХЕМНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЕТРОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ УСТАНОВОК В СИСТЕМЕ РАСПРЕДЕЛЕННОГО ЭЛЕКТРОСНАБЖЕНИЯ

Л. Н. Канов

Предложена модель ветроэлектростанции из двух генераторов в виде системы нелинейных алгебраических и дифференциальных уравнений с учетом изменения скорости ветра и вырабатываемой мощности. Обоснована методика стабилизации активной мощности генераторов изменением углов установки лопастей ветроколеса и компенсации реактивной мощности параллельно включаемыми емкостями.

Mathematical description of windelectrical station is built from two generators type of the system of nonlinear algebraic and differential equalizations taking into account a change speed of wind and produced power. The method of optimum control is grounded with the purpose of stabilizing of active power of generator and compensation reactive powers. It is suggested to carry out stabilizing the change of corners of setting of blades of windwheel and compensation — shunting capacitors.

Ветроэлектроэнергетика является приоритетным направлением в развитии нетрадиционных источников электроснабжения. В состав ветроэлектрических станций входят несколько ветроэлектрических установок (ВЭУ), электроэнергия которых подается на сборные шины и далее в энергосистему. Распределенное расположение ВЭУ по территории является причиной того, что каждая ВЭУ находится в индивидуальных ветровых условиях. Взаимная связь ВЭУ зависит от их расстояния до сборных шин, параметров силовых кабелей и арматуры. Поэтому задача исследования и стабилизации режимов совместной работы ВЭУ в системе электроснабжения является актуальной.

Режимы работы единичных ВЭУ, работающих на сеть, изучены в [1–4], имеется обзор [5]. В то же время параллельная работа ВЭУ в составе системы распределенного электроснабжения освещена недостаточно. Так, в [6] исследованы вопросы компенсации реактивной мощности

в условиях независимой работы ВЭУ на основе стохастического анализа. В [7] выполнен анализ режимов локальной сети, включающей наряду с ВЭУ тепловые электростанции. Однако алгоритм управления ветрогенераторами [8], основанный на прогнозе конечного состояния неуправляемого движения, сложен для применения. Целью статьи является стабилизация режима системы электроснабжения по активной и реактивной мощности с учетом распределенного расположения ВЭУ на основе схемного моделирования.

Математическое описание системы. Рассмотрим распределенную систему электроснабжения из одинаковых асинхронных генераторов переменного тока, работающих параллельно на общую сеть. Без потери общности ограничимся двумя генераторами. Упрощенная схема замещения системы электроснабжения [1–5] изображена на рис. 1.

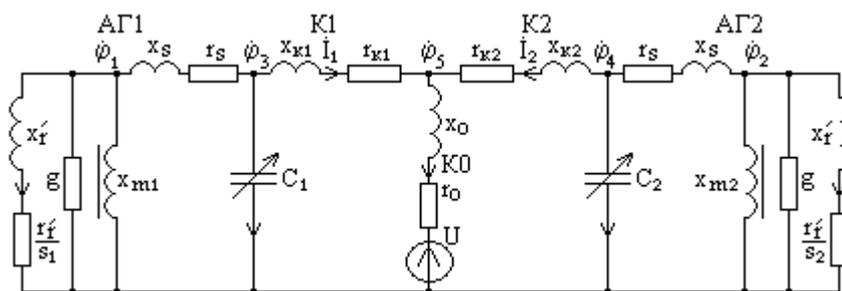


Рис. 1. Схема замещения распределенной системы электроснабжения

На рис. 1 r'_r, r'_s, x'_r, x'_s — сопротивления и реактивности фазы генератора; g, x_m — проводимость потерь в стали и реактивность намагничивания; C_1, C_2 — емкости — источники реактивной мощности; $r_0, x_0, r_{ki}, x_{ki}, i=1, 2$ — сопротивления и реактивности кабелей и арматуры; U — напряжение сети. Потенциалы узлов ϕ_1, ϕ_2 представляют ЭДС генераторов; ϕ_3, ϕ_4 — их выходные напряжения U_1, U_2 ; ϕ_5 — напряжение на общих шинах. Реактивности намагничивания вследствие насыщения зависят от ЭДС генераторов $e_{1,2} = |\phi_{1,2}|$ и аппроксимируются выражением $x_m(e) = a \cdot (0,5\pi - \arctg(d \cdot (e - u)))$, где a, d, u — коэффициенты аппроксимации. Скольжения генераторов: $s_i = 1 - \frac{p\Omega_i}{\omega}$, $i=1, 2$; p — число, зависящее от количества пар полюсов и коэффициента механической передачи от ветроколеса; Ω_i — скорости вращения ветроколес.

В сеть передается активная мощность $P_{сему}$, вырабатываемая генераторами $P_{r_i}, i = 1, 2$ за вычетом потерь в обмотках и в сопротивлениях r_{ki}, r_0 . Реактивная мощность потребляется роторами Q_{r_i} , обмотками статоров Q_{s_i} , реактивностями намагничивания Q_{m_i} , кабелями и арматурой Q_{k_i}, Q_0 . Емкости генерируют реактивную мощность Q_{c_i} ; ее небаланс передается в сеть $Q_{сему}$. Мощности, передаваемые генераторами на общие шины (узел 5): $\underline{S}_1 = \Phi_5 \hat{I}_1 = P_1 + jQ_1, \underline{S}_2 = \Phi_5 \hat{I}_2 = P_2 + jQ_2$.

Электрическая часть ВЭУ (рис. 1) описывается нелинейными комплексными уравнениями относительно потенциалов узлов Φ_1, Φ_2 [2]

$$\left. \begin{aligned} (\underline{K}_1 \underline{Y}_{1sc0} - \underline{Y}_s) \Phi_1 - \underline{K}_2 \underline{Y}_{12} \Phi_2 &= \underline{I}_{01}; \\ -\underline{K}_1 \underline{Y}_{12} \Phi_1 + (\underline{K}_2 \underline{Y}_{2sc0} - \underline{Y}_s) \Phi_2 &= \underline{I}_{02} \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

где $\underline{K}_i = \left(\left(\frac{r'_r}{s_i} + jx'_r \right)^{-1} + g + \frac{1}{jx_m(e_i)} \right) \cdot \underline{Y}_s^{-1} + 1, i = 1, 2; \underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{k1} \underline{Y}_{k2} \underline{Y}_{55}^{-1}; \underline{I}_{0i} = U \underline{Y}_0 \underline{Y}_{ki} \underline{Y}_{55}^{-1};$

$\underline{Y}_{isc0} = \underline{Y}_s + jb_i + \underline{Y}_{ki} - \underline{Y}_{ki}^2 \underline{Y}_{55}^{-1}, i = 1, 2; \underline{Y}_s = (r_s + jx_s)^{-1}; \underline{Y}_{ki} = (r_{ki} + jx_{ki})^{-1};$

$\underline{Y}_{55} = \underline{Y}_{k1} + \underline{Y}_{k2} + \underline{Y}_0; \underline{Y}_0 = (r_0 + jx_0)^{-1}; b_i = \omega C_i, i = 1, 2.$

Динамику представляют уравнения равновесия моментов

$$J \frac{d\Omega_i}{dt} + k_{mp} \Omega_i + M_{эм i} = M_{вк i}, i = 1, 2, \quad (2)$$

где $M_{эм i} = -\frac{3p|\Phi_i|^2 r'_r \cdot (\omega - p\Omega_i)}{[x'_r \cdot (\omega - p\Omega_i)]^2 + (\omega r'_r)^2}$ — электромагнитные моменты генераторов; $M_{вк i}$ — вращающие моменты ветроколес с удельным моментом $M_0(z_i, \alpha_i)$, зависящие от их диаметров D_i , от скоростей ветра V_i и плотности воздуха ρ [5] $M_{вк i} = M_0(z_i, \alpha_i) V_i^2 \frac{\pi D_i^3 \rho}{16}; z_i = \frac{0,5 D_i \Omega_i}{V_i}$ — коэффициент быстрой скорости; α_i — углы установки лопастей; k_{mp} — коэффициент трения; J — момент инерции.

При заданном диаметре момент ветроколеса является функцией трех переменных $M_{вк i}(\Omega_i, \alpha_i, V_i)$ и описывается сплайн-аппроксимацией [2].

Уравнения (1)–(2) представляют упрощенное математическое описание ветроэлектростанции из двух одинаковых ВЭУ, работающих параллельно.

Схемная модель ВЭУ. Аналитическое решение (1) и (2) невозможно, численное — затруднено совместным решением нелинейных, комплексных алгебраических (1) и дифференциальных (2) уравнений. Используем схемное моделирование. Для этого введем обозначения в (1): g_1, b_1 — вещественная и мнимая части для разности $\underline{K}_1 \underline{Y}_{1sc0} - \underline{Y}_s$; g_2, b_2 — для произведения $-\underline{K}_2 \underline{Y}_{12}$; g_3, b_3 — для $-\underline{K}_1 \underline{Y}_{12}$; g_4, b_4 — для $\underline{K}_2 \underline{Y}_{2sc0} - \underline{Y}_s$; $J_{R1}, J_{J1}, J_{R2}, J_{J2}$ — для правых частей уравнений $\underline{I}_{01}, \underline{I}_{02}$; $\varphi_{R1}, \varphi_{J1}, \varphi_{R2}, \varphi_{J2}$ — для потенциалов узлов $\varphi_{01}, \varphi_{02}$. Разделяя вещественные и мнимые части:

$$\left. \begin{aligned} g_1 \varphi_{R1} - b_1 \varphi_{J1} - g_2 \varphi_{R2} + b_2 \varphi_{J2} &= J_{R1}; \\ b_1 \varphi_{R1} + g_1 \varphi_{J1} - b_2 \varphi_{R2} - g_2 \varphi_{J2} &= J_{J1}; \\ -g_3 \varphi_{R1} + b_3 \varphi_{J1} + g_4 \varphi_{R2} - b_4 \varphi_{J2} &= J_{R2}; \\ -b_3 \varphi_{R1} + g_3 \varphi_{J1} + b_4 \varphi_{R2} + g_4 \varphi_{J2} &= J_{J2}. \end{aligned} \right\}$$

Трактуя эти формулы, как записи первого закона Кирхгофа, получаем схемную модель (рис. 2).

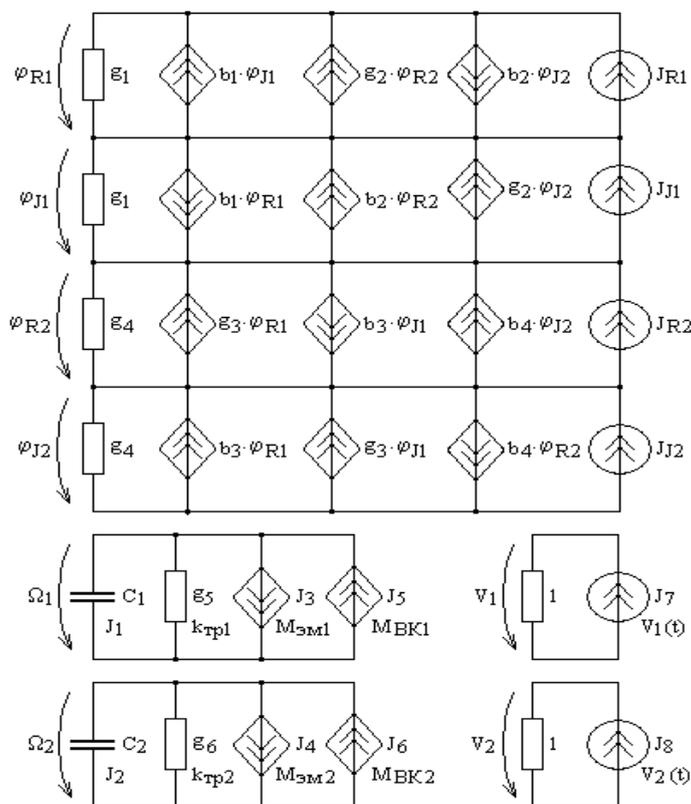


Рис. 2. Схемная модель ВЭУ

В нижней части рисунка изображены схемные модели уравнений (2), где C_1, C_2 — моменты инерции J_1, J_2 ; g_5, g_6 — коэффициенты трения; J_3, J_4 — электромагнитные моменты генераторов $M_{эм1}, M_{эм2}$; J_5, J_6 — вращающие моменты ветроколес $M_{БК1}, M_{БК2}$; C_1, C_2 — угловые скорости вращения ветроколес Ω_1, Ω_2 . Независимые источники тока J_7, J_8 имитируют скорости ветра на ВЭУ1, ВЭУ2. Скорости V_1, V_2 численно равны напряжениям на единичных сопротивлениях. Как видно, изменение скорости вращения второго генератора влияет на режим первого при сохранении скорости, что вызвано уменьшением напряжений и ЭДС генераторов при увеличении скорости Ω_2 . С ростом Ω_2 снижается активная мощность первого генератора. При $\Omega_2 = 15,95 \text{ с}^{-1}$ второй генератор начинает потреблять реактивную мощность.

Стабилизация активной мощности. Активная мощность генераторов поддерживается на уровне P_{01}, P_{02} при различных скоростях ветра $V_1(t), V_2(t)$, углах лопастей α_1, α_2 и напряжении сети U за счет изменения углов установки α_1, α_2 . Для расчетов используется схема на рис. 2 и уравнения

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = k_\alpha (P_i - P_{0i}), \quad i = 1, 2, \quad (3)$$

схемная модель которых изображена на рис. 3.

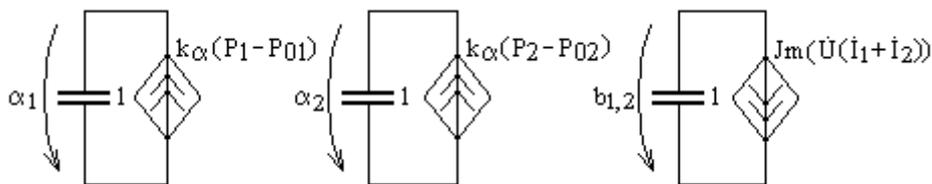


Рис. 3. Схемная модель стабилизации активной мощности

Графики на рис. 4 показывают, что стабилизация активной мощности достигается, но при устойчивом дефиците реактивной мощности $Q_{сету}$. На рис. 4,б показана работа ветроэлектростанции при активной мощности АГ $P_{01}, P_{02} = 4 \text{ кВт}$.

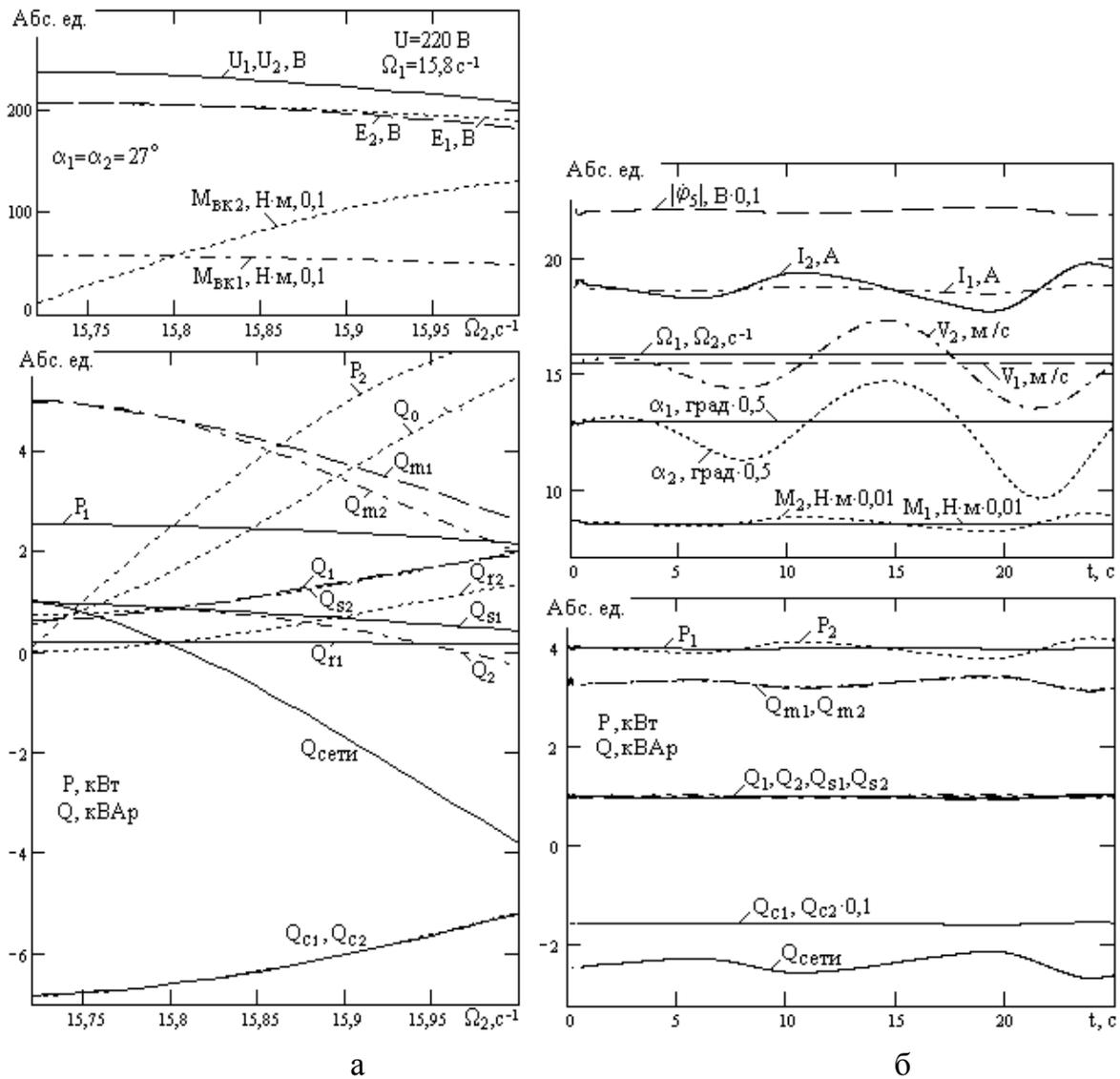


Рис. 4. Зависимости параметров режима системы от скорости одного из генераторов (а); режим системы электроснабжения, оптимальный по активной мощности (б)

Оптимизация режима по реактивной мощности. Целью является поддержание нулевого уровня реактивной мощности $Q_{сети}$, идущей в сеть:

$$Q_{сети} = \text{Im}(U \cdot (\hat{I}_1 + \hat{I}_2)) = 0. \quad (4)$$

Для анализа компенсации реактивной мощности решим уравнения (1) на сетке переменных Ω_1, Ω_2, U относительно φ_1, φ_2 и проводимостей емкостей b_1, b_2 при условии (4) и равенстве проводимостей $b_1 = b_2 = b$. Проводимость b аппроксимирована функцией трех переменных Ω_1, Ω_2, U .

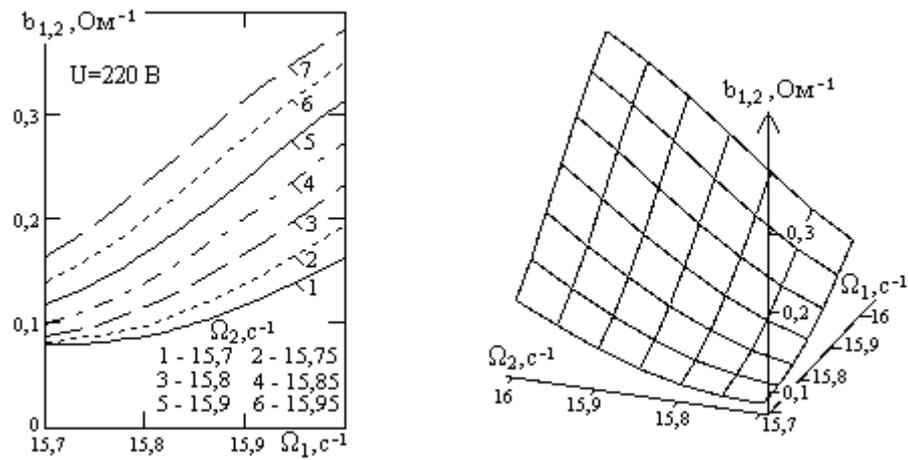


Рис. 5. Проводимость емкостей для компенсации реактивной мощности на входе сети

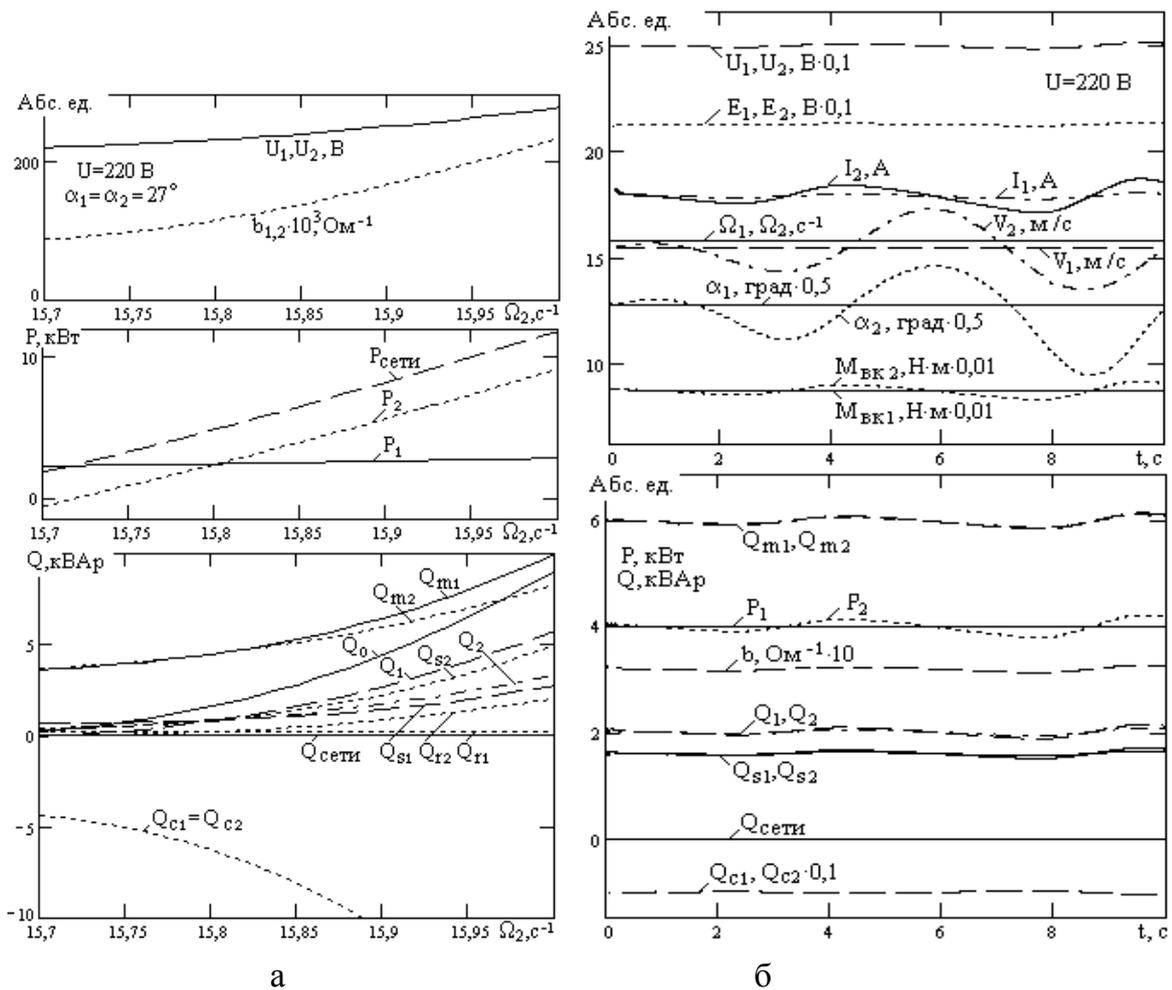


Рис. 6. Параметры режима системы, компенсированной по входу сети (а); рабочий процесс системы электроснабжения, компенсированной по входу сети (б)

На рис. 5 изображены графики зависимости b от Ω_1, Ω_2 при $U = 220$ В, показывающие увеличение емкости с ростом скоростей.

Рис. 6,а представляет зависимости оптимального режима от скорости Ω_2 при $\Omega_1 = 15,8 \text{ с}^{-1}$ для $U = 220 \text{ В}$, рассчитанные по схеме и аппроксимации b . С ростом Ω_2 растут напряжения генераторов и реактивная мощность первого генератора. Реактивная мощность конденсаторов покрывает ее дефицит на входе сети.

Графики подтверждают результаты оптимизации: активная мощность ВЭУ стабилизируется изменением углов установки, а компенсация реактивной мощности на входе сети обеспечивается изменением емкостей (рис. 5). Суммарная выходная реактивная мощность поглощается реактивностью x_0 , происходит повышение напряжения на выходах АГ.

Выводы

1. Предложены математическая модель режима системы распределенного электроснабжения и схемная модель ВЭУ на асинхронных генераторах в зависимости от скоростей вращения и напряжения сети. Показана возможность оптимизации режима системы по активной и реактивной мощности.

2. Детальный анализ статического и динамического режима при колебаниях скорости ветра и напряжения сети возможен для системы из двух ВЭУ. Графики подтверждают результаты оптимизации: активная мощность ВЭУ стабилизируется изменением углов установки, а компенсация реактивной мощности на входе сети обеспечивается изменением емкостей.

3. В случае малых величин сопротивления и реактивности фидера сети модель позволяет исследовать режимы системы из нескольких ВЭУ, а также оценивать емкости для полной или частичной компенсации реактивной мощности.

Список литературы

1. Олейников А. М., Канов Л. Н., Мирошниченко М. С. Математическое моделирование ветроэлектрической установки с автономным асинхронным генератором малой мощности под резистивной нагрузкой // Материалы 12-й Международ. науч-техн. конф. «Проблемы повышения эффективности электромеханических преобразователей в электроэнергетических системах». — Севастополь : СевНТУ, 2013. — С. 177–180.

2. Канов Л. Н. Математическое моделирование ветроэлектрической установки с асинхронным генератором // Электротехника и электромеханика. — 2012. — №5. — С. 71–74.

3. Буяльский В. И. Повышение эффективности управления ветротурбиной // Вестник СевГТУ. Сер. Механика, энергетика, экология : сб. науч. тр. — Севастополь : изд-во СевНТУ. — 2008. — Вып. 88 — С. 152–156.

4. Зубова Н. В., Удалов С. Н., Манусов В. В. Анализ приоритетности контуров управления ветроэнергетической установкой // Электро. — 2015. — №6. — С. 27–31.

5. Кривцов В. С., Олейников А. М., Яковлев А. И. Неисчерпаемая энергия. Ветроэнергетика. — Харьков : Изд-во ХАИ, 2004. — 519 с.

6. Даниленко А. И. Анализ перетоков реактивной энергии на промышленной ветровой электростанции с асинхронными генераторами // Оптимизация производственных процессов : сб. науч. тр. — Севастополь : Изд-во СевНТУ, 2005. — №8. — С. 58–64.

7. Еникеев Т. У., Ефанов В. Н. Оптимизация режимов локальной электрической сети на базе ветроэлектрических установок. — Известия ВУЗов. Сер. Электромеханика. — 2010. — №4. — С. 35–39.

8. Канов Л. Н., Тимофеева Т. И., Шушляпин Е. А. Управление мощностями ветрогенераторов в составе ветроэлектрической станции // Вестник СевНТУ : сб. науч. тр. Вып. 154/2014. Сер. Автоматизация процессов и управление. — Севастополь, 2014. — С. 150–155.

Канов Лев Николаевич — канд. техн. наук, доцент кафедры Судового электрооборудования Севастопольского государственного университета.

299053, Севастополь, ул. Университетская, 33, ауд. А302.

E-mail: lnkanov48@mail.ru.

СПОСОБЫ КОНТРОЛЯ САНИТАРНО-ЗАЩИТНОЙ ЗОНЫ СЕТИ WI-FI СРЕДСТВАМИ ПОДВИЖНОЙ СВЯЗИ

Н. Б. Догадин

Рассмотрены особенности использования устройств подвижной связи для инструментального контроля границы санитарно-защитной зоны базовой станции сети Wi-Fi. Показаны возможности их применения для косвенных измерений плотности потока энергии, создаваемой антенной базовой станции. Приведенные сведения полезны при эксплуатации сетей Wi-Fi и позволяют предотвратить неблагоприятное влияние на здоровье человека электромагнитных полей, создаваемых базовыми станциями этих сетей.

The peculiarities of the use of mobile communication devices for the instrumental control of the hygienic protective zone frontiers of base station of the Wi-Fi network are considered. The possibilities of their application for the indirect methods of measurement of the flux density of electromagnetic energy, build up with the antenna of the base-station are shown. The provided data are useful for the operation of the Wi-Fi networks and allow to prevent the adverse influence of the electromagnetic field build up with the Base Stations of these Wi-Fi networks on human health.

В настоящее время широкое распространение получили беспроводные сети, обмен данными в которых определен группой стандартов IEEE 802.11, часто называемые сетями Wi-Fi. Это во многом связано с применением в качестве абонентских станций (АС) такой сети АС сетей подвижной (сотовой) радиотелефонной связи (смартфонов, коммуникаторов), оснащенных встроенным оборудованием радиодоступа для беспроводной передачи данных технологий открытых систем указанных стандартов. Такие устройства повсеместно распространены, их применение обеспечивает доступ к информационным ресурсам, размещенным в сети Интернет, поэтому сети Wi-Fi часто применяют не только в условиях производственной и общественной деятельности людей, но и в домашних условиях.

Одним из основных компонентов беспроводной сети служит базовая станция (БС), обеспечивающая обмен данными с АС сети, включающая передающее оборудование, создающее электромагнитные поля (ЭМП). Для предотвращения неблагоприятного влияния таких полей на здоровье человека вокруг передающей антенны БС должна быть установлена санитарно-защитная зона (СЗЗ), что особенно актуально в закрытых помещениях, когда люди могут неосознанно располагаться внутри СЗЗ. Ее границы определяют инструментальным контролем плотности потока энергии (ППЭ), выделяя участки пространства, в которых значения этой плотности больше предельно допустимых уровней (ПДУ).

Применить при бытовой реализации сети Wi-Fi средства измерения, прошедшие государственную аттестацию и имеющие свидетельство о поверке, как правило, не представляется возможным, что связано со значительной стоимостью таких средств, поэтому граница СЗЗ оценивается лишь ориентировочным расчетом [1]. При таком расчете учесть все особенности помещения, мебели, оборудования и другие факторы очень сложно, поэтому для объективности необходим инструментальный контроль границы СЗЗ. В настоящее время известны программные средства, использование которых совместно с АС подвижной (сотовой) радиотелефонной связи позволяет оценить технические показатели сети Wi-Fi, и это создает условия их возможного применения для контроля уровней ЭМП на границе СЗЗ. Рассмотрим некоторые особенности такого применения.

Непосредственной оценке уровня ЭМП на границе СЗЗ при применении средств сотовой связи препятствует отсутствие нормирования метрологических характеристик их АС, что не позволяет выполнить оценку результата измерения и его погрешность с точностью, установленной нормативными документами. Для создания такой возможности необходимо оценить систематическую погрешность, сопровождающую воспроизводимые значения конкретным устройством.

При отсутствии необходимых средств измерения можно применить метод рандомизации, предусматривающий измерение одной и той же величины несколькими однотипными устройствами, считая, что тогда систематические погрешности каждого из устройств по отношению друг к другу можно рассматривать как случайные. Для такой калибровки необходимо несколько (как правило, не менее трех) устройств с установлен-

ными на них программными средствами расположить в непосредственной близости друг к другу на одинаковом удалении от антенны БС. Одновременная регистрация мощности сигнала, принимаемого устройствами в данном месте пространства, и воспроизведение ее значений на экранах устройств позволит выполнить статистическую обработку результатов, например, с использованием методики, приведенной в [2].

На основании этих данных рассчитывают средние значения результата, воспроизведенного каждым из устройств, и математическое ожидание совокупности показаний. Последнее в дальнейшем можно принять за действительное значение исследуемой величины, а разность между ним и средним значением показаний каждого из устройств рассматривать как вносимую им систематическую погрешность и использовать такую поправку для компенсации этой погрешности.

Однако лишь выявление систематической погрешности недостаточно: необходимо чтобы технические показатели АС подвижной радиотелефонной связи были совместимы с соответствующими показателями сети Wi-Fi. Например, для сети подвижной радиотелефонной связи стандарта GSM-900/1800 предусмотрено, что в состав ее АС может входить встроенное оборудование радиодоступа для беспроводной передачи данных при использовании технологий открытых систем группы стандартов IEEE 802.11 с диапазоном рабочих радиочастот лишь 2,4 МГц [3]. Следовательно, такие мобильные устройства могут быть применены для контроля сетей Wi-Fi только этого диапазона.

В [4] установлено, что для оборудования, соответствующего наиболее распространенным сейчас стандартам IEEE 802.11, IEEE 802.11g, IEEE 802.11n, максимальный уровень сигнала на входе приемника не должен превышать -20 дБм. Однако как показывают расчеты, уровень сигнала на границе СЗЗ, при установленном нормативном значении ППЭ $P_{\text{пду}} = 10,0$ мкВт/см² [5], составляет -9 дБм. Этот уровень не соответствует динамическому диапазону приемника АС, а значит, невозможно прямое измерение таких значений АС подвижной радиотелефонной связи, поэтому принимаемый ею сигнал должен быть предварительно ослаблен, а реальное значение сигнала следует определить, используя его функциональную зависимость с измеренным.

Возможно несколько способов косвенного измерения уровня сигнала на границе СЗЗ, рассмотрим некоторые из них. Если считать, что среда распространения радиоволн линейна и при изменении мощности излученного сигнала сохраняет свои характеристики неизменными (что при уровнях излучаемой мощности БС, определенных для закрытых помещений, часто считают допустимым), то можно применить пропорциональное уменьшение выходной мощности БС. В этом случае ее значение с номинального, соответствующего предполагаемому режиму эксплуатации БС, целесообразно уменьшить до значений, при которых уровень сигнала на границе СЗЗ совпадает с динамическим диапазоном приемника АС. Для прогнозирования этого достаточно рассчитать затухание сигнала на пути его распространения от передатчика БС до границы СЗЗ.

Например, пусть номинальная выходная мощность БС составляет 20 дБм, а, как указывалось выше, мощность сигнала, принимаемого на границе СЗЗ, должна иметь значение -9 дБм, следовательно, затухание на этом пути распространения составляет -29 дБм. Тогда при уменьшении выходной мощности до 4 дБм, мощность сигнала, принимаемого на границе СЗЗ, составит -25 дБм. Это значение соответствует динамическому диапазону приемника АС подвижной связи и может быть измерено непосредственно, а значит, выделение пространства, в котором мощность принимаемого сигнала имеет это значение, будет соответствовать границе СЗЗ при восстановлении выходной мощности БС до номинального значения. Если номинальная выходная мощность БС другая, например, имеет значение 17 дБм, то ему соответствует иное затухание сигнала на пути распространения до границы СЗЗ, в данном случае оно составит -26 дБм, а значит, при уменьшении выходной мощности БС уже это значение нужно использовать для определения уровня принимаемого сигнала на границе СЗЗ.

Если в используемой модели БС изменение ее выходной мощности не предусмотрено или уровень изменения этого значения из инструкции по эксплуатации БС неочевиден, то в качестве источника пониженной мощности излучения можно применить БС, реализованную на АС сетей подвижной радиотелефонной связи. В этом случае значение выходной мощности передатчика встроенного оборудования, предназначенного для использования в сетях Wi-Fi, значительно меньше, чем у выпускаемых про-

мышленно для закрытых помещений стационарных БС. Например, в АС, соответствующей стандарту GSM-900/1800, эта мощность ограничена значением 2,5 мВт (4 дБм) [3].

Такую замену можно признать эквивалентной, если БС имеет внутреннюю антенну. В этом случае антенно-фидерные устройства БС и ее аналога, реализованного с использованием АС подвижной связи, можно считать близкими по техническим показателям, иначе необходим учет различия примененных в них антенн и устройств, соединяющих их с радиопередатчиками. Ориентацию обоих устройств (и АС, и заменяющего БС) следует выполнить по максимальному сигналу, принимаемому АС.

Еще одной возможностью уменьшения сигнала, принимаемого АС, служит ее экранирование. Многие материалы, применяемые в быту, вносят затухание в распространение колебаний частотой 2,4 ГГц, которые в некоторых случаях значительны. Конкретные значения вносимых затуханий можно определить экспериментально и использовать их при измерениях как поправочные коэффициенты.

При экспериментальной оценке этих затуханий следует учитывать, что выпускаемые промышленно БС могут использовать режим динамического регулирования выходной мощности их передатчика, компенсируя снижение уровня принимаемого сигнала, в том числе, и из-за экранирования. Для исключения такого влияния необходимо либо установить выходную мощность БС неизменяемой, либо БС реализовать с помощью соответствующего режима АС подвижной связи, в которых часто динамическое регулирование выходной мощности пока еще не применяют.

Такой эксперимент не сложен, а с его помощью можно оценить затухание, вносимое каждым материалом при использовании его для экранирования АС и позволяющее уменьшить уровень принимаемого ею сигнала для измерения излучения на границе СЗЗ при номинальной выходной мощности БС. Экспериментально исследованы несколько материалов, применяемых в быту. Источником излучения служило мобильное устройство HTC One M7, использованное в режиме БС, приемником — мобильное устройство Sony LT 25i (Xperia V) с установленной на нем программой Wifi Analyzer. Ориентация устройств соответствовала максимальному значению принимаемого сигнала, а измерения проведены на первом канале диапазона 2,4 ГГц.

Контроль пространственной неизменности условий распространения радиосигналов выполнен устройством мобильной связи Huawei U9500 (Ascend D1). Воспроизводимые им значения были близки значениям, регистрируемым АС без ее экранирования, и оставались такими во все время поведения эксперимента.

Некоторые из исследуемых материалов оптически непрозрачны, поэтому воспроизводимые на экране АС значения уровня сигнала в месте приема транслировались на переносной персональный компьютер (ноутбук) и зафиксированы снимками экрана. Примененная программа позволяет воспроизводить на экране устройства в виде диаграммы одновременно 29 последовательных значений уровней принимаемого сигнала, что обеспечивает их полноценную обработку по методике, предусмотренной [2].

В качестве опорных (базовых) значений для сравнения использован результат статистического анализа первоначально зафиксированной диаграммы значений сигнала, принимаемого АС без применения экранирующих материалов. Затем АС была обвернута одним из образцов исследуемого материала, и воспроизводимая на экране АС диаграмма зафиксирована снимком экрана. Полученные после обработки результаты позволили оценить изменение мощности сигнала при распространении его через конкретный исследуемый материал и показали широкий диапазон вносимых затуханий. Например, один слой бытовой пищевой фольги для приготовления и хранения толщиной 14 мкм изменил мощность сигнала на -12 дБм; упаковочный пакет для растворимого кофе, изготовленный из полимерных и комбинированных материалов, снабженный замком (иногда называемым застежкой-молнией) — на -20 дБм; антистатический упаковочный пакет, применяемый при транспортировке радиоэлектронных компонент — на -10 дБм; сетка металлическая проволочная плетеная одинарная с квадратными ячейками площадью 1 мм^2 — на -4 дБм.

Конечно, приведенные данные соответствуют изменению мощности сигнала при распространении его через конкретный экземпляр экранирующего материала и для других экземпляров эти значения могут быть иными. Однако проведенный эксперимент показывает, что в быту используют материалы, при распространении через которые изменение мощности сигнала значительно. Их целесообразно использовать для изготовле-

ния экранов, позволяющих применить инструментальный контроль расположения границы СЗЗ, при этом оценку значения изменения мощности сигнала при распространении его через конкретный экземпляр такого материала можно выполнить в несложном эксперименте.

Выбор конкретного из способов во многом зависит от технических показателей оборудования и условий его эксплуатации. Сочетание рассмотренных способов повышает гибкость в подготовке и проведении измерения, а значит, приведет к оптимизации его процесса.

Таким образом, приведенные выше способы косвенного контроля границы СЗЗ базовой станции сети Wi-Fi средствами подвижной радиотелефонной связи создают условия инструментальной оценки расположения границы СЗЗ. Это позволяет принять своевременные меры по обозначению и ограждению СЗЗ, препятствующие случайному расположению в ней людей, и способствуют предотвращению неблагоприятного влияния излучаемых ЭМП на здоровье человека.

Список литературы

1. Догадин Н. Б. Особенности обеспечения гигиенических требований к базовым станциям сетей Wi-Fi в закрытых помещениях // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей : Международ. сб. науч. труд. – Ульяновск : УлГТУ. — 2016. — Вып. 13. — С. 195–203.

2. ГОСТ Р 8.736-2011 Измерения прямые многократные. Методы обработки результатов измерений. Основные положения. [Электронный ресурс]. — URL: <http://www.elec.ru/files/2014/01/13/GOST-R-8736-2011-Gosudarstvennaja-sistema.pdf>.

3. Правила применения абонентских станций (абонентских радиостанций) сетей подвижной радиотелефонной связи стандарта GSM-900/1800. [Электронный ресурс]. — URL: <http://minsvyaz.ru/ru/documents/4060/>.

4. Приказ Минкомсвязи России от 14.09.2010 N 124 (ред. от 22.04.2015) «Об утверждении Правил применения оборудования радиодоступа. Ч. I. Правила применения оборудования радиодоступа для беспроводной передачи данных в диапазоне от 30 МГц до 66 ГГц» [Электронный ресурс]. — URL: <http://base.garant.ru/199539/>.

5. СанПиН 2.1.8/2.2.4.1383-03 Гигиенические требования к размещению и эксплуатации передающих радиотехнических объектов [Электронный ресурс]. — URL: <http://ivo.garant.ru/#/document/12131290/paragraph/1073742237:0>.

Догдин Николай Борисович — д-р техн. наук, профессор, г. Волгоград.
E-mail: dogadin:@vsru.ru.

КОНТРОЛЬ И ИСПЫТАНИЕ ЭЛЕКТРОУСТАНОВОК СТАЦИОНАРНЫМИ И ПЕРЕДВИЖНЫМИ ЛАБОРАТОРИЯМИ

Д. С. Александров, Е. Ф. Щербаков

Рассмотрены особенности контроля и испытание характеристик электроустановок с помощью стационарных и передвижных лабораторий. Предложен алгоритм испытания электроустановок.

Describes the features of the control and test characteristics of electrical systems with stationary and mobile laboratories. The algorithm of testing of electrical installations are proposed.

О контроле техсостояния объектов испытания. Общий подход к контролю техсостояния объектов испытания, связанных с электроустановками, электролабораториями (ЭЛА) зависит от места проведения испытаний, что подразделяет ЭЛА на стационарные и передвижные. Совокупные условия работы стационарных и передвижных ЭЛА обуславливают качество результата испытания, который определяется совокупностью результатов по типам испытания, отражающим различные свойства объекта.

Стационарные ЭЛА, прежде всего, контролируют характеристики таких объектов, как средства защиты, жидких диэлектриков (масла), действие автоматических выключателей. Испытания проводятся в нормальных климатических условиях при отсутствии жёстких требований к массогабаритным показателям и ударостойкости средств испытания.

Метод однократного соответствия [1] (рис. 1) является основным.



Рис. 1. Схема однократного соответствия

Совокупность элементов блок-схемы на рис. 1 служит каналом соответствия. Единственный канал соответствия в стационарных ЭЛА обеспечивает достоверность результатов испытаний, определяемую доверительной вероятностью p , как правило, $p > 0,99$. Достоверность результата испытаний в условиях передвижной ЭЛА и при наличии дефектов достигается не только соответствием установленным требованиям, но и выявлением дефекта.

Специфика проведения испытаний передвижными ЭЛА заключается, прежде всего, в возможной неопределённости объекта испытаний и его свойств; условий испытания; установленных требований; характеристик средств испытания; реализации метода испытания в реальных условиях.

Далее рассматривается возможный вариант решения проблемы достоверности результатов контроля характеристик объекта испытания передвижными ЭЛА в условиях значительной неопределённости получения результата испытаний. Принципиальная схема сложного канала соответствия (рис. 2), кроме внешних отличий от схемы на рис. 1, предполагает изменение содержимого аналогичных блоков.

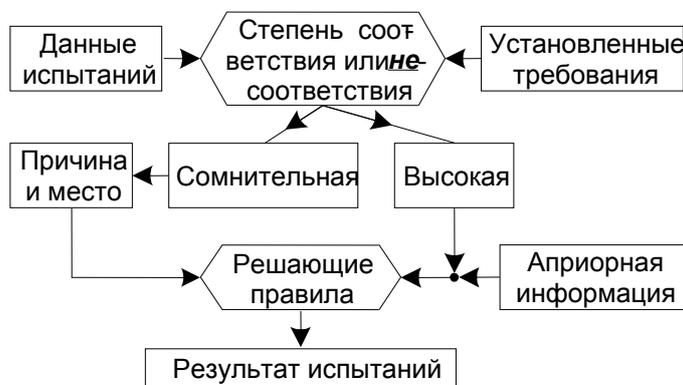


Рис. 2. Структурная схема сложного канала соответствия

Повышение достоверности и оформление результатов испытаний. Для повышения достоверности данных измерений количественных характеристик в блоке «Данные испытаний» увеличивается объём испытаний. При этом используют как основной, желательно стандартный метод, так и дополнительный, желательно также стандартный метод, в нормальных или близких к ним климатических условиях, а также более жёстких режимах и рабочих условий испытания.

Применяют другие средства испытания; дублируя или выполняя параллельные опыты; не только по основной характеристике, но и по сопутствующим характеристикам. Выполняют расчёт или моделирование путём перехода от испытания количественной характеристики к эквивалентной по назначению качественной характеристике свойства объекта испытаний. Показания могут быть детерминированными, в интервальной форме или в виде распределения случайной величины.

Другая характеристика качества испытаний — воспроизводимость результатов во внимание не принимается, поскольку отсутствует необходимость проведения повторных испытаний. Воспроизводимость данных испытания средств защиты и жидких диэлектриков также не требуется. Воспроизводимость времён срабатывания автоматических выключателей обеспечивается в условиях стационарной ЭЛА, если выполнены требования к надлежащим условиям испытания.

Независимо от вида характеристики, если результат данного испытания значительно лучше установленного требования, то проблема получения достоверного результата отсутствует в виду его очевидности. Если размер допустимого данного испытания сопоставим с размером установленного требования, то проблема получения достоверного результата решается при дополнительных испытаниях.

Независимо от вида характеристики — качественная или количественная — необходимо соблюдать технологию испытаний, что оформляется в виде рабочей методики [1]. Методы испытаний должны быть стандартными. Средства измерений поверяются в установленном порядке. Точность средств измерения должна быть такой, чтобы считать данные измерения «абсолютно» точными [2].

Испытательное оборудование должно обеспечивать создание условий испытания, способных выявлять дефекты в предельно жёстких режимах воздействия на испытуемый объект. При необходимости выполняется внутренняя аттестация испытательного оборудования и вспомогательных технических устройств. При некоторых испытаниях (например, масла) следует вводить характеристику — коэффициент вариации данных измерения.

Контроль соответствия качественных характеристик. Предусматривает такие формы, как контрольное описание, контрольный рисунок

(фотография, осциллограмма и т. д.) и контрольный образец. Контрольное описание выражается в утвердительной форме. Сравнивая словесное описание размера качественной характеристики со словесным описанием установленного требования. Таким же образом поступают тогда, когда установленное требование задаётся контрольным рисунком или образцом.

Несоответствия установленному требованию (дефекты) относятся по своей значимости к критическим за исключением дефектов при контроле цвета, наличия воды и неметаллических включений в жидких диэлектриках, где их можно отнести к малозначительным или значительным дефектам в зависимости от степени проявления.

Результат контроля качественных характеристик свойств объекта испытаний получают посредством сравнения данных испытания и установленного требования с помощью решающего правила. Такое сравнение должно выполняться по каждой качественной характеристике:

$$Q_x \cong Q_{ут} \text{ соответствие; } Q_x \not\cong Q_{ут} \text{ несоответствие,}$$

где Q_x — «размер» контролируемой характеристики, определяемый словесно; $Q_{ут}$ — установленное требование так же выражаемое словесно; (\cong) и ($\not\cong$) — соответственно знаки сравнения «приблизительно равно» и «не равно, не приблизительно, неточно».

Для примера рассмотрим контроль качественной характеристики именуемой «отсутствие механических повреждений диэлектрических перчаток». Визуально — по состоянию поверхности — устанавливается наличие или отсутствие механических повреждений перчаток. Факт механических повреждений Q_x является возможным данным испытания этой качественной характеристики. В нормативном документе на средства защиты (ИПиИСЗ) контрольное описание регламентировано, как «отсутствие механических повреждений диэлектрических перчаток», что является установленным требованием $Q_{ут}$.

Сравнивая данное испытания — фактическое наличие механических повреждений перчаток — с требованием «отсутствие механических повреждений диэлектрических перчаток», делается вывод о несоответствии диэлектрических перчаток требованиям нормативного документа. Результат отрицательный, и средство защиты бракуется.

Контроль соответствия количественных характеристик. Результат получают посредством сравнения значения данных испытания со значением контрольного норматива ($A_{\text{КН}}$) с помощью решающего правила. Сравнение должно выполняться по каждому параметру в зависимости от условий контроля (**I, II, III**) с помощью выражений:

- I.** $A_x < A_{\text{КН}}$ соответствие; $A_x > A_{\text{КН}}$ несоответствие;
- II.** $A_x > A_{\text{КН}}$ соответствие; $A_x < A_{\text{КН}}$ несоответствие;
- III.** $A_{\text{КН.min}} < A_x < A_{\text{КН.max}}$ соответствие;
 $A_{\text{КН.min}} > A_x > A_{\text{КН.max}}$ несоответствие,

где A_x — значение данного измерения или среднеарифметическое значение характеристики; $A_{\text{КН}}$ — значение одностороннего КН испытываемого параметра; $A_{\text{КН.min}}$ и $A_{\text{КН.max}}$ — значения минимального и максимального двухстороннего КН испытываемого параметра.

Несоответствие контрольному нормативу обозначается, как дефект. Такие дефекты относятся по своей значимости к критическим дефектам. Исключением является, например, электрическая прочность масла, когда допустимое среднее значение электрической прочности масла незначительно отличается от контрольного норматива. Несмотря на формальное выполнение условия соответствия контрольному нормативу ($\bar{U} \geq U_{\text{КН}}$), решающее правило следует расширить с учётом коэффициента вариации v и результатов контроля цвета, наличия воды и неметаллических включений в масле.

Если коэффициент вариации превышает 20% и зафиксирован отрицательный результат контроля цвета, наличия воды и неметаллических включений, то результат испытаний электрической прочности диэлектрика следует признать также отрицательным. Если результат визуального контроля был положительным, испытание повторяют на новой пробе. В данном случае решающее правило усложняется за счёт введения дополнительных условий соответствия.

Контроль технического состояния объектов испытания. Предлагается результат испытания по объекту испытания определять, принимая во внимание совокупность результатов испытания по всем типам испытания, определяемым программой испытания (ПИ) (рис. 3).

Обозначения на рис. 2: 1_1 и 1_2 — цифра 1 означает первый этап испытаний — техосмотр. Индексы 1 и 2 означают первый и второй каналы соответствия 1-й и 2-й характеристик техосмотра. 2_1 и 2_2 — цифра 2 означает второй этап именуемый этапом испытания. Индексы 1 и 2 означают первый и второй каналы соответствия 1-й и 2-й характеристик испытания. Многоточие означает, что на этапе техосмотра и испытаний могут контролироваться не две, а соответственно n и m характеристик в зависимости от требований ПИ.

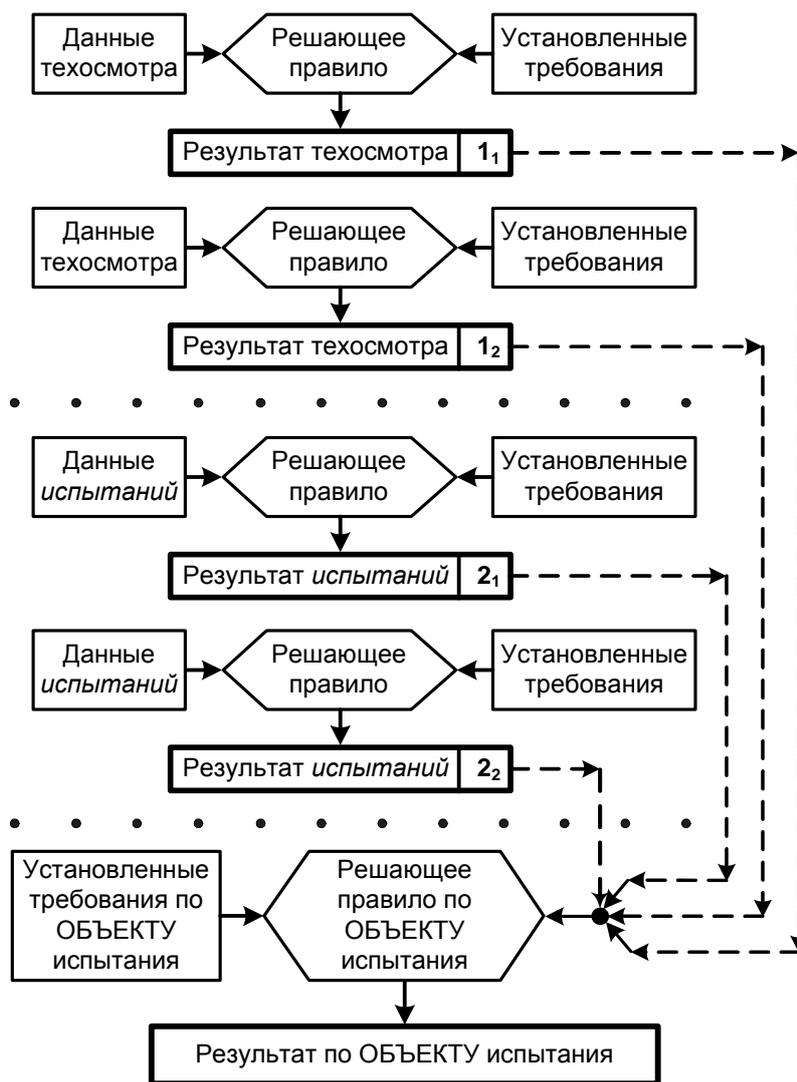


Рис. 3. Схема учета совокупности испытаний

Схема, представленная на рис. 3, состоит из двух основных частей: каналов соответствия по типам испытания ($1_1, 1_2, 2_1, 2_2$) и канала соответствия по объекту испытания.

Основной характеристикой качества испытания по объекту является достоверность результата испытаний. Другая характеристика качества испытаний — воспроизводимость результата испытания по объекту во внимание не принимается, так как отсутствует необходимость проведения повторных испытаний для подтверждения предварительно полученного результата. Схема на рис. 3 позволяет получить необходимую достоверность при условии достоверности результатов испытания каждого из простых каналов соответствия, обеспечивающих достоверность результатов по типу испытания с доверительной вероятностью недостоверности менее $q_{n,m} < 0,01$. Тогда, значение недостоверности результата испытания по объекту $q_{o,и}$, учитывая независимость каналов соответствия друг от друга для изображённой на рисунке схемы, определится по выражению $q_{o,и,min} < q_{1.1} \cdot q_{1.2} \cdot q_{2.1} \cdot q_{2.1} < 0,01 \cdot 0,01 \cdot 0,01 \cdot 0,01 < 10^{-4}$, что является приемлемым.

Фактическая достоверность результата испытания по объекту обеспечивается ПИ, которая должна, кроме организационной части, содержать план испытаний. Важнейшей характеристикой ПИ является перечень типов испытаний общим числом $n+m$, определяющий объём ПИ, который зависит от требований надёжности и безопасности. Утверждённый объём ПИ может корректироваться только в сторону увеличения. Результат испытаний по объекту в случае недостаточного количества n и (или) m типов испытаний, несоблюдения требуемой последовательности испытаний и невыполнение контроля хотя бы одной характеристики должен рассматриваться, как недостоверный, независимо от результатов испытания по проведённым характеристикам.

План испытания должен представлять собой совокупность, прежде всего, следующих сведений по объекту испытания: выбор сплошного или выборочного методов контроля; выбор типа выборочного контроля; способы и правила формирования выборок; количество опытов, в том числе параллельных опытов; приёмочный уровень дефектности; контрольные схемы и контрольные точки; критерии завершения испытаний; установленные требования (УТ) по объекту испытания в целом; решающие правила при проведении единичных опытов, по типам испытаний и по объекту испытаний в целом.

Выбор сплошного или выборочного методов контроля зависит от требований к виду техсостояния объекта испытания. Стационарные ЭЛА, как правило, выполняют испытания средств защиты, жидких диэлектриков (масел).

Средства защиты должны быть в исправном техсостоянии (ИПиИСЗ), которое предполагает наличие соответствия каждой характеристики УТ, а значит отсутствие любых дефектов (УТ, выраженное словесно) не зависимо от их «веса» в части возможного влияния на результат испытания объекта. Формально процедура сравнения совокупности результатов испытаний по типам испытания Q_{xi} с УТ $Q_{ут}$ определяется по выражению определённому для качественных характеристик: $Q_{xi} \cong Q_{ут}$ соответствие; $Q_{xi} \not\cong Q_{ут}$ несоответствие.

Требование исправного техсостояния средств защиты от поражения электрическим током обуславливает необходимость сплошного метода контроля. Решающее правило, определяющее положительный результат испытания по объекту, должно выглядеть следующим образом. Сравнивая словесно представленные положительные результаты испытания по типам испытания (отсутствие дефектов у каждой контролируемой характеристики) с УТ на объект испытания также выраженное словесно делается вывод о соответствии требованиям нормативного документа и возможности эксплуатации.

Отрицательный результат испытания по объекту предполагает наличие хотя бы одного дефекта. Процедура сравнения в словесной форме выполняется таким же образом, как и в случае положительного результата. Обычным для масла является нормальное техническое состояние. Поэтому применяется выборочный метод контроля пробы масла отбираемой из объекта испытаний.

Характеристики, относящиеся к техническому осмотру, могут содержать любые виды дефектов (малозначительные, значительные, критические). В части влияния результата испытания по типам испытания на результат испытания объекта сказывается малый «вес» характеристик техосмотра по отношению к «весу» характеристик испытания в связи с трудностью отнесения дефектов к группе малозначительных или значительных дефектов. Поэтому убедительное решение этого вопроса возможно на этапе испытаний, как более значимом. Результат испытания по объекту опре-

деляется результатами испытания по типам, связанных с контролем конкретных характеристик свойств объекта испытания.

Проведение повторных испытаний. Повторные испытания должны проводиться всегда, когда результат испытаний по первому и второму каналам вызывает сомнение и (или) не установлена причина и место дефекта. Положительная особенность повторных испытаний заключается в возможности выявления дефектов относительно слабо влияющих на результат испытания по контролируемой характеристике. Более того, «чувствительность» к обнаружению дефектов такова, что дефекты могут выявляться на уровне значительных помех. Эффективность повторных испытаний обеспечивается в условиях повторяемости испытаний, то есть: проведения испытаний по одной и той же методике испытаний; одной и той же ЭЛА; одними и теми же операторами; с применением одних тех же средств испытания; в одних и тех же условиях испытания; в течение относительного короткого промежутка времени между первоначальным и повторным испытаниями.

В условиях воспроизводимости испытаний степень проявления положительных сторон повторных испытаний резко снижается до такого уровня, что применение данного канала является проблематичным. Это обусловлено тем обстоятельством, что условия воспроизводимости испытаний более жёсткие и включают в себя: проведение испытаний по одной и той же методике испытаний; разными ЭЛА; разными операторами; применение различных средств испытаний; в различных условиях испытания. Промежуток времени между первоначальным и повторным испытаниями может быть значительно больше промежутка времени, предусматриваемого условиями повторяемости испытаний.

Ещё одна положительная особенность повторных испытаний заключается в возможности проведения испытаний в более благоприятных условиях и даже в условиях стационарных ЭЛА. Тем самым отпадает необходимость введения температурных и других поправок, которые, как правило, вносят основной вклад в погрешность испытания. Поэтому значительно повышается достоверность данных испытания и достоверность результата третьего канала. Это положительно сказывается на общем результате для сложного канала соответствия.

Условия повторяемости испытаний могут реализовываться организациями, эксплуатирующими ЭЛА, прежде всего, размещённые в отапливаемых помещениях. Реализация условий повторяемости может быть затруднена климатическими факторами и режимами работы электрооборудования.

Если контроль объекта выполняется в рамках профилактики объекта на наличие дефектов, то результат испытания по характеристике считается положительным при положительности результатов по первому и второму каналам. Испытания по третьему каналу проводят в случае сомнения наличия и вида дефектов, а также места и причины их возникновения. Поэтому третий канал является решающим. Если программа испытаний предусматривает комплексное опробование, то четвертый канал, как правило, носит вспомогательный характер. Окончательно решение по сложному каналу соответствия и сомнительному предшествующему результату принимается по итогам повторных испытаний.

Если контроль объекта выполняется по полной программе испытаний, и испытание по данной характеристике является одним из типов контроля, то каждый из каналов соответствия (рис. 2) следует рассматривать, как самостоятельный канал по выявлению дефектов. В этом случае результатом испытаний является перечень и характер дефектов (временные, постоянные, устранимые, неустраняемые, малозначительные, значительные или критические), а не заключение о несоответствии установленным требованиям. Далее выявленные дефекты анализируются совместно с дефектами, обнаруженными при контроле других характеристик. Критические дефекты должны быть устранены до начала эксплуатации объекта.

Повышение качества результата испытаний. Основной характеристикой качества испытания по объекту является достоверность результата испытаний, для повышения уровня которой следует применять не только каналы соответствия простой структуры, но и усовершенствованные каналы соответствия (рис. 4).

На основании вышеизложенного следуют условия получения достоверности результата испытаний по объекту испытаний.

1. Проведение испытаний в соответствии с требованиями программы, которая должна содержать план испытаний (ПИ). Важнейшей характеристикой ПИ является перечень типов испытаний общим числом $n+m$,

определяющих объём ПИ, где n и m — число контролируемых характеристик этапов техосмотра и испытаний. Основная задача техосмотра заключается в определении критических дефектов. Вторая задача техосмотра — оценка готовности к переходу на второй этап контроля объекта — этап испытания m характеристик объекта.

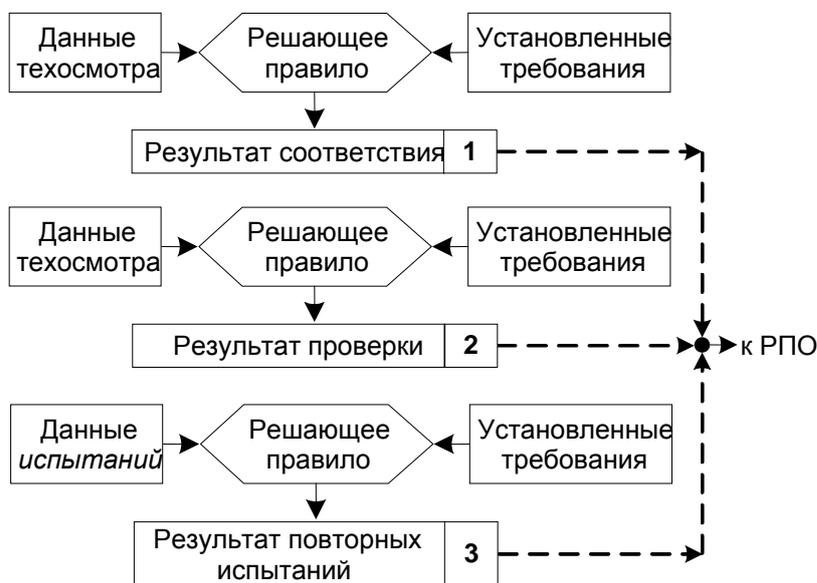


Рис. 4. Структура сложного канала соответствия:
 1 – канал соответствия; 2 – канал проверок; 3 – канал повторных испытаний; РПО – блок решающего правила по объекту испытания

2. Выбор типа каналов соответствия (простой, усовершенствованный, сложный — рис. 1–4), а также выбор типа каналов соответствия, составляющих сложный канал соответствия, зависит от значения характеристики в результате испытаний объекта. Неравномерный вклад отдельных характеристик следует из известного принципа Парето: решающий вклад (примерно 80%) вносит относительно небольшое число характеристик (20%). Поэтому наиболее влияющие характеристики должны контролироваться с помощью сложных каналов соответствия, структура которых зависит от степени неопределённости условий проведения испытаний. Слабо влияющие на результат характеристики могут контролироваться простыми каналами соответствия.

Алгоритм испытания по объекту. 1. Если объект не имеет дефектов, то, сравнивая результаты испытания по типам с установленным требованием на объект, делается вывод о соответствии объекта требованиям нормативного документа и возможности его эксплуатации. **2.** Если совокуп-

ность малозначительных или (и) значительных дефектов не превышает допустимое количество [1], то, сравнивая их, делается вывод о соответствии объекта требованиям нормативного документа и возможности его эксплуатации. **3.** Если совокупность малозначительных или (и) значительных дефектов превышает допустимое количество [1], то делается вывод о невозможности его эксплуатации. **4.** Если результат испытания вызывает сомнение, то назначают повторные испытания объекта через промежуток времени по программе испытаний.

Список литературы

1. Александров Д. С., Щербаков Е. Ф. Некоторые особенности контроля технического состояния электроустановок // Тез. докл. 45-й науч.-техн. конф. — Ульяновск : УлГТУ, 2011. — С. 20.
2. Александров Д. С., Щербаков Е. Ф. Оценка технического состояния электрооборудования // Тез. докл. 45-й науч.-техн. конф. — Ульяновск : УлГТУ, 2014. — С. 21.
3. Александров Д. С., Щербаков Е. Ф. Организация испытаний в электроустановках : монография. — Ульяновск : Издатель А. В. Качалин. — 2015. — 208 с.

Александров Дмитрий Степанович — канд. техн. наук, доцент кафедры «Электроснабжение» УлГТУ.

Сл. тел. (8-8422) 77-82-32.

Щербаков Евгений Федорович — канд. техн. наук, доцент, г. Ульяновск.
E-mail: ef1505_73@mail.ru.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ УСТРОЙСТВ

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ СУБСТАНЦИОНАЛЬНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Е. Н. Меньшов

1. В основе субстанциональной электродинамики лежат модифицированные уравнения Максвелла:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{d\mathbf{D}}{dt}; \quad (1)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{d\mathbf{B}}{dt}, \quad (2)$$

которые выведены аналитически в работах [1, 2]. Здесь \mathbf{J} плотность тока, обусловленного перемещением электрических зарядов.

В правых частях этих уравнений содержатся полные производные по времени от характеристик электромагнитного поля $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$. В математике полные производные от сложной функции $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ выражаются двумя составляющими:

$$\frac{d\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)}{dt} = \frac{\partial\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}\Big|_r + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)\Big|_t, \quad (3)$$

где $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$. При этом первая составляющая называется локальной производной, вторая — конвективной производной.

В классической механике, в гидро- и аэромеханике полная производная сложной функции называется субстанциональной производной (производной Лагранжа). Такое название обусловлено тем, что составляющие скорости $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, с которой перемещается наблюдатель, не произвольны, а принимают равными составляющим скорости частиц материи (жидкости, газа), т.е. наблюдатель перемещается вместе с потоком. Поэтому суб-

станциональная производная характеризует какие-либо свойства материи (субстанции) во времени при перемещении материальных частиц.

Для уравнений (1) и (2) понятие субстанциональной производной относится к особой форме материи — электромагнитному полю, а электромагнитные возмущения переносятся со скоростью света. В этом случае требуются более строгие формулировки конвективной составляющей полной производной (3).

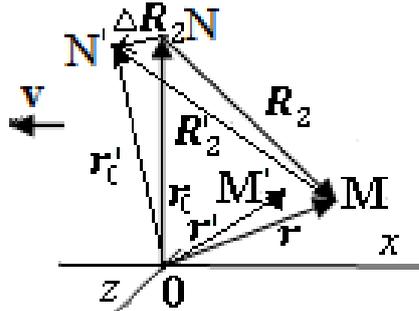


Рис. 1.

На рис. 1 в неподвижной системе координат XYZ с центром 0 фиксируется точка M. Субстанция перемещается со скоростью v . Точка M' фиксированная точка субстанции в подвижной системе координат.

Пусть в момент времени t точка M' совпадает с точкой M. За интервал времени Δt координата точки M' в неподвижной системе изменилась бы на расстояние $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$. В этом случае свойство F субстанции относительно неподвижной точки M изменилось бы на величину

$$\Delta F(\mathbf{r}, t)|_t = F(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}, t) - F(\mathbf{r}, t).$$

Раскладывая $F(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}, t)$ в многомерный ряд Тейлора, получим

$$\begin{aligned} \Delta F(\mathbf{r}, t)|_t &= F(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial F(\mathbf{r}, t)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial F(\mathbf{r}, t)}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial F(\mathbf{r}, t)}{\partial z} \Delta z + \dots - F(\mathbf{r}, t) = \\ &= \frac{\partial F(\mathbf{r}, t)}{\partial x} |_{t; \mathbf{r}} \Delta x + \frac{\partial F(\mathbf{r}, t)}{\partial y} |_{t; \mathbf{r}} \Delta y + \frac{\partial F(\mathbf{r}, t)}{\partial z} |_{t; \mathbf{r}} \Delta z + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

Отметим, что последнее выражение соответствует условию $t = const$ в точке \mathbf{r} , т.е. частные производные соответствуют положению точки M' в неподвижной точке M.

Так как субстанция перемещается со скоростью \mathbf{v} , то имеем: $\Delta x = v_x \Delta t$; $\Delta y = v_y \Delta t$; $\Delta z = v_z \Delta t$. Поделив (4) на Δt и переходя к пределу, получим

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta F(\mathbf{r}, t)|_t}{\Delta t} &= \frac{\partial F(\mathbf{r}, t)}{\partial x} |_{t; r} v_x + \frac{\partial F(\mathbf{r}, t)}{\partial y} |_{t; r} v_y + \frac{\partial F(\mathbf{r}, t)}{\partial z} |_{t; r} v_z = \\ &= (\mathbf{v} \nabla) F(\mathbf{r}, t) |_{t; r}. \end{aligned}$$

Таким образом, (3) принимает более корректный вид:

$$\frac{dF(\mathbf{r}, t)}{dt} = \frac{\partial F(\mathbf{r}, t)}{\partial t} |_r + (\mathbf{v} \nabla) F(\mathbf{r}, t) |_{t; r}. \quad (5)$$

2. Теперь определим скорость электрического поля, связанного с зарядом q , который находился в момент времени t в точке N, а за интервал времени Δt переместится на расстояние $\Delta \mathbf{R}_2 = \mathbf{r}'_c - \mathbf{r}_c$ в точку N' (рис. 1). Это же приращение $\Delta \mathbf{R}_2$ получает и вектор \mathbf{R}_2 на интервале времени Δt , который выразим через разность векторов соответствующих точек на рис. 1

$$\Delta \mathbf{R}_2 = -(\mathbf{R}'_2 - \mathbf{R}_2) = -(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'_c - (\mathbf{r} - \mathbf{r}_c)) = \mathbf{r}'_c - \mathbf{r}_c.$$

Тогда скорость перемещения точки N (заряда q) и скорость перемещения связанного с зарядом электрического поля в неподвижной точке M будет определяться одним выражением

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}'_c - \mathbf{r}_c}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}_c}{dt}.$$

Связанное с зарядом электрическое поле в [3] используется как источник волнового поля, поэтому определение скорости источника важно. Тогда как со скоростью света распространяются электромагнитные возмущения.

3. В соответствии с уравнением (1) уравнение непрерывности тока примет следующий вид

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = -\frac{d\rho}{dt}. \quad (6)$$

Проверим применимость уравнения для точечного заряда с объемной плотностью $\rho = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_c)$, который перемещается со скоростью \mathbf{v}_0 , создавая плотность тока $\mathbf{J} = q\mathbf{v}_0\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_c)$, где $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_c)$ дельта функция Дирака.

Переходя к неподвижной системе координат $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_c$ с мгновенным началом отсчета, совмещенным с зарядом, будем иметь $\rho = q\delta(\mathbf{R}) = q\delta(X)\delta(Y)\delta(Z)$ и $\mathbf{J} = q\mathbf{v}_0\delta(\mathbf{R}) = q\mathbf{v}_0\delta(X)\delta(Y)\delta(Z)$. При этом

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = q(\mathbf{v}_0 \operatorname{grad} \delta(X)\delta(Y)\delta(Z)). \quad (7)$$

Так как отсутствует явная зависимость $\rho = q\delta(\mathbf{R})$ от времени t , поэтому локальная производная будет равна

$$\left. \frac{\partial \rho(\mathbf{R})}{\partial t} \right|_{\mathbf{R}} = 0. \quad (8)$$

Учитывая $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = -\frac{d\mathbf{r}_c}{dt} = -\mathbf{v}_0$, конвективная производная примет следующий вид

$$(\mathbf{v} \operatorname{grad})\rho|_{t,r} = -q(\mathbf{v}_0 \operatorname{grad} \delta(X)\delta(Y)\delta(Z)). \quad (9)$$

Таким образом, подставляя выражения (7)–(9) в (6) с учетом (3), получим подтверждение выполнения закона непрерывности тока в форме (6).

В [1–2] показано, что из модифицированного уравнения Максвелла (2) непосредственно вытекает уравнение силы Лоренца. А в [3] получены следующие результаты субстанциональной электродинамики.

1. Показано, что модифицированные уравнения допускают решения с дискретными орбитами (энергиями) электронов в атоме водорода, строго совпадающими с решениями стационарного уравнения Шредингера.
2. Раскрыта физическая причина дискретных уровней энергии.
3. Результаты решения дают строгое классическое объяснение невозможности излучения на стационарных орбитах электрона.

Вывод: модифицированные уравнения Максвелла позволяют в рамках классической теории ЭМП решать некоторые задачи квантовой теории, поэтому они правомерны. Их применение сокращает разрыв между классической и квантовой теориями.

Список литературы

1. Меньшов Е. Н. К обоснованию уравнений Максвелла / Ульян. гос. техн. ун-т. — Ульяновск, 2012. — 8 с. — Деп. в ВИНТИ 05.11.2012, №409 — В2012.
2. Меньшов Е. Н. Скорректированные уравнения Максвелла // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей : Международ. сб. науч. тр. — Ульяновск : УлГТУ, 2012. — Вып. 10. — С. 172–178.
3. Меньшов Е. Н. Способ и результаты решения модифицированных уравнений Максвелла / ФГБУН Ульян. гос. техн. ун-т. — Ульяновск, 2017. — 11 с. — Деп. в ВИНТИ 05.06.2017, №66 — В2017.

Меньшов Евгений Николаевич — канд. техн. наук, доцент кафедры «Электроснабжение» Ульяновского государственного технического университета.
E-mail: raynd2@rambler.ru.

О ПРОПОРЦИЯХ УКЛАДКИ ЛИСТОВ МАГНИТОПРОВОДА ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ ТРАНСФОРМАТОРОВ

П. Р. Севостьянов, И. А. Шкуропат

Исследованы пропорции укладки листов магнитопровода для образования окна. Рассмотрены математические закономерности, являющиеся следствиями теоремы Пифагора и выявленные при обработке баз данных для проектирования трансформаторов. Это позволяет оптимизировать параметры силового трансформатора: для уменьшения массы стали и металла обмоток.

Investigated the proportions of stacking plates for the formation of the magnetic window. The mathematical regularities that are consequences of the Pythagorean theorem and identified in the treatment databases for the design of transformers is found. This allows to optimize the parameters of the power transformer: to reduce the weight of steel and metal of windings.

Известно соотношение сторон прямоугольного треугольника; которое определяется теоремой Пифагора ($a^2=b^2+c^2$). Из этой теоремы следует, что для получения целочисленных значений сторон прямоугольного треугольника имеются определённые пропорции (табл. 1).

В табл. 1 представлено первые 20 значений, найденных по теореме Пифагора. Нетрудно убедиться, что выполняются следующие закономерности:

$$a_n = a_{n-1} + 4k, \quad (1)$$

$$b_n = b_{n-1} + 4k, \quad (2)$$

$$c_n = c_{n-1} + 2. \quad (3)$$

Здесь k –порядковый номер в крайнем левом столбце.

Наряду с формулами (1)–(3), при построении математических моделей для 3D– и 2D–проектирования полезны следующие формулы:

$$n = \sqrt{(n-1)^2} + (2n-1), \quad (4)$$

$$(n+k)^2 = (n-k)^2 + 4nk, \quad (5)$$

также вытекающие из теоремы Пифагора.

Был проанализирован массив квадратов чисел до квадрата числа 1225. Затем в соответствии с разделом 8 книги [1] были выбраны сечения магнитопроводов трансформаторов различных габаритов.

Таблица 1. Числовые значения пропорциональных чисел по теореме Пифагора

№ п/п	a	a ²	B	b ²	c	c ²
1	5	25	4	16	3	9
2	13	169	12	144	5	25
3	25	625	24	576	7	49
4	41	1681	40	1600	9	81
5	61	3721	60	3600	11	121
6	85	7225	84	7056	13	169
7	113	12769	112	12544	15	225
8	145	21025	144	20736	17	289
9	181	32761	180	32400	19	361
10	221	48841	220	48400	21	441
11	265	70225	264	69696	23	529
12	313	97969	312	97344	25	625
13	365	133225	364	132496	27	729
14	421	177241	420	176400	29	841
15	481	231361	480	230400	31	961
16	545	297025	544	295936	33	1089
17	613	375769	612	374544	35	1225
18	685	469225	684	467856	37	1369
19	761	579121	760	577600	39	1521
20	841	707281	840	705600	41	1681

Применение даже одного пакета нестандартной ширины, выбранного из массива квадратов позволяет решить важную задачу, заключающуюся в увеличении коэффициента заполнения круга, а значит и оптимизации важных параметров силового трансформатора: уменьшению массы стали и массы металла обмоток, уменьшению стоимости активных материалов, уменьшению потерь и тока холостого хода (раздел 11.2 книги [1]).

В табл. 2 по теореме Пифагора приведены дополнительные значения квадратов, кратные результатам табл. 1.

Таблица 2. Значения квадратов, кратные результатам табл. 1

№ п/п	a	a²	b	b²	c	c²
1	5	25	4	16	3	9
2	10	100	8	64	6	36
3	13	169	12	144	5	25
4	15	225	12	144	9	81
5	17	289	15	225	8	64
6	25	625	24	576	7	49
7	26	676	24	576	10	100
8	29	841	21	441	20	400
9	30	900	24	573	18	324
10	37	1369	35	1225	12	144
11	39	1521	36	1296	15	225
12	40	1600	32	1024	24	576
13	41	1681	40	1600	9	81
14	45	2025	36	1296	27	729
15	50	2500	48	2304	14	196
16	50	2500	40	1600	30	900
17	51	2601	45	2025	24	576
18	52	2704	48	2304	20	400
19	53	2809	45	2025	28	784
20	55	3025	44	1936	33	1089

В табл. 3 приведены размеры пакета (в мм) для трансформаторов (D — диаметр стержня, в мм): 1) по П. М. Тихомирову [1] (первый столбец); 2) с нестандартным пакетом (второй столбец). Применение даже одного пакета нестандартной ширины, выбранного из массива квадратов позволяет решить важную задачу, заключающуюся в увеличении коэффициента заполнения круга, а значит и оптимизации важных параметров силового трансформатора: уменьшению массы стали и массы металла обмоток, уменьшению стоимости активных материалов, уменьшению потерь и тока холостого хода (раздел 11.2 [1]). Так, в соответствии с табл. 3 масса стали и параметры холостого хода для диаметра стержня 450 мм уменьшатся на 1,94% от их величины, для диаметра стержня 560 мм уменьшатся на 2,34% от их величины.

Таблица 3. Сравнение стандартных и нестандартных пакетов стержня магнитопровода

Ширина, А	Толщина, В	A^2	B^2	$A^2 + B^2$	$\sqrt{A^2 + B^2}$	Ширина, А	Толщина, В	$A*B, \text{мм}^2$
$D= 450, K_{\text{зап.кр.}}=0,913$						$D= 450, K_{\text{зап.кр.}}=0,930$		
440	47,25	193600	2232,563	195832,6	442,5297	440	42	18480
425	27	180625	729	181354	425,8568	425	39,96	16983
410	19	168100	361	168461	410,44	410	12	4920
385	23	148225	529	148754	385,6864	385	15,93	6133,05
368	13	135424	169	135593	368,2295	368	18	6624
350	12	122500	144	122644	350,2057	350	10	3500
325	14	105625	196	105821	325,3014	325	15	4875
310	8,05	96100	64,8025	96164,8	310,1045	310	8,05	2495,5
295	7	87025	49	87074	295,083	295	6	1770
270	10	72900	100	73000	270,1851	270	6	1620
250	7	62500	49	62549	250,098	250	10	2500
230	6	52900	36	52936	230,0782	230	6	1380
195	6	38025	36	38061	195,0923	195	10	1950
175	8,05	30625	64,8025	30689,8	175,1851	175	4,05	708,75
$D= 560, K_{\text{зап.кр.}}=0,917$						$D= 560, K_{\text{зап.кр.}}=0,934$		
540	74	291600	5476	297076	545,0468	544	33	17952
520	30,6	270400	936,36	271336,4	520,8996	520	88,02	45770,4
505	17	255025	289	255314	505,2861	505	12	6060

Ширина, А	Толщина, В	A^2	B^2	$A^2 + B^2$	$\sqrt{A^2 + B^2}$	Ширина, А	Толщина, В	$A \cdot B, \text{мм}^2$
$D= 560, K_{\text{зап.кр.}}=0,917$						$D= 560, K_{\text{зап.кр.}}=0,934$		
485	18,9	235225	357,21	235582,2	485,3681	485	18	8730
465	15,93	216225	253,7649	216478,8	465,2728	465	18	8370
440	17	193600	289	193889	440,3283	440	8,05	3542
410	18	168100	324	168424	410,3949	410	18	7380
385	12	148225	144	148369	385,187	385	6	2310
368	8,05	135424	64,8025	135488,8	368,088	368	6	2208
350	7	122500	49	122549	350,07	350	8,05	2817,5
325	10	105625	100	105725	325,1538	325	6	1950
295	10	87025	100	87125	295,1694	295	6	1770
270	7	72900	49	72949	270,0907	270	8,05	2173,5
230	10	52900	100	53000	230,2173	230	12	2760
195	7	38025	49	38074	195,1256	195	6	1170

Из курса стереометрии известно, что теорема Пифагора действует и для 3-х мерных объектов и там квадрат диагонали равен сумме квадратов, не 2-х, а 3-х катетов. Для иллюстрации были выбраны габаритные размеры движущихся электрических машин (постоянного тока и асинхронных на рис. 1).

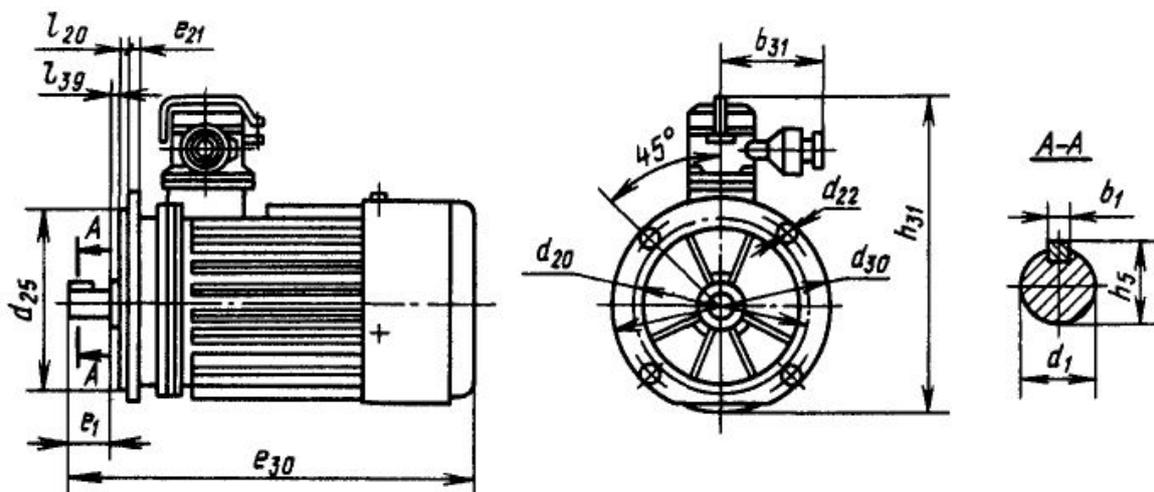


Рис. 1. Обозначение габаритных размеров движущихся электрических машин

Главным параметром геометрии этих машин является диагональ, так же подчиняющаяся теореме Пифагора. Крайний правый столбец табл. 4 показывает соотношение объёмов электрических машин разных габаритов.

Таблица 4. Габаритные размеры и диагонали движущихся электрических машин

№ п/п	d ₃₀ , мм	l ₃₀ , мм	h ₃₁ , мм	Диагональ, мм	Объём: l ₃₀ * d ₃₀ * h ₃₁	Отношение объёмов к 1-му
1	224	140	225	347	7056000	1
2	264	178	264,5	415	12429384	1,761534
3	320	210	320,5	499	21537600	3,052381
4	360	241	361	564	31320360	4,438827
5	400	267	401	626	42826800	6,069558
6	450	311	451	709	63117450	8,945217
7	500	349	501	789	87424500	12,39009
8	560	419	560	896	131398400	18,62222
9	630	457	631	1002	181671210	25,74705
10	710	560	710,5	1150	282494800	40,03611
11	800	630	800	1295	403200000	57,14286

При 3D-проектировании пропорции параметров являются также важными параметрами. В табл. 5 показаны примеры объёмов из 3-х слагаемых в натуральных числах ($a^3=b^3+c^3+d^3$).

Таблица 5. Примеры объёмов из 3-х слагаемых

№ п/п	a	a ³	b	b ³	c	c ³	d	d ³
1	6	216	5	125	4	64	3	27
2	9	729	8	512	6	216	1	1
3	12	1728	10	1000	8	512	6	216
4	19	6859	18	5832	10	1000	3	27
5	20	8000	17	4913	14	2744	7	343
6	25	15625	22	10648	17	4913	4	64
7	28	21952	21	9261	19	6859	18	5832
8	29	24389	27	19683	15	3375	11	1331
9	41	68921	33	35937	32	32768	6	216
10	41	68921	40	64000	17	4913	2	8
11	44	85184	41	68921	23	12167	16	4096

№ п/п	a	a ³	b	b ³	c	c ³	d	d ³
12	46	97336	37	50653	30	27000	27	19683
13	46	97336	37	50653	36	46656	3	27
14	53	148877	44	85184	34	39304	29	24389
15	54	157464	53	148877	19	6859	12	1728
16	58	195112	49	117649	42	74088	15	3375
17	67	300763	54	157464	51	132651	22	10648
18	69	32509	61	226981	38	54872	36	46656
19	70	343000	57	185193	54	157464	7	343
20	71	357911	70	343000	23	12167	14	2744

Выводы: Рассмотрены математические закономерности, являющиеся следствиями теоремы Пифагора и выявленные при обработке баз данных для проектирования трансформаторов. Пакеты нестандартной ширины, выбранные из массива квадратов позволяют увеличить коэффициент заполнения круга, уменьшив массы стали и металла обмоток.

Список литературы

1. Тихомиров П. М. Расчёт трансформаторов. — М. : Энергоатомиздат, 1985.

Севостьянов Павел Ростиславович — инженер-технолог, ЗАО «ГК «Электрощит» ТМ Самара».

E-mail: nuc4179@mail.ru.

Шкуропат Игорь Анатольевич — кандидат технических наук, ЗАО ГК «Электрощит» ТМ Самара», главный специалист по трансформаторам.

E-mail: IShkuropat@electroshield.ru.

ПУСКРЕГУЛИРУЮЩИЕ УСТРОЙСТВА ДЛЯ АСИНХРОННОГО ЭЛЕКТРОПРИВОДА С УЛУЧШЕННЫМИ ЭНЕРГО- ЗАТРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

С. Н. Сидоров, Я. К. Старостина

Рассмотрено устройство для плавного пуска асинхронных двигателей, позволяющее минимизировать число полупроводниковых ключей с учетом электромагнитной совместимости. Показаны пути уменьшения вольтодобавочного трансформатора путём модуляционного устранения сетевой низкочастотной составляющей напряжения в его первичной обмотке. Эффективность решения подтверждена анализом магнитного состояния сердечника трансформатора в пусковом режиме с учётом гистерезиса и последующим сравнением в Matlab/Simulink.

New construction of the device, for implementation of the smooth amplitude start-up of asynchronous engines, allowing to minimize quantity of semiconductor keys and to meet requirements to electromagnetic compatibility is considered. Ways of reduction of the booster transformer by the drive elimination of a network low frequency component of tension in its primary winding are shown. Efficiency of this decision is confirmed with the analysis of a magnetic status of the core of the transformer in the starting mode taking into account a hysteresis and the subsequent comparing of patterns of direct and smooth start-up of the asynchronous engine in the Matlab/Simulink.

Основным рабочим режимом асинхронного электропривода турбомеханизмов (вентиляторов, компрессоров, насосов и др.) служит режим длительной продолжительности включения ($PВ \geq 60\%$), причём значительное время работа происходит вхолостую при низких значениях коэффициента мощности. Данный режим не всегда обусловлен технологией, и часто объясняется уходом от влияния пусковых токов асинхронных двигателей (АД) на качество напряжения.

Переход на повторно-кратковременную работу лишь во время нагрузений увеличивает количество запусков привода в течение суток, требуя применения устройств плавного пуска в статусе обязательной части асин-

хронного привода. Однако применение пускорегулирующих устройств (ПРУ) сдерживается отсутствием простых решений. Использование устройств в виде тиристорных регуляторов переменного напряжения (ТРН) с фазовым регулированием увеличивает потребление реактивной мощности, делая форму тока статорных обмоток АД прерывистой, и величину пускового момента малой. В данной статье предлагается более простое и эффективное решение.

Использование ПРУ в установившихся режимах в качестве стабилизатора напряжения квазисинусоидальной формы. На интервалах установившейся работы использование ПРУ может быть направлено на симметрирование и поддержание постоянства напряжения питания АД. Условием сохранения высоких энергетических показателей АД является квазисинусоидальная форма тока статорных обмоток с низким содержанием высших гармоник. Добиться этого можно, если искажения подвергается не всё статорное напряжение, а лишь его часть в виде изменяемой широтно-импульсным способом вольтодобавки [1, 2].

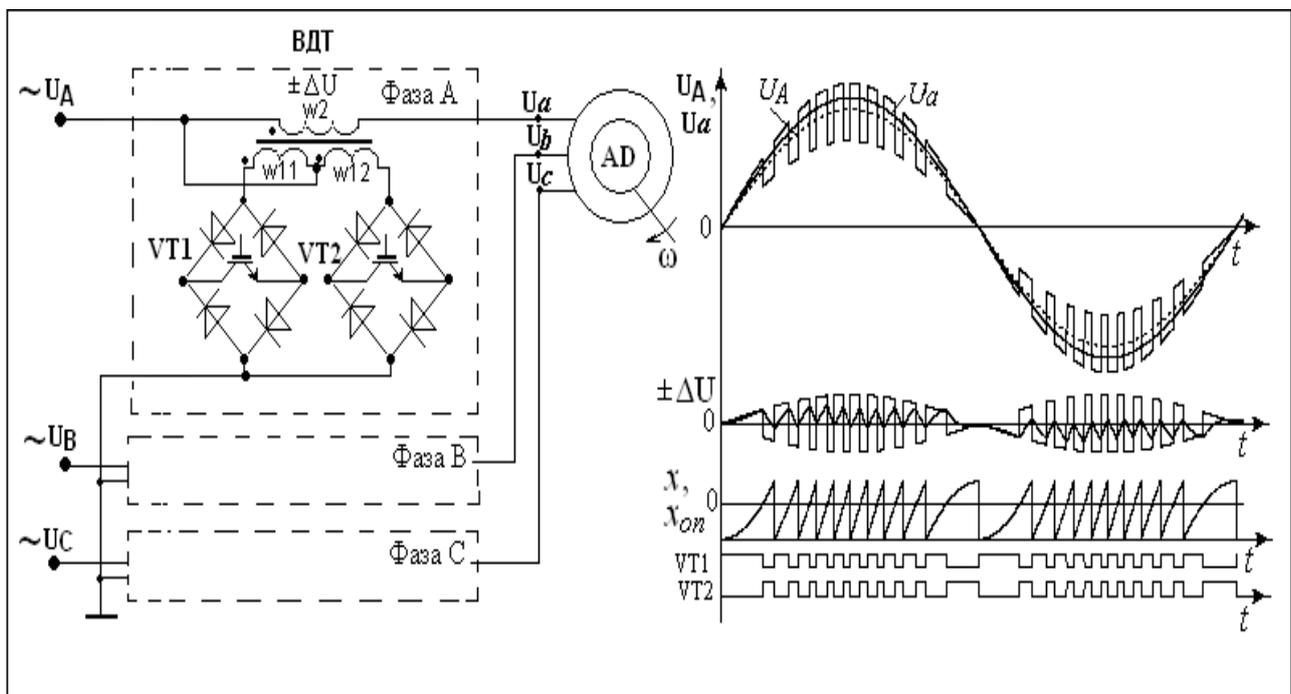


Рис. 1. Схема импульсного регулятора с вольтодобавочным трансформатором (ВДТ) и диаграммы его работы в режиме равноинтегральных переключений

Схема на рис. 1 отвечает этому принципу, обеспечивая пофазное, двухполярное высокочастотное ШИМ-регулирование напряжения во вторичной обмотке w_2 вольтодобавочного трансформатора ВДТ с помощью

двухтактного регулятора, выполненного на диодно-транзисторных модулях $VT1, VT2$, установленных в первичных полуобмотках $w11, w12$ этого трансформатора по схеме с нулевой точкой. Исходным этапом расчета данного устройства служит отыскание амплитуды вольтодобавки ΔU_m , способной скомпенсировать отклонения питающего напряжения и тока нагрузки. Необходимо гарантировать, что вносимые импульсным регулированием искажения питающего напряжения не превышают норм на качество напряжения [3, 4].

Проведённое исследование показало, что коэффициент искажения напряжения вольтодобавки при скважности импульсов 0.5 находится на приемлемом уровне $K_u = U_1/U \geq 0.95$ во всем диапазоне реальных значений частоты $f_T \geq 1$ кГц и величины вольтодобавки $\Delta U^* \leq 0.5$, при этом коэффициент несинусоидальности $K_{nc} = \sqrt{U^2 - U_1^2} / U_1$ удовлетворяет требованиям ГОСТ Р 54149–2010 $K_{nc} = \sqrt{U^2 - U_1^2} / U_{1nc} \leq 0.12$ лишь при достаточно малых амплитудах добавочного напряжения $\Delta U^* < 0.1$. Это следует учитывать при расчете коэффициента трансформации вольтодобавочного трансформатора $w_2 / w_{11} = \Delta U_m / U_m$.

Другой целью является уменьшение массогабаритных показателей вольтодобавочного трансформатора, находящихся в обратной зависимости от частоты изменений напряжения и тока первичной обмотки [3]. Недостатком варианта рис. 2,а является присутствие в этом напряжении низкочастотной сетевой огибающей. Покажем, что её влияние на форму тока можно устранить модуляционным способом. Используя метод припасовывания, получим разностное уравнение, связывающее значения тока RL -цепи, находящейся под указанным напряжением, в начале и конце n -го периода несущей частоты

$$\begin{aligned} i[n+1] &= i[n] \cdot e^{-(\Delta\Delta t_2/\tau_2 + \Delta\Delta t_1/\tau_1)} + e^{-\Delta\Delta t_2/\tau_2} \cdot \sin(\omega t_{1n} - \varphi) - \\ &\Rightarrow -e^{-(\Delta\Delta t_2/\tau_2 + \Delta\Delta t_1/\tau_1)} \cdot \sin(\omega t_n - \varphi), \end{aligned} \quad (1)$$

где $t_n = nT$, $t_{1n} = 0 \div nT + \Delta t_{1n}$ — временные границы $n=0, 1..N-1$ -го импульса напряжения, отсчитываемые с начала полуволны сетевого напряжения ($t=0$); Δt_{1n} , Δt_{2n} — длительности импульса напряжения и паузы; τ_1 , τ_2 — по-

стоянные времени цепи на указанных интервалах ; T – тактовый период несущей частоты; φ — фазовый угол нагрузки; ω – круговая частота сети.

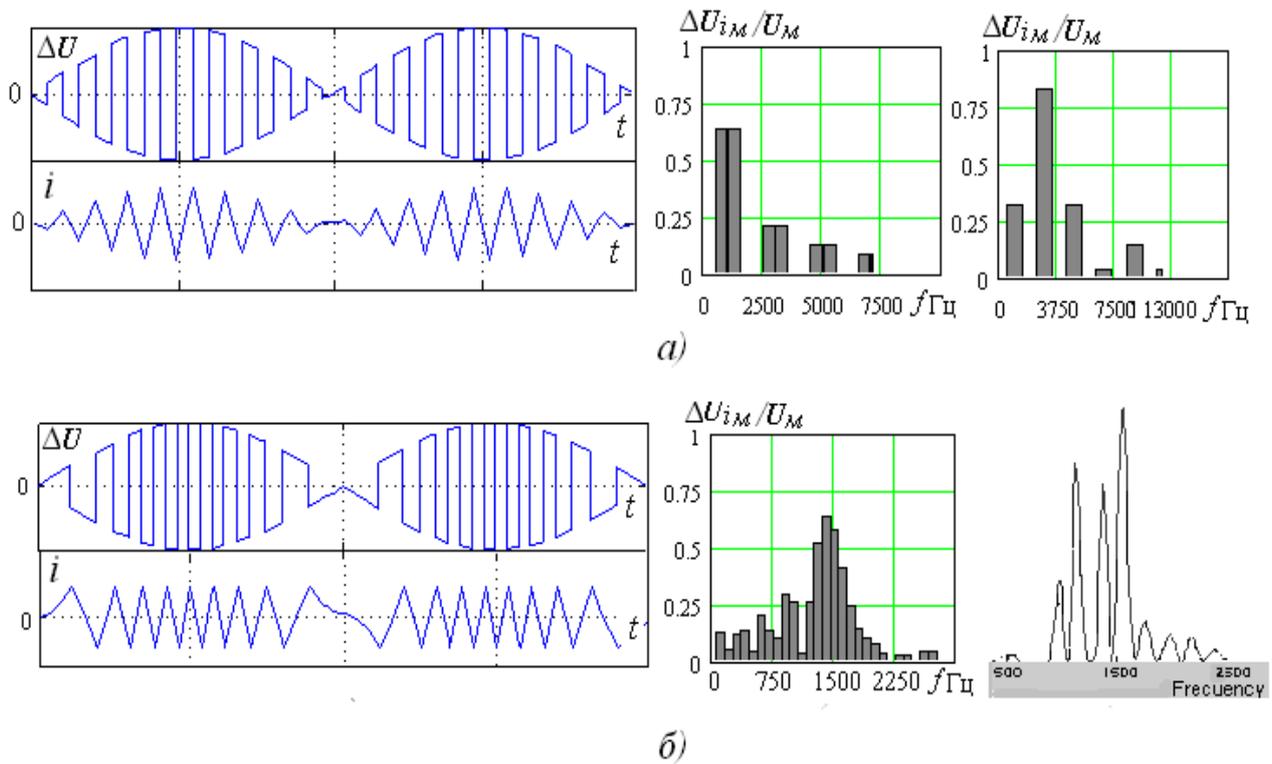


Рис. 2. Диаграммы напряжения $\Delta u(t)$, тока $i(t)$, и спектрограммы напряжения, иллюстрирующие работу ПРУ при равноинтервальных (а) и равноинтегральных (б) переключениях при четной кратности частоты модуляции и сети

Приравнивая значения тока на границах рассматриваемого промежутка времени $i[n+1] = i[n]$, получим условие, которому должны удовлетворять интервалы между переключениями, ведущие к постоянству мгновенных значений тока в установившемся режиме

$$\lim i[n] = \frac{e^{-\Delta t_{2n}/\tau_2} S_n}{1 - e^{-\Delta t_{2n}/\tau_2}}, \text{ при } \tau_1 \rightarrow \infty; \varphi \rightarrow \pi/2. \quad (2)$$

Из (2) видно, что указанное постоянство $i[n] = const$ можно обеспечить выравниванием вольт-секундных площадей импульсов, а также пауз между ними в течение всей полуволны сетевого напряжения $T_0 = \pi/\omega$:

$$S_n = \int_{\omega t_n}^{\omega t_{1n}} \sin(\omega t) dt = \cos(\omega t_n) - \cos(\omega t_{1n}) = const; \quad \Delta t_{2n} = const, \quad (3)$$

причём данные меры будут тем эффективнее, чем больше реактивная составляющая в составе полного сопротивления цепи $\tau_1 \rightarrow \infty$; $\varphi \rightarrow \pi/2$. В свою очередь, уменьшение постоянных времени в пределе $\tau_1 \rightarrow 0$, $\tau_2 \rightarrow 0$ приводит к тому, что уравнение (2) приобретает лишь один нулевой корень, что говорит об отсутствии единственного решения. Таким образом, уменьшение индуктивности цепи может превратить равенство вольт-секундных площадей импульсного напряжения из достаточного в одно из необходимых условий решения поставленной задачи.

Традиционный способ задания моментов переключений транзисторов при широтно-импульсной модуляции (ШИМ-2) состоит в отыскании моментов равенства управляющего $x(t)$ и циклически изменяющегося опорного $x_{on}(t)$ сигналов. Постоянства вольт-секундных площадей импульсов можно добиться, если формирование $x_{on}(t)$ будет осуществляться непрерывным интегрированием сетевого напряжения со сменой его знака в моменты достижения выходного сигнала интегратора порогового уровня $x_{on}(t) \geq x_{on(макс.)}$ [5–10].

Процесс возникающих равноинтегральных переключений в схеме импульсного регулятора на рис. 1 показывает, что равенство площадей импульсов достигается благодаря автоматическому изменению частоты опорного сигнала, происходящим вслед за огибающей сетевого напряжения. Это подтверждается гармоническим анализом напряжений. Частота модуляции находится в четном отношении к частоте сети $k = f / 50 = 2, 4, \dots$, состав напряжения на рис.2,а:

$$\Delta u(t, k) = h(t, k) \cdot \sin(\omega t), \quad (4)$$

где $h(t, k) = \frac{4}{\pi} \sum_{i=1,2,3..}^{\infty} \frac{1}{2i-1} \sin((2i-1)\omega kt)$ — коммутационная функция;

$\sin(\omega t)$ — сетевое напряжение в относительных единицах.

Раскрывая (4), получим

$$\Delta u(t, k) = \frac{2}{\pi} \left[\cos(k-1)\omega t - \cos(k+1)\omega t + \frac{1}{3} \cos(3k-1)\omega t - \frac{1}{3} \cos(3k+1)\omega t + \dots \right],$$

то есть напряжение состоит из комбинационных боковых гармоник нечетного порядка с частотами $((2i-1)k\pm 1)\omega$, где $i=1,2,3,..$ — порядковый номер гармоники. Амплитудные значения гармоник обратно пропорциональны среднему порядковому номеру каждой пары. При нечетном соотношении частот модуляции и сети $k=1,3,..$ в гармоническом составе этого напряжения, кроме указанных гармоник, появляются основная составляющая несущей частоты $k\omega$ и кратные ей нечетные гармоники порядка $(2i-1)k\omega$.

Отрицательное влияние сетевых пульсаций на качество выходного напряжения и тока проявляется в полной мере в виде низкочастотных изменений огибающей модулированного сигнала. Согласно теории амплитудно-импульсной модуляции (АИМ), эти изменения являются результатом попарного геометрического сложения боковых гармоник. Следовательно, попытки устранения низкочастотных пульсаций должны быть направлены на подавление гармонических пар. Участие комбинационных гармоник затрудняет использование фильтров. Как показывает моделирование (рис. 2,б), такую возможность предоставляет сочетание способов амплитудной и время-импульсной модуляции.

Проведенный с помощью пакета *SPTool (MatLab)* спектральный анализ подтвердил, что при так называемых равноинтегральных переключениях в составе напряжения $\Delta U(t)$ отсутствуют как сетевая составляющая, так и указанные гармонические пары. Как видно, наиболее низкочастотная составляющая данного спектра не превышает 10% амплитуды сетевого напряжения, поэтому высокочастотные изменения тока $i(t)$ происходят практически с неизменной амплитудой.

Анализ магнитного состояния вольтодобавочного трансформатора в режиме равноинтегральных переключений в схеме ПРУ. Изменения гармонического состава напряжения первичной обмотки вольтодобавочного трансформатора позволяют его уменьшить за счет высокой несущей частоты модуляции. Одновременно с этим можно повысить перегрузочную способность импульсного регулятора, ведь пульсирующая форма напряжения питания и прямоугольность гистерезисной петли намагничивания (ГПН) трансформаторов в импульсных схемах могут привести к выходу на участок насыщения.

В рассматриваемом режиме риск аварии минимален, так как импульсное напряжение питания изменяет индукцию в пределах

$$B_m = \frac{1}{w_1 s} \int_{nT}^{nT+\Delta t_u} U_m \sin \omega t d\omega t \leq B_s,$$

где w_1, s — количество витков первичной обмотки и площадь сечения магнитопровода. Для подтверждения этого свойства проведём анализ магнитного состояния сердечника с учетом гистерезиса. Исходные уравнения двухтактной Т-схемы замещения трансформатора [1]:

$$\begin{cases} e(t) - w_1 \frac{d\Phi}{dt} = i_1 r_1 + L_{s1} \frac{di_1}{dt}; \\ w_1 \frac{d\Phi}{dt} = i'_2 (r'_2 + r'_n) + (L'_{s2} + L'_n) \frac{di'_2}{dt}; \\ i_0 = i_1 + i'_2; \end{cases} \quad \begin{cases} w_1 \frac{d\Phi}{dt} = w_1 s \frac{dB(H)}{dt}; \\ H = \frac{w_1}{l} i_0, \end{cases} \quad (5)$$

где Φ — основной магнитный поток в сердечнике трансформатора; B — магнитная индукция; H — напряженность магнитного поля; L_{s1}, L'_{s2}, L'_n — индуктивность рассеяния первичной обмотки и приведенные значения индуктивности вторичной обмотки и нагрузки, соответственно; r_1, r'_2, r'_n — активные сопротивления указанных цепей; l — длина средней линии магнитопровода; $e(t) = h(t) \cdot \sin(\omega t)$ — напряжение питания первичных обмоток; $h(t) = \pm 1$ — коммутационная функция.

Аппроксимируем кривую намагничивания $B(t) = f(H(t))$ восходящей (при $h(t) = -1$) и нисходящей (при $h(t) = +1$) ГПН:

$$B(t) = B_s \tanh \frac{H(t) \pm H_c}{H_c} = B_s \frac{\exp\left(\frac{H(t) + h(t) \cdot H_c}{H_c}\right) - \exp\left(-\frac{H(t) + h(t) \cdot H_c}{H_c}\right)}{\exp\left(\frac{H(t) + h(t) \cdot H_c}{H_c}\right) + \exp\left(-\frac{H(t) + h(t) \cdot H_c}{H_c}\right)}, \quad (6)$$

где: H_c — коэрцитивная сила согласно техническим условиям по предельной ГПН при $B=0$.

Решим систему уравнений трансформатора в форме Коши:

$$\begin{cases} \frac{di_1}{dt} = -i_1 \left(a + \frac{bL'_{s2}f_2}{f_3} \right) - i'_2 c + i_0 \frac{L_{s1}L'_{s2}r'_2 f_2}{f_3} + h(t) \sin(\omega t) \left(\frac{1}{L_{s1} + L'_{s2}} - \frac{L'_{s2}{}^2 f}{f_3} \right); \\ \frac{di'_2}{dt} = -i_1 \left(a + \frac{bL_{s1}f_2}{f_3} \right) - i'_2 c + i_0 \frac{L_{s1}{}^2 r'_2 f_2}{f_3} + h(t) \sin(\omega t) \left(\frac{1}{L_{s1} + L'_{s2}} - \frac{L'_{s2}L_{s1}f}{f_3} \right); \\ \frac{di_0}{dt} = i_1 \frac{bf_2}{f_3} - i_0 \frac{L_{s1}r'_2 f_2}{f_3} + h(t) \sin(\omega t) \frac{L'_{s2}f_2}{f_3}, \end{cases} \quad (7)$$

где $a = \frac{r_1}{L_{s1} + L'_{s2}}$; $b = r'_2 L_{s1} - r_1 L'_{s2}$; $c = \frac{r'_2}{L_{s1} + L'_{s2}}$; $\alpha = \frac{4w_1^2 s}{H_C l}$;

$$f_3 = (L_{s1} + L'_{s2})\alpha f_1 + L_{s1}L'_{s2}f_2.$$

После подстановки $H(t) = w_1 i_0(t)/l$ и дифференцирования (6) запишем зависимость ЭДС индукции от тока намагничивания

$$E = w_1 \frac{d\Phi}{dt} = \frac{4w_1^2 s f_1}{H_C l f_2} \cdot \frac{di_0}{dt}, \quad (8)$$

где $f_1(i_0) = \exp(2((w_1 i_0(t)/H_C l) + h(t)))$; $f_2(i_0) = (1 + f_1)^2$.

Полагая, что работа регулятора происходит в режиме источника тока, зададим закон изменения напряженности в функции тока намагничивания $H(i_0)$, после чего, подставляя в (6) $B_S = B_m$, выясним с помощью (5), (6) характер изменения индукции $B(H)$ во времени. Результаты проведённых в *MathCad* расчётов представлены на рис. 3 в виде частных циклов ГПН и временного графика $B(t)$ при пуске с нулевых начальных условий.

Видно, что изменения тока намагничивания $i_0(t)$ сопровождаются «аккомодацией» петли гистерезиса, но это не приводит к выходу рабочей точки за пределы линейного участка. На графиках отсутствуют какие либо признаки насыщения в виде интервалов постоянства индукции $B(t) = const$ и соответствующего возрастания тока намагничивания $i_0(t)$. Анализ токов $i_1(i_2), i_0$ выявил способность трансформатора сохранять симметричный режим перемагничивания при изменении амплитуды напряжения сети, несимметрии двухтактной схемы замещения и др. Влияние большинства

факторов удаётся представить эквивалентной несимметрией вольт-секундных площадей напряжения питания трансформатора, которая в рассматриваемых условиях стремится к нулю.

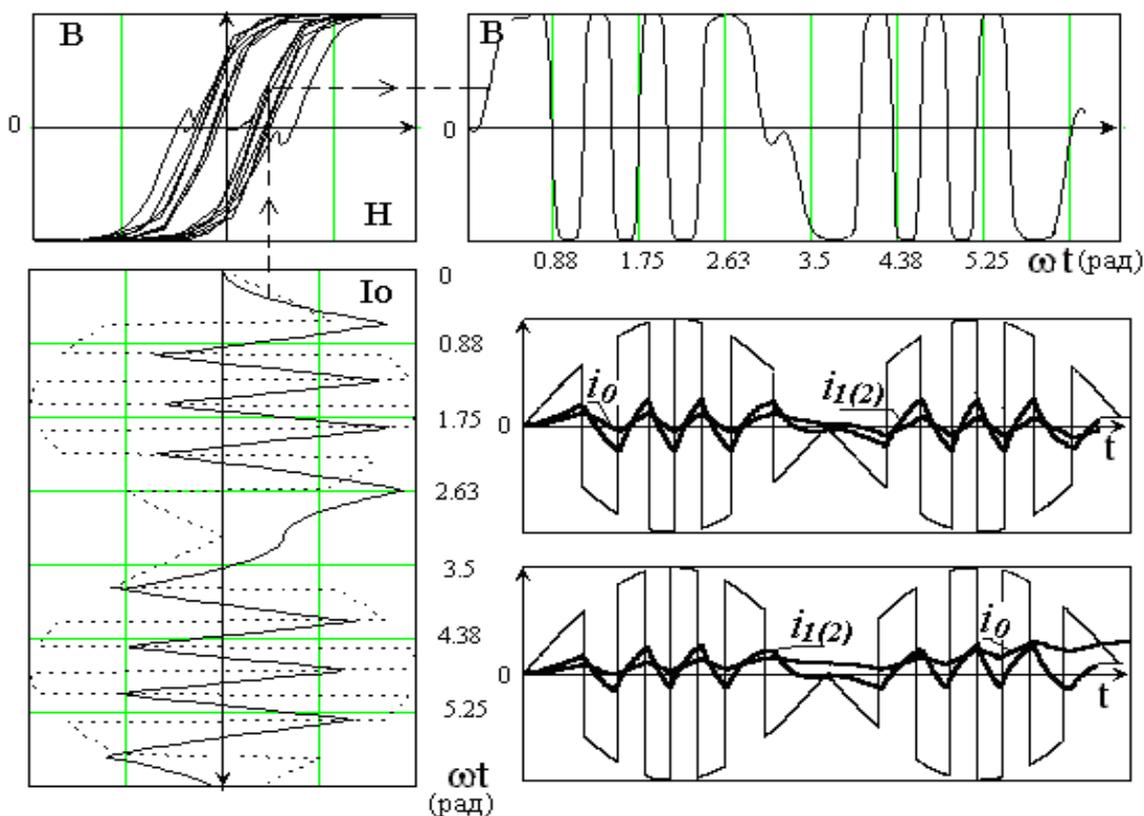


Рис. 3. К анализу магнитного состояния вольтдобавочного трансформатора в схеме ПРУ: *a* — кривая тока намагничивания $i_0(t)$ в режиме пуска на холостом ходу; *b* — семейство частных циклов кривой намагничивания $B=F(H)$; *c* — мгновенные значения индукции $B(t)$ в режиме пуска; *d* — кривые токов первичной (вторичной) обмоток $i_{1(2)}(t)$, а также тока намагничивания $i_0(t)$ в масштабе увеличения 500:1 в режиме пуска при относительной несимметрии вольт-секундных площадей 1.5%; *e* — то же в режиме относительной несимметрии 15%.

Примечание. Параметры магнитопровода: $H_c = 40$ А/м; $w_1 = 100$; $s = 4 \cdot 10^{-4}$ м²; $l = 0.125$ м; $L_{s1} = L'_{s2} = 0.2 \cdot 10^{-6}$ Гн; $r_1 = r'_2 = 7 \cdot 10^{-3}$ Ом; $r_n = 1$ Ом; $L_n = 0$.

Получено подтверждение, что известное явление «накапливания индукции» не проявляет себя до тех пор, пока несимметрия не превысит определённого порогового уровня. Этот уровень для указанных параметров магнитопровода составил 1–1,5%. Соответствующее пороговое значение несимметрии управляющих импульсов при частоте модуляции 600 Гц не менее 1–1,5 мкс. Превышение указанного порога способно привести к вы-

ходу рабочей точки на участок насыщения ГПН и, соответственно, к аварийному возрастанию токов $i_0(t)$ и $i_1(t)$ (рис. 3).

Применение малоэлементного ПРУ для ограничения пускового тока асинхронного двигателя. В пусковых режимах необходимость раздельного регулирования напряжения в фазных обмотках АД отпадает, предоставляя возможность существенного упрощения пуско-регулирующего устройства. На рис. 4 изображена схема компьютерной модели ПРУ, выполненного по минимальной структуре на одном силовом транзисторе в общей для всех фаз трансформатора цепи.

В случае соединения первичных обмоток звездой такой цепью является нулевая точка, функции которой в схеме рис. 4 выполняет единственный силовой транзистор $VT1$ на выходе диодного моста $VD1$. Видно, что коммутации транзистора в этой схеме способны привести к одновременному регулированию напряжения вольтодобавки во всех трёх статорных обмотках двигателя, причём этот процесс происходит без прерывания и заметного искажения формы токов на сетевом входе и в статорных обмотках двигателя.

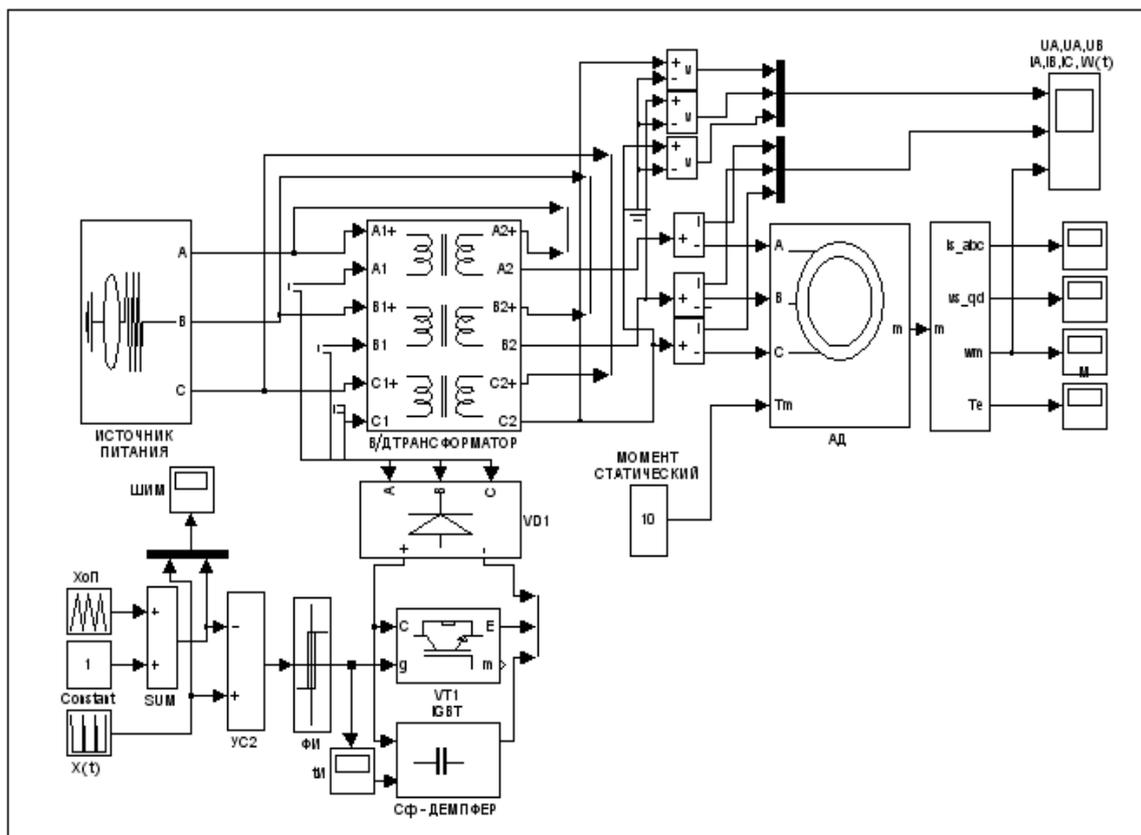


Рис. 4. Компьютерная модель малоэлементного ПРУ с квазисинусоидальной формой токов в статорных обмотках асинхронного двигателя

Для защиты от возникающих в моменты запираия VTI перенапряжений предусмотрен вывод избыточной электромагнитной энергии первичных обмоток в параллельно подключенный демпфирующий конденсатор C_{ϕ} . Результаты моделирования показали, что плавное наращивание напряжения статорных обмоток с нуля до номинального значения $U_{сн}$ обеспечивается при $\Delta U_{a(b,c)}(t) \rightarrow 0$: $U_{a(b,c)}(t) = U_{A(B,C)}(t) - \Delta U_{a(b,c)}(t) \rightarrow U_{сн}$.

Требуемый закон изменения статорного напряжения задаётся формой управляющего сигнала $x(t)$ на входе широтно-импульсного модулятора. В данном случае этот сигнал обеспечивает кратковременный всплеск с последующим монотонным возрастанием статорного напряжения по линейному закону. Процесс характеризуется плавным пуском результирующего напряжения, тока статорных обмоток и скорости вала. По сравнению с процессом прямого пуска уменьшается на 50% первоначальный бросок тока статорных обмоток $I_A(t), I_B(t), I_C(t)$ и увеличивается время нарастания скорости вала $\omega(t)$.

Выводы:

1. Предлагаемый вариант пускорегулирующего устройства на основе малоэлементного импульсного регулятора в цепях вольтодобавочного трансформатора устраняет недостатки альтернативных решений, в том числе значительное количество полупроводниковых ключей и существенные искажения питающего режима.

2. Введение в схему ПРУ вольтодобавочного трансформатора оправдывается сравнительно малой, из-за кратковременности нагружения, установленной мощностью данного элемента, а также возможностью уменьшения массогабаритных показателей за счет повышения частоты.

Список литературы

1. Розанов Ю. К. Полупроводниковые преобразователи со звеном повышенной частоты. — М. : Энергоатомиздат. 1987. — 184 с.

2. Бутырин П. А., Васьковская Т. А., Алпатов М. Е. Исследование упрощенных математических моделей трансформаторов // Электротехника, электроэнергетика, электротехническая промышленность. — 2007. — №1. — С. 10–12.

3. Нормы качества электрической энергии в системах электроснабжения общего назначения: Национальный стандарт Российской Федерации. ГОСТ Р 54149-2010. — 15 с.

4. Сидоров С. Н., Старостина Я. К. Пускорегулирующие устройства для асинхронного электропривода на диодно-транзисторных модулях. // Известия вузов. Электромеханика. — 2015. — №4. — С. 42–50.

5. Старостина Я. К., Сидоров С. Н. Малоэлементное пуско-регулирующее устройство для асинхронного электропривода в режиме минимального энергопотребления // Тр. 7-й Международ. (19-й Всеросс.) конф. по автоматизированному электроприводу (АЭП–2014). — Саранск : изд-во Мордовского университета, 2014. — С. 93–96.

6. Старостина Я. К., Сидоров С. Н. Малоэлементное пускорегулирующее устройство для турбомеханизмов. // Тр. Международной науч.-практической конф. «Современные наукоемкие инновационные технологии». — Самара, 2014.

7. Патент РФ №2294592. Устройство для плавного пуска асинхронного двигателя / Д. С. Сидоров Д. С., С. Н. Сидоров // Опубл. 27.02.2007 г.

8. Патент РФ №2110136. Способ широтно-импульсного регулирования напряжения на выходе сетевого преобразователя / С. Н. Сидоров, Ю. Л. Шикин // Бюллетень изобретений. — 1998. — №12.

9. Патент РФ №2250551. Способ прямого преобразования напряжения сетевого источника / С. Н. Сидоров // Бюллетень изобретений. — 2005. — №11.

Сидоров Сергей Николаевич — канд. техн. наук, доцент кафедры «Электропривод и автоматизация промышленных установок» Ульяновского гос. техн. университета.

Старостина Ярослава Константиновна — аспирантка кафедры «Электропривод и автоматизация промышленных установок» Ульяновского гос. техн. университета.

Тел. (8422) 89176361078.

E-mail: s.sidorovul73@mail.ru.

СТРУКТУРНЫЙ СИНТЕЗ

PROPERTIES OF NEURAL NETWORKS WITHIN THE FRAMEWORK OF THE «BLACK BOX» PRINCIPLE

E. Solovyeva

Моделирование нелинейных динамических систем на основе соотношения вход/выход рассматривается как результат решения задачи аппроксимации. Выделены два класса нелинейных моделей: функциональные ряды (многомерные полиномы) и нейронные сети. Проведено сравнение различных типов нейронных сетей. Показана важность анализа свойств нейронных сетей при выборе нелинейных моделей в заданных условиях работы систем.

The nonlinear dynamic system modeling based on the input/output relationship results from solving the approximation problem. One can distinguish two large classes: polynomials and neural networks. The different types of neural networks draw attention. The advantages and disadvantages of various neural networks are emphasized. Represented analysis is impotent since it enables to appreciate and choose a model, which is suitable for certain assigned conditions.

The behavioral models of nonlinear dynamic systems are constructed with using the sets of input and output signals as well as taking into account the information (knowledge) about these systems. Depending on the volume of a priori assigned knowledge, three levels are distinguished, namely, «white, grey and black box» [1, 2]. The less volume of the information about a dynamic system is known, the darker an investigated object is getting. The «black box» level is established in the absence of any information about a system.

Let's highlight the «black box» approach. The reasons of turning to the «black box» methodology are the following [3]: the functional complexity of dynamic systems; the high level of the system integration; lack of the

knowledge of the system parameters and characteristics; new high requirements to the parameters and characteristics of precision technique.

Some technical tasks can be formulated as problems, which are solved within the framework of the input/output relationship. Basing on the dynamic system description, the identification, modeling and synthesis can be characterized as follows.

The identification is the process of constructing a nonlinear operator (the determination of the model parameters by solving the optimization task) using the known set of input and output signals. The test input signals can be both deterministic and random ones.

The mathematical modeling is the using of the mathematical model, obtained in the identification process, for calculating nonlinear system output signals. The synthesis is the creation of hardware or software implemented device with desirable goal, for example, for compensation, filtration, detection and so on [4, 5].

The stages of the «black box» modeling are the following: forming the sets of input and output signals of a modeled object; selecting the model type and its complexity; defining the model parameters on solving the approximation task with assigned error; validating a designed model. The relationship between the input and output signal sets is described by the equation

$$y = F(y_{past}, u). \quad (1)$$

The operator F in (1) approximates the output y on the basis of the previous output observation y_{past} and the input u .

According to the «black box» approach, the unique input/output relationship is established. The property of uniqueness means that there is no situation when any input signal from the corresponding set is mapped into two or more output signals [1–3].

Turning to neural models. The development of systems with very large-scale integration and widely practiced computer art caused immense interest in neural networks and substantial progress in their investigation in recent years.

On synthesizing neural networks, the complicated matter of the knowledge representation in the network is being solved. A priori information and invariants must be taken into account in order to simplify the architecture and learn-

ing process of the network. This problem plays the special part since the proper network configuration facilitates its specialization that is very important in view of the following reasons [6, 7]: **1.** The neural network having specialized structure usually comprises less number of free parameters, which are to be adjusted than fully connected network does. Consequently, less amount of data is required for specialized network learning. Moreover, it takes less time, and such a network possesses much better generalization power. **2.** Specialized networks are characterized by more network capacity. **3.** The implementation cost of specialized neural networks decreases because their size is significantly less than that of fully connected networks.

Nowadays, there is no clear solution of the problem how to construct specialized neural networks taking into account a priori information. Nevertheless, there are many forms of neural networks already developed, among which an acceptable structure (or structures) can be selected after estimation of their advantages and drawbacks and used for solving various research problems connected with maths, physics, engineering, neurobiology, psychology. In the course of developing the neural network theory, the sciences mentioned above will raise their theoretical and applied potentialities as well [6, 7].

Approximation properties of neural network. Let's consider the basic advantages and disadvantages of various types of neural networks used as the nonlinear models of nonlinear dynamic systems.

Multi-layer perception network (MLPN). The existence of hidden layers which are not a part of the input or output of the network enables it to solve complicated problems successively extracting the most important features (statistics of high orders) from the input signal. The ability of hidden neurons to elicit the statistical relation of high orders is especially essential when the input layer dimension is sufficiently large.

The mathematical description of the network is transparent, and thus it can be expressed as an algebraic dependence. The disadvantages of the MLPN are the following: a) the high connectivity of the network (the accuracy approximation raising in one point of the network results in its impairment in another point of the network); b) the hidden neurons existence makes the network learning hard to visualization; c) the distributed nonlinearity form and the high network connectivity complicate significantly the theoretical analysis of the network.

Recurrent neural network (RNN). The existence of feedbacks in the RNN leads to the weight coefficients decrease in comparison with multi-layer networks. The disadvantage of the RNN is that, the existence of feedbacks arises the necessity of the network stability examination.

Radial-basis function network (RBFN). Due to the local character of radial activation functions, it is easy to define the dependence between the basis functions parameters and the physical location of data for learning in multidimensional space. As a result, it is rather simple to obtain satisfactory initial conditions that is why the algorithm of the network learning is simplified.

Hybrid algorithm enables to separate the stage of the parameters selection of basis functions from the stage of obtaining the network weights, and hence it accelerates the network learning.

The disadvantages of the RBFN are as follows. **1.** The difficulty of the neuron quantity choice in a hidden layer. The small quantity of neurons does not allow to decrease the approximation error to sufficient rate, on the other hand, the large quantity of them increases the computation complexity. **2.** In the process of the network learning, there can arise «descents» between individual Gaussian «bells», the branches of which overlap each other in some parts of the neural network model surface. If the distance between the «bells» centers is large and the ranges covered by branches are small, there can arise «dips» on the model surface caused by the local model nonsensitivity to the input changes.

Wavelet neural network (Wavelet NN). The orthonormalized wavelet-basis application increases the convergence rate of the network-learning algorithm. The disadvantages of the Wavelet NN are the following: a) the high sensitivity of the convergence rate of the network-learning algorithm to initial conditions; b) the difficulty of the mother wavelet selection as an activation function among the large set of wavelet functions.

Functional link artificial neural network (FLANN). The FLANN is a one-layer type that is why its learning algorithm comprises few transformations and ensures fast convergence to the approximation problem solution. The basis functions introduction aimed at lowering the condition number when the problem of approximation is being solved. The disadvantage of the FLANN is that, the approximation capabilities are less in a one-layer network than in multi-layer networks.

Polynomial perception network (PPN). This network is a one-layer type so its algorithm of learning comprises few transformations and ensures fast convergence to the approximation problem solving. The disadvantages of the PPN are as follows: a) the approximation capabilities are less in a one-layer network than in multi-layer networks; b) the use of internal multi-dimensional converter of high degree results in the high error of the network learning.

Spline neural network (Spline NN). The low degree nonlinearity in the Spline NN leads to the absence of numerical errors incident to the models of the high degree nonlinearity. The disadvantage of the Spline NN is that, the large amount of the kept network parameters.

Canonical piecewise-linear neural network (CPWLN). The general (in canonical form) piecewise-linear model use leads to the reduction of the parameters number in comparison with separate linear simulation in space domains. In case of high nonlinearity, less amount of the network parameters is required in comparison with the Volterra polynomial. The activation functions representation is suitable for implementation with digital elementary basis (continuous sigmoid functions are replaced by the linear functions combinations).

The disadvantage of the CPWLN is that, embedding absolute functions in one another generates the implicit form of functional model and, as a result, restricts the range of the nonlinear systems simulated by canonical network.

Adaptive network based fuzzy inference system (ANFIS). The compactness of the hierarchy fuzzy inference system, when there are few fuzzy rules in the hierarchy knowledge bases, enables to describe adequately the multi-dimensional input/output relation. Hybrid algorithm accelerates the process of the network learning by separating the selection of the basis functions parameters from the obtainment of the network weights.

The disadvantage of the CPWLN is that, rise in the rules number and the membership functions parameters, when the number of the model inputs is increasing, results in swift growth in the approximation problem dimension.

Example of neural network advantage over polynomial. The problem of non-Gaussian noise filter synthesis is often effectively solved within the framework of the «black box» approach. According to this approach, the mathematical filter model describes the relationship between the sets of input and output signals. The model parameters are determined by solving the approximation problem in the mean-square norm.

Nonlinear filters are synthesized on the class of bit-map (dot element) half-tone images at the resolution measured by 256 gray levels, i.e., image is the matrix of integers (elements of brightness, pixels) in the interval [0; 255]. The pixel format is unit8. The impulse noise model is assigned as «salt and pepper» [8].

Three types of nonlinear filters are considered for cancelling impulse noise from distorted images. The first type is the cascade connection of the median filter [8] and the two-layer perceptron network with hyperbolic tangent activation functions [6–8], referred to as the combined two-layer perceptron network (CTLPN). The second type is the cascade connection of the median filter and the Volterra filter [1–3], referred to as the combined Volterra filter (CVF). The third type is the median filter (MF) performed at the 3*3 square aperture [8].

The parameters of the CTLPN with five neurons in the hidden layer and the CVF of the second degree are defined on solving the approximation problem in the mean-square norm while using learning image with the size of 220*148 pixels. The length of learning sequence u in Eq. (1) amounts to 32560 samples. The filtration results (mean-square errors) obtained by synthesized devices are summarized in Table 1 under the impulse noise density equaled 0.5. «Tigers», «Building» and «Fence» are the names of learning and two test images, correspondently. All the images have the size of 220*148 pixels.

Table 1. Mean-square errors

Images	CTLPN	CVF	MF
Tigers	841	1206	2759
Building	1186	1712	3014
Fence	1800	2214	3735

One can see from Table 1, the CTLPN yields higher filtration precision than the CVF and the MF. The CTLPN and the CVF possess nearly equal complexity. The represented example illustrates the advantage of the neural network application in comparison with the polynomial model.

Conclusions. The mathematical modeling of nonlinear dynamic systems are frequently based on the input/output system relationship, which is described by means of neural networks.

The represented analysis is useful for choosing the structure of the neural network a priori (prior to its training or constructing the mathematical model of

the nonlinear system). This aspect is important, since the problem of the nonlinear system modeling is complicated in general formulation, therefore, it is significant a priori to choose the model form, which is constructive for the mathematical modeling under assigned conditions and provides the high approximation accuracy of the input/output mapping of the nonlinear system.

References

1. Ogunfunmi T. Adaptive nonlinear system identification: the Volterra and Wiener model approaches. — Berlin : Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007.
2. Janczak A. Identification of nonlinear systems using neural networks and polynomial models. A block-oriented approach. — Berlin : Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005.
3. Giri F., Bai E.-W. Block-oriented nonlinear system identification. — Berlin : Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010.
4. Solovyeva E. Nonlinear models of digital filters and their application fields // XV International Symposium «Problems of Redundancy in Information and Control Systems». — Saint-Petersburg : St.Petersburg State University of Aerospace Instrumentation. — Russia, St. Petersburg. — 2016. — P. 150–154.
5. Solovyeva E. B. Cascade structure of digital predistorter for power amplifier linearization // Radioengineering. — 2015. — Vol. 24, Issue 4. — P. 1071–1076.
6. Graupe D. Principles of artificial neural networks. Third Edition. — New York : World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2013.
7. Haykin S. Neural networks and learning machines. Third Edition. — New York : Pearson Education Inc., 2009.
8. Gonzalez R. C., Woods R. E. Digital image processing. — New York : Higher Education, 2008.

Соловьева Елена Борисовна — д-р техн. наук, профессор, зав. кафедрой ТОЭ, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет. Тел.: (812) 346-17-96, selenab@hotmail.ru .

ЕДИНЫЙ ПОДХОД К СИНТЕЗУ НЕИЗОМОРФНЫХ КОРНЕВЫХ ДЕРЕВЬЕВ⁶

В. В. Филаретов

Выделено два направления в синтезе неизоморфных корневых деревьев: при наращивании деревьев по высоте или в лексикографическом порядке. Показано, что количества производных деревьев, порождаемых при добавлении вершин, в первом случае резко возрастают, а во втором — мало отличаются. Предложен единый подход к разработке алгоритмов синтеза неизоморфных корневых деревьев, предусматривающий сравнение поддеревьев, последних по порядку в коде дерева.

Selected two areas in synthesis non-isomorphic root of the trees: when building the trees on the depth or in the lexicographical order. It is shown that the number of derived trees generated by adding vertices in the first case increase exponent and the second evenly. Proposed a unified approach to the development of algorithms for the synthesis non-isomorphic rooted trees, involving the comparison of last subtrees in the code.

Неизоморфные корневые деревья. Проблема симметрий, усложняющая или делающая невозможным общее решение задачи структурного синтеза электронных цепей, обусловлена катастрофическим порождением изоморфных (избыточных) структур [1, 2]. С заземленного (корневого) дерева обычно начинается синтез структуры путем добавления элементов [2], и не имеет смысла перебирать схемные решения, отличающиеся нумерацией узлов.

Подсчет [3] и перечисление [4–18] неизоморфных корневых деревьев относятся к классическим задачам теории графов. Дерево не имеет путей из ребер, содержит Q вершин и $N = Q - 1$ ребер. Корневым деревом называется дерево, одна из вершин которого называется корнем, имеет номер 0 и служит началом путей ко всем остальным вершинам.

⁶ Поддержано Российским Фондом Фундаментальных Исследований (РФФИ), проект №15-07-05847

Ребра корневого дерева имеют направление от корня, то есть начальная вершина ребра находится ближе к корню, чем конечная вершина. Деревья различаются по высоте (глубине), что характеризуется числом ребер или вершин до наиболее удаленной вершины.

Любой граф с помеченными вершинами можно задать списком ребер, то есть парой векторов начальных и конечных вершин. Для задания корневого дерева достаточно одного вектора, поскольку вектор конечных вершин одинаков для всех деревьев и соответствует натуральному ряду $1, 2, \dots, N$. Важно, что вектор конечных вершин не нужно хранить в памяти компьютера, так как его элементы совпадают с номерами позиций элементов вектора начальных вершин, начинающегося с 0.

Естественным является ярусное представление корневого дерева. Вершина-корень размещается одна на первом ярусе корневого дерева. Остальные вершины размещаются выше — на последующих ярусах. Путь в ребрах от корня до одной из вершин последнего яруса корневого дерева задает его высоту.

Для представления корневого дерева без рисунка и упрощения программирования обычно используется уровневый (ярусный) код, не предусматривающий нумерацию вершин [6]. По этому коду дерево восстанавливается как непомеченная структура (без номеров вершин). Например, деревья с различной нумерацией вершин на рис. 1,а и 1,б отображаются одним кодом 01212. Первая вершина в коде указывает на то, что корнем дерева является вершина с номером 1. Если принять, что корневой вершиной всегда является вершина с номером 0, а значения остальных позиций уменьшить на 1, то получим краткую запись: 0101.



Рис. 1. Задание корневого дерева с пятью вершинами генеалогическим (а) и лексикографическим (б) кодом

При разработке алгоритмов перечисления корневых деревьев были предложены коды, восстановление которых приводит к нумерации вер-

шин корневого дерева: код потомков и вектор начальных вершин. Генеалогический код [7] задает корневое дерево при нумерации вершин по путям от корня (рис. 1,а). Этот код указан на рис. 1,а. Первая позиция, несущая информацию о номере корневой вершины, удалена, и над кодом указаны новые порядковые номера позиций: 1, 2, 3 и 4.

Лексикографический код [1] (вектор начальных вершин), недавно нашедший применение [10–15, 17], предусматривает поярусную нумерацию вершин (рис. 1,б). Для получения вектора начальных вершин из ярусного кода выполняется порядковая нумерация вершин, начиная со второго яруса и заканчивая последним q -м ярусом. Вектор начальных вершин *nit* формируется итеративно — по мере добавления строк к нулевой строке или текущему вектору *nit*, содержащему поддерево, сформированное на предыдущих шагах подсоединения.

Лучше понять взаимосвязь между генеалогическим кодом [7] и лексикографически упорядоченным вектором начальных вершин позволяют следующие примеры преобразований: 1) 0123316→012205→001233; 2) 0123216→012105→001123; 3) 0123156→012045→001234.

Отечественные и зарубежные специалисты заинтересовались задачей перечисления (генерации) неизоморфных корневых деревьев почти одновременно — в конце 70-х годов прошлого века [4–6]. Однако тексты соответствующих программ были опубликованы только за рубежом [6–8]. Совершенствование алгоритмов генерации и синтеза неизоморфных корневых деревьев продолжается до сих пор [9–15], в том числе обсуждаются параллельные вычисления [17, 18].

Два направления в генерации и синтезе неизоморфных корневых деревьев. При генерации деревьев выполняется перебор комбинаций, среди которых имеются изоморфные (повторяющиеся по структуре дерева). Затем осуществляется проверка комбинаций на каноничность, то есть соответствие свойствам неизоморфных деревьев как старших (младших) представителей от подмножеств изоморфных деревьев. В случае синтеза происходит наращивание некоторого неизоморфного дерева одним ребром (добавление одной вершины) таким образом, чтобы не нарушалась каноничность производного дерева.

Существуют два направления в генерации и синтезе неизоморфных корневых деревьев: перебор деревьев с одинаковой высотой или в лекси-

кографическом порядке. В первом направлении (порядок Оттера) в основу алгоритмов положена перечисляющая формула [3]. На рис. 2 представлены 20 неизоморфных деревьев для 6 вершин. У следующих подряд деревьев с одинаковой высотой корневые вершины выделены одинаковым цветом.

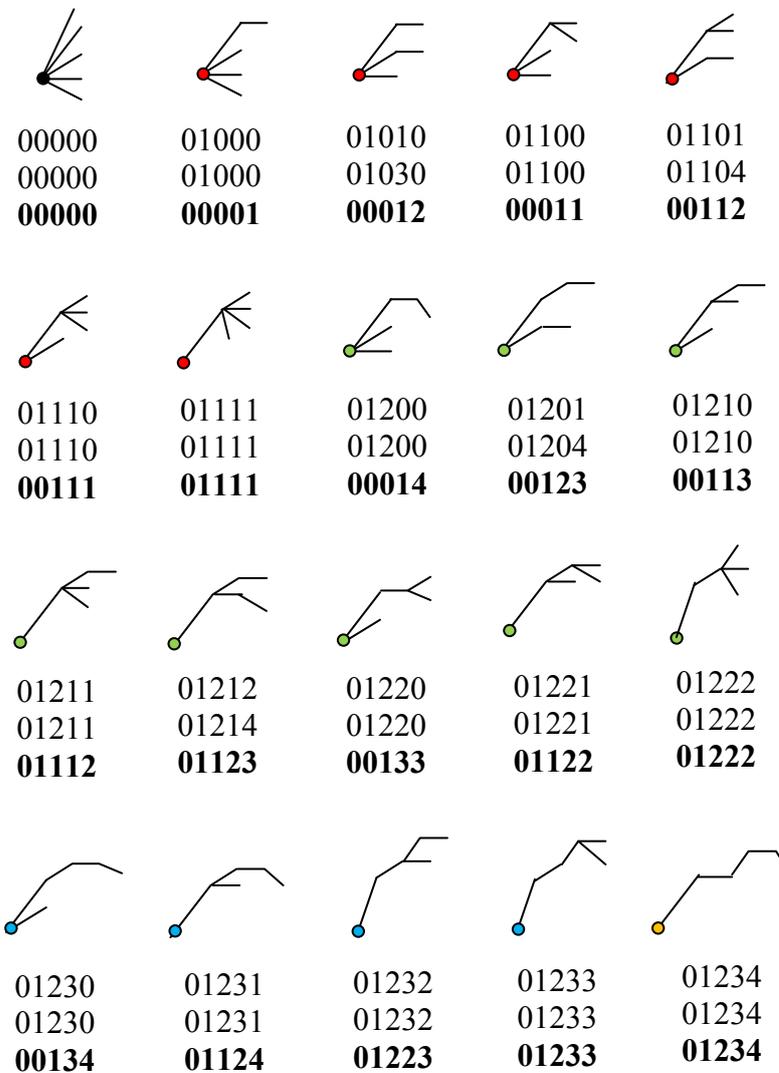


Рис. 2. Перечисление неизоморфных корневых деревьев с шестью вершинами в порядке Оттера — по высоте (ниже указаны их ярусные, генеалогические и лексикографические коды)

В [4] предлагается линейный порядок на множестве деревьев, говорится о лексикографическом упорядочении, но используется двоичный код, производный от уровнявого кода. Однако уровеньный код, как и код генеалогический, упорядочен лишь частично — на уровне поддеревьев, растущих из корневой вершины. В [4] утверждается, что в [5] «разработан

аналогичный, но использующий другую кодировку алгоритм генерации деревьев». Отечественные работы [4, 5] не содержат текстов программ, а наброски алгоритмов трудно поддаются реконструкции. Косвенно можно считать, что эти работы относятся к первому направлению перечисления неизоморфных корневых деревьев.

Алгоритмы второго направления [10–15, 17] реализуют перебор неизоморфных корневых деревьев в порядке лексикографического неубывания номеров вершин [1]. При сравнении с кодами, указанными третьей строкой (жирным шрифтом) под деревьями на рис. 2, видно, что на рис. 3 происходит уменьшение кода от дерева к дереву.

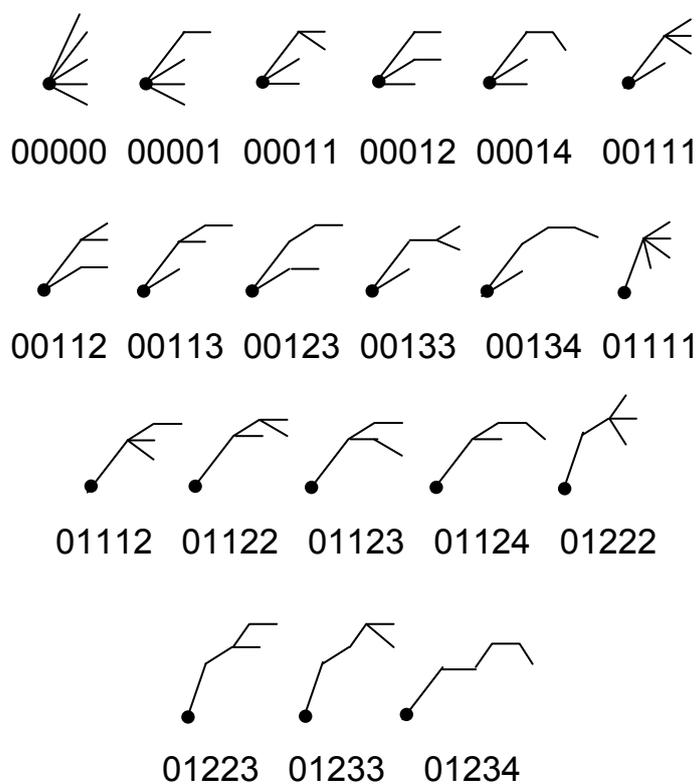


Рис. 3. Перечисление неизоморфных корневых деревьев с шестью вершинами в лексикографическом порядке

До недавнего времени (2016 г.) не велось системной разработки программ генерации и синтеза неизоморфных корневых деревьев. В зарубежных публикациях были представлены результаты только в рамках первого направления исследований [6–9, 18]. Между тем, сравнительные данные для двух обсуждаемых направлений подтверждают их принципиальные различия, в частности, при организации параллельных вычислений

(табл. 1). Единый подход к синтезу алгоритмов, относящихся к различным направлениям, заключается в использовании единственного рекурсивного вызова для каждого порождающего дерева, что позволяет начинать вычисления со списка неизоморфных корневых деревьев, имеющих различное число вершин. В табл. 1 порождение начинается со списка деревьев с 5 вершинами.

Таблица 1. Порождение 35221832 деревьев с 21 вершиной из девяти неизоморфных корневых деревьев с 5 вершинами в порядке Оттера и лексикографическом порядке

Номер дерева	Порядок Оттера		Лексикографический порядок	
	Генеалогический код	Число деревьев	Вектор начальных вершин	Число деревьев
1	0000	1	0000	4130922
2	0100	1	0001	6260800
3	0103	9	0011	8685145
4	0110	33	0012	1597578
5	0111	583	0013	1721159
6	0120	519	0111	3766831
7	0121	7492	0112	4370721
8	0122	66416	0122	2967517
9	0123	35146778	0123	1721159
Сумма деревьев		35221832		35221832

Табл. 1 показывает, что потоки деревьев, инициируемые разными деревьями в порядке Оттера (по высоте дерева) различаются очень сильно: первое дерево с 5 вершинами порождает единственное дерево с 21-й вершиной, а последнее (девятое) дерево порождает почти полное множество неизоморфных корневых деревьев с 21-й вершиной (отличается от него лишь в третьей значащей цифре). Потоки, порождаемые различными деревьями в лексикографическом порядке, напротив, изменяются в пределах старшего разряда, то есть сравнительно близки по числу деревьев

В данной статье обсуждаются оба направления, как генерации, так и синтеза неизоморфных корневых деревьев, предлагается общий подход к их синтезу.

Нахождение неизоморфных корневых деревьев на основе симметрии поддеревьев. Реконструкция алгоритмов [7] и [8] по их результату — семейству деревьев для 6 вершин [8] — привела к новому алгоритму, простому для понимания (рис. 4) и короткому по тексту программы (приложение 1).

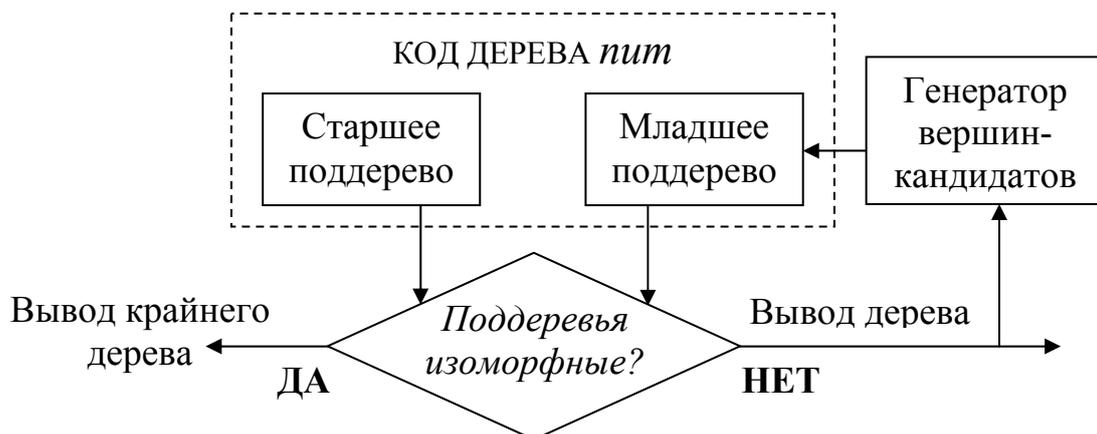


Рис. 4. Синтез неизоморфных корневых деревьев, производных от дерева *nit* с меньшим на единицу числом вершин, в порядке Оттера

В предложенной здесь реконструкции (программа *nakfi* в приложении 1) известных рекурсивных алгоритмов [7, 8] операции над графами (корневым деревом) ограничиваются формированием векторов старших вершин старшего и младшего поддеревьев (*pos1* и *pos2*). Эти векторы получаются путем спуска по корневому дереву к вершине, общей для рассматриваемых поддеревьев. *pos2* одновременно является списком допустимых вершин — кандидатов на добавление.

Далее выполняется сравнение символов (старшего и младшего поддеревьев) в векторе *nit* с сокращением списка допустимых вершин. Например, для порождающего дерева $nit = \{0122056\}$ векторы старших вершин поддеревьев $pos1 = \{0, 1, 2, 3\}$ и $pos2 = \{0, 5, 6, 7\}$. К исходному вектору *nit* будут добавляться вершины 0, 5, 6 и 7. Последовательно добавляем вершины из этого списка-кандидатов: 01220560, 01220565, 01220566. При добавлении вершины 6 выясняется, что соответствующие поддеревьям участки *nit* симметричны: Таким образом, поддеревья изоморфны, вершину 7 добавлять нельзя и комбинация 01220567 не появится как неизоморфное корневое дерево.

В случае порождающего дерева $num=\{012341676\}$ векторы старших вершин поддеревьев $pos1=\{1,2,3,5\}$ и $pos2=\{1,6,7,8\}$. К исходному вектору num будут добавляться вершины 1,6,7 и 8. Последовательно добавляем вершины из этого списка-кандидатов: 0123416760, 0123416761, 0123416766, 0123416769. Симметрия поддеревьев появляется только при добавлении последней вершины списка $pos2$, поэтому рассматриваемое дерево породит дерево для каждой вершины списка-кандидатов.

Важно, что алгоритм-реконструкция наращивания деревьев по вершине в порядке Оттера, подобно алгоритму наращивания в лексикографическом порядке (ЛГ-порядке) [12, 15], заключается в сравнении двух последних по порядку поддеревьев и требует единственного рекурсивного вызова при каждом добавлении вершины. Альтернативный алгоритм с лексикографическим порядком перечисления деревьев (программа `addnode`) предложен в [15]. Его структурная схема представлена на рис. 5.

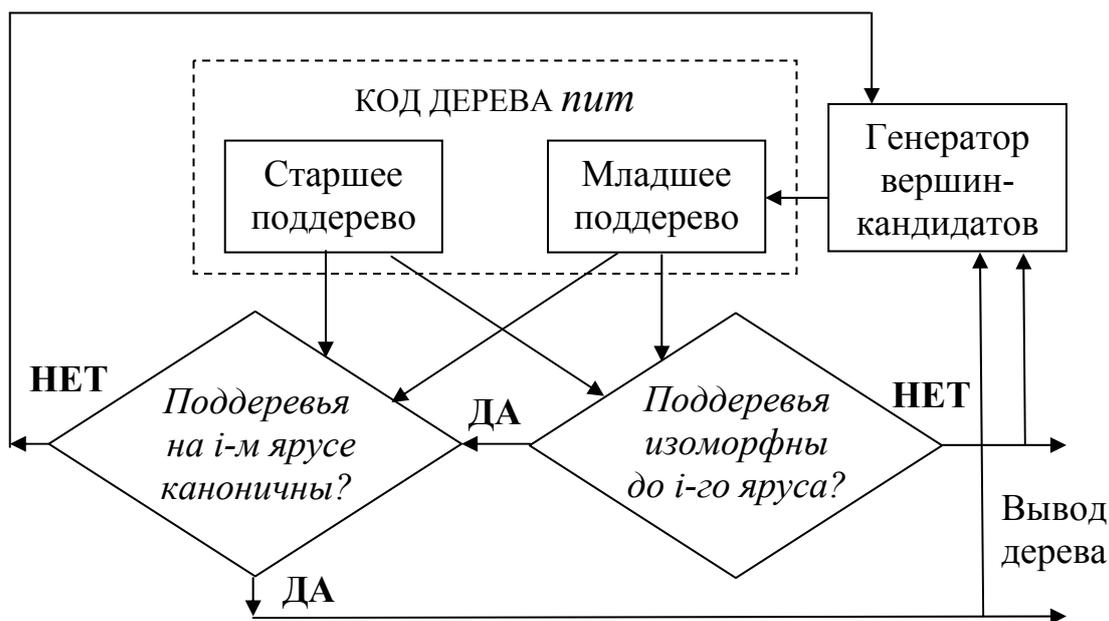


Рис. 5. Синтез неизоморфных корневых деревьев, производных от дерева num с меньшим на единицу числом вершин, в лексикографическом порядке

Если список допустимых вершин не сокращать, то число избыточных комбинаций (изоморфных деревьев) будет значительным. Для 4, 5 и 6 вершин соответственно: $5-4=1$, $14-9=5$ и $42-20=22$, что отражено в табл. 2 и табл. 3.

Табл. 2 показывает, что добавление вершин к текущему дереву обрывается, если старшее и младшее поддеревья изоморфны, и осуществляется переход к следующему дереву (рис. 4). Так происходит, например, при пяти вершинах в строке: 0111 0113//. Здесь старшее и младшее поддеревья имеют вид: 013 и 014, то есть они изоморфны, как два путевых дерева. Поэтому добавление следующей вершины 3 не допускается и изоморфное дерево 0113// пропускается (на что указывают символы «//»), выполняется переход от порождающего дерева 011 к следующему порождающему дереву 012.

Таблица 2. Рекурсивное наращивание неизоморфных корневых деревьев с 4 до 6 вершин в порядке Оттера с отбраковкой изоморфных деревьев, выделенных символами «//»

ЧИСЛО ВЕРШИН		
4	5	6
000	0000 0003//	00000 00004// 01000 01004//
002//	0100 0103 0110	01030 01033// 01034//
010	0111 0113//	01100 01104 01110 01111 01114//
011	0120 0121	01200 01204 01210 01211 01214 01220 01221
012	0122 0123	01222 01224// 01230 01231 01232 01233 01234

Порождение деревьев в лексикографическом порядке не обеспечивает столь простой отбраковки комбинаций, соответствующих изоморфным деревьям. Необходимо проверять на изоморфизм старшее и младшее поддеревья на каждом ярусе (рис. 5). При этом добавление вершин выполняется ЛГ-счетчиком и не зависит от результата добавления к некоторому дереву предыдущей вершины (табл. 3)

Проверка комбинаций на каноничность может использоваться и в генерации, и в синтезе. Например, модифицированная функция testing [12] использовалась при генерации деревьев на основе двоичных кодов [13], а также легла в основу простой рекурсивной программы синтеза неизоморфных корневых деревьев путем наращивания деревьев с тремя вершинами [14] или одного ребра [15]. Это позволило обеспечить достоверность списков неизоморфных корневых деревьев, генерируемых различными

программами и снять существующие ограничения на предельное число вершин [15].

Таблица 3. Рекурсивное наращивание неизоморфных корневых деревьев с 4 до 6 вершин в ЛГ-порядке с отбраковкой изоморфных деревьев, выделенных символами «//»

ЧИСЛО ВЕРШИН		
4	5	6
000	0000	00000 00001 00002// 00003// 00004//
001	0001 0002// 0003//	00011 00012 00013//
002//	0011 0012	00014 00022// 00023// 00024// 00033// 00034//
011	0013 0022// 0023//	00111 00112 00113 00114// 00122//
012	0111 0112 0113//	00123 00124//
	0122 0123	00133 00134 00222// 00223// 00224// 00233//
		00234// 01111 01112 01113// 01114//
		01122 01123 01124 01133// 01134//
		01222 01223 01224// 01233 01234

Табл. 4 позволяет сравнить генерацию комбинаций двух порядков перечисления корневых деревьев. Оказалось, что число комбинаций при наращивании деревьев без проверки каноничности одинаково для обоих порядков. Отмечается комбинаторный разрыв между этим числом комбинаций и количеством неизоморфных корневых деревьев. Даже многократное сокращение числа комбинаций путем их браковки в ходе генерации [12] не позволяет алгоритмам генерации конкурировать с алгоритмами синтеза, предусматривающими наращивание деревьев по вершине. Эти алгоритмы относятся к САТ-классу по сложности [7], то есть получают каждое дерево за одинаковое время.

В табл. 5 приведены затраты времени (процессор 2,4 ГГц) на синтез неизоморфных корневых деревьев с 20–23 вершинами опубликованными программы [15, 16] и программой-реконструкцией порядка Оттера по семейству деревьев (приложение 1). Как видно, в рабочем режиме — режиме вывода деревьев — эти программы показывают примерно одинаковое время.

Таблица 4. Количество комбинаций для различных порядков перечисления неизоморфных корневых деревьев и время генерации

ЧИСЛО	ЧИСЛО ВЕРШИН							
	7	8	9	13	14	15	16	17
деревьев	48	115	286	12973	32973	87811	235381	634847
комбинаций	132	429	1430	208012	742900	2674440	9694845	35357670
ВРЕМЯ в порядке Оттера, сек.	без вывода			0.02	0.03	0.13	0.44	1.64
	с выводом комбинаций			0.39	1.69	5.80	22.74	88.91
ВРЕМЯ в ЛГ-порядке, сек.	без вывода			0.00	0.01	0.01	0.09	0.36 sec.
	с выводом комбинаций			0.36	1.42	5.63	22.04	85.79

Таблица 5. Сравнение программ синтеза неизоморфных корневых деревьев по времени вычислений

Число вершин, деревьев и вид результата		Источник программы и время вычислений				
		Бейер 1980 [6]	Раскей 1999 [7]	Накано 2003 [8]	nakfi 2017 [П.1]	addnode 2016 [15]
20 вершин, 12826228 деревьев	без вывода деревьев	0.33 с	0.19 с	0.33 с	1.09 с	4.63 с
	с выводом деревьев	34.14 с	37.47 с	34.79 с	37.56 с	43.79 с
21 верши- на, 35221832 деревьев	без вывода деревьев	0.97 с	0.50 с	0.91 с	3.08 с	13.15 с
	с выводом деревьев	1 мин 42 с	1 мин 47 с	1 мин 40 с	1 мин 49 с	2 мин 3 с
22 верши- ны, 97055181 деревьев	без вывода деревьев	02.53 с	1.49 с	2.51 с	8.62 с	37.63 с
	с выводом деревьев	5 мин 2 с	5 мин 8 с	4 мин 50 с	5 мин 13 с	5 мин 55 с
23 верши- ны, 268282855 деревьев	без вывода деревьев	06.94 с	3.88 с	7.01 с	24.38 с	1 мин 48 с
	с выводом деревьев	13 мин 46 с	14 мин 51 с	13 мин 56 с	15 мин 8 с	17 мин 15 с

Сокращение списка допустимых вершин обусловлено тем, что добавление вершин к младшему поддереву после достижения симметрии соседних поддеревьев влечет нарушение каноничности. Такая возможность объясняет более короткие тексты программ, реализующих перечисление неизоморфных корневых деревьев по Оттеру [6–8]. Это обратная сторона преимущества в распределении деревьев при лексикографическом порядке (табл. 1).

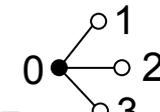
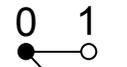
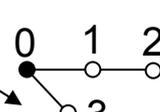
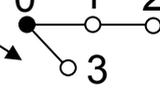
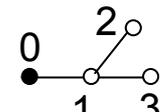
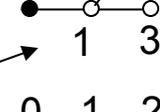
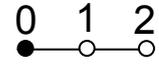
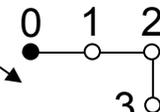
Более показательнее сравнить тексты программ `nakfi` (приложение 1) и `addnode` [15], которые имеют близкие структуры (рис. 4 и рис. 5) и реализованы одним человеком. Табл. 5 также отражает более простое перечисление по Оттеру по сравнению с лексикографическим порядком при сравнении затрат времени в режиме подсчета деревьев (без их вывода). Программа `addnode` считает неизоморфные корневые деревья с 23 вершинами (табл. 5) в 27 (!) раз медленнее программы [7] и в 4 раза дольше программы `nakfi`.

Организация параллельных вычислений. Недавно разработанные программы — `nakfi` и `addnode`, «скромные» показатели которых приведены в последних двух столбцах табл. 5, отличаются от других программ тем, что имеют один рекурсивный вызов. Этим объясняется многократное увеличение затрат времени до сокращения отрыва от программ `nakfi` и `addnode` в режиме вывода списка деревьев на дисковый файл.

Обе программы просто инициализируются указанием единственного вектора `num`. Для одного вычислительного потока указывается `num[0]=0` перед одним вызовом этих программ. Для двух вычислительных потоков указывается по два вызова программ и перед каждым вызовом приводится по два элемента `num`: `num[0]=0; num[1]=0`; или `num[0]=0; num[1]=1` и т. д. Это позволяет весьма просто организовать вычислительные потоки, число которых определяется количеством неизоморфных корневых деревьев для небольшого числа вершин, что иллюстрируют табл. 6 и табл. 7.

Организация параллельных потоков для лексикографического порядка перечисления (табл. 7) имеет решающее преимущество в распределениях порождаемых деревьев, которое обсуждалось при рассмотрении табл. 1. Это преимущество заключается в равномерности распределения потоков деревьев.

Таблица 6. Семейство деревьев до 5 вершин в порядке Оттера и организация вычислительных потоков

Номера порождающих деревьев	Количество вычислительных потоков				
	1	2	4	9	20
1	0	00	000	0000	00000
2		01	010	0100	01000
3			011	0103	01030
4			012	0110	01100
5				0111	01104
6				0120	01110
7				0121	01111
8				0122	01200
9				0123	01204
10					01210
11					01211
12					01214
13					01220
14					01221
15					01222
16					01230
17					01231
18					01232
19					01233
20					01234

Сравнение объемов потоков для различных порядков перечисления деревьев для малого числа вершин (табл. 6 и табл. 7) также демонстрирует это преимущество лексикографического порядка. Деревья, порождаемые деревом 00 с ребрами {0–1} и {0–2}, выделены в этих таблицах жирным шрифтом. Оставшиеся деревья — потомков второго дерева 01 с ребрами {0–1} и {1–2} — указаны обычным шрифтом.

Таблица 7. Семейство деревьев до 5 вершин в лексикографическом порядке и организация вычислительных потоков

Номера порождающих деревьев	Количество вычислительных потоков				
	1	2	4	9	20
1	0	00	000	0000	00000
2		01	001	0001	00001
3			011	0011	00011
4			012	0012	00012
5				0013	00014
6				0111	00111
7				0112	00112
8				0122	00113
9				0123	00123
10					00133
11					00134
12					01111
13					01112
14					01122
15					01123
16					01124
17					01222
18					01223
19					01233
20					01234

Видно, что для первого случая (табл. 6) загрузка процессоров будет неравномерной, поэтому время синтеза будет определяться продолжительностью работы процессора с максимальной загрузкой. Во втором случае (табл. 7) — при лексикографическом порядке — неважно, сколько процессоров используется: 2, 4, 9 или 20. Им будет обеспечена примерно одинаковая загрузка, и время синтеза всех деревьев будет мало отличаться от среднего времени работы процессоров [17].

Одинаковая организация параллельных вычислений (табл. 6 и табл. 7) отражает единство двух различных порядков перечисления неизоморфных корневых деревьев в структурных схемах алгоритмов (рис. 4 и рис. 5) и лишена сложностей [18] параллелизации алгоритма [6].

Выводы

1. Установлено (рис. 2 и рис. 3, табл. 2 и табл. 3), что известные алгоритмы синтеза неизоморфных корневых деревьев относятся к двум основным направлениям, отличающимся порядком перечисления деревьев: 1) при порядке Оттера (с одинаковой высотой) или 2) при лексикографическом порядке. Показано, что количества производных деревьев, порождаемых путем добавления вершин, в первом случае экспоненциально возрастают, а во втором случае распределены равномерно (табл. 1).

2. Предложен единый подход к разработке алгоритмов с одним рекурсивным вызовом для синтеза неизоморфных корневых деревьев (рис. 4 и рис. 5), предусматривающий сравнение двух поддеревьев, последних в коде дерева. Установлена тождественность числа комбинаций (включающих неизоморфные деревья — старших представителей), порождаемых добавлением вершин в порядке Оттера или в лексикографическом порядке (табл. 4). При порядке Оттера изоморфизм поддеревьев до последнего яруса требует прекращения добавления вершин — окончания синтеза (рис. 4), а при лексикографическом порядке изоморфные до некоторого яруса поддеревья сравниваются на следующем ярусе для выявления старших представителей (рис. 5).

3. Проведено сравнение программ, представляющих оба направления в синтезе неизоморфных корневых деревьев (табл. 5), для однопроцессорной реализации. Показано, что эти алгоритмы генерируют деревья за постоянное время, распределенное по всем деревьям, то есть относятся к SAT-классу [7].

4. Лексикографический подход к синтезу неизоморфных корневых деревьев, альтернативный существующему подходу, позволяет разбить задачу синтеза на сопоставимые, а не на диаметрально различающиеся — табл. 1 и табл. 6 — по сложности подзадачи-поток, что обеспечивает простую и эффективную организацию многопроцессорной обработки (табл. 7) для увеличения предельного числа вершин и многократного сокращения времени вычислений.

Приложение 1

Программа рекурсивного наращивания по вершине неизоморфных
корневых деревьев в порядке одинаковой высоты (по Оттеру [3])

```
void nakfi(int N,int *num)
{ // генеалогический код дерева с N+1 вершиной
  int i1,i2,i3,i21,k,k1,j,d=0,N1,N2,rn=0,pos1[40],pos2[40];
  // pos1 и pos2 — векторы старших вершин старшего и младшего поддеревьев
  if (N == Q) { count2 = count2 + 1.; // счетчик числа деревьев
  if (fl_1st) { // вывод дерева
    for (j = 0; j < N; j++) fprintf(file,"%d",num[j]);
    fprintf(file,"\n"); }
  else { N1=N++; N2=N1-1;
  while (d<N1) { k1=0; pos1[rn]= -1;
  for (k=N2; k>=d; k--) // получение поддеревьев pos1[rn] и pos2[rn];
  if (d==num[k]) if (!k1) {k1=k+1; pos2[rn]=k; }
  else {pos1[rn]=k; break;}
  rn++; d=k1; }
  for (k=0; k<rn; k++)
  { num[N1]=num[pos2[k]]; // добавление вершины из списка кандидатов
  nakfi(N,num); // рекурсивный вызов для дополненного num
  for (d=0; d<=k; d++) // сравнение поддеревьев pos1[rn] и pos2[rn];
  if (pos1[d]!= -1)
  {
  i1=pos1[d]; i2=pos2[d];
  i21=i2-i1; i3=N1-i2;
  if (k==d) { // сравнение участков num для поддеревьев с учетом сдвига i21
  for (j = 1; j < i21; j++)
  if (num[i1+j]+i21 != num[i2+j]) goto con1;
  }
  else { for (j = 1; j <=i3; j++)
  if (num[i1+j]+i21 != num[i2+j]) goto con;}
  return;
  con: ; }
  con1: ; }
  num[N1]=N1; // добавление последней вершины из списка
  nakfi(N,num); } }
```

Список литературы

1. Свирщёва Э. А. Структурный синтез неизоморфных систем с однородными компонентами. — Харьков, 1998. — 256 с. (2-е изд., перераб. — 2005; www.techlibrary.ru).
2. Лыпарь Ю. И. Системный синтез способов построения электронных цепей // Схемно-алгебраические модели активных электрических цепей: Синтез, анализ, диагностика : Тр. междунаrod. конф. «Континуальные алгебраические логики, исчисления и нейроинформатика в науке, технике и экономике — КЛИН-2005». — Ульяновск, 2005. — Т. 3. — С. 116–125.
1. 3. Otter R. The Number of Trees // The Annals of Mathematics. — 2nd Ser. — 1948. — Vol. 49, no. 3. — P. 583–599.
3. Диниц Е. А., Зайцев М. А. Алгоритмы генерации неизоморфных деревьев // Автоматика и телемеханика. — 1977. — Вып. 4. — С. 121–126.
4. Kozina A. V. Coding and generation of nonisomorphic trees // Plenum Publishing Corporation. — 1980. — Translated from Kibernetika. — 1979. — N5. — P. 38–43.
5. Beyer T., Hedetniemi S. M. Constant time generation of rooted trees // Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics: Computation. — 1980. — Vol. 9, no. 4. — P. 706–712.
6. Li G., Ruskey F. The advantages of forward thinking in generating rooted and free trees // ACM–SIAM symposium on Discrete algorithms. — 1999. — P. 939–940.
7. Nakano S. I., Uno T. Efficient generation of rooted trees // National Institute of Informatics: Technical Report: NII-2003-005E. — 2003 (July). — P. 1–9.
8. Ishikawa M., Yamanaka K., Otachi Y., Nakano S. I. Enumerating all rooted trees including k leaves // The Institute of Electronics, Information and Communication Engineers: Trans. Inf. & Syst. — 2012. — Vol. E95-D, no. 3 (March). — P. 763–768.
9. Филаретов В. В. Алгоритмы перечисления неизоморфных корневых деревьев на основе лексикографического упорядочения // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей : Международ. сб. науч. тр. — Ульяновск : УлГТУ, 2016. — Вып. 13. — С. 108–123.
10. Свирщёва Э. А. Симметрии и построение неизоморфных корневых деревьев // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей : Меж-

дународ. сб. науч. тр. — Ульяновск : УлГТУ, 2016. — Вып. 13. — С. 124–148.

11. Недорезов М. В., Недорезов П. В., Филаретов В. В. Алгоритм и программа генерации неизоморфных корневых деревьев на основе векторов начальных вершин // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей : Международ. сб. науч. тр. — Ульяновск : УлГТУ, 2016. — Вып. 13. — С. 149–162.

12. Недорезов П. В., Филаретов В. В. Применение двоичных кодов для генерации неизоморфных корневых деревьев // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей : Международ. сб. науч. тр. — Ульяновск : УлГТУ, 2016. — Вып. 13. — С. 163–174.

13. Недорезов П. В. Генерация неизоморфных корневых деревьев на основе двоичных кодов // МФТИ: XIX Международная конференция научно-технических работ школьников «Старт в Науку». — М. : МФТИ, 2017. — <http://abitu.net/conference/1637>.

14. Недорезов М. В., Недорезов П. В., Филаретов В. В. Алгоритм синтеза неизоморфных корневых деревьев в лексикографическом порядке // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей : Международ. сб. науч. тр. — Ульяновск : УлГТУ, 2017. — Вып. 14.

15. Власенко Д. М., Нестеров А. А. Разработка и сравнение программ для генерации неизоморфных корневых деревьев // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей : Международ. сб. науч. тр. — Ульяновск : УлГТУ, 2017. — Вып. 14.

16. Недорезов П. В., Тимофеев В. Ф., Филаретов В. В. Параллельный синтез неизоморфных корневых деревьев // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей : Международ. сб. науч. тр. — Ульяновск : УлГТУ, 2017. — Вып. 14.

17. Kubicka E. M., McKeon K. A. An application of level sequences to parallel generation of rooted trees // Combinatorial mathematics and combinatorial computing. — 2011. — N76 (Feb). — P. 33–58.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КОРНЕВЫХ ДЕРЕВЬЕВ ДЛЯ ИХ СИНТЕЗА БЕЗ ИЗОМОРФНЫХ ВАРИАНТОВ

Э. А. Свирщёва

Предложена математическая модель корневого дерева в виде свертки его путей из корня к конечным вершинам, упрощающая выявление симметрий. Разработана методика структурного синтеза неизоморфных корневых деревьев с использованием такой информации об их симметриях для последующей автоматизации.

A mathematical model of a rooted tree in the form of a convolution of its paths from the root to the terminal vertices, to simplify the detection of symmetries is proposed. The method of structural synthesis of non-isomorphic rooted trees using this information about their symmetries for later automation is developed.

Симметрии в корневых деревьях. Информация о симметриях корневых деревьев выполняет важную роль в структурном синтезе их неизоморфных вариантов [1, 2]. Знание симметрий неизоморфного дерева с p вершинами позволяет перейти от них к неизоморфным деревьям с $(p+1)$ вершинами, минуя построение их изоморфных вариантов. Однако отсутствуют эффективные средства автоматизации выявления симметрий корневых деревьев и их поддеревьев. Это препятствует практическому применению информации о симметриях в структурном синтезе.

Статья посвящена структурному синтезу неизоморфных корневых деревьев. В ней предложена новая математическая модель корневого дерева, которая максимально согласована с выбранным представлением его симметрий. Это позволяет повысить эффективность, как выявления симметрий таких деревьев для их структурного синтеза. Учитывая комбинаторный характер решаемой задачи, методика выявления симметрий корневых деревьев и их структурного синтеза представлена в форме, рассчитанной на последующую автоматизацию.

Симметрии корневого дерева здесь представлены s -классами [1, 2] — подмножествами номеров вершин корневого дерева, на которых опреде-

лены подстановки-автоморфизмы, выражающие его симметрии. Достоинство s -класса заключается в том, что им может быть компактно представлено множество подстановок-автоморфизмов дерева. Например, s -класс $(1, 2, \dots, n)$ представляет $n!$ подстановок-автоморфизмов на элементах этого s -класса. Кроме того, операции над s -классами (такие как сопоставление множеств или их элементов) удобнее для формализации, чем соответствующие операции над подстановками-автоморфизмами и их сплетениями [3].

Каноническое [4, 5] дерево T с p вершинами условимся представлять лексикографически упорядоченным в алфавите $(0, 1, 2, \dots, p)$ списком его ребер, из которых каждое представлено номерами j инцидентных ему вершин, $j = 0, 1, 2, \dots, p$,

$$\{(j'_1, j''_1), (j'_2, j''_2), \dots, (j'_i, j''_i), \dots, (j'_q, j''_q)\}, \quad (1)$$

где q — количество его ребер; i — номер ребра, $i = 1, \dots, q$, $q = p - 1$. Список (1) для компактности будем также представлять кодом из номеров начальных вершин его ребер $j'_1 j'_2 \dots j'_i \dots j'_q$ [1, 2].

Под каноничностью подразумевается невозможность сделать лексикографически старше список (1) дерева T никакими подстановками на множестве номеров его вершин. Множество канонических деревьев с p вершинами, представленных своими списками (1), упорядоченными лексикографически, упорядочено по старшинству.

Представление корневого дерева сверткой. Исходя из представления канонического дерева T списком (1), выделим в нем пути [6] от корня к конечным вершинам. Будем рассматривать каждый путь как композицию (произведение) соответствующих отображений корневой вершины, а дерево — как объединение (сумму) множества таких путей.

Пример 1. В дереве T , представленном списком (1) его ребер

$$\{(0,1),(0,2),(1,3),(1,4),(2,5),(2,6),(3,7)\},$$

будем рассматривать вершины с номерами 1 и 2, которые смежны корневой вершине, как ее образы. Аналогично вершины с номерами 3 и 4 будем рассматривать как образы вершины с номером 1, вершины с номерами 5

и 6 — как образы вершины с номером 2, вершину с номером 7 — как образ вершины с номером 3. Очевидно, что образы концевых вершин отсутствуют. Теперь представим рассмотренное дерево объединением лексикографически упорядоченных множеств его путей от корня к концевым вершинам: $(0 \circ 1 \circ 3 \circ 7, 0 \circ 1 \circ 4, 0 \circ 2 \circ 5, 0 \circ 2 \circ 6)$, где каждый путь представлен композицией отображений корневой вершины [7, 8].

В дальнейшем условимся знак композиции отображений опускать для более компактного представления дерева. Но при этом будем иметь в виду, что последовательность номеров вершин дерева, не разделенная знаками препинания, означает именно композицию отображений корневой вершины. В примере 1 компактное представление дерева будет иметь вид: $(0137, 014, 025, 026)$.

Чередую указанные композиции номеров вершин дерева с их объединением (суммированием), можно представить любое дерево через корневую вершину [2]. Преобразуем объединение путей дерева, вынося за скобки одинаковые множители в порядке их возрастания и группируя слагаемые, содержащие одинаковые количества сомножителей. Результат такого свертывания путей дерева — это еще один вариант его представления. Для краткости условимся называть сверткой такое представление дерева.

Пример 2. Свертка дерева T из примера 1:

$$0(137, 14, 25, 26) = 0(1(37, 4), 2(5, 6)).$$

В свертке отражены такие особенности структуры каждого дерева, как разбиение его на поддеревья с корневыми вершинами, номера которых вынесены за скобки. В примере 2 это вершины 0, 1, 2, в которых происходит ветвление дерева.

В свертке видны наиболее распространенные симметрии концевых вершин дерева, представленные s_1 -классами [1, 2] в виде объединенных скобками единичных элементов. В примере 2 симметрии концевых вершин дерева представлены s_1 -классом $(5, 6)$.

В табл. 1 приведены свертки канонических корневых деревьев с $p=8$ вершинами ($q=7$ ребрами). В ней s_1 -классы концевых вершин деревьев выделены красным цветом. Позже будет показано, что подобные s_1 -классы представляют основную часть симметрий корневых деревьев.

Таблица 1. Свертки канонических корневых деревьев с 8 вершинами

№	Код дерева	Пути от корневой к конечным вершинам	Свертки деревьев
	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>
1	0000000	01, 02, 03, 04, 05, 06, 07	0(1,2,3,4,5,6,7)
2	0000001	017, 02, 03, 04, 05, 06	0(17, (2,3,4,5,6))
3	0000011	016, 017, 02, 03, 04, 05	0(1(6,7), (2,3,4,5))
4	0000012	016, 027, 03, 04, 05	0((16, 27), (3,4,5))
5	0000016	0167, 02, 03, 04, 05	0(167, (2,3,4,5))
6	0000111	015, 016, 017, 02, 03, 04	0(1(5,6,7), (2,3,4))
7	0000112	015, 016, 027, 03, 04	0(1(5,6), 27, (3,4))
8	0000115	0157, 016, 02, 03, 04	0(157, 16, (2,3,4))
9	0000123	015, 026, 037, 04	0((15, 26, 37), 4)
10	0000125	0157, 026, 03, 04	0(157, 26, (3,4))
11	0000155	0156, 0157, 02, 04,03	0(15(6,7), (2,3,4))
12	0000156	01567, 02, 03, 04	0(1567, (2,3,4))
13	0001111	014, 015, 016, 017, 02, 03	0(1(4,5,6,7), (2,3))
14	0001112	014, 015, 016, 027, 03	0(1(4,5,6), 27, 3)
15	0001114	0147, 015, 016, 02, 03	0(147, 1(5,6), (2,3))
16	0001122	014, 015, 026, 027, 03	0(1(4,5), 2(6,7), 3)
17	0001123	014, 015, 026, 037	0(1(4,5), (26,37))
18	0001124	0147, 015, 026, 03	0(147, (15, 26), 3)
19	0001126	014, 015, 0267, (0,3)	0(1(4,5),267,3)
20	0001144	0146, 0147, 015, 02, 03	0(14(6,7), (2,3),15)
21	0001145	0146, 0157, 02, 03	0(1(46,57), (2,3))
22	0001146	01467, 015, 02, 03	0(1467, 15, (2,3))
23	0001234	0147, 025, 036	0(147, (25,36))
24	0001244	0146, 0147, 025, 03	0(14(6,7), 25, 3)
25	0001245	0146, 0257, 03	0(146, 257)
26	0001246	01467, 025, 03	0(1467, 25, 3)
27	0001444	0145, 0146, 0147, 02, 03	0(14(5,6,7), (2,3))
28	0001445	01457, 0146, 02, 03	0(1457, 145, (2,3))
29	0001455	01456, 01457, 02, 03	0(145 (6,7), (2,3))
30	0001456	014567, 02, 03	0(14567, (2,3))

	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>
31	0011111	013, 014, 015, 016, 017, 02	0(1(3,4,5,6,7), 2)
32	0011112	013, 014, 015, 016, 027	0(1(3,4,5,6), 27)
33	0011113	0137, 014, 015, 016, 02	0(137, 1(4,5,6), 2)
34	0011122	013, 014, 015, 026, 027	0(1(3,4,5), 2(6,7))
35	0011123	0137, 014, 015, 026	0(137, 1(4,5), 26)
36	0011126	013, 014, 015, 0267	0(1(3,4,5), 267)
37	0011133	0136, 0137, 014, 015, 02	0(13(6,7), 1(4,5))
38	0011134	0136, 0147, 015, 02	0(1(36,47), 15, 2)
39	0011136	01367, 014, 015, 02	0(1367, 1(4,5), 2)
40	0011223	0137, 014, 025, 026	0(137, 14, 2(5,6))
41	0011233	0136, 0137, 014, 025	0(13(6,7),(14, 25))
42	0011234	0136, 0147, 025	0(1(36,47), 25)
43	0011235	0136, 014, 0257	0((136,257), 14)
44	0011236	01367, 014, 025	0(1367, (14, 25))
45	0011255	013, 014, 0256, 0257	0(1(3,4), 25(6,7))
46	0011256	013, 014, 02567	0(1(3,4), 2567)
47	0011333	0135, 0136, 0137, 014, 02	0(13(5,6,7), 14, 2)
48	0011334	0135, 136, 0147	0(13(5,6), 147, 2)
49	0011335	01357, 0136, 014, 02	0(1357, 136, 14, 2)
50	0011345	01357, 0146, 02	0(1357, 146, 2)
51	0011355	01356, 01357, 014	0(135(6,7), 14, 2)
52	0011356	013567, 014,02	0(13567, 14,2)
53	0012333	0135, 0136, 0137	0(13(5,6,7), 24)
54	0012334	0135, 0136, 0247	0(13(5,6), 247)
55	0012335	01357,0136, 024	0(1357, 136, 24)
56	0012345	01357, 0246	0(1357, 246)
57	0012355	01356, 01357	0(135(6,7), 24)
58	0012356	013567, 024	0(13567, 24)
59	0013333	0134, 0135, 0136, 0137	0(13 (4,5,6,7), 2)
60	0013334	01347, 0135, 0136, 02	0(1347, 13(5,6), 2)
61	0013344	01346, 01347, 0135, 02	0(134(6,7), 135, 2)
62	0013345	01346, 01357, 02	0(13(46, 57), 2)
63	0013346	013467, 0135, 02	0(13467, 135, 2)

	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>
64	0013444	01345, 01346, 01347, 02	0(134(5,6,7), 2)
65	0013445	013457, 01346, 02	0(13457, 1346, 2)
66	0013455	013456, 013457, 02	0(1345(6,7), 2)
67	0013456	0134567, 02	0(134567, 2)

По свертке можно определить и более сложные симметрии корневого дерева, если учесть следующее очевидное.

Утверждение. *Симметричность s_1 -классов концевых вершин корневого дерева T возможна, если и только если они состоят из концевых вершин симметричных поддеревьев этого дерева.*

Действительно, нет другого способа менять местами s_1 -классы концевых вершин дерева, кроме перестановки их вместе с перестановкой соответствующих симметричных поддеревьев. Только в этом случае структура дерева остается неизменной.

Определение симметрий корневого дерева по его свертке. В свертке корневого дерева его симметричные поддеревья представлены ее частями с повторяющимися операциями над номерами вершин дерева, хотя номера вершин в этих частях различаются.

Следовательно, для проверки симметричности деревьев (поддеревьев) необходимо сопоставить последовательности операций над номерами их вершин. Именно в чередовании операций содержится информация о структуре дерева. Изменение номеров вершин дерева не меняет его структуры.

Условимся представлять структуру каждого из сравниваемых поддеревьев корневого дерева последовательностью знаков, которые обозначают порядок операций над его вершинами, подразумевая, что знак относится к номеру вершины, который ему предшествует. Назовем списком операций свертку, из которой исключены номера ее вершин.

Например, s_1 -класс (3,5,7), элементы которого смежны общей корневой вершине, представим списком операций ,, , а вместе с корневой вершиной — списком операций (,,) . Симметричные s_1 -классы (3,4,5) и (7,8,9), вместе с со смежной общей корневой вершиной, представим как ((,,),(,,)) .

Проверка симметричности деревьев (поддеревьев) с общей корневой вершиной таким способом сводится к сопоставлению списков операций над номерами их вершин. Если списки совпадают, соответствующие поддерева симметричны, иначе — не симметричны. Подобные списки операций корневых деревьев и поддеревьев в качестве носителей информации об их структуре помогают решать различные задачи на выявление симметрий. В том числе они позволяют определить полный список симметрий каждого дерева.

Пример 2. Пусть требуется проверить, симметричны ли поддерева дерева №16 из табл. 1 с корневыми вершинами 1 и 2.

Исходим из свертки этого дерева: $0(1(4,5), 2(6,7), 3)$.

Список операций над его деревом с корневой вершиной 0 в свертке — это $((,),(,))$. В нем совпадают его части $(,)$, которые являются списками операций над поддеревьями, исходящими из вершин 1 и 2. Следовательно, эти поддерева симметричны. Поэтому s_1 -классы $(4,5)$ и $(6,7)$ симметричны, так как они состоят из концевых вершин симметричных поддеревьев этого дерева.

Пример 3. Пусть требуется определить все симметрии дерева на рис. 1,а, представив их s -классами. Определим его свертку

$$(013, 014, 025, 026) = 0(1(3,4), 2(5,6)).$$

По свертке определяем s_1 -классы концевых вершин дерева на рис. 1,а, как было показано в примере 2, т.е. с помощью списка операций $(,),(,)$ над его поддеревьями с корневыми вершинами 1 и 2: $(3,4), (5,6)$.

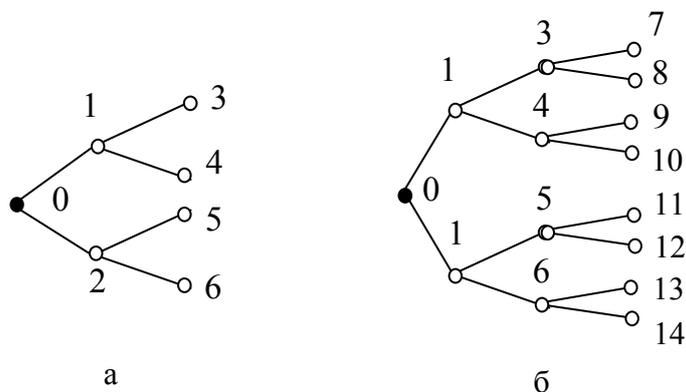


Рис.1. Примеры корневых деревьев с 6-й (а) и с 14-й (б) вершинами

Также из свертки определяем список операций $((,), (,))$ над деревом с общей вершиной 0. Общей вершине соответствует общий s_3 -класс $(1,2)$, объединяющий корневые вершины симметричных поддеревьев с корневыми вершинами 1 и 2 [1]. Подстановка на множестве вершин s_3 -класса обеспечивает перестановку поддеревьев, к которой дерево с вершиной 0 инвариантно.

Симметричное преобразование дерева, не меняющее его структуру, может быть представлено одним s_3 -классом и двумя s_1 -классами:

$$(1,2)((3,4),(5,6)).$$

Таким образом, полный список s -классов дерева на рис. 1,а

$$(3,4), (5,6), (1,2)((3,4),(5,6)).$$

Пример 4. Определим симметрии дерева, приведенного на рис. 1,б. Для этого находим его свертку:

$$\begin{aligned} &0137, 0138, 0149, 014\underline{10}, 025\underline{11}, 025\underline{12}, 026\underline{13}, 027\underline{14} = \\ &= 0(1(3(7,8),4(9,10)), 2(5(\underline{11},\underline{12}), 6(\underline{13},\underline{14}))). \end{aligned}$$

(Подчеркиванием здесь и далее выделены двузначные номера вершин.)

По свертке наиболее просто определяются s_1 -классы концевых вершин дерева в виде множеств во внутренних круглых скобках

$$(7,8), (9,10), (\underline{11},\underline{12}), (\underline{13},\underline{14})$$

и корневые вершины его поддеревьев 3,4,5,6.

Из свертки определяем список операций $((,), (,)), ((,), (,))$ над деревом с корневой вершиной 0. Из него видно, что симметричны поддерева с корневыми вершинами 1 и 2, т. к. повторяются списки операций над ними $((,), (,))$. Совпадают также списки операций $(,)$ над поддеревьями с корневыми вершинами 3 и 4, как и с корневыми вершинами 5 и 6. Следовательно, s_1 -класс $(7,8)$ симметричен s_1 -классу $(9,10)$, а s_1 -класс $(\underline{11},\underline{12})$ симметричен s_1 -классу $(\underline{13},\underline{14})$.

Таким образом, из свертки находим полный список симметрий дерева на рис. 1,б: симметрии всего дерева с корневой вершиной 0

$$(1,2)((3,4)((7,8), (9,10)),(5,6)((11,12), (13,14))),$$

представленные s_3 -классами (1,2), (3,4), (5,6) и парами симметричных s_1 -классов (7,8), (9,10) и (11,12), (13,14); симметрии его поддеревьев с корневыми вершинами 1 и 2,

$$(3,4)((7,8), (9,10)), (5,6)((11,12), (13,14)),$$

представленные s_3 -классами (3,4) и (5,6) и s_1 -классами концевых вершин, которые симметричны между собой, т.е. (7,8) с (9,10) и (11,12) с (13,14) соответственно; симметрии его концевых вершин, перечисленные выше.

Другие типы симметрий и определение их по свертке. Для выявления других типов симметрий корневых деревьев проследим, как они образуются.

Есть только две базовые конструкции, которые встречаются в любых корневых деревьях с p вершинами: это «ромашка» и «плеть», показанные на рис. 2,а и 2,б соответственно. Известно, что такой базовой конструкции, как цикл, в корневых деревьях не бывает.

В ряду канонических деревьев с p вершинами, упорядоченных по старшинству, как показано в табл. 1, самое старшее дерево представляет собой ромашку, приведенную на рис. 2,а, а самое младшее дерево — плеть (дерево без ветвлений), приведенную на рис. 2,б.

Из свертки дерева-ромашки, приведенной на рис. 2,а,

$$T = 0 (1,2,\dots, p - 1) \tag{2}$$

видно, что вершины, которые являются образами корня с номером 0, образуют объединение, выделенное скобками. Они составляют s_1 -класс. Дерево-плеть на рис. 2,б может быть записано как композиция:

$$T = 0 1 2 \dots (p - 1), \tag{3}$$

где 1 — образ корневой вершины 0, 2 — образ вершины 1 и т. д.

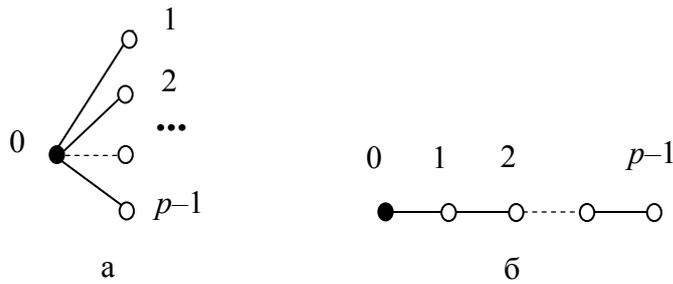


Рис. 2. Дерево-ромашка (а) и дерево-плеть (б)

Корневые деревья, приведенные на рис. 2, характеризуются противоположными состояниями их симметрий. Дереву-ромашке с p вершинами присуще максимально возможное количество $(p-1)!$ симметрий. Эти симметрии компактно представлены s_1 -классом

$$s_1 = (1, 2, \dots, p-1). \quad (4)$$

У дерева-плети симметрии отсутствуют.

Канонические деревья с p вершинами, за исключением самого старшего и самого младшего вариантов, образованы переплетением фрагментов двух базовых конструкций, приведенных на рис. 2. Этим переплетением определяется все многообразие неизоморфных корневых деревьев. Симметрии этих деревьев зависят от типов фрагментов, входящих в их состав, и способов соединения этих фрагментов между собой.

Признаком ромашки в свертке являются единичные элементы (т. е. содержащие по одному сомножителю), объединенные скобками, но разделенные запятыми внутри скобок, и общий множитель перед скобками.

Из табл. 1 видно, что фрагмент в виде ромашки и соответствующие s_1 -классы в свертках корневых деревьев с 8 вершинами встречается наиболее часто. Он отличается от приведенного на рис. 2,а количеством вершин, которое не достигает значения $(p-1)$, и номером вершины перед скобками. Эти два показателя являются параметрами такого фрагмента, определяющими отличия его свертки от свертки (2) количеством номеров вершин в скобках и номером вершины перед скобками. Это видно на примерах неизоморфных деревьев, приведенных в табл. 1.

Признак наличия в дереве фрагментов в виде отрезков плетей — это присутствие в свертке композиций с одинаковым числом сомножителей,

превышающем единицу. Количество l сомножителей в композиции определяется длиной отрезка плети, равной количеству его вершин в дереве. Объединение k слагаемых с l сомножителями в свертке определяется количеством симметричных отрезков длиной l в дереве.

Пример 5. На рис. 3,а показано поддерево, состоящее из ромашки и трех плетей. Определим его свертку:

$$(014, 025, 036) = 0(14, 25, 36).$$

Из свертки видно, что дерево содержит $k = 3$ симметричных отрезка плетей длиной $l=2$, так как в ней имеется объединение из $k=3$ слагаемых, из которых каждое является композицией из $l = 2$ сомножителей.

Симметрии деревьев с фрагментами в виде отрезков плетей. Рассмотрим особенности симметрий дерева и их определение с помощью свертки при наличии в нем отрезков плетей.

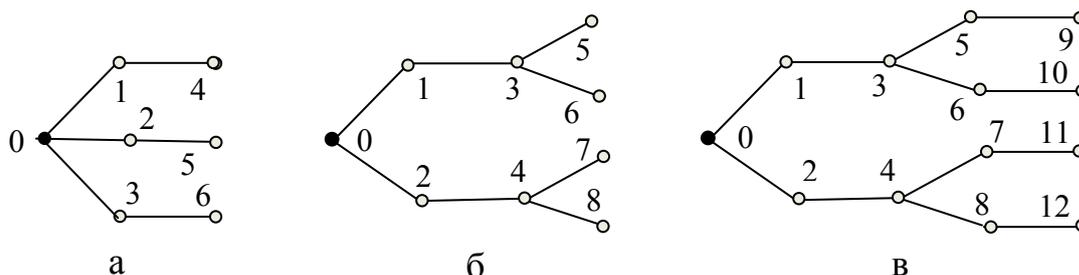


Рис. 3. Примеры корневых деревьев с поддеревьями в виде ромашек и отрезков плетей с 6-й (а), 8-й (б) и 12-й (в) вершинами.

Для представления подстановки-автоморфизма, под действием которой меняются местами симметричные отрезки плетей дерева, используем s_2 -класс [1], который объединяет в себе l s_1 -классов. Все k элементов каждого s_1 -класса принадлежат общему ярусу дерева. Под действием подстановки-автоморфизма элементы каждого s_1 -класса меняются местами одновременно. Поэтому подстановки на элементах таких s_1 -классов являются взаимозависимыми. Например, перестановку отрезков плетей в дереве рис. 3,а представляет s_2 -класс: $(1,2,3) \cup (4,5,6)$.

На элементах с одинаковыми порядковыми номерами каждого из s_1 -классов, которые входят в состав s_2 -класса, определены $k!$ подстановок-автоморфизмов, действующих одновременно на их элементах.

Например, действием подстановки-автоморфизма (13)(46) меняются местами верхняя и нижняя плети поддерева на рис. 3,а. Общее количество подстановок-автоморфизмов, меняющих местами отрезки плетей на этом рисунке равно $3!$.

Для определения симметрий по свертке дерева необходимо выделить в ней слагаемые с одинаковым числом сомножителей. В табл. 1 свертки с такими слагаемыми находим у деревьев с номерами 4, 9, 17, 18, 21, 23, 25, 38, 41, 42, 43, 44, 62. Из [2] следует, что на этом этапе необходимым условием симметричности вершин каждого яруса является совпадение их полустепеней исхода, которые определяются как количества исходящих ребер из этих вершин.

Результаты проверки полустепеней исхода для перечисленных деревьев приведены во втором столбце табл. 2. Видно, что это условие не выполняется для деревьев с номерами 18, 41, 43.

Особенность списка операций над деревьями, которые содержат отрезки плетей, заключается в том, что он дополняется еще одной операцией над номерами вершин. Это умножение (композиция). Условимся эту операцию обозначать точкой в списке операций над вершинами дерева или поддерева. В остальном составление списков операций над вершинами деревьев с отрезками плетей и применение их для выявления симметрий не отличаются от рассмотренных выше.

Пример 6. Пусть по свертке дерева на рис. 3,а из примера 5 необходимо проверить симметричность его поддерева с корневыми вершинами 1,2,3 и определить полный список симметрий этого дерева.

По свертке дерева на рис. 3,а определяем список операций над поддерева с корневыми вершинами 1,2,3: $..,..$. Из него видно, что операции, разделенные запятыми, в дереве повторяются. Значит, соответствующие поддерева рис. 3,а симметричны.

По свертке дерева на рис. 3,а определим список операций над всем деревом рис. 3,а с общей корневой вершиной 0: $(,..,..)$. Симметричное преобразование дерева, не меняющее его структуру, может быть представлено s_3 -классом и s_2 -классом: $(1,2,3)((1,2,3) \cup (4,5,6))$.

Таблица 2. Вычисление номеров вершин дерева T_q для присоединения $(q+1)$ -го ребра

№	Начальная вершина множества J^*	Полустепени исхода	Данные из свертки T_q для определения множества J	J^S	$(J^* \setminus J^S)$	J
	1	2	3	4	5	6
1	0		0(1,2,3,4,5,6,7)	1	0	0,1
2	1		17,(2,3,4,5,6)	2	1,7	1,2,7
3	1		1(6,7), (2,3,4,5)	2,6	1	1,2,6
4	2	$(d_1=d_2=1)$	(3,4,5), (6, 27)	3,6		3,6
5	6		67		6,7	6,7
6	1		1(5,6,7), (2,3,4)	2,5	1	1,2,5
7	2		(5,6), 27(3,4)	3,5	2,7	2,3,5,7
8	5		57,6		5,7,6	5,6,7
9	3	$(d_1=d_2=d_3=1)$	4,(5, 26, 37)	5	4	4,5
10	5		57,6		5,6,7	5,6,7
11	5		5(6,7)	6	5	5,6
12	6		67		6,7	6,7
13	1		1(4,5,6,7),(2,3)	2,4	1	1,2,4
14	2		(4,5,6),27,3	4	2,3,7	2,3,4,7
15	4		47,(5,6)	5	4,7	4,5,7
16	2		(4,5),2(6,7),3	4	3	3,4
17	3	$(d_2 = d_3=1)$	(4,5),(6,37)	4,6		4,6
18	4	$(d_1 =2, d_2=1)$	4,7,5,6		4,5,6,7	4,5,6,7
19	6		67		6,7	6,7
20	4		4(6,7),5	6	4,5	4,5,6
21	5	$(d_4 = d_5=1)$	(6,57)	6		6
22	6		67		6,7	6,7
23	4	$(d_2 = d_3=1)$	4(5,6),7	5	4,7	4,5,7
24	4		4(6,7),5	6	4,5	4,5,6
25	5	$d_1=d_2=d_4=d_5=1$	(6, 57)	6		6
26	6		67		6,7	6,7
27	4		4(5,6,7)	5	4	4,5
28	5		57,6		5,6,7	5,6,7
29	5		5(6,7)	6	5	5,6
30	6		67		6,7	6,7

№	1	2	3	4	5	6
31	1		1(3,4,5,6,7),2	3	1,2	1,2,3
32	2		(3,4,5,6), 27	3	2,7	2,3,7
Всего деревьями 1–32 порождено неизоморфных деревьев						81
33	3		37(4,5,6)	4	3,7	3,4,7
34	2		(3,4,5), 2(6,7)	3,6	2	2,3,6
35	3		37, (4,5), 6	4	3,6,7	3,4,6,7
36	6		67		6,7	6,7
37	3		3(6,7), (4,5)	4,6	3	3,4,6
38	4	$d_3 = d_4 = 1,$	(6,47), 5	6	5	5,6
39	6		67		6,7	6,7
40	3		37,4 (5,6)	5	37,4	3,4,5,7
41	3	$(d_1=2, d_2=1)$	3(6,7),(4,5)	6	3,4,5	3,4,5,6
42	4	$(d_3=1, d_4=1)$	(6,47), 5	4	5,6	5,6
43	5	$(d_1=2, d_2=1)$	5,6,7		5,6,7	5,6,7
44	6		67		6,7	6,7
45	5		5(6,7)	6	5	5,6
46	6		67		6,7	6,7
47	3		3(5,6,7),4	5	3,4	3,4,5
48	4		(5,6), 47	5	4,7	4,5,7
49	5		57, 6		5,6,7	5,6,7
50	5		57, 6		5,6,7	5,6,7
51	5		5(6,7)	6	5	5,6
52	6		67		6,7	6,7
53	3		3(5,6,7),4	5	3,4	3,4,5
54	4		(5,6),47	5	4,7	4,5,7
55	5		57,6		5,6,7	5,6,7
56	5		57,6		5,6,7	5,6,7
57	5		5(6,7)	6	5	5,6
58	6		67		6,7	6,7
59	3		3 (4,5,6,7)	4	3	3,4
60	4		47,(5,6)	5	4,7	4,5,7
61	4		4(6,7),5	6	4,5	4,5,6
62	5	$(d_4 = d_5=1)$	(6, 57)	6		6
63	6		67		6,7	6,7

№	1	2	3	4	5	6
64	4		4(5,6,7)	5	4	4,5
65	5		57,6		5,6,7	5,6,7
66	5		5(6,7)	6	5	5,6
67	6		67		6,7	6,7
Всего деревьями 33–67 порождено неизоморфных деревьев						90

Пример 7. Две аналогичных задачи (проверка симметричности деревьев с корневыми вершинами 1 и 2 и определение полного списка симметрий дерева) решим для дерева на рис. 3,б. Определим свертку дерева, приведенного на рис. 3,б:

$$0135, 0136, 0247, 0248 = 0(13(5,6), 24(7,8)).$$

Из нее находим s_3 -классы из номеров концевых вершин: (5,6) и (7,8).

Также из свертки находим список операций над поддеревьями с корневыми вершинами 1 и 2: $.(.),.(.)$. Из него видно, что повторяется его часть $.(.)$. Следовательно, поддеревья с корневыми вершинами 1 и 2 симметричны. Их симметрии представим s_2 -классом и двумя s_1 -классами:

$$(12 \cup 34)((5,6), (7,8)).$$

Из свертки находим список операций над поддеревьями с общей корневой вершиной 0: $.(.),.(.)$. Отсюда следует, что соответствующее симметричное преобразование дерева, не меняющее его структуру, может быть представлено s_3 -классом, s_2 -классом и двумя s_1 -классами:

$$(1,2)((12 \cup 34)((5,6), (7,8))).$$

Пример 8. Аналогичную задачу решим также для дерева, приведенного на рис. 3,в. Определим свертку дерева, приведенного на рис. 3,в: $01359, 0136\underline{10}, 0247\underline{11}, 0248\underline{12} = 0(13(59,6\underline{10}), 24(7\underline{11},8\underline{12}))$.

Слагаемые во внутренних скобках свертки содержат по два сомножителя, что указывает на отсутствие симметрий концевых вершин в дереве, представляемых s_1 -классами. Список операций определяем из свертки

$(\cdot(\cdot,\cdot),\cdot(\cdot,\cdot))$. Повторяющаяся часть списка (\cdot,\cdot) указывает на то, что поддеревья с корневыми вершинами 1 и 2 симметричны.

Симметричное преобразование дерева с корневой вершиной 0, не меняющее его структуру, может быть представлено тремя s_3 -классами и тремя s_2 -классами:

$$(1,2)((1,2) \cup (3,4)((5,6)((5,6) \cup (9,10)),(7,8)((7,8) \cup (11,12))))).$$

Повторяющаяся часть этого списка операций (\cdot,\cdot) свидетельствует о том, что симметричны поддеревья с корневыми вершинами 3 и 4.

Симметрии каждого из этих поддеревьев представим s_3 -классом и s_2 -классом: $(5,6)((5,6) \cup (9,10))$ и $(7,8)((7,8) \cup (11,12))$.

Соотношение симметрий различных типов в корневых деревьях при разных количествах их вершин показано в табл. 3. Как видно, s_1 -классы составляют подавляющее большинство по отношению к симметриям других типов при любом количестве вершин дерева. Причем с ростом числа $p = q+1$ вершин дерева растет количество s_1 -классов в процентном отношении к числу неизоморфных корневых деревьев.

Таблица 3. Зависимость числа симметрий корневых деревьев различных типов от количества их вершин

Число вершин	Общее число неизоморфных корневых деревьев	Абсолютное (относительное) количество		
		s_1 -классов	s_2 -классов	деревьев без симметрий
5	9	5 (56%)	1 (11%)	3 (33%)
6	20	13 (65%)	2 (10%)	7 (35%)
7	48	36 (75%)	6 (12,5%)	12 (25%)
8	115	97 (84,3%)	15 (13%)	26 (22,6%)
9	286	266 (93%)	43 (15%)	55 (19,2%)

Структурный синтез неизоморфных корневых деревьев с применением свертки. Пусть T_q – каноническое дерево с q ребрами. В [1] доказано, что вершины для присоединения $(q+1)$ -го ребра к дереву T_q должны быть лексикографически не старше начальной вершины его младшего

ребра для того, чтобы производное от него дерево $T_{(q+1)}$ было также каноническим. В первом столбце табл. 1 номера начальных вершин младших ребер выделены курсивом и жирно.

Пусть J^* – множество номеров вершин дерева T_q , начиная с номера начальной вершины его младшего ребра, J^s – множество номеров тех вершин J^* , которые являются элементами s-классов (т. е. s_1 -классов и s_2 -классов) дерева T_q , а J^S — список старших элементов этих s-классов. Тогда множество искомых вершин J для присоединения к ним $(q+1)$ -го ребра определяется по формуле:

$$J = (J^* \setminus J^s) \cup J^S. (5)$$

Из (5) следует, что в процессе структурного синтеза канонических деревьев $T_{(q+1)}$ не нужно определять все симметрии дерева T_q , так как в множествах J^* и J^S учтена только часть его симметричных вершин, представленных принадлежащими ему s_1 - и s_2 -классами. Выделим в свертке только множества вершин J^* , J^s и J^S . Для этого перейдем к части свертки дерева T_q , удалив из нее вершины, не принадлежащие этим множествам, как показано в третьем столбце табл. 2 на примере сверток деревьев с 8 вершинами. В нем остались только те s-классы или их части, которые принадлежат множеству J^* и поэтому влияют на отбор искомых вершин в дереве T_q .

В [1, 2] доказано, что необходимым условием каноничности дерева T_{q+1} является выбор вершины дерева T_q для присоединения к ней $(q+1)$ -го ребра, которая является лексикографически старшей среди каждого подмножества симметричных вершин дерева T_q . Отсюда следуют перечисленные ниже правила определения таких вершин.

1. К множеству J следует отнести все элементы множества J^* , которые не принадлежат ни одному из s-классов.

2. Если в множестве J^* есть один s_1 -класс, к множеству J^s следует отнести все его элементы, а к множеству J^S — его первый (т.е. лексикографически старший) элемент.

Например, по свертке дерева №2 из табл. 1 находим $J^*=(1,2,3,4,5,6,7)$, $J^s=(2,3,4,5,6)$, $J^S=(2)$, $J = ((1,2,3,4,5,6,7) \setminus (2,3,4,5,6)) \cup (2) = (1,2,7)$.

3. При наличии двух и более s_1 -классов в разных ярусах дерева T_q к множеству J^s следует отнести элементы всех s_1 -классов, а к множест-

ву J^S — первые элементы каждого s_1 -класса. Признак принадлежности разным ярусам — это различное количество множителей перед s_1 -классами в свертке.

Например, по свертке дерева №7 из табл. 1 находим $J^*=(2,3,4,5,6,7)$, $J^S=(3,4,5,6)$, $J^S=(3,5)$, $J=((2,3,4,5,6,7)\setminus(3,4,5,6))\cup(3,5)=(2,3,5,7)$.

4. При наличии двух и более s_1 -классов на одном ярусе дерева T_q необходимо проверить по свертке их симметричность, как было показано выше. Признак принадлежности общему ярусу — это одинаковое количество множителей перед s_1 -классами в свертке.

Если s_1 -классы симметричны, то к множеству J^S следует отнести только первый элемент старшего из симметричных s_1 -классов. Множество J^S формируется, как и в предыдущем случае, из всех вершин s_1 -классов.

Исключением является случай, когда в множестве J^* оказалась вершина, которая является прообразом элементов не старшего из симметричных s_1 -классов. Присоединение к ней $(q+1)$ -го ребра нарушает упорядочение полустепеней исхода [2] этой вершины и соседней по ярусу старшей вершины. Такую вершину следует исключить из множества J^* .

Например, по свертке дерева №16 из табл. 1 находим $J^*=(3,4,5,6,7)$ после исключения из этого множества вершины 2 по причине, указанной выше. Тогда $J^S=(4,5,6,7)$, $J^S=(4)$, $J=((3,4,5,6,7)\setminus(4,5,6,7))\cup(4)=(3,4)$.

5. Если в дереве есть симметричные отрезки плетей, то в свертке они представлены s_2 -классами. Допустим, что к множеству J^* относятся только часть элементов s_2 -класса. Эти элементы составляют множество J^S . К множеству J^S следует отнести старшую вершину части первой композиции s_2 -класса, которая принадлежат множеству J^* .

Например, как видно из свертки дерева №9 в табл. 1, $J^*=(3,4,5,6,7)$. Из части элементов s_2 -класса, принадлежащей множеству J^* , находим $J^S=(3,5,6,7)$. Из части первой композиции s_2 -класса принадлежащей J^* , находим $J^S=5$. По (5) определяем $J=((3,4,5,6,7)\setminus(3,5,6,7))\cup(5)=(4,5)$.

В четвертом столбце табл. 2 для каждого дерева с 8 вершинами перечислены все его вершины, принадлежащие множеству J . Всего 171 вершина. Присоединяя к ним поочередно девятое ребро, мы получим 171 каноническое дерево с 9 вершинами. Остальные канонические деревья с 9 вершинами, имеющие порядковые номера 172–286 [9] получаются рекурсивно из канонических деревьев с меньшим количеством вершин.

Выводы: **1.** Предложена математическая модель корневого дерева в виде свертки его путей из корня к конечным вершинам, упрощающая выявление симметрий корневых деревьев при структурном синтезе. **2.** На основе предложенной модели корневого дерева разработана методика установления симметрий и структурного синтеза неизоморфных корневых деревьев для последующей автоматизации. **3.** Рассмотрен пример структурного синтеза неизоморфных корневых деревьев с 9 вершинами. Показана роль информации о симметриях комбинаторных объектов в решении подобных задач структурного синтеза.

Список литературы

1. Свирщёва. Э. А. Симметрии и построение неизоморфных корневых деревьев // Синтез, анализ, диагностика электронных цепей : Международ. сб. науч. тр. — Ульяновск : УлГТУ, 2016. — Вып.13. — С. 125–149.
2. Свирщёва Э. А. Структурный синтез неизоморфных систем с однородными компонентами. — Харьков, 1998. — 256 с. (2-е изд., перераб. — 2005; www.techlibrary.ru).
3. Пойа Д. Комбинаторные вычисления для групп, графов и химических соединений // Перечислительные задачи комбинаторного анализа: Сборник переводов. — М. : Мир, 1970. — С. 36–136.
4. Фараджев И. А. Конструктивное перечисление комбинаторных объектов // Алгоритмические исследования в комбинаторике. — М. : Наука, 1978. — С. 3–11.
5. Brendan D. McKay, Isomorph-free exhaustive generation / Computer Science Department, Australian National University. — Canberra, ACT 0200, Australia, 1997. — 19 с.
6. Математическая энциклопедия / гл. ред. И. М. Виноградов. — М. : Сов. энциклопедия, 1977. — Т. 2. — 1104 с.
7. Математическая энциклопедия / гл. ред. И. М. Виноградов. — М. : Сов. энциклопедия. — 1982. — Т. 4. — 1216 с.
8. Сигорский В. П. Математический аппарат инженера. — Киев : Техніка, 1975. — 768 с.
9. Харари Ф. Теория графов. — М. : Мир, 1973. — 301 с.

Свирщёва Эльвира Александровна — канд. техн. наук. г. Харьков, Украина.
E-mail: svirshchieva@mail.ru; olel@kharkov.ukrtel.net.

АЛГОРИТМ СИНТЕЗА НЕИЗОМОРФНЫХ КОРНЕВЫХ ДЕРЕВЬЕВ В ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКОМ ПОРЯДКЕ⁷

М. В. Недорезов, П. В. Недорезов, В. В. Филаретов

Разработан алгоритм и программа наращивания неизоморфных корневых деревьев по вершине при задании деревьев лексикографически упорядоченными векторами начальных вершин. В отличие от известных алгоритмов используется единственный рекурсивный вызов, и количества порождаемых деревьев распределяются равномерно, что важно для параллельной обработки вычислительных потоков.

The algorithm and the program for synthesis of non-isomorphic rooted trees by means of vertex addendum used specifying the trees lexicographically ordered vectors of initial vertices is proposed. In contrast to the known algorithms use a single recursive call, and the number of generated trees is distributed evenly, that is important for parallel processing of the threads of trees.

Вектор начальных вершин корневого дерева. Подсчет и перечисление корневых деревьев относятся к классическим задачам теории графов [1]. Дерево не имеет контуров, содержит Q вершин и $N = Q - 1$ ребер. Корневым деревом называется дерево, одна из вершин которого называется корнем, имеет номер 0 и служит началом путей ко всем остальным вершинам.

Таким образом, ребра корневого дерева имеют направление от корня, и начальная вершина ребра находится ближе к корню, чем конечная вершина. Любой граф можно задать списком ребер, то есть парой векторов начальных и конечных вершин. Для задания корневого дерева достаточно одного вектора, поскольку вектор конечных вершин одинаков для всех деревьев и соответствует натуральному ряду $1, 2, \dots, N$ [2]. Важно, что вектор конечных вершин не нужно хранить в памяти компьютера, так как

⁷ Поддержано Российским Фондом Фундаментальных Исследований (РФФИ), проект №15-07-05847.

его элементы совпадают с номерами позиций (начинающихся с 1) элементов вектора начальных вершин (начинающегося с 0).

В [3] показывается, что лексикографически упорядоченный вектор начальных вершин (ВНВ) num размерности N является предпочтительным способом задания ребер корневого дерева, а лексикографический порядок перечисления деревьев определяет новое направление в генерации и синтезе неизоморфных корневых деревьев.

В данной статье развиваются результаты [4–7] по использованию ВНВ для синтеза неизоморфных корневых деревьев путем наращивания деревьев, заданных вектором начальных вершин (лексикографическим кодом) по вершине. В известных работах [8, 9] этот подход используется при задании корневых деревьев генеалогическим или ярусным кодом и перечислении деревьев по высоте (в порядке Оттера) [3].

Проверка векторов начальных вершин на каноничность. ВНВ, в отличие от известных способов задания корневого дерева, удобен для визуальной проверки его каноничности, то есть проверки того, является ли дерево старшим представителем класса изоморфных деревьев. Для этого элементы вектора num мысленно размещаются по ярусам. Например, $num = \{0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 6, 7, 10, 12\}$ получает вид:

7		10	12	– 4-й ярус;
3	3	4	5 5 6	– 3-й ярус;
1	1	2	2	– 2-й ярус;
0		0		– 1-й ярус.

Как видно, корневое дерево образовано двумя поддеревьями (старшим и младшим), симметричными от первого до третьего яруса. Вершины 7 и 10 на четвертом ярусе не нарушают каноничности дерева, поскольку смежны старшей и младшей симметричным вершинам 3 и 5. Вершина 12 смежна вершине 6 младшего поддерева, которая симметрична вершине 4 (старшей вершине) старшего поддерева. Рассматриваемое дерево является неканоническим, поскольку у старшей вершины 4 нет потомка в четвертом ярусе.

Для проверки на каноничность — выбора старших представителей среди изоморфных деревьев, заданных вектором начальных вершин мож-

но применить функцию `testing` [5], которая была использована в различных алгоритмах генерации и синтеза неизоморфных корневых деревьев [6, 7].

При разработке функции, реализующей проверку вектора *nit* на каноничность, был использован язык Си [5]. В ходе исследования и отладки этой программы при числе вершин, большем 13, были выявлены ошибки, ее структура была переработана и оптимизирована. Модифицированная функция `testing` легла в основу простой рекурсивной программы синтеза неизоморфных корневых деревьев путем наращивания простейших деревьев на трех вершинах [7]. Это позволило обеспечить достоверность списков неизоморфных корневых деревьев, генерируемых тремя различными программами [5–7] и снять существующие ограничения на предельное число вершин.

Текст доработанной функции `testing` с двумя вызываемыми функциями `subtre` и `senior` (после оптимизации аналогичной функции в [7]) находится в приложении 1, снабжен комментариями. Функция называется `testing1`, поскольку предусматривает проверку каноничности добавлением вершин не с начала комбинации (как в [5]), а с последней (только что добавленной) вершины. Для этого цикл `for (k=1;k<=N;k++)` заменяется на проверку для одного элемента `k=N`. В такой модификации проявляется многократное снижение вычислительных затрат при синтезе (путем добавления вершины к каноническому дереву) по сравнению с генерацией (путем перебора лексикографически упорядоченных комбинаций).

Для формализации проверки каноничности используются по два вектора для старшего и младшего поддеревя: вектор старших вершин старшего поддеревя (`fir`); вектор полустепеней исхода старшего поддеревя (`row0`); вектор старших вершин младшего поддеревя (`sec`); вектор полустепеней исхода младшего поддеревя (`row1`).

Посмотрим, как выполняется проверка каноничности дерева 001122334556791012 после добавления вершины 12:

7	9	10	12	– 4-й ярус;
3	3	4	5 5 6	– 3-й ярус;
1	1	2	2	– 2-й ярус;
0		0		– 1-й ярус.

В результате спуска к корневой вершине с конца вектора num находится общая вершина поддеревьев — 0. Для ромашки из двух лепестков 00: $l=1$ и $l+1=2$. Координаты ярусов старшего и младшего поддеревьев: $fir=\{1,3,7\}$; $sec\{2,5,10\}$. 1-й ярус: 00 — симметричен. 2-й ярус: 11 и 22 из ребер (1,3), (1,4), (2,5), (2,6) \rightarrow $row0=\{1,1\}$; $row1=\{1,1\}$ симметричен $row0=row1$. 3-й ярус: 334 и 556 из ребер (3,7), (3,8), (4,9), (5,10), (5,11), (6,12) \rightarrow $row0=\{1,0,1\}$; $row1=\{1,0,1\}$ симметричен: $row0=row1$. Вывод: дерево каноническое.

Рекурсивное наращивание канонических деревьев по вершине.

Основная функция синтеза неизоморфных корневых деревьев с проверкой на каноничность `addnode(int N,int *num)` весьма проста (приложение 2). В цикле `for (k = num[N-1]; k < N+1; k++)` выполняется запись k в текущий вектор num с проверкой на сохранение каноничности дополненного вектора. В случае сохранения каноничности осуществляется рекурсивный вызов с дополненным вектором num: `addnode(N+1,num)`.

Вызов основной функции проводится операторами: `num[0]=0; addnode(1,num)`, то есть рекурсивное наращивание начинается с одного ребра $\{0-1\}$. Можно начать синтез с произвольного семейства деревьев, например, семейства с тремя вершинами: `num[0]=0; num[1]=0; addnode(2,num); num[1]=1; addnode(2,num)`. В этом случае порождение деревьев с Q вершинами идет двумя потоками: 1) от звездного дерева $\{0-1, 0-2\}$; 2) от путевого дерева $\{0-1, 1-2\}$.

Единственный рекурсивный вызов выгодно отличает предлагаемый алгоритм синтеза от наиболее эффективных алгоритмов среди известных алгоритмов генерации и синтеза неизоморфных корневых деревьев [8] (два рекурсивных вызова) и [9] (три рекурсивных вызова). Рекурсивные вызовы резко замедляют работу программ в режиме вывода деревьев в файл на диске, что показало сравнение различных программ по быстродействию [3].

Семейство деревьев с 7 вершинами показано на рис 1. Исходное дерево с двумя вершинами (в центре) путем добавления вершины порождает два дерева с тремя вершинами, образуя два потока.

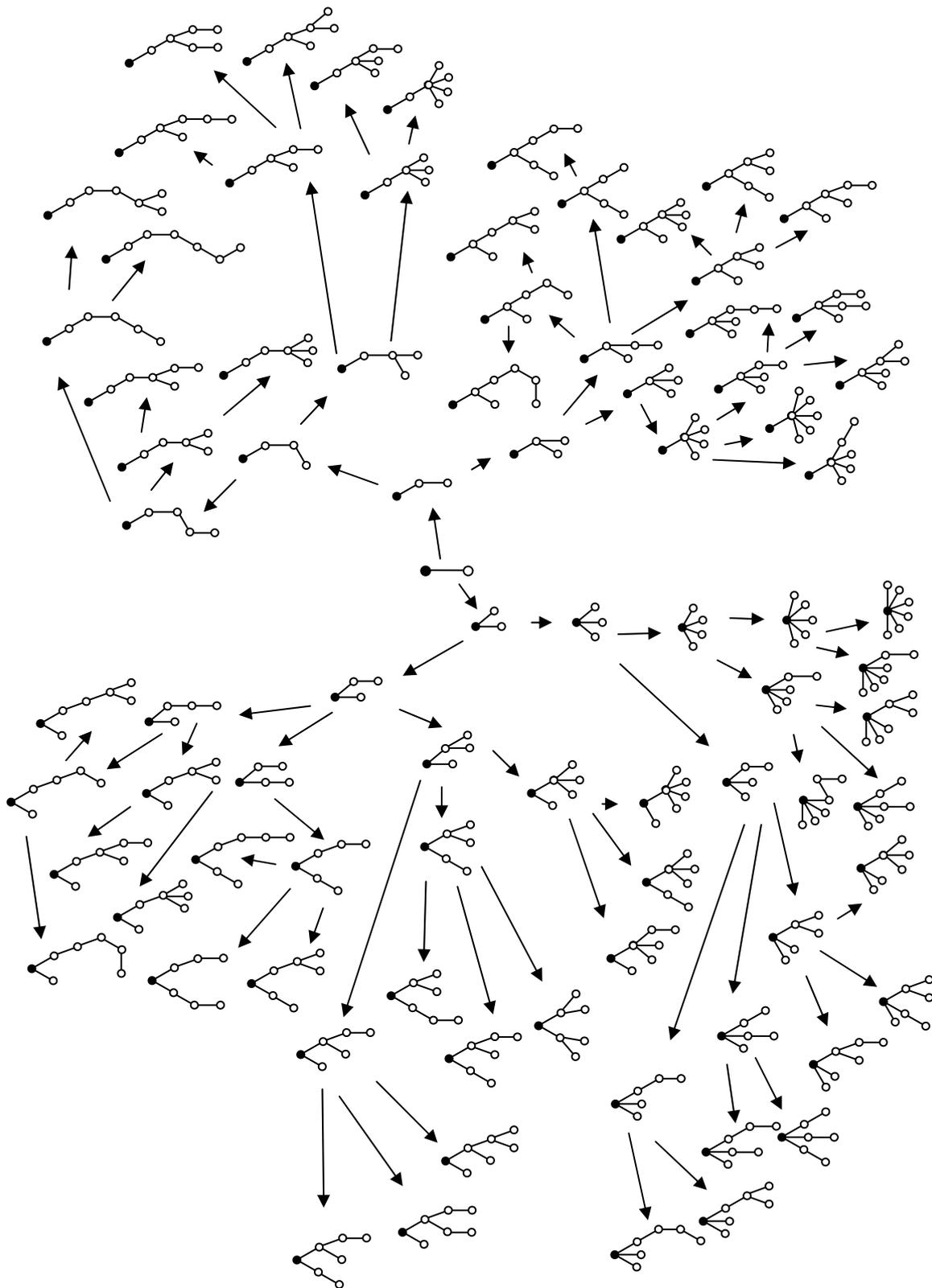


Рис. 1. Семейство деревьев до 7 вершин в лексикографическом порядке

Процесс порождения деревьев с 48 деревьев с 7 вершинами из 20 деревьев с 6 вершинами по предлагаемому алгоритму показан на рис. 2

00000 → 000000 000001
00001 → 000011 000012 000015
00011 → 000111 000112 000114
00012 → 000123 000124
00014 → 000144 000145
00111 → 001111 001112 001113
00112 → 001122 001123 001125
00113 → 001133 001134 001135
00123 → 001233 001234 001235
00133 → 001333 001334
00134 → 001344 001345
01111 → 011111 011112
01112 → 011122 011123 011125
01122 → 011222 011223 011224
01123 → 011234
01124 → 011244 011245
01222 → 012222 012223
01223 → 012233 012234 012235
01233 → 012333 012334
01234 → 012344 012345

Рис. 2. Порождение 48 неизоморфных корневых деревьев с 7 вершинами по 20 деревьям с 6 вершинами в лексикографическом порядке

На рис. 1 видно, что две подзадачи (два потока вычислений), соответствующие звездному и путевому деревьям, оказываются близкими по сложности: в первом (верхнем) потоке 20 деревьев, а во втором (нижнем) потоке 28 деревьев, что обеспечивает эффективную организацию параллельных вычислений [10]. Аналогичное семейство деревьев, построенное в порядке Оттера [10], для двух потоков вычислений дает неприемлемую пропорцию: 1 к 47, что не может обеспечить равномерной загрузки процессоров, поэтому требует сложных подходов к организации параллельных вычислений.

Проверка программы синтеза неизоморфных корневых деревьев по их числу и сравнением списков деревьев. В известной книге [1]

и производных от нее источниках приводится таблица с количеством неизоморфных корневых деревьев до 26 вершин. До сих пор этого количества вершин хватало для тестирования программ, например, в [6] сравнивались списки деревьев до 14 вершин. Теперь удалось довести списочное сравнение до 15 вершин (87811 деревьев). Результаты программы `addnode` сравнивалась с результатами программ [5, 6], которые генерируют аналогичные лексикографически упорядоченные комбинации. и проверяют их на каноничность с помощью первой версии функции `testing`. Предложенная здесь (приложение 1) реализация этой функции `testing1` с рекурсивным наращиванием `num` по одной вершине в функции `addnode` предельно сокращает объем избыточных комбинаций, что снимает ограничения по числу вершин неизоморфных корневых деревьев.

На процессоре 2,4 ГГц неизоморфные корневые деревья для 23–26 вершин считаются за время: 1 мин. 53 сек.; 5 мин. 22 сек.; 15 мин. 29 сек.; 44 мин. 43 секунд соответственно. Дальнейшее увеличение числа вершин не ведет к неожиданностям в работе программы `addnode`. Так, для 27–29 вершин получаем правильные значения для числа деревьев за 2 час. 11 мин.; 6 час. 47 мин. и 20 час. 2 минуты соответственно. Для проверки числа деревьев использовалась рекуррентная формула Оттера [10].

Видно, что затраты времени с добавлением вершины возрастают примерно в 3 раза, как и количество неизоморфных корневых деревьев [1]. Следовательно, число требуемых операций распределено равномерно от дерева к дереву, и предложенный алгоритм находится в одном классе (SAT-классе) с алгоритмами [8, 9] по вычислительной сложности.

Порядок Оттера проще в реализации, что отражают более короткие тексты программ. Это обусловлено тем, что после достижения симметрии (изоморфизма) двух сравниваемых поддеревьев (последних в коде дерева) дальнейшее добавление вершин к младшему поддереву приводит к образованию априори изоморфных деревьев (не старших представителей).

При лексикографическом порядке перечисления список вершин — кандидатов на добавление — не может сокращаться по результатам сравнения поддеревьев. Поэтому вектор `num` проверяется на каноничность функцией `testing1` после добавления каждой вершины из списка кандидатов. Существенно, что в лексикографическом коде — векторе начальных

вершин — сравниваемые поддеревья не разделены их начальными вершинами, что усложняет обработку.

Как показано в [10], программа `addnode` может быть непосредственно и эффективно использована при параллельной организации вычислений. Это обеспечивают не только близкие по сложности вычислительные потоки, порождаемые деревьями с меньшим числом вершин (рис. 2), но и единственный рекурсивный вызов. Таким образом, лексикографический порядок перечисления корневых деревьев будет иметь многократное превосходство в быстродействии по сравнению с порядком Оттера, несмотря на то, что этому традиционному порядку перечисления присуще большее быстродействие при вычислениях на одном процессоре [3].

Выводы: **1.** Разработан рекурсивный алгоритм и реализована программа `addnode` синтеза неизоморфных корневых деревьев в лексикографическом порядке. **2.** Синтез деревьев с заданным числом вершин начинается с наращивания вершиной (ребром) простейшего дерева в виде одного ребра. Число синтезируемых неизоморфных деревьев в диапазоне вершин 3–30 совпадает с расчётами по рекуррентной формуле Оттера [10], и данными таблицы [1]. **3.** Время синтеза при добавлении каждой вершины увеличивается примерно в три раза, что характерно для самых эффективных программ [8, 9], и определяется числом синтезируемых неизоморфных корневых деревьев. В режиме вывода деревьев программа `addnode` практически не уступает этим программам по затратам времени [3], отличается простой структурой, имеет один рекурсивный вызов и преимущества при параллельных вычислениях.

Приложение 1.

Функции для проверки вектора начальных вершин на каноничность

```
// Проверка старшинства (каноничности) яруса с координатами p0 и p1
void senior(int p0,int p1,int k,int *num,int *mipr,int *ipr)
{ // p0 — позиция старшей вершины старшего поддерева
// p1 — позиция старшей вершины младшего поддерева
// k — число начальных вершин корневого дерева
// num[k] — вектор начальных вершин
*mipr=0; // счётчик числа вершин i-го яруса старшего поддерева
*ipr=0; // счётчик числа вершин i-го яруса младшего поддерева
```

```

int m,pow0[30],pow1[30];
// pow0 (pow1) — векторы полустепеней исхода старшего (младшего) дерева,
// размерности p1-p0
for (m=0;m<p1-p0;m++) {pow0[m]=0; pow1[m]=0;} // инициализация
// p0... старшее поддерево ... p1... младшее поддерево... 2*p1-p0
// на i-м ярусе корневого дерева
for (m=2*p1-p0; m<=k; m++) // полустепени исхода (i+1)-го яруса
if (num[m-1] >= p0 && num[m-1] < p1)
(pow0[num[m-1]-p0])++; // для полустепеней исхода старшего поддерева
else if (num[m-1] >= p1 && num[m-1] < 2*p1-p0)
(pow1[num[m-1]-p1])++; // для полустепеней младшего поддерева
for (m=0; m<p1-p0; m++) // поэлементное сравнение векторов полустепеней
if (pow0[m]<pow1[m]) {*mipr=1; *ipr=2; return;} // нарушение каноничности
else if (pow0[m]>pow1[m]) {*mipr=2; *ipr=1; return;} // ярус канонический}
// Проверка каноничности соседних поддеревьев
void subtre(int k,int *num,int p0,int p1,int *pr)
{
// p0 — позиция старшей вершины старшего поддерева
// p1 — позиция старшей вершины младшего поддерева
// k — число начальных вершин корневого дерева
// num[k] — вектор начальных вершин
// pr равен 0/1 для канонического/неканонического
int m,i,j,fe,se,sim,simf,sims,mipr,ipr,fir[30],sec[30];
// fir[simf] (sec[sims]) — вектор координат старшего (младшего) поддерева
// simf (sims) — число ярусов старшего (младшего) дерева
// mipr — счётчик числа вершин i-го яруса старшего поддерева
// ipr — счётчик числа вершин i-го яруса младшего поддерева
simf=0; fir[0]=p0; sims=0; sec[0]=p1;
for (j=1;j<=k;j++)
{ // подсчёт вершин на j-м ярусе старшего и младшего поддеревьев
mipr=0;ipr=0;
for (m=p0+1;m<p1;m++) // для старшего поддерева
if (num[p0-1] && num[m-1] && num[num[p0-1]-1]==num[num[m-1]-1]) mipr++;
for (m=p1+1;m<2*p1-p0 && m<=k;m++) // для младшего поддерева
if (num[p1-1] && num[m-1] && num[num[p1-1]-1]==num[num[m-1]-1]) ipr++;
if (mipr!=ipr) break; // поддеревья симметричны до j-го яруса
for (m=2*p1-p0;m<=k;m++)
for (i=p0;i<p1;i++) if (i==num[m-1]) {fir[+simf]=m; fe=m; goto con1;}

```

```

break;
con1: // нет координаты старшего поддерева
for (m=2*p1-p0;m<=k;m++)
for (i=p1;i<2*p1-p0;i++) if (i==num[m-1]) {sec[++sims]=m; se=m; goto con2;}
break;
con2: // нет координаты младшего поддерева
p0=fe; p1=se;}
if (simf<sims) sim=simf; else sim=sims; // минимальный номер яруса
for (i=0;i<=sim;i++)
{senior(fir[i],sec[i],k,num,&mipr,&ipr); // проверка каноничности яруса
if (ipr>mipr) {*pr=1; return;} // ярус неканонический
else if (ipr<mipr) {*pr=0; return;} // ярус канонический}}
// проверка каноничности дерева, заданного вектором num
void testing1(int N,int *num,int *pr)
{ // num — вектор начальных вершин корневого дерева размерности N
  // *pr=0 — выявлено старшее дерево, *pr=1 — комбинация бракуется
  int l,l1,n1,ni;
  *pr=0; l1=N;
  ni=num[N-1]; // Текущая позиция
  rep: for (l=l1-1; l>0; l--) // обратный просмотр num для поиска ромашки
    { n1=num[l-1]; // соседний слева элемент для ni
      if (ni==n1) // начальные вершины поддереьев найдены
        { subtre(N,num,l,l+1,pr); if (*pr==1) return;}
      else // ромашка не найдена
        { l1=ni; // обновление начала счетчика позиций
          ni=num[ni-1]; // спуск к корню
          goto rep; } } }

```

Приложение 2. Рекурсивная функция для синтеза корневых деревьев с проверкой на каноничность

```

double count=0; // счетчик неизоморфных корневых деревьев
int Q; // заданное число вершин
int fl_1st; // флаг вывода/не вывода деревьев

void addnode(int N,int *num)
{ int i,k,pr,N1=N+1, k0=num[N-1];

```

```

if (N==Q) { count=count + 1.;
if (fl_lst)
{ for (i = 0; i < N; i++) fprintf(file,"%d",num[i]); fprintf(file,"\n"); } }
else
for (k = k0; k < N1; k++)
{ num[N]=k; testing1(N1,num,&pr); if (!pr) addnode(N1,num); }}

```

Список литературы

1. Харари Ф. Теория графов. — М. : Мир, 1973. — 300 с.
2. Свирщёва Э. А. Структурный синтез неизоморфных систем с однородными компонентами. — Харьков, 1998. — 256 с. (2-е изд., перераб. — 2005; www.techlibrary.ru).
3. Филаретов В. В. Единый подход к синтезу неизоморфных корневых деревьев // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей : Международ. сб. науч. тр. — Ульяновск : УлГТУ, 2016. — Вып. 14.
4. Филаретов В. В. Алгоритмы перечисления неизоморфных корневых деревьев на основе лексикографического упорядочения // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей : Международ. сб. науч. тр. — Ульяновск : УлГТУ, 2016. — Вып. 13. — С. 108–123.
5. Недорезов М. В., Недорезов П. В., Филаретов В. В. Алгоритм и программа генерации неизоморфных корневых деревьев на основе векторов начальных вершин // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей : Международ. сб. науч. тр. — Ульяновск : УлГТУ, 2016. — Вып. 13. — С. 149–162.
6. Недорезов П. В., Филаретов В. В. Применение двоичных кодов для генерации неизоморфных корневых деревьев // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей : Международ. сб. науч. тр. — Ульяновск : УлГТУ, 2016. — Вып. 13. — С. 163–174.
7. Недорезов П. В. Генерация неизоморфных корневых деревьев на основе двоичных кодов // МФТИ: XIX Международ. конф. науч.-техн. работ школьников «Старт в Науку». — М. : МФТИ, 2017. — <http://abitu.net/conference/1637>.

8. Li G., Ruskey F. The advantages of forward thinking in generating rooted and free trees // ACM–SIAM symposium on Discrete algorithms. — 1999. — P. 939–940.

9. Nakano S. I., Uno T. Efficient generation of rooted trees // National Institute of Informatics: Technical Report: NII-2003-005E. — 2003 (July). — P. 1–9.

10. Недорезов П. В., Тимофеев В. Ф., Филаретов В. В. Параллельный синтез неизоморфных корневых деревьев // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей : Международ. сб. науч. тр. — Ульяновск : УлГТУ, 2017. — Вып. 14.

Недорезов Максим Владимирович — магистрант факультета аэромеханики и летательных аппаратов Московского Физико-Технического Института.

E-mail: nedmv@rambler.ru.

Недорезов Петр Владимирович — студент 1-го курса Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета — ЛЭТИ им. В. И. Ленина.

E-mail: pyatakry@rambler.ru.

РАЗРАБОТКА И СРАВНЕНИЕ ПРОГРАММ ДЛЯ ГЕНЕРАЦИИ НЕИЗОМОРФНЫХ КОРНЕВЫХ ДЕРЕВЬЕВ

Д. М. Власенко, А. А. Нестеров

Реализованы на языке Си три известных алгоритма генерации неизоморфных корневых деревьев, заданных уровневым (ярусным) и генеалогическим кодом. Приведено сравнение разработанных программ по времени генерации.

Three known algorithm for generation of non-isomorphic rooted trees by means of level code and genealogical code in the C language are implemented. The comparison of the programmes on time of the generation of trees is presented.

Корневые деревья и САТ-алгоритмы. Корневые деревья являются объектом рассмотрения в теории графов [1]. Такие деревья часто используются в информатике, например, в структурах данных для непересекающихся множеств, в математике, и даже в биологии — в эволюционной систематике. Корневое дерево — это дерево, в котором одна вершина помечена, чтобы отличать её от других вершин. Эту вершину называют корнем графа.

Графы A и B называются изоморфными, если после перенумерации вершин список ребер графа A совпадает со списком ребер графа B . Среди корневых деревьев преобладают изоморфные структуры, поэтому важной задачей является перечисление их старших (или младших) представителей, то есть неизоморфных корневых деревьев.

Первым алгоритмом генерации неизоморфных корневых деревьев за постоянное время, распределенное по всем деревьям, предложен Бэйером и Хедетнеми [1]. Такие алгоритмы относятся к классу САТ (Constant Amortized Time) [2].

В этой работе рассмотрены и реализованы три первых в информатике САТ-алгоритма генерации неизоморфных корневых деревьев [2, 3, 4] и проведено экспериментальное сравнение указанных алгоритмов по времени генерации (синтеза) деревьев.

Функция перехода от одного неизоморфного дерева к следующему (функция преемника — successor function [2]). В этом алгоритме используется уровневая последовательность (уровневый код), деревья генерируются итеративно в обратном лексикографическом порядке.

Генерация всех неизоморфных корневых деревьев на n вершинах начинается максимально возможной последовательности — $0123\dots(n-1)$. Затем осуществляется переход от одной канонической последовательности к следующей последовательности, используя предложенную в [2] функцию перехода, пока конечная последовательность $0000\dots 0$ не будет сформирована.

Уровневая последовательность L обеспечивает линейный порядок поддеревьев. Пусть даны два упорядоченных дерева T_1 и T_2 . Дерево T_1 , старшее T_2 — обозначается $T_1 > T_2$ — если $L(T_1) > L(T_2)$ в лексикографически упорядоченной последовательности целых чисел. Отсюда следует, что любые два дерева, имеющие одну и ту же уровневую последовательность изоморфны.

Пусть $L(T_i)$ и $L(T_j)$ являются последовательными подпоследовательностями $L(T)$. Тогда два поддерева T_i и T_j называются сопряженными поддеревьями T , если вершины i и j — последовательные дети одного родителя. Если вершина i является ребенком корня дерева T , то T_i является главным поддеревом T .

Возможный метод генерации всех корневых деревьев на n вершинах будет генерировать в лексикографическом убывающем порядке уровневые последовательности для всех канонических деревьев на n вершинах с фильтрацией изоморфных (неканонических) деревьев. Необходима функция (функция преемника), которая позволяет перейти от одного неизоморфного дерева к следующему.

Пусть $L(T) = [l_1, l_2 \dots l_n]$ уровневая последовательность, содержащая элементы большие 2, p — позиция крайне правого такого элемента, q — крайне правая позиция, предшествующая p , такая, что $l_q = l_p - 1$, причем вершина l_q является родителем вершины, соответствующей l_p . Преемником $L(T)$ будет последовательность вида

$$S(L(T)) = [s_1, s_2 \dots s_n],$$

где

$$(i) s_i = l_i \text{ for } i = 1, 2 \dots, p - 1$$

$$(ii) s_i = l_i \text{ for } i = p, \dots, n$$

Отношения между $L(T)$ и $S(L(T))$ могут быть определены так:

$$L(T) = [l_1 \dots l_q \dots l_{p-1} l_p 2 2 2 \dots]$$

$$s(L(T)) = [l_1 \dots l_q \dots l_{p-1} l_q \dots l_{p-1} l_q \dots]$$

$$T_q = [l_q \dots l_{p-1}]$$

Подпоследовательность T_q представляет собой поддерево $S(L(T))$, которое повторяется столько раз, сколько возможно, с частичным повторением, если необходимо, до достижения полного числа n вершин.

В табл. 1 приведены четыре канонические последовательности и их преемники. Уровневые последовательности, взятые из [2], дополнены слева нулём, чтобы соответствовать корневому дереву. В ярусном коде [5] эта позиция является лишней, поскольку по умолчанию корнем дерева считается вершина с номером 0. Поэтому значения всех позиций ярусного кода меньше значений соответствующих позиций уровневого кода на 1.

Таблица 1. Примеры использования функции **successor** (преемник)

Число вершин в дереве	$L(T)$ — текущее неизоморфное дерево		$s(L(T))$ — следующее неизоморфное дерево	
	Вид кода		Вид кода	
	уровневый [2,4]	ярусный [5]	уровневый [2,4]	ярусный [5]
7	0123222	012111	0122222	011111
7	0123422	012311	0123333	012222
11	012343222222	012321111111	0123423423423	012312312312
10	01234552222	0123441111	01234545454	0123434343

В приложении 1 представлен текст программы [2], переведенный на язык Си, с выводом деревьев в ярусном коде. Вызов программы осуществляется оператором: `generateRootedTrees(Q+1)`. Результат работы программы для пяти вершин ($Q=5$):

Beyer 1980:

0123 0122 0121 0120 0111 0110 0101 0100 0000

5 vertices — 9 trees

Рекурсивный алгоритм с заданием деревьев генеалогическим кодом [3]. Специалистам в области информатики известно представление корневых деревьев посредством генеалогического вектора. Точнее его называть вектором начальных вершин (ВНВ) [5], поскольку вектор конечных вершин одинаков для всех корневых деревьев. Только оба вектора однозначно задают корневое дерево, но вся информация заключается в ВНВ, а значениями вектора конечных вершин являются номера позиций первого вектора.

Как и в случае уровневого кода [2], первая позиция генеалогического кода [3] избыточна, поскольку номер корневой вершины (0) фиксирован. Это учитывается в следующем определении. Пусть T — корневое дерево, узлы которого помечены: $0, 1, 2, \dots, n$. Элемент вектора $\text{par}[i]$ (начальная вершина) является родителем i (конечная вершина).

В зависимости от способа обхода корневое дерево может иметь множество различных представлений, Чтобы добиться уникального представления для каждого дерева, мы используем обход в глубину таким образом, чтобы среди всех уровневых последовательностей выбрать лексикографически максимальную. Такое дерево называется каноническим. ВНВ канонического дерева также называется каноническим.

Пусть имеется каноническое дерево T с n узлами. Удаляя n -й узел, получим каноническое дерево T' с количеством узлов $n-1$. Это предполагает бесконечную упорядоченную структуру дерева T на множестве всех корневых деревьев, вместе с деревом, имеющим единственный узел — корень. Таким образом, T' порождает T . Упорядочивание поддеревьев согласуется с обратным лексикографическим порядком соответствующего ВНВ.

Пусть T_n будет поддеревом T , включающим корневые деревья, имеющие не более n узлов. Рекурсивный алгоритм вычисления дерева T_n требует постоянное количество вычислений на каждом узле вычисляемого дерева [3]. Число узлов в T_n пропорционально числу корневых деревьев

с n узлами, что доказывает, что алгоритм принадлежит к САТ-классу по вычислительной сложности.

Этот алгоритм поддерживает два параметра s и cd . Параметр s является корнем поддерева, что в настоящее время многократно копируется, когда мы спускаемся вдоль крайнего левого пути в T . Параметр cd — число узлов в поддереве $T(s)$ с корнем в узле s .

В приложении 2 представлен текст программы [3], переведенный на язык Си, с выводом деревьев в модифицированном генеалогическом коде. Процедура производит все родительские массивы с префиксом $par[1..p-1]$. Вызов программы осуществляется оператором: $Gen(1, 0, 0)$.

Результат работы программы для пяти вершин ($Q=5$):

Rusk 1999:

0123 0122 0121 0120 0111 0110 0103 0100 0000

5 vertices — 9 trees .

Алгоритм наращивания уровневого кода по вершине [4]. Набросок программы без детализации операции добавления вершины $T + i$ имеет вид [4]:

```
Procedure find-all-children( $T, cd$ )
{ $T$  — это текущее дерево, а  $cd$  — это глубина копирования  $T$ }
Begin
1 Output  $T$ 
2 if  $T$  имеет  $n$  вершин
3 then return
4 else if  $L(T(s_{cd+1})) = L(T(r_{cd+1}))$ 
5 then
6 begin
7 for  $i = 0$  to  $cd$ 
8 find-all-children( $T + i, i$ )
9 end
10 else {  $L(T(s_{cd+1})) > L(T(r_{cd+1}))$  }
11 begin
12 { Пусть  $d$  — это глубина следующей скопированной вершины }
13 for  $i = 0$  to  $d - 2$ 
14 find-all-children( $T + i, i$ )
15 find-all-children( $T + (d - 1), cd$ )
```

```

16 end
end
Algorithm find-all-trees(n)
begin
Output  $K_1$ 
{ $K_1$  — единственное дерево, имеющее одну вершину}
Find-all-children( $K_2, 0$ )
end

```

В приложении 3 представлен текст доработанной нами программы на языке Си, с выводом деревьев в экономном ярусном коде (табл. 1). Вызов программы выполняется операторами: `list[0]=0; list[1]=1; findChild(2, 0)`.

Результат работы программы для пяти вершин ($Q=5$):

```

Нак 2003:
0000 0100 0101 0110 0111 0120 0121 0122 0123
5 vertices — 9 trees

```

Сравнение программ по затратам времени. В результате реализации алгоритмов и их тестирования получена табл. 2 со значениями времени вычисления для каждого алгоритма в зависимости от количества вершин (деревьев). На этой системе производились вычисления: Intel Core i5 4200U @ 1.60GHz. Оперативная память: 8gb ddr3 Жесткий диск: 238GB LITEONIT LCS-256M6S ATA Device (SSD). Код программ размещен на сайте: (<https://github.com/Faktorealchik/GRT>)

Таблица 2. Затраты времени на генерацию деревьев с 13–24 вершинами

Число вершин	Число деревьев	РЕЖИМ ВЫВОДА РЕЗУЛЬТАТОВ					
		без вывода деревьев			с выводом деревьев		
		Источник алгоритма			Источник алгоритма		
		[1]	[2]	[3]	[1]	[2]	[3]
13	12486	0.001	0.001	0.001	0.032	0.042	0.057
14	32973	0.001	0.001	0.001	0.082	0.091	0.085
15	87811	0.001	0.001	0.001	0.236	0.266	0.245
16	235381	0.003	0.004	0.003	0.642	0.745	0.645
17	634847	0.011	0.004	0.011	1.927	2.263	1.815
18	1721159	0.030	0.014	0.026	5.308	6.346	5.112
19	4688676	0.039	0.035	0.072	15.045	18.052	14.563

Число вершин	Число деревьев	РЕЖИМ ВЫВОДА РЕЗУЛЬТАТОВ					
		без вывода деревьев			с выводом деревьев		
		Источник алгоритма			Источник алгоритма		
		[1]	[2]	[3]	[1]	[2]	[3]
20	12826228	0.104	0.096	0.181	41.675	52.531	41.915
21	35221832	0.263	0.255	0.482	120.401	125.501	120.555
22	97055181	0.695	0.694	1.321	346.909	364.847	346.910
23	268282855	1.907	1.816	3.589	1005.299	1056.697	996.688
24	743724984	5.212	4.958	9.986	2894.737	3038.645	2889.677

Приложение 1

Программа генерации неизоморфных корневых деревьев
в ярусном коде с функцией-преемником [2]

```
int p = 0, l[30], prev[30], save[30];
```

```
void generateFirstTree(int N) { int i;
```

```
  for (i = 0; i < N; i++) l[i] = i;
```

```
  if (N < 2) p = i; else p = N — 1;
```

```
  if (p > 1)
```

```
    for (i = 0; i <= p — 1; i++) {prev[i] = i; save[i] = 0;}
```

```
void generateNextTree(int N) { int diff
```

```
  l[p] = l[p] — 1;
```

```
  if (p < N && (l[p] != 1 || l[p — 1] != 1)) {
```

```
    diff = p — prev[l[p]];
```

```
    while (p < N — 1) {
```

```
      save[p] = prev[l[p]];
```

```
      prev[l[p]] = p;
```

```
      p = p + 1;
```

```
      l[p] = l[p — diff];
```

```
    }
```

```
  }
```

```
  while (l[p] == 1) { p = p — 1; prev[l[p]] = save[p]; }
```

```
void print(int N) {
```

```

if (fl_1st) // вывод в файл
{
    for (int i = 1; i < N; i++) fprintf(file, "%d", l[i]-1);
    fprintf(file, "\n"); }
count1++; }

void generateRootedTrees(int N) {
    generateFirstTree(N);
    print(N);
    while (p > 1) { generateNextTree(N); print(N); } }

```

Приложение 2

Программа рекурсивного наращивания
неизоморфных корневых деревьев в генеалогическом коде [2]

```

double count=0.;
int Q, par[40], fl_1st;
void Gen(int p,int s,int cL) { int i;
    if (p > Q+1)
    {
        count1 = count1 + 1.;
        if (fl_1st) // вывод в файл
        { for (i=2;i < Q+2;i++) fprintf(file,"%d",par[i]-1);
          fprintf(file,"\n"); }
        }
    else
    { if (!cL) par[p]=p-1;
      else if (par[p-cL] < s) par[p]=par[s];
        else par[p]=cL+par[p-cL];
      Gen(p+1,s,cL);
      while (par[p] > 1)
      { s = par[p]; par[p] = par[s]; Gen(p+1,s,p-s); } } }

```

Приложение 3

Программа рекурсивного наращивания по вершине
неизоморфных корневых деревьев в ярусном коде [4]

```
/* Q — кол-во вершин, *list — массив дерева
   len — длина массива cd — глубина копирования, как в алгоритме */

void findChild(int len, int cd)
{ int i, d; int rsize = 1; // для дерева r
  int ssize = 1; // для дерева s
  /*находим длины двух поддеревьев(как в алгоритме)
  r-> самое правое, s-> дерево перед r */
  if (len == Q+1)
  { if (fl_lst)
    { for (i = 1; i < Q+1; i++) fprintf(file, "%d", list[i]-1);
      fprintf(file, "\n");}
    count3=count3+1.;
  }
  else
  { //находим размер деревьев r и s
    while (list[len — rsize] > cd + 1 && rsize < len) rsize++;
    while (list[len — rsize — ssize] > cd + 1 && rsize + ssize < len) ssize++;
    /* сравниваем деревья r и s
    если они одинаковые, и последний элемент дерева не равен
    предпоследнему, мы попадаем в условие 2,
    иначе в условие 3.
    Пример:
    n=5
    1222 — list
    len — 4
    list[len-1]=2!=4-1
    rsize=1 ssize=1 попадаем в условие 2 */
    if (rsize == ssize && list[len — 1] != len — 1)
    //Условие 2
    for (i = 0; i <= cd; i++)
    { list[len] = i+1;
      findChild(len + 1, i);}
    else
    { //Условие 3
      // d — точно такое же значение, как в алгоритме — depth
```

```

if (list[len — 1] == len — 1) d = len; else d = list[len — ssize];
for (i = 0; i < d — 1; i++)
{ list[len] = i+1; findChild(len + 1, i); }
list[len] = d; findChild(len + 1, cd); } } }

```

Список литературы

1. Харари Ф. Теория графов. — М. : Мир, 1973. — 300 с.
2. Beyer T., Hedetniemi S. M. Constant time generation of rooted trees // Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics: Computation. — 1980. — Vol. 9, no. 4. — P. 706–712.
3. Li G., Ruskey F. The advantages of forward thinking in generating rooted and free trees // ACM–SIAM symposium on Discrete algorithms. — 1999. — P. 939–940.
4. Nakano S. I., Uno T. Efficient generation of rooted trees // National Institute of Informatics: Technical Report: NII-2003-005E. — 2003 (July). — P. 1–9.
5. Филаретов В. В. Единый подход к синтезу неизоморфных корне-вых деревьев // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Между-народ. сб. науч. тр. — Ульяновск : УлГТУ, 2017. — Вып. 14.

Власенко Дмитрий Михайлович — Санкт-Петербургский национальный ис-следовательский университет информационных технологий, механики и опти-ки (НИУ ИТМО), факультет Инфокоммуникационных технологий, кафедра Про-граммных систем, группа К3220.
E-mail: war.mmj@mail.ru.

Нестеров Александр Александрович — НИУ ИТМО, факультет Инфокомму-никационных технологий, кафедра Программных систем, группа К3220.

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ СИНТЕЗ НЕИЗОМОРФНЫХ КОРНЕВЫХ ДЕРЕВЬЕВ⁸

П. В. Недорезов, В. Ф. Тимофеев, В. В. Филаретов

Установлено, что для параллельной генерации или синтеза неизоморфных корневых деревьев необходимо равномерное распределение деревьев по вычислительным потокам, что обеспечивает лексикографический порядок перечисления деревьев. Показано, что известные алгоритмы, перечисляющие деревья по высоте (глубине), малоприспособлены для многопроцессорной реализации.

It was found that for parallel generation or synthesis non-isomorphic rooted trees need a uniform distribution of trees on computing flows that provides the lexicographic order enumeration of trees. It is shown that the known algorithms for listing the trees on the height (depth), unsuitable for multiprocessor implementation.

Синтез неизоморфных корневых деревьев. Неизоморфные корневые деревья используются во многих приложениях, поэтому с начала 80-х годов прошлого века для этой цели разработан ряд алгоритмов [1–11]. Наиболее известны первые работы [1–3], содержащие тексты программ для ЭВМ. Эти три программы были реализованы на языке Си и сравниваются по быстродействию [4]. Сравнение показало, что затраты алгоритмов близки между собой и эти алгоритмы относятся к САТ-классу (Constant Amortized Time) [2], то есть получают неизоморфные корневые деревья за постоянное время, распределенное по всем деревьям.

Порядок перечисления деревьев, используемый в алгоритмах [1–3], один — перечисление по высоте (глубине) когда множество деревьев получается объединением подмножеств с одинаковой высотой. Для задания деревьев в этих алгоритмах используется уровневый [1, 3] или генеалогический [2] код. Процесс порождения 48 деревьев с 7 вершинами из 20 деревьев с 6 вершинами по алгоритму [2] показан на рис. 1.

⁸ Поддержано Российским Фондом Фундаментальных Исследований (РФФИ), проект №15-07-05847.

00000 → 000000
01000 → 010000
01030 → 010300 010305
01100 → 011000
01104 → 011040 011044
01110 → 011100 011105
01111 → 011110 011111
01200 → 012000
01204 → 012040 012044 012045
01210 → 012100 012105
01211 → 012110 012111
01214 → 012140 012141
01220 → 012200 012205
01221 → 012210 012211 012215
01222 → 012220 012221 012222
01230 → 012300 012305
01231 → 012310 012311 012315
01232 → 012320 012321 012322 012325
01233 → 012330 012331 012332 012333
01234 → 012340 012341 012342 012343 012344 012345

Рис. 1. Порождение 48 неизоморфных корневых деревьев с 7 вершинами из 20 деревьев с 6 вершинами в порядке Оттера

Преимущества того или иного алгоритма определяются удобством реализации параллельных вычислительных потоков. На 25 страницах [5] была предпринята попытка формализовать для многопроцессорных вычислений именно алгоритм [1], хотя порядок перечисления деревьев для всех трех алгоритмов [1–3] одинаков. Алгоритм [1] отличается от алгоритмов [2] и [3] тем, что он нерекурсивный.

Организация многопоточных вычислений при рекурсивном наращивании по вершине [2], в отличие от параллельной реализации алгоритма [1], весьма проста для числа процессоров, равного числу деревьев с 3, 4, 5, 6, 7 и т.д. вершинами. Однако рекурсивные алгоритмы [2] и [3] содержат два и три рекурсивных вызова соответственно, что затрудняет их использование для параллельных вычислений. Для их организации более удобен алгоритм-реконструкция алгоритмов [2] и [3] с единственным рекурсивным вызовом [6].

Например, исходное дерево с двумя вершинами путем добавления вершины порождает два дерева с тремя вершинами, как показано в верхней части рис. 2.

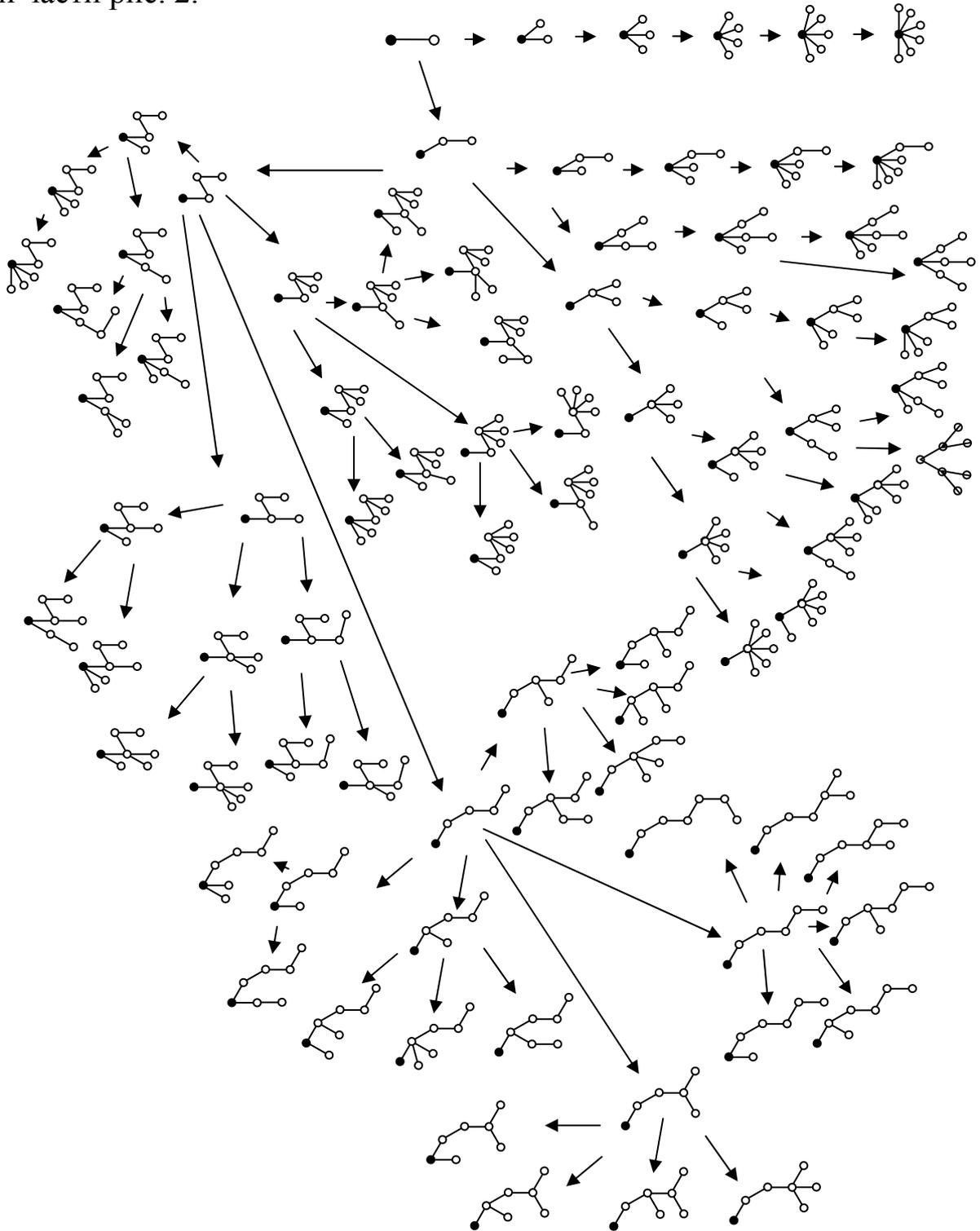


Рис. 2. Семейство деревьев до 7 вершин с перечислением по высоте (порядок Оттера)

Видно, что две подзадачи (два потока вычислений), соответствующих звездному и путевому деревьям, оказываются несопоставимы по сложности: в первом потоке одно дерево, а во втором потоке 47 деревьев!

Эффективная параллелизация процесса, то есть деления задачи на подзадачи достигается в случаях, когда удастся получить подзадачи близкие по сложности, чтобы обеспечивалась равномерная загрузка процессоров. В случае перечисления деревьев по высоте оказывается, что дерево минимальной высоты (в одно ребро) является единственным в первом потоке, а второй поток содержит все оставшиеся деревья.

Если разбить задачу на большее число подзадач, то подзадача с наибольшим по сложности потоком будет по-прежнему сильно отличаться по сложности от других подзадач, что подтверждается расчетами, сведенными в табл. 1. Там указаны размеры максимальных потоков при делении задачи перечисления на 4, 9 и 20 потоков для деревьев с 20 и 21 вершинами (две строки для порядка по высоте). Как видно, объем максимального потока (в деревьях) отличается от полного числа деревьев лишь в третьей цифре.

Таблица 1. Максимальное число деревьев в вычислительном потоке для различных порядков перечисления

Тип перечисления	Число вершин	Число вычислительных потоков			
		1	4	9	20
Порядок по высоте	20	12826228	12825738	12781696	12286279
	21	35221832	35221205	35146778	34134828
ЛГ-порядок	20	12826228	4370721	3149656	1708155
	21	35221832	12003882	8685145	4738194

Разработанные недавно алгоритмы [7–11] принципиально отличаются от других известных алгоритмов, включая алгоритмы [1–3], лексикографическим порядком перечисления деревьев. Наиболее совершенными следует считать рекурсивные алгоритмы синтеза путем добавления вершины в вектор начальных вершин неизоморфного корневого дерева [8, 10, 11]. В [8, с. 145] отмечается, что «задача порождения неизоморфных вариантов корневых деревьев разбивается разными способами на самостоятельные подзадачи, которые можно решать отдельно, в том числе парал-

тельно. Такое разбиение интерпретируется разделением дерева вариантов на независимые поддеревья, начиная как с корневой вершины, так и с вершин с любым значением q .».

Лексикографический порядок почти идеально подходит для многопоточных вычислений, что иллюстрируют нижние две строки табл. 1. Например, для 20 потоков максимальный поток лишь в 2,5 раза превышает среднее значение потока. Алгоритм порождения неизоморфных деревьев путем наращивания по вершине дерева с меньшим числом вершин и текст соответствующей программы `addnode` опубликованы в [11]. Обобщенная блок-схема этого алгоритма, предусматривающего, как и двойственный алгоритм с перечислением в порядке Оттера, проверку последних поддеревьев в коде дерева дана в [6].

В данной статье обсуждается организация параллельных вычислений на основе рекурсивного алгоритма синтеза неизоморфных корневых деревьев в лексикографическом порядке [11].

Эффективность лексикографического порядка перечисления деревьев демонстрируется табл. 2, где показано, как объем максимального потока влияет на время синтеза неизоморфных корневых деревьев. Видно, как с увеличением числа потоков уменьшается время синтеза максимального по объему потока деревьев. Однако, например, при 20 вершинах для порядка по высоте (традиционный порядок перечисления) время уменьшается с 38 до 36 секунд, а для лексикографического порядка (новый порядок перечисления) время сокращается примерно в 7 раз.

Таблица 2. Время синтеза максимального потока неизоморфных корневых деревьев для различных порядков перечисления

Тип перечисления	Число вершин	Число вычислительных потоков			
		1	4	9	20
Порядок по глубине	20	38.05 с	37.94 с	37.74 с	36.23 с
	21	1 мин 49.90 с	1 мин 48.32 с	1 мин 48.15 с	1 мин 44.86 с
ЛГ-порядок	20	42.45 с	14.42 с	10.31 с	5.68 с
	21	2 мин 2.05 с	43.18 с	31.15 с	17.27 с

Параллельные вычисления. Цифровые технологии привели к доступности вычислительных ресурсов. Технологии многоядерности и объединения распределенных вычислительных ресурсов в систему с параллельной организацией вычислений привели к резкому повышению производительности систем и снижению стоимости отдельных математических операций. Это позволяет проводить вычисления за приемлемое время (часы) с приемлемыми ресурсами (десятки/сотни вычислительных ядер CPU/GPU) [12].

В многопоточном случае наращивание ведется одновременно для всех деревьев с соответствующим числом вершин, то есть для 2, 5, 9, 20, 48 и т.д. деревьев. Каждое дерево является исходным для работы соответствующего процессора (ядра). Для одного процессора используются следующие строки вызова рекурсивной функции `addnode` [11]: `num[0]=0; addnode(1,num)`. Здесь `num` — вектор начальных вершин (лексикографический код).

Для двух процессоров строки функции `main` модифицируются следующим образом:

```
num[0]=0; num[1]=0; addnode(2,num); // задание для первого процессора
num[0]=0; num[1]=1; addnode(2,num); // задание для второго процессора
```

Таким образом, в функции `main` каждого процессора остается по одному рекурсивному вызову `addnode(2,num)` вместо двух вызовов, и задача синтеза канонических корневых делится на две подзадачи. Для первой подзадачи исходным является вектор `num={0,0}`, а для второй — `num={0,1}`. Вторая подзадача по объему вычислений оказывается проще первой примерно на треть. Таким же является отношение числа канонических корневых деревьев до и после добавления одной вершины, поскольку множество деревьев с Q вершинами получается добавлением недостающих примерно $2/3$ деревьев (первая подзадача) к $1/3$ деревьев (вторая подзадача) с $Q-1$ вершинами.

При малом числе вершин соотношение между сложностями этих подзадач отклоняется от соотношения 2 к 1. Например, для $Q=8$ первая подзадача заключается в нахождении 67 деревьев, а вторая подзадача — 48 деревьев. Последние 48 деревьев отличаются от деревьев с $Q-1=7$ вершинами наличием ребра между вершиной 0 и 1. Пропорция 2 к 1 между

сложностями подзадач обусловлена существующей зависимостью числа канонических корневых деревьев от числа вершин [13]. Поэтому затраты времени для большого числа вершин увеличиваются примерно в 3 раза при добавлении одной вершины в случае использования одного процессора.

При многопоточном синтезе деревьев создается 2, 5, 9, 20, 48 и т. д. заданий для ядер (процессоров). Они запускаются одновременно, а сервисная оболочка Windows или управляющая программа оптимально распределяет вычисления по имеющимся процессорам. Частичные решения объединяются без каких-либо трудностей [5] — совместным архивированием непересекающихся результатов различных процессоров. Число деревьев получается суммированием числа деревьев по всем частичным результатам.

Если на компьютере 24 процессора, то можно запустить сразу 20 заданий. По объему вычислений задачи не различаются больше, чем на треть. Поэтому решение получится примерно в 20 раз быстрее, чем запуск одной полной задачи. При 48 процессорах и 48 заданиях решение будет получено почти в 50 раз быстрее. Следующее возможное число процессоров — 115 (для 8 вершин) — на два порядка ускорит вычисления.

Для расчета числа деревьев с произвольным числом вершин Q была реализована рекуррентная формула Оттера [14] (приложение 1). $A[1]...A[26]$ совпадает с таблицей Ф.Харари [13] для числа неизоморфных корневых деревьев. Совпадение расчетов и эксперимента подтверждает правильность многопоточных вычислений с программой `addnode`.

Выводы:

1. Рассмотрена организация параллельных вычислений для перечисления неизоморфных корневых деревьев в лексикографическом порядке.
2. Выполнено сравнение количеств деревьев в потоках с расчетами по запрограммированной формуле Оттера.
3. Показано, что известные алгоритмы, перечисляющие деревья по высоте в порядке Оттера, малоприспособлены для многопроцессорной реализации из-за резко различающихся по объему потоков деревьев.

Приложение 1. Реализация рекуррентной формулы Оттера

```
main () // Рекуррентная формула Оттера [1]
{ double A=40, n_a, m1, m3, S[40][40]; int l, Q, m;
// A[ ] — начальные условия рекурсии (от 1 до Q=30)
A[1] = 1; A[2] = 1; A[3] = 2; A[4] = 4; A[5] = 9; A[6] = 20;
A[7] = 48; A[8] = 115; A[9] = 286; A[10] = 719;
A[11] = 1842; A[12] = 4766; A[13] = 12486;
A[14] = 32973; A[15] = 87811; A[16] = 235381;
A[17] = 634847; A[18] = 1721159; A[19] = 4688676;
A[20] = 12826228; A[21] = 35221832; A[22] = 97055181;
A[23] = 268282855; A[24] = 743724984;
A[25] = 2067174645; A[26] = 5759636510;
A[27]= 16083734329; A[28]= 45007066269;
A[29]=126186554308; A[30]=354426847597;
Q=31; // указание числа вершин
for (i=1;i<=Q;i++)
{ S[Q][i]=0.; m=1;
while (m>=1 && i*m<=Q) {m3=A[Q+1-i*m]; S[Q][i]=S[Q][i]+m3; m++;}}
n_a=0.; for (i=1;i<=Q;i++) {m1=i*A[i]*S[Q][i]; n_a=n_a+m1;}
A[Q+1]=n_a/Q; // результат рекурсии (Q+1) }
```

Список литературы

1. Beyer T., Hedetniemi S. M. Constant time generation of rooted trees // Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics: Computation. — 1980. — Vol. 9, no. 4. — P. 706–712.
2. Li G., Ruskey F. The advantages of forward thinking in generating rooted and free trees // ACM–SIAM symposium on Discrete algorithms. — 1999. — P. 939–940.
3. Nakano S. I., Uno T. Efficient generation of rooted trees // National Institute of Informatics: Technical Report: NII-2003-005E. — 2003 (July). — P. 1–9.
4. Власенко Д. М., Нестеров А. А. Разработка и сравнение программ для генерации неизоморфных корневых деревьев // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей : Международ. сб. науч. тр. — Ульяновск : УлГТУ, 2017. — Вып. 14.
5. Kubicka E. M., McKeon K. A. An application of level sequences to parallel generation of rooted tree // Combinatorial mathematics and combinatorial computing. — 2011. — N76 (Feb). — P. 33–58.

6. Филаретов В. В. Единый подход к синтезу неизоморфных корневых деревьев // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей : Международ. сб. науч. тр. — Ульяновск : УлГТУ, 2017. — Вып. 14.

7. Филаретов В. В. Алгоритмы перечисления неизоморфных корневых деревьев на основе лексикографического упорядочения // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.— Ульяновск : УлГТУ, 2016. — Вып. 13. — С. 108–123.

8. Свирщёва Э.А. Симметрии и построение неизоморфных корневых деревьев // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей : Международ. сб. науч. тр. — Ульяновск : УлГТУ, 2016. — Вып. 13. — С. 124–148.

9. Недорезов М. В., Недорезов П. В., Филаретов В. В. Алгоритм и программа генерации неизоморфных корневых деревьев на основе векторов начальных вершин // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей : Международ. сб. науч. тр. — Ульяновск : УлГТУ, 2016. — Вып. 13. — С. 149–162.

10. Недорезов П. В. Генерация неизоморфных корневых деревьев на основе двоичных кодов // МФТИ: XIX международная конференция научно-технических работ школьников «Старт в Науку». — М. : МФТИ, 2017. — <http://abitu.net/conference/1637>

11. Недорезов М. В, Недорезов П. В., Филаретов В. В. Алгоритм синтеза неизоморфных корневых деревьев в лексикографическом порядке // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей : Международ. сб. науч. тр. — Ульяновск : УлГТУ, 2017. — Вып. 14.

12. Grishkevich A., Modele symulacyjne do szacowania wskaźników niezawodności strukturalnej systemów elektroenergetycznych tworzone na bazie kart graficznych // Przegląd Elektrotechniczny (Electrical Review), R93(2017). — Nr. 3. — S. 44–47.

13. Харари Ф. Теория графов. — М. : Мир, 1973. — 300 с.

14. Otter R. The Number of Trees // The Annals of Mathematics. — 2nd Ser. — 1948. — Vol. 49. — N3. — P. 583–599.

Недорезов Петр Владимирович — студент 1-го курса Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета — ЛЭТИ им. В. И. Ленина. E-mail: pyatakpu@rambler.ru.

ИЗ ИСТОРИИ ОТКРЫТИЙ

ТЕОРЕМА ВЗАИМНОСТИ В ТВОРЧЕСТВЕ Г. КИРХГОФА

И. В. Ерохов

Выполнен анализ ключевой для теории электрических цепей работы Кирхгофа (1847 г.). Показано, что в этой работе, наряду с двумя основными законами теории электрических цепей, впервые сформулирован принцип взаимности.

The analysis of work by Kirchhoff (1847) which key work for the theory of electrical networks is presented. It is shown that in this work, along with the two basic laws of electric circuit theory, for the first time formulated the principle of reciprocity.

В одной из первых статей Кирхгофа по теории электрических цепей теорема взаимности была сформулирована как побочный результат при обосновании метода решения системы уравнений электрической цепи [1]. Статья датируется 1847 годом, то есть формулировка теоремы является, пожалуй, самой ранней:

Es geht hieraus unter Anderem hervor, dafs, wenn wir aus einem beliebigen Systeme zwei Drähte auswählen, die Intensität des Stromes, welcher in dem einen hervorgebracht wird durch eine elektromotorische Kraft in dem zweiten, gerade dieselbe ist als die Intensität des Stromes, welcher in dem zweiten hervorgebracht wird durch eine eben so grofse elektromotorische Kraft in dem ersten.

«Отсюда среди прочего следует, что если из произвольной системы мы выделим два проводника, то сила тока, создаваемого в одном из них электродвижущей силой в другом проводнике, равна силе тока, которую

создала бы во втором проводнике такая же по величине электродвижущая сила в первом проводнике» [2].

Этот текст хорошо совпадает с известной формулировкой принципа взаимности [3]: «если эдс $\dot{E}_{ab} = \dot{E}$, действуя в ветви ab произвольной цепи, при отсутствии в цепи прочих эдс вызывает в другой ветви cd этой цепи ток $\dot{I}_{cd} = \dot{I}$, то такая же эдс $\dot{E}_{cd} = \dot{E}$, действуя в ветви cd , при отсутствии прочих эдс вызовет в ветви ab такой же ток $\dot{I}_{ab} = \dot{I}$ » (рис. 1).

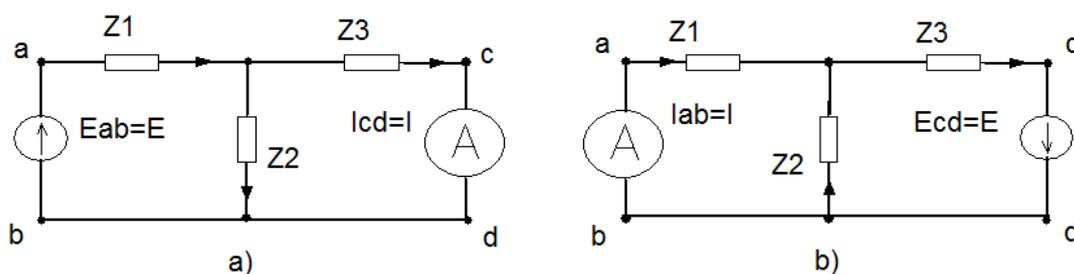


Рис. 1. Иллюстрации к теореме взаимности

Запишем два комплекта значений переменных, измеренных на одной и той же электрической цепи, но при разном расположении источника эдс и амперметра, рис. 1а и рис. 1б: E_{ab}^a, I_{cd}^a ; E_{cd}^b, I_{ab}^b . Если свойство взаимности существует, то значения переменных, отмеченных выше, должны отвечать пропорции (1). Другими словами, во сколько отличаются значения эдс, во столько же отличаются значения токов:

$$\frac{E_{ab}^a}{E_{cd}^b} = \frac{I_{cd}^a}{I_{ab}^b}. \quad (1)$$

Из этой пропорции следует равенство мощностей (2):

$$E_{ab}^a \cdot I_{ab}^b = E_{cd}^b \cdot I_{cd}^a. \quad (2)$$

Таким образом, если значения эдс выбраны равными, то и значения токов должны быть равны.

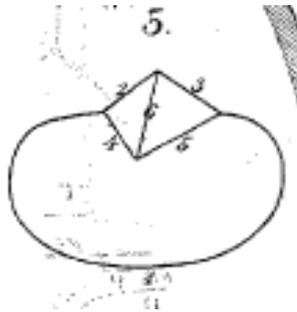
Доказательство теоремы взаимности в статье Кирхгофа приведено достаточно фрагментарно, поэтому его надо восстанавливать так, как был

воссоздан сам метод решения системы уравнений [4], предложенный Кирхгофом в [1]. Прежде всего, внимательно рассмотрим иллюстрации к статье [1], чтобы точно представлять «систему проводников», на которой Кирхгоф проверял свои теоретические выводы.

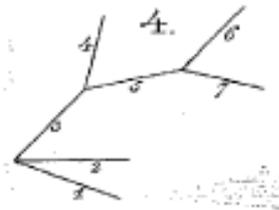
Отметим, во-первых, что рисунки располагаются на отдельной странице вместе с иллюстрациями, относящимися к работе другого автора. Наверное, такое размещение было связано с тогдашней технологией создания «графической» печатной матрицы. Процесс изготовления матрицы иллюстраций был очень трудоемким, так как изображение каждого рисунка надо было вырезать на доске грушевого дерева. Вероятно, страницы с рисунками печатались отдельно от текста, а поэтому издатели журнала старались минимизировать число «графических» печатных матриц. Так, на странице, которая соответствует статье Кирхгофа, располагаются 13 рисунков.

Иллюстрации [1] получили следующие обозначения:

— доска V, фигура 5



— доска V, фигура 4



Фигура 5 представляет собой граф схемы моста Уинтстона, фигура 4 — способ последовательного соединения узловых множеств [5] с помощью смежных ветвей. В тексте статьи приведены узловые множества ветвей: «проводники 1, 2, 3 сходятся в одной точке, проводники 3, 4, 5 — в другой точке и проводники 5, 6, 7 — в третьей точке» [2]. Заметим, что граф моста Уинтстона содержит только шесть ветвей, поэтому цифра 7 — ошибочная.

Если вместо цифры 2 на доске была ошибочно вырезана цифра 7, то множества ветвей независимых узлов можно записать так:

$$T_1 = \{1, 2, 3\}; \quad T_2 = \{3, 4, 5\}; \quad T_3 = \{5, 6, 2\}. \quad (3)$$

Граф, представленный на доске V, фигура 5, содержит совсем другие множества ветвей независимых узлов:

$$T'_1 = \{2, 3, 6\}; T'_2 = \{4, 5, 6\}; T'_3 = \{1, 3, 5\}. \quad (3')$$

Остановимся на варианте узловых схемных множеств (3), так как они позволяют полностью реализовать графическое построение, показанное на доске V, фигура 4. Среди ветвей этих схемных множеств выделим три, которые не повторяются дважды 1, 4, 6. Эти ветви принадлежат четвертому узлу графа и являются остовом (деревом) графа. Оставшиеся ветви 2, 3, 5 являются связями, образуя контура. Если ветви связи подключать поочередно, одновременно фиксируя образующиеся контура, то в результате получится система независимых контуров.

Иллюстрации статьи [1] заменим согласованными между собой. Граф схемы после уточнений показан на рис. 2. Ветви дерева изображены толстыми линиями, узел 4 — корень дерева — обозначен как общий.

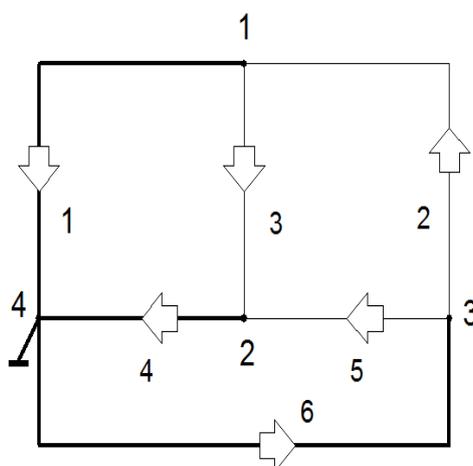


Рис. 2. Граф схемы моста Уинстона

Построение, намеченное на доске V, фигура 4, производим по узловым схемным множествам (3) с учетом условных направлений тока (рис. 3). Узлы графа отмечены более крупными цифрами, чем ветви. Возможно, выявленные неточности в иллюстрациях и тексте [1] были вызваны разделением труда между наборщиком текста и гравировщиком.

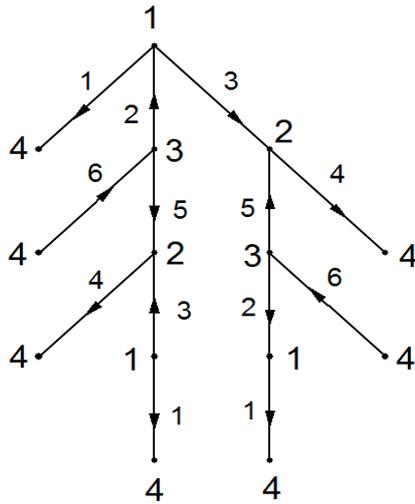


Рис. 3. Алгоритм присоединения узловых множеств

Для решения линейных алгебраических уравнений использовался метод Г. Крамера, в котором любая неизвестная

$$I_{\lambda} = \frac{\Delta_{\lambda}}{\Delta}, \quad (4)$$

где Δ — определитель системы уравнений; Δ_{λ} — определитель, у которого вместо столбца λ поставлен столбец правых частей.

Кирхгоф понимал, что для сложных систем определители формулы (4) могут быть слишком громоздкими из-за значительного числа слагаемых. Чтобы решение уравнений стало возможным, Кирхгоф предложил упрощение выражений числителя и знаменателя.

Одновременно с алгебраическим выражением должен упрощаться граф. На первом этапе решения его предлагалось упрощать до единственного контура, который содержит ветвь искомого тока λ . Оставшийся контур описывается уравнением по второму закону Кирхгофа, из которого можно найти некоторое приближение тока I_{λ} . В графе для любой переменной таких контуров достаточно много.

Приведем систему контуров содержащих искомым ток I_1 (рис. 4). Каждый из восьми контуров рис. 4 описывается по второму закону Кирхгофа, из каждого уравнения находится выражение для искомого тока, численное значение тока будет первым приближением к точному решению. Второе приближение значения тока ветви 1 получаем после добавления

в числитель и знаменатель выражения по одному параметру ветви-связи. Восстановление выражений определителей производится последовательным умножением числителя и знаменателя на параметры ветвей, удаленных ранее. Эти ветви восстанавливаются в графе.

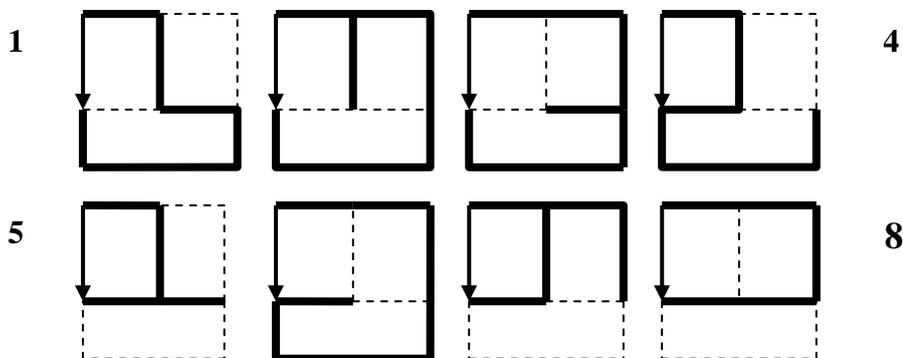


Рис. 4. Контурные схемы рис. 2, содержащие ветвь 1

На рис. 4, кроме ветвей контура, присутствуют «лишние» ветви. Наличие этих ветвей позволяет различать графы, контура которых состоят из одних и тех же ветвей. Кроме того, эти ветви не будут потеряны при восстановлении структуры исходного графа. После восстановления всех ранее удаленных ветвей получаем восемь частичных решений для первого тока, которые остается объединить операцией объединения множеств.

Доказательство теоремы взаимности Кирхгоф начинается с выбора двух ветвей в одном из контуров рис. 4: «...остается только одна замкнутая фигура и что в эту фигуру входят и проводник λ , и проводник k » [2]. Для нашего примера это ветвь 1 и еще одна, например, ветвь 2. Далее «Отсюда среди прочего следует»... и доказательство обрывается.

Попробуем это понять. Запишем выражение для тока первой ветви в одном из контуров графа электрической цепи, рис. 2:

$$I_1^b = I_{126}^k = \frac{E_{126}^k}{R_1 + R_2 + R_6} = \frac{E_{126}^k}{R_{126}^k}, \quad (5)$$

где E_{126}^k — контурная ЭДС — сумма ЭДС ветвей контура; R_{126}^k — собственное сопротивление контура. Очевидно, что перенос источника E_1 из ветви 1 в ветвь 2 (с сохранением знака) не повлияет на величину контурного тока I_{126}^k , поэтому, если источник будет в ветви 1 или в ветви 2, его

влияние на другую ветвь будет одним и тем же. Для изолированного контура графа и половины контуров на рис. 4 это доказывать не надо.

Исходя из представлений о связности электрической цепи, очевидно, что если передаточное сопротивление от ветви 1 к ветви 2 и в обратном направлении — от ветви 2 к ветви 1 будет иметь одно и то же значение, то теорему тоже доказывать не нужно. Думается, что подобная мысль остановила Кирхгофа от дальнейших рассуждений.

Слагаемые определителей формулы (4) Кирхгоф воспринимал как «сочетание элементов» — параметров электрической цепи. Для графа на рис. 2 число «сочетаний» из числа ветвей графа по числу сомножителей в слагаемом определителя знаменателя формулы (4) равно 20. Алгоритм получения сочетаний автор не привел, хотя указал на узловы́е схемные множества (3) как исходный материал. Кирхгоф не писал, что полученные сочетания должны представлять собой деревья графа, но подсказал алгоритм получения «запрещенных» сочетаний (рис. 3). Если на рис. 3 замкнуть попарно общие узлы 4, то получим контуры: $\{1,2,6\}$, $\{1,3,4\}$, $\{4,5,6\}$. Если замкнуть узлы 1, то получим еще один контур: $\{2,3,5\}$. Без этих четырех контуров число «разрешенных» сочетаний будет равно 16-ти, то есть числу деревьев графа рис. 2.

Не все слова этой статьи взяты у Кирхгофа, но идеи и направление мысли сохранены, так как классиков надо читать буквально и даже разбирать их ошибки, которые часто содержат удивительные догадки. Теорема взаимности является первым шагом к другому, более общему утверждению — к теореме Зеляха-Теллегена о псевдомощностях [6].

Список литературы

1. Kirchhoff G. R. Ueber die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Vertheilung galvanischer Ströme geführt wird // Ann. Phys.. — 1847. — Bd. 72. — S. 498–508.

2. Кирхгоф Г. О решении уравнений, к которым приводит изучение линейного распределения гальванических токов // Г. Кирхгоф. Избранные труды. — М. : Наука, 1988. — С. 170–178.

3. Нейман Л. Р., Демирчян К. С. Теоретические основы электротехники: В 2-х т. Т. 1. — Л. : Энергоиздат, 1981. — 536 с.

4. Ерохов И. В. Реконструкция первого топологического метода расчета, созданного Г. Кирхгофом // Тр. Международ. конф. «Континуальные алгебраические логики, исчисления и нейроинформатика в науке, технике и экономике». — Ульяновск : УлГТУ, 2006. — Т. 3. — С. 76–83.

5. Максимович Н. Г. Методы топологического анализа электрических цепей. — Львов : Изд. Льв. универ., 1970. — 258 с.

6. Ерохов И. В., Филаретов В. В. Теорема Зеляха-Теллегена / Синтез, анализ и диагностика электронных цепей : Международ. сб. науч. трудов / под ред. В. В. Филаретова. — Ульяновск : УлГТУ, 2008. — Вып. 6. — С. 6–14.

Ерохов Игорь Васильевич — профессор, канд. техн. наук, Запорожье (Украина).

E-mail: yerokhov@bigmir.net.

НАУЧНЫЕ ШКОЛЫ

*«Не только точные науки
Определяют мою суть...
И лиры сладостные звуки
Всегда волнуют мою грудь»*
В. А. Андреев

РЕЛЕЙНАЯ ЗАЩИТА ЭЛЕКТРООБОРУДОВАНИЯ И ВАСИЛИЙ АНДРЕЕВИЧ АНДРЕЕВ

Ученый и поэт. «Я с детства писал стихи и не оставил это занятие в зрелом возрасте. Среди них есть посвященные институту и студентам. Например: «Плоды просвещения» и «Студенческие страдания». Всегда считал, что между преподавателями и студентами должен быть диалог, и старался снимать излишнюю напряженность на занятиях и экзаменах. Читал им свои стихи, слушал их ответные. Почему нет, если такие методы идут на пользу?»

Поэтическая эстетика ученого повышала качество его научной продукции, способствовала живости и доступности изложения. Неслучайно, по «совместительству» поэт и публицист, профессор Андреев более 40 лет успешно сотрудничал с издательством «Высшая школа». Под редакцией В. А. Андреева, при его непосредственном участии и им лично был написан ряд вузовских учебников, в частности известный в России и странах ближнего зарубежья учебник «Релейная защита и автоматика систем электроснабжения» для студентов, обучающихся по специальности «Электроснабжение». В учебниках широко использованы результаты научных исследований, проводимых под его руководством.

Заседания секции электротезники под руководством профессора Андреева проходили очень интересно. Например, предваряя выступление одного аспиранта, Василий Андреевич восторженно произнёс: «Послушайте, как звучит: анализ электрических цепей в координатном базисе звёздного дерева». На оценку выступлений докладчиков оказывало влияние восприятие научного слога председателем и аудиторией. Прямо по Гегелю:

«форма содержательна, содержание оформлено». Комментарии Василия Андреевича — по существу и с историческим экскурсом — оживляли заседание и оставались в памяти присутствующих.

Старт в Киргизии — распределительные электрические сети. Характерным для В. А. Андреева является плодотворное сочетание административной, научной, педагогической и общественной работы. Во Фрунзенском политехническом институте он организовал и возглавил кафедру «Электрические станции». Под его руководством были созданы лабораторная база кафедры, методическое обеспечение учебного процесса, а также условия для научно-исследовательской работы.

В период работы В. А. Андреева в Киргизии шло формирование Киргизской академии наук и он, как проректор по научной работе политехнического института, много сделал для организации совместных с академией научных исследований, развития вузовской науки и подготовки научных кадров. Сейчас Фрунзенский (Бишкекский) политехнический институт — крупное высшее учебное заведение Средней Азии.

Релейная защита и автоматика. Основной областью научной деятельности профессора В. А. Андреева была релейная защита и автоматика систем электроснабжения. Им создана научная школа, которая занимается проблемами повышения надежности и экономичности систем электроснабжения путем их комплексной автоматизации. Имя профессора В. А. Андреева и его учеников широко известно в России и в странах ближнего зарубежья по работам в области релейной защиты для линий 6–10 кВ и ВЛ–0,38 кВ сельскохозяйственного назначения, а также стреляющих предохранителей, которые экспонировались на ВДНХ СССР.

В Ульяновском государственном техническом университете В. А. Андреев был одним из организаторов и первым заведующим кафедры «Электроснабжение промышленных предприятий и городов», которой руководил четверть века. В процессе формирования кафедры складывалась научная школа проф. В. А. Андреева с единым научным направлением «Повышение надежности и экономичности функционирования систем электроснабжения путем оптимизации их схем, совершенствования существующих, разработки и внедрения новых устройств защиты, автоматизации и телемеханики», позволившим организовать аспирантуру и успешно готовить научные кадры.



Андреев Василий Андреевич (01.01.1923–26.08.2014)

Основной состав кафедры — бывшие аспиранты проф. В. А. Андреева. Работы, проводимые проф. В. А. Андреевым и его учениками в рамках единого научного направления имеют важное народнохозяйственное и социально-культурное значение. Это направление являлось составной частью целевой комплексной программы на 1986–1990гг. «Разработка методов и средств экономии электроэнергии и повышения ее качества в электроэнергетических системах» (приказ №101 Минвуза СССР от 9.02.1986 г.), а также региональной научно-технической программы на

1986–1990гг. «Комплексное использование энергоресурсов Поволжья» (приказ №99 Минвуза РСФСР от 06.02.1986г.).

Имя проф. Андреева В. А. и его учеников широко известно в России и в странах ближнего зарубежья по работам в области совершенствования плавких предохранителей. Им принадлежат оригинальные разработки устройств релейной защиты для сетей 6–10 кВ и ВЛ–0,38 кВ, исследования и расчеты режимов сетей до 1 кВ.

Проф. В. А. Андреевым впервые высказана и реализована идея создания управляемых предохранителей. На их основе совместно с учениками разработаны устройства защиты и коммутации, не имеющие аналогов в мировой электроэнергетике для электроустановок напряжением 0,4–110 кВ.

Теоретически обоснована и практически реализована возможность создания у нас в стране жидкометаллических самовосстанавливающихся предохранителей. Впервые высказана и реализована идея использования этих предохранителей для защиты тиристорных пускателей и аппаратов, выполненных на их основе; теоретически обосновано и подтверждено использование токов третьей гармонической составляющей для выполнения быстродействующей защиты линий 10 кВ.

Решен широкий круг задач в области совершенствования устройств релейной защиты и телемеханики распределительных электрических сетей, а также защиты, выполненной плавкими предохранителями и автоматическими выключателями. В. А. Андрееву и его ученикам принадлежат оригинальные разработки камер гашения, позволяющих значительно повысить коммутационную способность выхлопных предохранителей. По результатам исследований получены авторские свидетельства, созданы устройства защиты и коммутации. Отдельные разработки внедрены на предприятиях Москвы, Казани, Набережных Челнов, Ульяновска, отмечены медалями и дипломами ВДНХ.

В основу предохранителей напряжением 35 кВ, выпускаемых отечественной промышленностью, положены разработки и авторские свидетельства В. А. Андреева и его учеников. Работа по совершенствованию предохранителей обобщена в единственной в своем роде монографии «Управляемые плавкие предохранители» [8]. Под руководством проф. В. А. Андреева подготовлено и защищено девять диссертаций на соиска-

ние ученой степени кандидата технических наук. Опубликовано единолично и в соавторстве более 100 статей и получено 26 авторских свидетельств.

Результаты научных исследований внедрены в учебный процесс и использованы проф. В. А. Андреевым при написании учебников и учебных пособий [2–6, 9, 11, 13, 15–19]. Оригинальный подход к единству учебной и научной работы с использованием результатов собственных научных исследований проф. В. А. Андреев изложил в монографии [10].

Первый учебник В. А. Андреева — «Релейная защита распределительных электрических сетей» (в соавторстве с В.Л. Фабрикантом) вышел в 1965 году [2]. Спустя шесть лет увидел свет задачник по релейной защите в соавторстве В. А. Андреева [3]. Первое издание знаменитого учебника «Релейная защита, автоматика и телемеханика в системах электроснабжения» (в соавторстве с Е. В. Бондаренко) опубликовано в 1975г. [4].

Последующие пять изданий этого учебника В. А. Андреев подготовил самостоятельно [5, 6, 15–17]. Третье издание — «Релейная защита и автоматика систем электроснабжения» увидело свет в 1991г. [6], а в 1993г. было представлено к защите в качестве докторской диссертации [7].

Признание общественностью заслуг В. А. Андреева в области науки и техники неоднократно отмечалось в положительных рецензиях на его учебники в журналах «Известия вузов. Энергетика» (1997, №2 и №3) и «Промышленная энергетика» (1992, №8 и №9), а также публикацией с поздравлением энергетиков к его семидесятилетию («Промышленная энергетика», 1993, №5).

Указом Президента ему присвоено почетное звание «Заслуженный деятель науки Российской Федерации». Научно-педагогическая и организаторская работа В. А. Андреева — верного сына Отечества — сочеталась с разносторонней общественной деятельностью.

ОСНОВНЫЕ ОПУБЛИКОВАННЫЕ РАБОТЫ

Учебники, пособия, монографии

1. Андреев В. А. Поперечные дифференциальные защиты параллельных линий : автореф. дис. на соиск. учен. степ. канд. техн. наук; Моск. энерг. ин-т. — Москва, 1955. — 20 с.
2. Андреев В. А., Фабрикант В. Л. Релейная защита распределительных электрических сетей : учебник для вузов. — Москва : Высш. шк., 1965. — 484 с.
3. Задачник по релейной защите : учебное пособие / В. Л. Фабрикант, В. А. Андреев, Е. В. Бондаренко; под ред. В. Л. Фабриканта. — Москва : Высш. шк., 1971. — 608 с.
4. Андреев В. А. Бондаренко Е. В. Релейная защита, автоматика и телемеханика в системах электроснабжения : учебник для вузов / под ред. В. А. Андреева. — Москва : Высш. шк., 1975. — 375 с.
5. Андреев В. А. Релейная защита, автоматика и телемеханика в системах электроснабжения : учебник для вузов. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Высш. шк., 1985. — 391 с.
6. Андреев В. А. Релейная защита и автоматика систем электроснабжения : учебник для вузов. — 3-е изд., перераб. и доп. — Москва : Высш. шк., 1991. — 496 с.
7. Андреев В. А. Релейная защита и автоматика систем электроснабжения : автореф. дис. на соиск. учен. степ. д-ра техн. наук; Ульян. политехн. ин-т. — Новосибирск, 1993. — 45 с.
8. Андреев В. А., Лаушкин Н. Р., Плиско А. Л. Управляемые плавкие предохранители. — Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1995. — 202 с.
9. Андреев В. А., Шишкин В. Ф. Короткие замыкания и перегрузки в сетях напряжением до 1 кВ и защита от них : учебное пособие. — Ульяновск : УлГТУ, 1996. — 87 с.
10. Андреев В. А. Исследование, разработка и внедрение устройств комплексной автоматизации систем электроснабжения — единый процесс научной и учебной работы. — Ульяновск : УлГТУ, 1998. — 141 с.
11. Андреев В. А. Релейная защита и автоматика систем электроснабжения : учебное пособие. Разд. 1. — Ульяновск : УлГТУ, 2000. — 283 с.

12. Андреев В. А. Расчет режимов и релейная защита воздушных линий электрических сетей напряжением до 1 кВ / В. А. Андреев, А. Л. Дубов, В. Ф. Шишкин. — Ульяновск : УлГТУ, 2001. — 103 с.

13. Андреев В. А. Релейная защита систем электроснабжения в примерах и задачах : учебное пособие. — Ульяновск : УлГТУ, 2001. — 164 с.

14. Андреев В. А. Бондаренко Е. В., Шишкин В. Ф. Пути совершенствования защиты электрических сетей с изолированной нейтралью. — Ульяновск : УлГТУ, 2002. — 147 с.

15. Андреев В. А. Релейная защита и автоматика систем электроснабжения : учебник для вузов. — 4-е изд., перераб. и доп. — Москва: Высш. шк., 2006. — 639 с.

16. Андреев В. А. Релейная защита и автоматика систем электроснабжения : учебник для вузов. — 5-е изд., стер. — Москва : Высш. шк., 2007. — 639 с.

17. Андреев В. А. Релейная защита и автоматика систем электроснабжения : учебник для вузов.. — 6-е изд., стер. — Москва : Высш. шк., 2008. — 639 с.

18. Андреев В. А. Релейная защита систем электроснабжения в примерах и задачах : учебное пособие для вузов. — Москва : Высш. шк., 2008. — 252 с.

19. Андреев В. А. Релейная защита и автоматизация электроэнергетических систем : учебное пособие для студентов направл. «Электроэнергетика и электротехника (Электроснабжение)». — Ульяновск : УлГТУ, 2014. — 283 с.

Начало научного пути: релейная защита линий электропередачи

20. Андреев В. А. Влияние емкостной проводимости линий электропередач на зоны каскадного действия поперечных дифференциальных защит // Тр. Фрунз. политехн. ин-та. — Фрунзе, 1957. Вып. 1. — С. 41–46.

21. Андреев В. А. Использование одноэлементного реле направления мощности в качестве пускового органа и органа направления в комплекте от междуфазовых замыканий поперечной дифференциальной направленной защиты двух параллельных линий // Тр. Фрунз. политехн. ин-та. — Фрунзе, 1957. — Вып. 1. — С. 47–53.

22. Андреев В. А. Комбинированная поперечная дифференциальная защита двух параллельных линий // Тр. ин-та энергетики и водного хоз-ва АН Кирг. СССР. — Фрунзе, 1957. — Вып. 4. — С. 207–213.

23. Андреев В. А. Балансная токовая защита трех параллельных линий // Электричество. — 1958. — №1. — С. 39–44.

24. Андреев В. А. Схемы поперечной дифференциальной защиты двух параллельных линий, обладающие селективностью при сложных повреждениях с обрывами // Известия вузов. Энергетика. — 1958. — №5. — С. 1–10.

25. Андреев В. А. Некоторые особенности релейной защиты Чехословакии // Энергетика. Механика. Физика. Математика. — Фрунзе, 1962. — С. 7–14. — (Тр. Фрунз. политехн. ин-та ; вып. 6).

26. Андреев В. А. Токовая защита, выполненная первичными реле прямого действия // Энергетика. Механика. Физика. Математика. — Фрунзе, 1962. — С. 89–105. — (Тр. Фрунз. политехн. ин-та ; вып. 6).

27. Андреев В.А. Сравнительный анализ пусковых органов поперечной дифференциальной направленной защиты двух параллельных линий // Тр. Фрунз. политехн. ин-та. — Фрунзе, 1964. — Вып. 10. — С. 3–19.

Ульяновская школа релейной защиты электроснабжения

28. О целесообразности применения управляемых предохранителей / В. Л. Фабрикант, В. А. Андреев, Я. Ф. Кузьмин, В. М. Блок, Г. В. Логинов, А. Я. Зотов // Электричество. — 1968. — №8. — С. 66–69.

29. Андреев В. А. Зотов А. Я., Федоров А. П. К вопросу об исследовании удельной повреждаемости выключателей // Электрические станции. — 1970. — №6. — С. 44–47.

30. Гринин Ф. Н. Зотов А. Я., Андреев В. А. Опыт эксплуатации управляемых предохранителей УПСН-35 // Электрические станции. — 1972. — №6. — С. 69–71.

31. Выбор и опыт эксплуатации плавких вставок новой конструкции для предохранителей ПСН-35 / В. А. Андреев, Ф. Н. Гринин, А. Я. Зотов, А. П. Федоров // Электрические станции. — 1973. — №4. — С. 87–88.

32. Андреев В. А., Зотов А. Я., Федоров А. П. Управляемый предохранитель УПСН-35 и экономическая эффективность его применения // Электричество. — 1973. — №5. — С. 86–88.

33. Андреев В. А., Булычев А. В., Крежевский Ю. С. Об улучшении характеристик предохранителей для защиты маломощных трансформаторов // Электрические станции. — 1975. — №2. — С. 62–63.
34. Андреев В. А., Лаушкин Н. Р. Управляемый кварцевый предохранитель и его применение // Электрические станции. — 1975. — №7. — С. 49–51.
35. Андреев В. А., Енин А. С. К вопросу совершенствования управляемых предохранителей типа УПСН // Изв. вузов. Энергетика. — 1979. — №4. — С. 37–40.
36. Андреев В. А., Марулин Ю. М. Быстродействующая защита сельских линий напряжением 10 кВ // Изв. вузов. Энергетика. — 1981. — №7. — С. 16–20.
37. Андреев В. А., Долгов А. А., Енин А. С. Устройство телесигнализации для сельских распределительных сетей // Изв. вузов. Энергетика. — 1981. — №6. — С. 29–32.
38. Андреев, В. А., Плиско А. Л. Области применения различных модификаций управляемых предохранителей на подстанциях упрощенного типа // Известия вузов. Энергетика. — 1982. — №7. — С. 86–88.
39. Андреев В. А. Выбор плавких вставок стреляющих предохранителей и определение области их применения в качестве защиты трансформаторов // Изв. вузов. Энергетика. — 1984. — №3. — С.16–21.
40. Андреев В. А., Крежевский Ю. С., Кузнецов А. В. О выборе материала диэлектрической втулки и жидкого металла для самовосстанавливающихся предохранителей // Известия вузов. Электромеханика. — 1984. — №11. — С. 84–89.
41. Андреев В. А., Долгов А. А., Енин А. С. Пути совершенствования систем телеотключения упрощенных подстанций // Известия вузов. Электромеханика. — 1984. — №5. — С. 112–114.
42. Андреев В. А., Бондаренко Е. В., Бондаренко Л. С. Контроль изоляции в сетях с изолированной или компенсированной нейтралью без использования трансформатора напряжения // Изв. вузов. Энергетика. — 1985. — №4. — С. 8–13.

43. Световая система управления автогазовыми выключателями (управляемыми предохранителями) / В. А. Андреев, А. С. Енин, А. Л. Плиско, И. У. Никоненко // Изв. вузов. Энергетика. — 1986. — №2. — С. 42–45.

44. Андреев В. А., Кузнецов А. В. Основные проблемы создания жидкометаллических самовосстанавливающихся предохранителей и возможная область их применения // Известия вузов. Энергетика. — 1987. — №6. — С. 42–44.

45. Андреев В. А., Дубов А. Л., Шишкин В. Ф. Влияние заземляющих устройств нулевого провода на токи нулевой последовательности в воздушных сетях напряжением 0,35 кВ // Электричество. — 1989. — №12. — С. 54–56.

46. Андреев В. А., Кузнецов А. В. Защита тиристорных аппаратов управления с помощью самовосстанавливающихся предохранителей // Промышленная энергетика. — 1990. — №5. — С. 24–27.

47. Андреев В. А., Шишкин В. Ф., Дубов А. Л. Методика определения параметров схемы нулевой последовательности воздушных линий 0,38 кВ // Промышленная энергетика. — 1990. — №8. — С. 26–27.

48. Андреев В. А., Кузнецов А. В. Анализ быстродействия жидкометаллических и обычных предохранителей // Промышленная энергетика. — 1991. — №12. — С. 22–25.

49. Андреев В. А., Шишкин В. Ф., Дубов А. Л. Методика расчета режимов воздушных линий 0,38 кВ // Промышленная энергетика. — 1991. — №2. — С. 27–29.

50. Андреев В. А., Шишкин В. Ф., Дубов А. Л. Учет заземляющих устройств нулевого провода в расчетах токов однофазного КЗ ВЛ 0,38 кВ // Известия вузов. Энергетика. — 1991. — №3. — С. 15–20.

51. Андреев В. А., Дубов А. Л., Шишкин В. Ф. О целесообразности применения токовой защиты обратной последовательности на ВЛ 0,38 кВ // Промышленная энергетика. — 1993. — №4. — С. 31–33.

52. Андреев В. А., Дубов А. Л., Шишкин В. Ф. Оптимизация защитных характеристик предохранителей на напряжение 35 кВ // Промышленная энергетика. — 1994. — №9. — С. 27–32.

53. Андреев В. А., Овсиенко Л. Ф. О дистанционном замере токов в воздушных четырехпроводных линиях 0,4 кВ // Промышленная энергетика. — 1995. — №7. — С. 26–29.

54. Андреев В. А., Овчаренко Н. И. Цифровое направленное реле сопротивления прямой последовательности без мертвой зоны // Электротехника. — 2001. — №5. — С. 32–34.

Рецензии и дискуссии

55. Андреев В. А. Рецензия на монографию: Фабрикант В. Л. Теория обмотки реле переменного тока (Москва, 1958) // Электричество.— 1959. — №1. — С. 94–95.

56. О целесообразности применения управляемых предохранителей : (ответ авторов) / В. Л. Фабрикант, В. А. Андреев, Я. Ф. Кузьмин, В. М. Блок, Г. В. Логинов, А. Я. Зотов // Электрооборудование и автоматизация промышленных установок. — 1971. — №5. — С. 93–94.

57. Андреев В. А., Бондаренко Е. В. Рецензия на учебник «Элементы автоматических устройств» (В. Л. Фабрикант [и др.]. — Москва, 1981) // Известия вузов. Энергетика. — 1983. — №5. — С. 118–119.

58. Андреев В. А. Учить самостоятельности: о статье Р. И. Борисова «Каким быть инженеру — электроэнергетику») // Известия вузов. Энергетика. — 1987. — №9. — С. 124–125.

59. Андреев В. А., Бондаренко Е. В., Шишкин В. Ф. Сквозное комплексное курсовое проектирование — элемент перестройки учебного процесса по специальности «Электроснабжение пром. предприятий, городов и с.-х.» // Известия вузов. Энергетика. — 1988. — №5. — С. 116–119.

60. Андреев В. А., Темников Ф. Е. О двух монографиях по технике автоматического управления и защиты электроэнергетических систем // Электричество. — 1992. — №9. — С. 68–69.

61. Андреев В. А., Шишкин В. Ф., Дубов А. Л. По поводу статьи «Распределение токов нулевой последовательности в фидерах, отходящих от общего распределительного пункта, при замыканиях на землю» // Промышленная энергетика. — 1994. — №8. — С. 51–52.

62. Андреев В. А., Шишкин В. Ф., Дубов А. Л. По поводу статьи «К вопросу о сопротивлениях нулевой последовательности ВЛ 0,4 кВ» // Промышленная энергетика. — 1989. — №7. — С. 52–54.

63. Андреев В. А., Шишкин В. Ф. О новом ГОСТе 28249-93 «Короткие замыкания в электроустановках. Методы расчета в электроустановках переменного тока напряжением до 1кВ» // Промышленная энергетика. — 1996. — №11. — С. 31–36.

64. Андреев В. А., Шишкин В. Ф. По поводу статьи «О поперечной защите параллельных линий» // Промышленная энергетика. — 1996. — №6. — С. 40–44.

65. Андреев В. А., Боровиков М. А. Электрификация Ульяновской области и подготовка инженеров-электриков в Ульяновском государственном техническом университете // Электротехника. — 2001. — №5. — С. 1–2.

Дубов А. Л., Кузнецов А. В., Филаретов В. В.

СОДЕРЖАНИЕ

Ученый, педагог, организатор: о Василии Андреевиче Андрееве	3
<i>Анализ и преобразования электронных цепей</i>	
Ерохов И. В.	Значение операторов Кирхгофа, введенных Пенфилдом 6
Булавочкин В. П.	Преобразования переноса второго рода как коррекция параметров обратной матрицы в диакоптите электрических цепей 15
Недорезов М. В., Филаретов В. В.	Неявное выделение параметров управляемых источников в программе CIRSYM 21
Курганов С. А., Соловьев В. А.	Об аналитическом расчете переходных процессов при несимметричных замыканиях в трехфазных электрических цепях с взаимоиנדуктивностями 35
Горшков К. С., Курганов С. А., Филаретов В. В.	Оптимизация полиномиальных функций чувствительности линейных электрических цепей 45
Курганов С. А., Прокофьев И. А.	Нахождение начальных условий в классическом методе анализа электрических цепей с помощью программы CIRSYM 58
Шушпанов Д. В., Лучанский О. Д.	Аналитический метод расчета резистивных цепей с идеальными диодами 68
Шушпанов Д. В., Улитина А. С.	Аналитический метод расчета резистивных цепей с нелинейными резистивными элементами 88
<i>Проектирование систем электроснабжения и связи</i>	
Гришкевич А. А.	Использование эмпирических распределений случайных величин в имитационных моделях надежности электроэнергетических систем 102

Кузнецов А. В., Ребровская Д. А., Чикин В. В.	Уточнение расчета технико-экономических показателей при установке компенсирующих устройств в сети потребителя	112
Канов Л. Н.	Схемное моделирование ветроэлектрических установок в системе распределенного электроснабжения	117
Догадин Н. Б.	Способы контроля санитарно-защитной зоны сети wi-fi средствами подвижной связи	126
Александров Д. С., Щербаков Е. Ф.	Контроль и испытание электроустановок стационарными и передвижными лабораториями	134

Моделирование электромагнитных устройств

Меньшов Е. Н.	Некоторые вопросы теории субстанциональной электродинамики	146
Севостьянов П. Р., Шкуропат И. А.	О пропорциях укладки листов магнитопровода при проектировании трансформаторов	151
Сидоров С. Н., Старостина Я. К.	Пускорегулирующие устройства для асинхронного электропривода с улучшенными энерго-затратными характеристиками	158

Структурный синтез

Соловьева Е. Б.	Свойства нейронных сетей в рамках принципа «черного ящика»	170
Филаретов В. В.	Единый подход к синтезу неизоморфных корневых деревьев	177
Свищёва Э. А.	Представление корневых деревьев для их синтеза без изоморфных вариантов	195
Недорезов М. В., Недорезов П. В., Филаретов В. В.	Алгоритм синтеза неизоморфных корневых деревьев в лексикографическом порядке	214

Власенко Д. М., Нестеров А. А.	Разработка и сравнение программ для генерации неизоморфных корневых деревьев	226
Недорезов П. В., Тимофеев В. Ф., Филаретов В. В.	Параллельный синтез неизоморфных корневых деревьев	236
<i>Из истории открытий</i>		
Ерохов И. В.	Теорема взаимности в творчестве Г. Кирхгофа	245
<i>Научные школы</i>		
Дубов А. Л., Кузнецов А. В., Филаретов В. В.	Релейная защита электрооборудования и Василий Андреевич Андреев	253

TABLE OF CONTENTS

Scientist, teacher, organizer: Vasily Andreyevich Andreyev	3
<i>Analysis and transformations of electronic networks</i>	
Erochov I. V.	The meaning of Kirchhoff operators proposed by Penfield 6
Bulavotskin V. P.	Transformations of the second kind as parameter correction of the inverse matrix in network analysis by parts 15
Nedorezov M. V., Filaretov V. V.	Implicit parameter extraction method of controlled sources in the program CIRSYM 21
Kurganov S. A., Solovyev V. A.	About the analytical calculation of transient processes under asymmetric faults in three-phase circuits with mutual inductances 35
Gorshkov K. S., Kurganov S. A., Filaretov V. V.	Optimization of polynomial functions the sensitivity of linear circuits 45
Kurganov S. A., Prokofyev I. A.	Finding the initial conditions in the classical method of the analysis of electric circuits with the help of a program CIRSYM 58
Shushpanov D. V., Luchansky O. D.	Analytical analysis of resistive circuits with ideal diodes 68
Shushpanov D. V., Ulitina A. S.	Analytical analysis of resistive circuits with any nonlinear resistive elements 88
<i>The design of power supply systems and communication</i>	
Grishkevich A. A.	The use of empirical distributions of random variables in models of reliability of electric power systems 102
Kuznetsov A. V., Rebrowska D. A., Chikin V. V.	Clarification of calculation of technical and economic parameters when installing compensating devices in the network consumer 112

Kanov L. N.	Circuit simulation wind power installations in the system of distributed power supply	117
Dogadin N. B.	Methods of instrumental indirect control of the hygienic protective zone frontiers of base stations of the Wi-Fi network by devices of mobile communication	126
Alexandrov D. S., Shcherbakov E.	Control and test of electrical installations by means of stationary and mobile laboratories	134

Modeling of electromagnetic devices

Menchov E. N.	Some questions of theory on substantial electrodynamics	146
Sevostyanov P. R.	About the proportions of the styling plates when designing transformers	151
Shkuropat I. A.	The start-up and controlling device for the asynchronous electric drive on the diode-transistor modules	158

Structural synthesis

Solovyeva E.	Properties of neural networks within the framework of the «black box» principle	170
Filaretov V. V.	A unified approach to the synthesis of root trees without isomorphic variants	177
Svirshchova E. A.	Performance of rooted trees for their synthesis without isomorphic variants	195
Nedorezov M. V., Nedorezov P. V., Filaretov V. V.	The synthesis algorithm for non-isomorphic root trees in lexicographical order	214
Vlasenko, D. M., Nesterov A. A.	Realization and comparison of programs to generate non-isomorphic rooted trees	226
Nedorezov P. V., Timofeev V. F., Filaretov V. V.	Parallel synthesis of non-isomorphic rooted trees	236

From the history of discovery

Erochov I. V.	The reciprocity theorem in the work of G. Kirchhoff	245
---------------	--	-----

Scientific schools

Dubov A. L., Kuznetsov A. V., Filaretov V. V.	Relay protection of electrical equipment and Vasili Andreevich Andreev	253
---	---	-----

Synthesis, analysis and diagnosis of electronic networks : The international scientific transactions. — Issue 14 / under edition V. V. Filaretov. — Ulyanovsk : Ulyanovsk state technical university, 2017. — 256 p.

The proceedings is dedicated to the memory of doctor of technical Sciences, Professor, head of Department «Power supply» (1964 to 1988), the rector of the Ulyanovsk Polytechnic University (1969 to 1980) Andreev Vasily Andreyevich (01.01.1923–26.08.2014).

This collection of scientific works continues a series of specialized collections published in Ulyanovsk State Technical University during international conferences: «Continual algebraic logic calculus and neural mathematics in science and technics», «Conference on logic, computer science, sociology of science» and «Volgin's Readings».

In this volume discusses the theoretical questions and practical application of the modern theory of electrical and electronic networks. Including: structural synthesis, synthesis of analog and digital filters, topological analysis, decomposition and transformation of electronic circuits presented nullor and mirror pathological elements.

Recommended for specialists in the field of electronic circuitry analog and mixed discrete electronic circuits, undergraduates and graduate students of corresponding specialties.

Научное электронное издание

**АНДРЕЕВ ВАСИЛИЙ АНДРЕЕВИЧ:
УЧЕНый, ПЕДАГОГ, ОРГАНИЗАТОР:**

Международный сборник научных трудов
«Синтез, анализ и диагностика электронных цепей»
Выпуск 14

Под редакцией В. В. Филаретова
Компьютерная верстка В. В. Филаретов

ЛР № 020640 от 22.10.97.

ЭИ № 1039. Объем данных 4,1 Мб.

Печатное издание

Подписано в печать 20.12.2017. Формат 60×84 ¹/₁₆.

Усл. печ. л. 15,81. Тираж 50 экз. Заказ 67.

Ульяновский государственный технический университет
432027, Ульяновск, Северный Венец, 32.
ИПК «Венец» УлГТУ 432027, Ульяновск, Северный Венец, 32.

Тел.: (8422) 778-113
E-mail: venec@ulstu.ru
venec.ulstu.ru