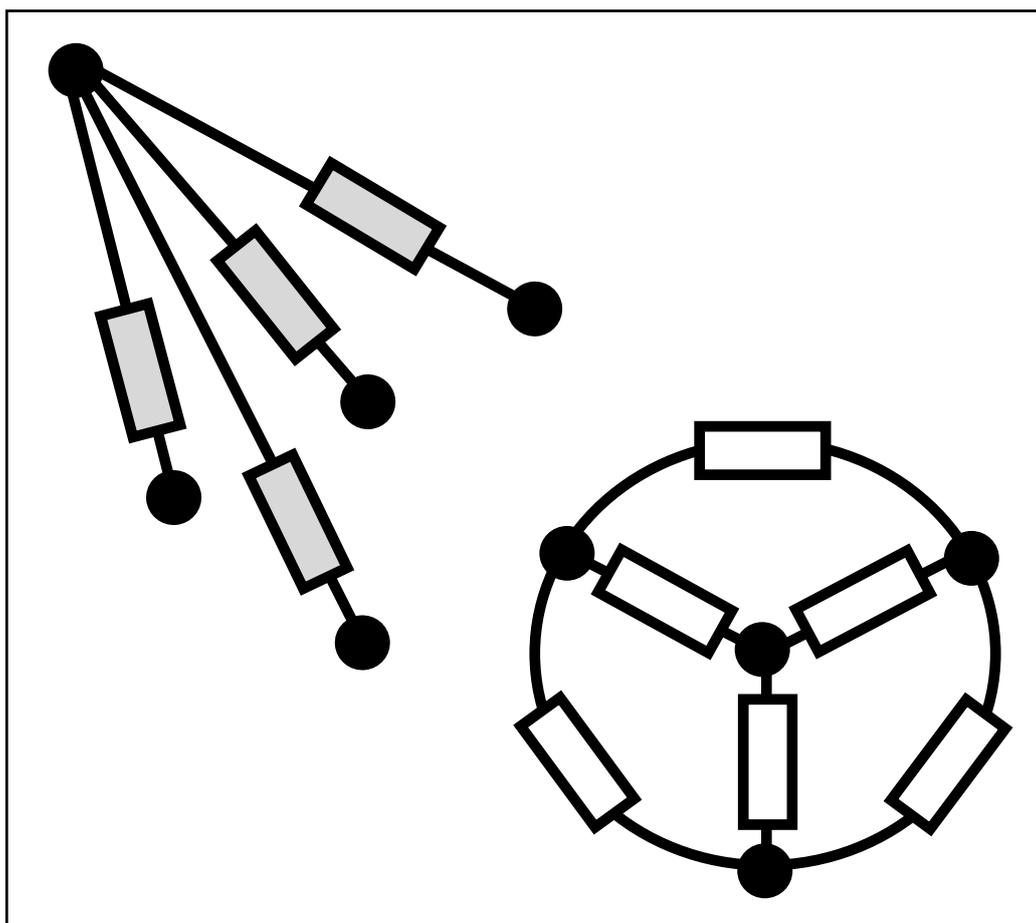


СИНТЕЗ, АНАЛИЗ И ДИАГНОСТИКА ЭЛЕКТРОННЫХ ЦЕПЕЙ

САД-2016



Ульяновск 2016

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE
OF THE RUSSIAN FEDERATION

ULYANOVSK STATE TECHNICAL UNIVERSITY

**SYNTHESIS, ANALYSIS
AND DIAGNOSIS
OF ELECTRONIC NETWORKS**

SAD-2016

Ulyanovsk 2016

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«УЛЬЯНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

СИНТЕЗ, АНАЛИЗ И ДИАГНОСТИКА ЭЛЕКТРОННЫХ ЦЕПЕЙ

Международный сборник научных трудов

Вып. 13

Ульяновск
УлГТУ
2016

УДК 516.7.24/25+519.873
ББК 32.85
С38

УДК 516.7.24/25+519.873

Синтез, анализ и диагностика электронных цепей : Международный сборник научных трудов.– Вып. 13 / под ред. В. В. Филаретова. – Ульяновск : УлГТУ, 2016. – 264 с.

Сборник продолжает серию специализированных сборников, изданных в Ульяновском государственном техническом университете (УлГТУ) в рамках международных конференций: «Континуальные логико-алгебраические исчисления и нейроматематика», «Конференция по логике, информатике, науковедению», «Волгинские чтения», «Синтез, анализ и диагностика электронных цепей», проходивших в УлГТУ в течение 2003–2015 гг.

В докладах рассматриваются теоретические вопросы и практические приложения современной теории электрических и электронных цепей, в том числе: структурный синтез и преобразования, топологический анализ и диакоптика, синтез цифровых фильтров. Обсуждаются вопросы представления электронных компонентов нулловыми и зеркальными аномальными элементами, проектирования электронных цепей и электроэнергетических систем с позиций матричного анализа, схемной алгебры и теории графов.

Рекомендуется для специалистов в области схемотехники аналоговых и аналого-дискретных электронных цепей, магистрантов и аспирантов соответствующих направлений и специальностей.

Редакционная коллегия:

Горшков К.С., канд. техн. наук (ответственный секретарь), Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики (НИУ ИТМО);

Grishkevich A., д-р техн. наук, Czestochowa university of technology (Polska);

Курганов С. А., д-р техн. наук (зам. ответственного редактора),

Мауко G., канд. техн. наук, Broadcom Corporation (USA)

Соловьева Е. Б., д-р техн. наук, СПбГЭУ – ЛЭТИ им. В.И.Ленина,

Филаретов В. В., д-р техн. наук (ответственный редактор).

Ягуп В.Г., д-р техн. наук, Харьковская национальная академия городского хозяйства

ISBN 978-5-9795-1588-5

© Авторы, 2016
© Оформление. УлГТУ, 2016

АНАЛИЗ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЭЛЕКТРОННЫХ ЦЕПЕЙ

ФОРМИРОВАНИЕ БЕЗЫЗЫТОЧНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ СХЕМНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ДИСКРЕТНО-АНАЛОГОВЫХ ЦЕПЕЙ С ПЕРЕКЛЮЧАЕМЫМИ КОНДЕНСАТОРАМИ¹

К. С. Горшков, С. А. Курганов, В. В. Филаретов

Установлено, что в функциях схем с переключаемыми конденсаторами (ПК) появляются избыточные – равные по модулю, но противоположные по знаку – пары слагаемых в виде произведения емкостей и комплексных емкостей двух разноименных ПК. Доказано, что избыточные слагаемые соответствуют определителям вырожденных схем с нуллорами. Предложено устранять избыточные подвыражения в ходе выделения параметров по методу схемных определителей.

It is established that the expressions of network functions for circuits with switched-capacitors is non free-cancelled because they contain these redundant pairs of summands as a product of capacitors and complex capacitors two different switched-capacitors. It is proved that these redundant summands correspond to the determinants of circuits with nullors. This eliminates of redundant subexpressions of network functions in the process of parameter extraction using of circuit determinant method.

О методах анализа дискретно-аналоговых цепей с переключаемыми конденсаторами (ПК). Параметрические дискретно-аналоговые схемы с ПК нашли широкое применение в системах обработки сигналов (электрических фильтрах, интеграторах, сумматорах, цифро-

¹Поддержано Российским Фондом Фундаментальных Исследований (РФФИ), заявка №15-07-05847

аналоговых и аналого-цифровых преобразователях) и телекоммуникационных АМ- и ЧМ-системах [1,2]. Символьный анализ схем с ПК [3–10], в отличие от численного анализа, позволяет выполнить параметрический синтез цепей [4], найти условия существования искомого режима [1,6] и исследовать неисправности в электрических цепях [9].

Для анализа схем с ПК в частотной области и формирования символьных схемных функций (ССФ) используется z -преобразование [11] и комплексные z -схемы замещения [1,3,6]. Комплексный оператор имеет вид $z=e^{j\omega T}$, где j – мнимая единица; ω – частота; T – период коммутации ключей.

Выражения для передаточных функций дискретно-аналоговых схем с ПК разделены по фазам [8]. На практике нашли применение двухфазные ПК (табл. 1). Как показано в [10], комплексные схемы замещения для уменьшения избыточности выражений схемных функций целесообразно строить не на двухполюсных емкостях [6,8], а на источниках тока, управляемых напряжением (ИТУН), с емкостным параметром (табл. 1) [3]. На этих и последующих схемах символами o и e обозначены сигналы в нечетные и четные интервалы времени.

Формирование ССФ осуществляется на основе матричного [9], топологического [3, 6, 7] или схемно-алгебраического [8,10] подходов, различающихся способом представления схемы в виде графа, матрицы или непосредственно схемы замещения соответственно. К матричным методам относится метод двоичных диаграмм деления [9]. Топологические и схемно-алгебраические методы отличаются от матричных методов наглядностью и, что важнее, частичным или полным устранением избыточных (взаимно уничтожающихся) слагаемых в выражениях ССФ [7]. Наличие избыточных слагаемых может привести к вычитанию двух больших приблизительно равных чисел и, как следствие, не только к численным, но и фактическим ошибкам в виде ложных полиномиальных коэффициентов.

В (1) парой вертикальных линий обозначен определитель соответствующей схемы. Схема числителя получена из схемы на рис. 1 заменой источника эдс норатором (двойная заштрихованная стрелка), а приемника напряжения – нуллатором (одинарная стрелка), а схема знаменателя – заменой источника эдс проводником [8, 12].

Для получения ССФ схемные определители в (1) раскрываются с помощью формул выделения параметров. Эти формулы для емкости C и комплексной емкости $C_z=Cz^{-1/2}$ имеют вид [8]

$$\Delta = C\Delta_C + \Delta^C; \Delta = C_z\Delta^{Cz} + \Delta_{Cz}, \quad (2)$$

где Δ , Δ_C , Δ_{Cz} , Δ^{Cz} , Δ^C – определители схем; верхние и нижние индексы означают, что в схеме удалены и стянуты (заменены проводниками) соответствующие элементы.

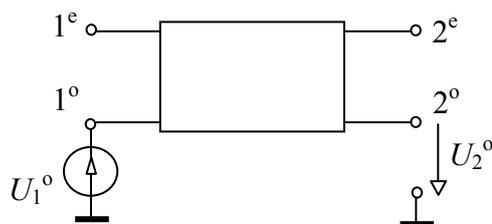


Рис. 1. Схема для определения коэффициента передачи напряжения в нечетные фазы (в прямоугольнике z -схема замещения произвольной двухфазной схемы с ПК)

Формулы выделения управляемых источников (УИ) – источников напряжения, управляемых напряжением, и ИТУН с емкостным параметром – имеют следующий вид [8,10]

$$\Delta = \chi \Delta_\chi + \Delta^\chi, \quad (3)$$

где χ – параметр УИ; Δ_χ – определитель производной схемы, полученной из исходной схемы путем замены УИ нуллором; Δ^χ – определитель производной схемы, которая образована при $\chi=0$.

Избыточные слагаемые при символьном анализе биквада Лакера-Флешера. На рис. 2 представлена схема с биквадратичной функцией передачи напряжения – биквад Лакера-Флешера [1,4–6], который содержит 2 идеальных операционных усилителя (ОУ) и 12 ПК. В

[1,4,5] рассмотрен анализ этой схемы при фиксации уровня входного напряжения в течение всего периода коммутации. При этом двухканальная z-схема замещения биквада на рис. 3 приводится к эквивалентной одноканальной схеме с учетом следующих соотношений для входных и выходных напряжений ОУ соответственно [1]

$$U_{вх}^e = z^{-1/2} U_{вх}^o; U_{вых}^e = z^{-1/2} U_{вых}^o \quad (4)$$

а передаточная функция формируется без избыточных слагаемых (символ емкости C здесь не приводится) [4]:

$$K = \frac{((d*k + d*j - a*l - a*h)*s^4 + (-2*d*k + a*l + a*g - d*j - d*i)*s^2 + d*(k+i))}{((a*e - d*b)*s^4 + (-a*e + 2*d*b - a*c + d*f)*s^2 - d*(f+b))}. \quad (5)$$

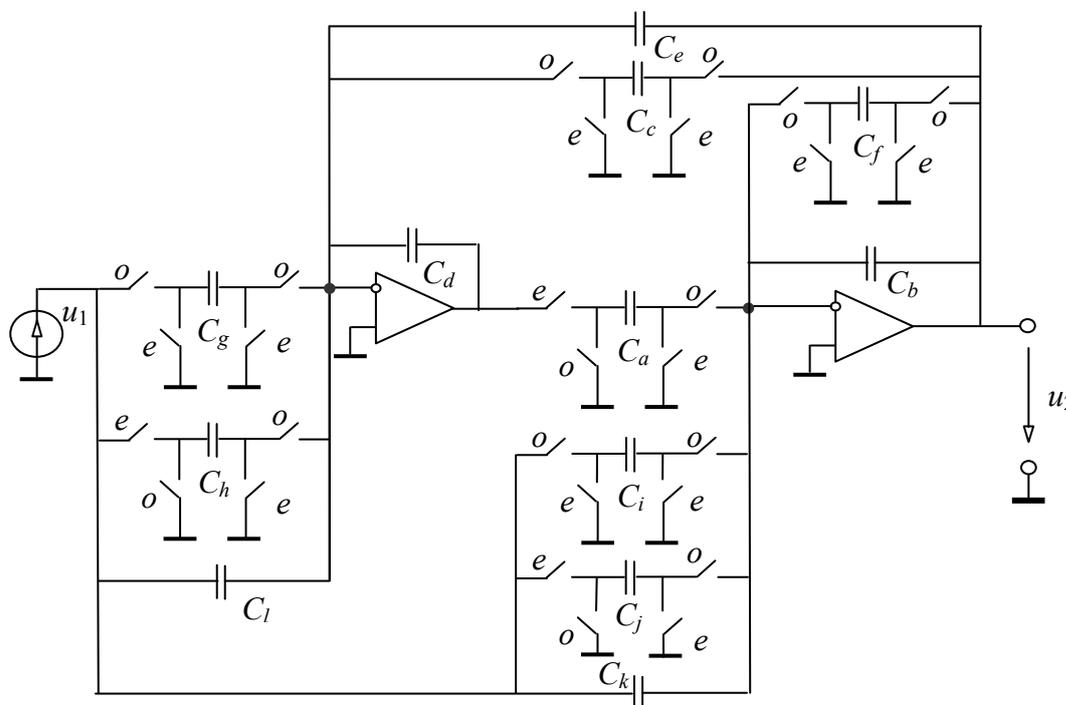


Рис. 2. Схема биквада Лакера-Флешера

Однако в произвольном случае, при анализе биквада в режиме несимметричного воздействия – при подаче напряжения только на нечетных (четных) интервалах или двукратной выборке входного напряжения – в ССФ образуются равные по модулю, но противоположные по знаку слагаемые [10]. В строках 1 и 2 табл. 2 проведено сравнение матричного метода диаграмм деления [9] с МСО по числу избыточных взаимно уничтожающихся слагаемых в выражении передаточной функции при нечетной фазе входного и выходного напряжения.

Как видно, выражение, полученное по «безызбыточному» МСО, также содержит избыточные слагаемые (строка 2 в табл. 2) [10], что указывает на существование как 10 избыточных слагаемых, обусловленных наличием одинаковых параметров в нескольких клетках матрицы, так и до сих пор не исследованных 22 избыточных слагаемых, присущих анализу схем с ПК. Целью настоящей статьи является исследование образования избыточных слагаемых, специфических для схем с ПК, и обобщение МСО для безызбыточного анализа схем на ПК.

Таблица 2. Число слагаемых в символьных выражениях коэффициента передачи биквада Лакера-Флешера, полученных по методам схемных и матричных определителей

№	Метод построения формулы	Общее число слагаемых		Действительных слагаемых		Избыточных слагаемых
		числителя	знаменателя	Числитель	Знаменатель	
1	Матричный	66	44	42	36	32
2	МСО	56	44			22
3	МСО с тождествами (7) и (8)	42	36			0

Дуальные тождества для избыточных слагаемых с параметрами двух ПК. Рассмотрим схему замещения цепи с двумя ПК C_1 и C_2 , которая содержит по одному конденсатору и одному ИТУН от каждого ПК (строка 1 в табл. 1). Определитель такой схемы имеет вид

$$\left| \begin{array}{cc} \overrightarrow{U_1} & \overrightarrow{U_2} \\ \begin{array}{c} C_1 \\ \text{ИТУН} \end{array} & \begin{array}{c} C_2 \\ \text{ИТУН} \end{array} \\ \hline sC_1 U_1 & sC_2 U_2 \end{array} \right| = sC_1 C_2 \cdot \left| \begin{array}{c} \text{ИТУН} \\ \text{ИТУН} \end{array} \right| + sC_2 C_1 \cdot \left| \begin{array}{c} \text{ИТУН} \\ \text{ИТУН} \end{array} \right| + D_o. \quad (6)$$

Первый частичный определитель в (6) получен путем выделения ИТУН с параметром sC_1 и конденсатора C_2 , а второй определитель – выделением ИТУН с проводимостью sC_2 и конденсатора C_1 . Оставшийся частичный определитель обозначен D_o . Если первый и второй частичные определители равны по модулю, но противоположны по знаку, то в формуле появляются избыточные взаимно уничтожающиеся слагаемые.

Сумма этих двух частичных определителей может быть представлена в виде одного схемного определителя с нулевым значением. Возможны два варианта этого тождества. Первое тождество содержит двухмерный генератор тока, управляемый нуллатором [13]:

$$\left| \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right| = -G_1 g_2 + g_1 G_2 = 0, \quad (7)$$

где для сокращения записи параметр ИТУН – комплексная емкость – обозначен символом G с соответствующим индексом, а емкость конденсатора – символом g , причем $G_1 = s g_1$ и $G_2 = s g_2$. Параметр нуллатора принимает значения G_1 или G_2 при выделении ИТУН с соответствующим параметром, при этом другой ИТУН нейтрализуется.

Второе тождество содержит дуальный двухмерный источник – норатор с управляющими ветвями U_{G_1} и U_{G_2} :

$$\left| \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right| = -G_1 g_2 + g_1 G_2 = 0, \quad (8)$$

где при выделении двухмерного источника первый приемник преобразуется в нуллатор, а второй приемник удаляется, во втором слагаемом операции над приемниками меняются местами.

Тождества (7) и (8) используются в системе анализа, диагностики и синтеза электронных цепей SCADS [8] при формировании функций схем на ПК методом схемных определителей наряду с другими признаками вырождения [12], что иллюстрируется следующим примером.

Анализ биквада Лакера-Флешера при подаче напряжения в нечетные интервалы. Пусть требуется сформировать передаточную функцию для нечетных фаз напряжения в схеме биквада на рис. 2. Схема замещения биквада с моделями ПК на ИТУН дана на рис. 3.

На схеме замещения удалены ИТУН с параметрами G_a , G_j и G_h для четной фазы, поскольку генератор или приемник ИТУН подключен параллельно норатору и нуллатору соответственно. В схеме удалены также проводимости, подключенные параллельно входам и выходам идеальных операционных усилителей (ОУ) [12]. Коэффициент передачи

напряжения формируется по z-схеме на рис. 3 как отношение числителя к знаменателю в соответствии с формулой (1).

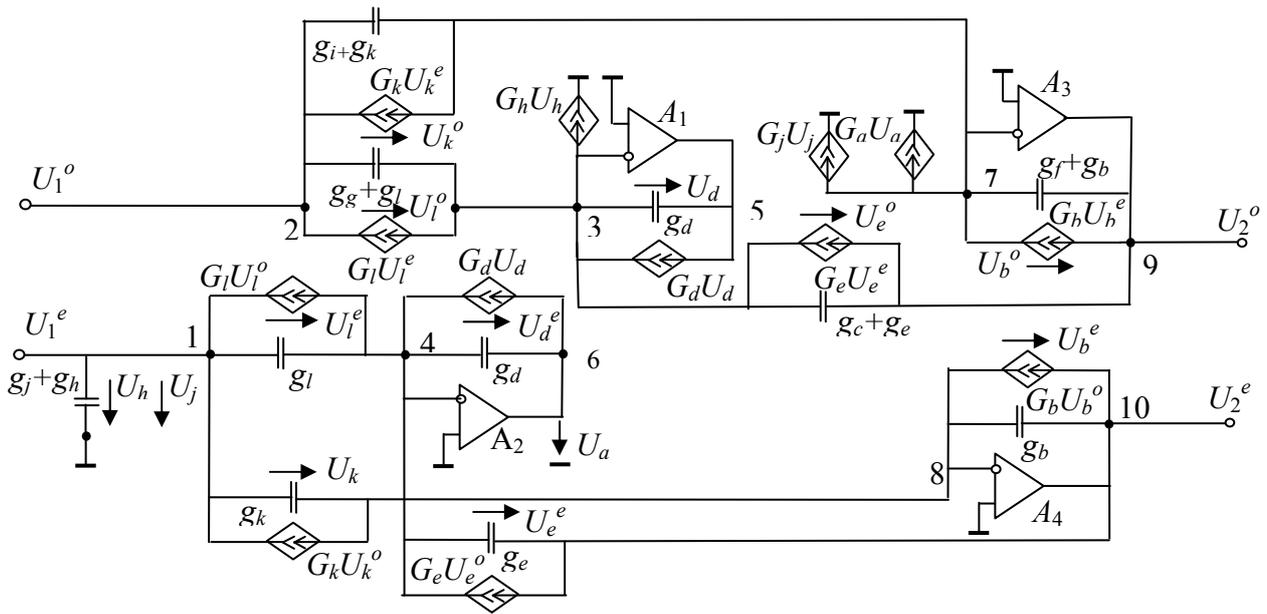
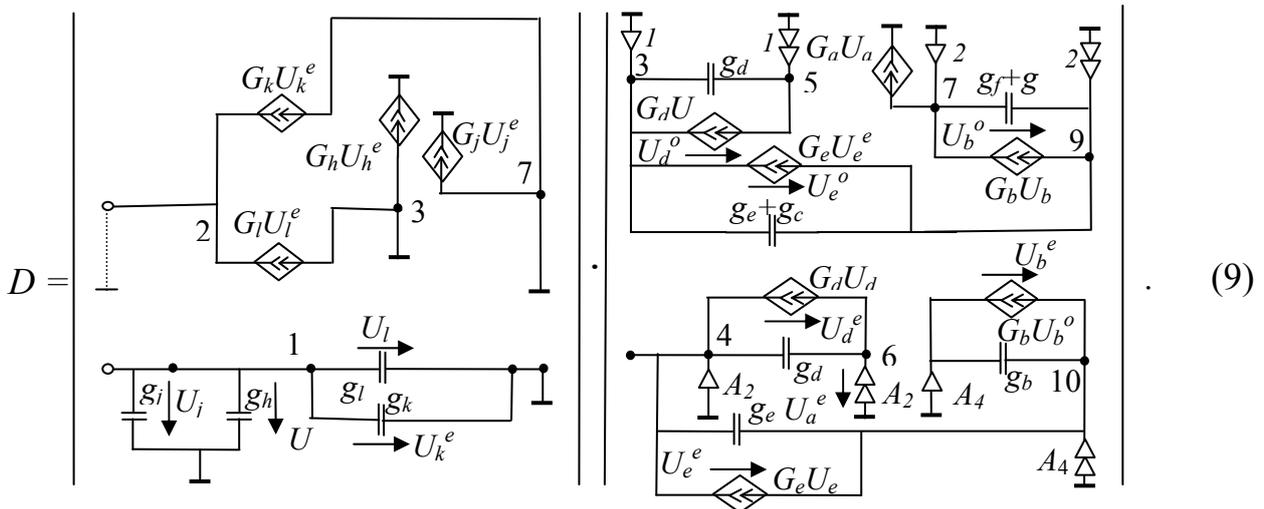


Рис. 3. Комплексная z-схема замещения биквада Лакера-Флешера

Формирование знаменателя. Исходная схема знаменателя получается по формуле (1) из схемы на рис. 3. После применения частных формул выделения ИТУН и проводимостей, а также формулы деления схемы по пяти узлам 3, 4, 7, 8 и 0 схемно-алгебраическое выражение знаменателя приобретает вид (ОУ заменены на нулоры):



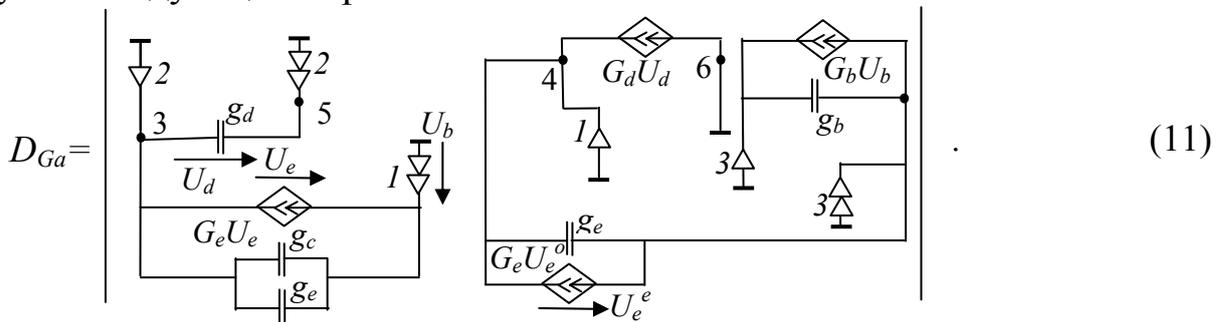
В первом сомножителе (9) генераторы всех ИТУН замкнуты проводниками, поэтому удаляются из схемы. Определитель оставшейся схемы равен сумме всех проводимостей.

Во втором сомножителе (9) выделяем параметр ИТУН G_a , который является единственным элементом из ПК a . В результате получается следующее схемно-алгебраическое выражение знаменателя

$$D = (g_h + g_j + g_l + g_k) \cdot [G_a \cdot D_{Ga} + D^{Ga}], \quad (10)$$

где D_{Ga} и D^{Ga} – частичные определители, полученные из второго определителя в (9) путем замены ИТУН G_a нуллом и удаления его соответственно.

Схему в определителе D_{Ga} из формулы (10) упростим с помощью замены параллельного соединения норатора и нуллатора проводником, получим следующее выражение



Из схемы определителя (11) можно вычленить нулевое тождество (7) или (8). Для этого необходимо удалить ИТУН G_d с помощью формулы (3) выделения–нейтрализации ИТУН G_d , в результате получается следующее выражение

$$D_{Ga} = G_d \cdot D_{Ga, G_d} + D_{Ga}^{G_d}. \quad (12)$$

Второе слагаемое в (12) соответствует, как раз, удалению ИТУН G_d . После выполнения частных операций выделения и удаления проводимостей и ИТУН, операции выделения нуллора [12] получается выражение, содержащее нулевое ПК-тождество вида (7)

$$D_{Ga}^{G_d} = g_d \cdot \left| \begin{array}{cc} g_b \parallel G_b & g_e \parallel G_e \\ \hline & G_b(G_e) \end{array} \right| = g_d \cdot (G_b \cdot g_e - g_b \cdot G_e) = 0. \quad (13)$$

САФ первого определителя D_{Ga, G_d} в (12) находится из (11) путем замены ИТУН G_d нуллом. Полученный определитель не содержит ПК-тождеств (7) и (8). После его раскрытия получается следующее выражение

$$D_{Ga, G_d} = -(G_e \cdot G_b - (g_e + g_c) \cdot g_b). \quad (14)$$

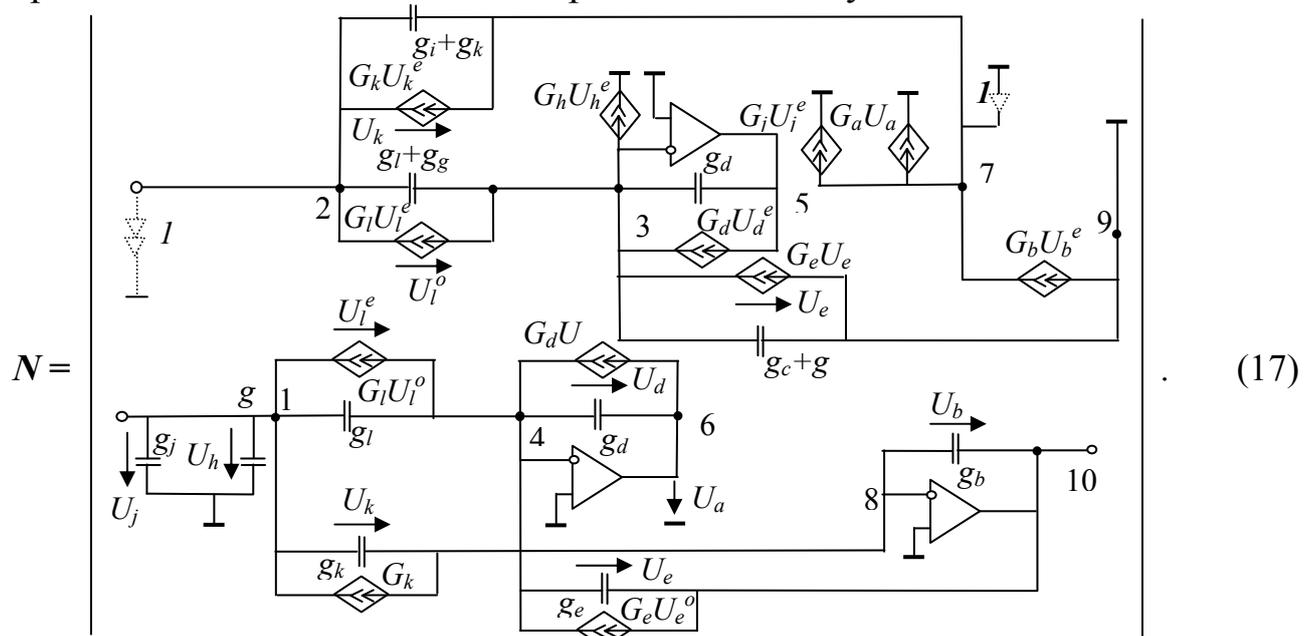
Определитель D^{Ga} из (10) может быть разделен по узлам 3, 4 и 9, 10 и представлен по аналогии с (11) в виде произведения трех частичных определителей, каждый из которых содержит элементы только одного ПК: d , e и b . У ПК d и c полюса замкнуты, а у ПК e – разомкнуты.

Определитель схемы ПК d приводится к виду $(g_d^2 - G_d^2)$, поскольку для ИТУН G_d возможны только два варианта преобразования – оба выделяются или оба нейтрализуются. У определителя ПК e все элементы замкнуты накоротко, поэтому он имеет единичное значение. Определитель ПК b приводится к виду определителя d после преобразования параллельного соединения конденсаторов с проводимостями g_f и g_b к одному конденсатору. Таким образом, частичный определитель имеет вид

$$D^{Ga} = (g_d^2 - G_d^2) \cdot [(g_b + g_f) \cdot g_b - G_b^2]. \quad (15)$$

После подстановки (13) и (14) в формулу (12), а формул (12) и (15) в формулу (10) получается безызбыточное выражение для знаменателя $D = (g_h + g_j + g_l + g_k) \cdot \{G_a \cdot [-G_d \cdot (G_e \cdot G_b - (g_e + g_c) \cdot g_b)] + (g_d^2 - G_d^2) \cdot [(g_b + g_f) \cdot g_b - G_b^2]\}$. (16)

Формирование числителя. Исходная схема числителя получается из схемы на рис. 3 по формуле (1) – путем подключения норатора и нуллатора к входу и выходу схемы соответственно. После выполнения операции выделения нуллора и применения частной формулы выделения проводимости САФ числителя приводится к виду



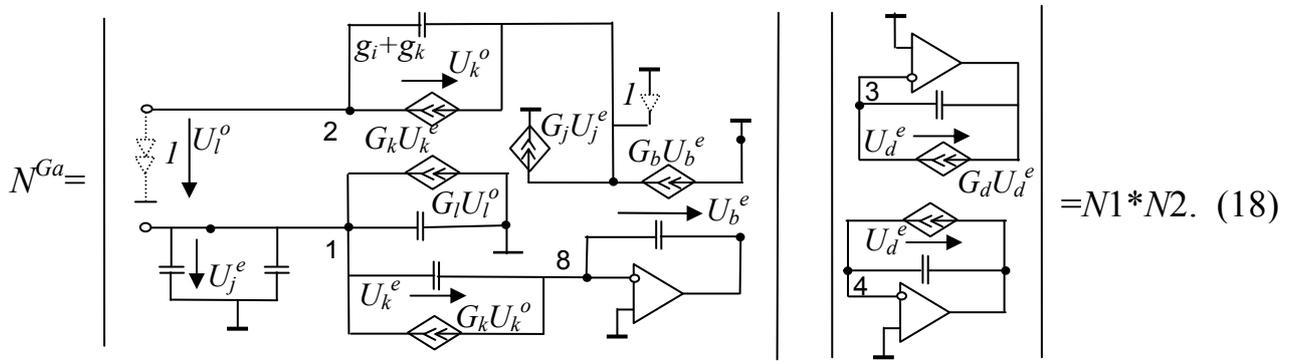
Из определителя (17) выделяем по формуле (1т) в табл. 3 ИТУН G_a , который является единственным элементом соответствующего ПК, и поэтому не образует ПК-тождество.

Таблица 3. Последовательность формул для символьного выражения числителя N (жирным шрифтом выделены нулевые ПК-тождества)

Алгебраические формулы для определителей (верхний и нижний индексы означают выделение и удаление соответствующего элемента из схемы)	№
$N = G_a \cdot N_{G_a} + N^{G_a}$	(1т)
$N_{G_a} = (g_h + g_j) \cdot [g_b (g_g \cdot N_{G_a, (gh+gj), gb, gg} + N_{G_a, (gh+gj), gb}^{gg}) + N_{G_a, (gh+gj)}^{gb}] +$ $+ gb \cdot (G_h \cdot N_{G_a, gb, Gh}^{(gh+gj)} + N_{G_a, gb}^{(gh+gj), Gh}) + N_{G_a}^{(gh+gj), gb}.$	(2т)
$N_{G_a, (gh+gj), gb, gg} = -G_d.$	(3т)
$N_{G_a, (gh+gj), gb}^{gg} = \mathbf{G_l * g_d - g_l * G_d = 0}.$	(4т)
$N_{G_a, (gh+gj)}^{gb} = -G_k \cdot (g_e \cdot g_d - G_e \cdot G_d).$	(5т)
$N_{G_a, gb, Gh}^{(gh+gj)} = G_d * (G_l + G_k).$	(6т)
$N_{G_a, gb}^{(gh+gj), Gh} = g_g * N_{G_a, gb, gg}^{(gh+gj), Gh} + N_{G_a, gb}^{(gh+gj), Gh, gg}.$	(7т)
$N_{G_a, gb, gg}^{(gh+gj), Gh} = -G_d * (g_l + g_k).$	(8т)
$N_{G_a, gb}^{(gh+gj), Gh, gg} = g_d * N_{G_a, gb, gd}^{(gh+gj), Gh, gg} + N_{G_a, gb}^{(gh+gj), Gh, gg, gd}.$	(9т)
$N_{G_a, gb, gd}^{(gh+gj), Gh, gg} = (\mathbf{G_k * g_l - G_l * g_k}) = 0.$	(10т)
$N_{G_a, gb}^{(gh+gj), Gh, gg, gd} = -G_d * [(g_l + g_k) * g_l - G_k * G_l - G_l * G_l].$	(11т)
$N_{G_a}^{(gh+gj), gb} = (G_e * G_d + g_e * g_d) * (\mathbf{G_k * g_l - G_l * g_k}) = 0.$	(12т)
$N^{G_a} = N_1 * N_2.$	(13т)
$N_1 = (g_i + g_k) * N_{1(g_i+g_k)} + N_1^{(g_i+g_k)}.$	(14т)
$N_{1(g_i+g_k)} = -g_b * (g_j + g_h + g_l + g_k).$	(15т)
$N_{1(g_i+g_k)}^{G_l} = G_l * N_{1(g_i+g_k)}^{G_l} + N_{1(g_i+g_k)}^{G_l, G_l}.$	(16т)
$N_{1(g_i+g_k)}^{G_l} = G_j * N_{1(g_i+g_k)}^{G_l, G_j} + N_{1(g_i+g_k)}^{G_l, G_j}.$	(17т)
$N_{1(g_i+g_k)}^{G_l, G_j} = g_b.$	(18т)
$N_{1(g_i+g_k)}^{G_l, G_j} = \mathbf{-g_k * G_b + G_k * g_b = 0}.$	(19т)
$N_{1(g_i+g_k)}^{G_l} = (g_j + g_h + g_l) * G_k * G_b + G_k * g_b * (G_k + G_j).$	(20т)
$N_2 = g_d * g_d - G_d * G_d.$	(21т)

В частичном определителе N_{Ga} из формулы (1т) выделяем последовательно элементы согласно алгоритму. Полученная в результате формула (2т) представлена в табл. 3.

Далее раскладываем частичные определители из формулы (2т) по МСО, при этом проверяем САВ на совпадение с тождествами (7)–(8). Среди полученных формул (3т)–(12т) имеются три таких частичных определителя – в формулах (4т), (10т) и (12т). САВ определителя N^{Ga} получается из (17) после удаления ИТУН G_a . Этот определитель можно представить в виде произведения двух частичных определителей



Формула (18) получена делением схемы определителя по 3-м узлам (3, 4 и 0). Она продублирована в виде (13т) в табл. 3. Символьные выражения N_1 и N_2 из этой формулы находятся аналогично ранее найденным составляющим числителя. Частичные определители, полученные при разложении N_1 и N_2 , приведены в виде формул (14т)–(21т). При этом в формуле (19т) оказалось нулевое ПК-тождество вида (8), которое удаляется из формируемого выражения. После подстановки формул (14т)–(21т) в формулу (13т) для N^{Ga} , а формулы (13т) и (2т) в формулу (1т) получаем искомую бездубликационную формулу для числителя K_{oo}

$$\begin{aligned}
 N = & G_a * \{ (g_h + g_j) * [g_b * g_g * (-G_d) - G_k * (g_e * g_d - G_e * G_d)] + g_b * (G_h * G_d * (G_l + G_k) + \\
 & + g_g * (g_l + g_k) * (-G_d) + [(g_l + g_k) * g_l - G_k * G_l - G_l * G_l] * (-G_d) \} + ((g_i + g_k) * (-g_b * (g_j + g_h + g_l + g_k)) - \\
 & - G_l * (-G_j * g_b) + (g_j + g_h + g_l) * G_k * G_b + G_k * g_b * (G_k + G_j)) * (g_d * g_d - G_d * G_d). \quad (19)
 \end{aligned}$$

Таким образом, предлагаемый модифицированный МСО позволяет устранить избыточные слагаемые, специфические для схем с ПК. Полученная формула передаточной функции напряжения для нечетных интервалов коммутации $K_{oo}=N/D$ содержит в числителе (19) и знаменателе (16) 42 и 36 слагаемых соответственно (строка 3 в табл. 2).

Для иллюстрации безызбыточной формулы K_{oo} , полученной при работе биквада в нечетные интервалы периода, на рис. 6,а и 6,б приведены амплитудно-частотная и фазочастотная характеристика (АЧХ и ФЧХ) фильтра нижних частот (ФНЧ), который рассчитан на частоту среза 190 Гц при численных значениях емкостей конденсаторов: $C_a=276$ пФ; $C_b=276$ пФ; $C_c=4$ пФ; $C_d=276$ пФ; $C_e=45$ пФ; $C_f=2$ пФ; $C_g=4$ пФ; $C_j=3$ пФ; $C_i=1$ пФ; $C_k=C_l=C_h=2$ пФ. Вычисления выполнены при тактовой частоте 10 кГц. Численные значения функций совпадают с точностью не менее двух–трех значащих цифр с результатами анализа во временной области с помощью системы PSpice (OrCad 10.3) [8].

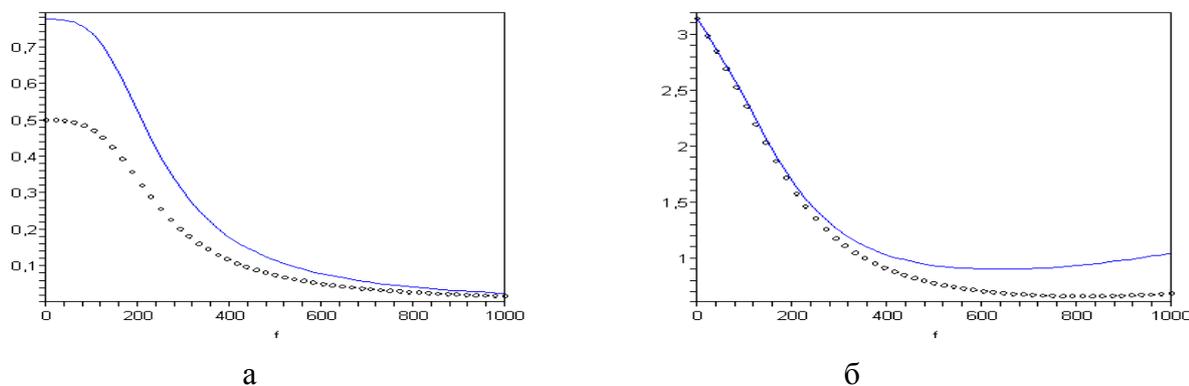


Рис. 6. АЧХ $K_{oo}(f)$ (а) и ФЧХ $\varphi_{koo}(f)$ (б) ФНЧ на бикваде Лакера-Флешера: при использовании нечетных интервалов (сплошная линия) и при однократном съеме входного напряжения и фиксации в течение периода (точки); численные значения частоты – в герцах, фазы – в радианах

Для сравнения на этих же рисунках приведены графики, полученные по формуле (5) для той же схемы при фиксации входного напряжения в течение всего такта. При этом сохраняется граничная частота, ФЧХ в

полосе пропускания совпадают, а коэффициент передачи фильтра уменьшается в 1,5 раза.

Выводы

1. При формировании символьных схемных функций выявлены специфические для схем с переключаемыми конденсаторами пары избыточных слагаемых – равные по модулю, но противоположные по знаку произведения различных емкостей и комплексных емкостей.

2. Получены схемно-алгебраические тождества, соответствующие избыточным слагаемым, с дуальными схемами в виде двумерного источника тока, управляемого нуллатором, или норатора, управляемого двумерным приемником напряжения.

3. Повышена эффективность метода схемных определителей при анализе схем с переключаемыми конденсаторами путем локализации и устранения пар избыточных слагаемых с учетом предложенных тождеств.

Список литературы

1. Fleischer P. E., Laker K. R. A family of active switched-capacitor biquad building blocks // The Bell System Technical Journal.– 1979.– Vol. 58, no. 10.– P. 2235–2269.

2. Allen P., Sanchez-Sinencio E. Switched capacitor circuits.– New York: VNR.–1984.– 759 p.

3. Konczykowska A., Bon M. Topological analysis of switched-capacitor networks // Electronics letters.– 1980.– Vol. 16, no. 3.– P. 2–3.

4. Гауси М., Лакер К. Активные фильтры с переключаемыми конденсаторами. – М.: Радио и связь, 1986. – 168 с.

5. Gielen G.G.E., Sansen W., Walscharts H.C.C. ISAAC: A Symbolic Simulator for Analog Integrated Circuits // IEEE Journal of Solid-State Circuits.–1989.– Vol. 24, no. 6 (December).– P. 1587–1597.

6. Мулявка Я. Схемы на операционных усилителях с переключаемыми конденсаторами.– М.: Мир, 1992.– 416 с.

7. Korotkov A.S., Morosov D.V. Topological analysis of continuous and discrete time linear circuits using Nathan rules // Proc. of Int. Conf. Symbolic methods and applications to circuits design (SMACD-2002).– October 2002.– Sinaia, Romania.– P. 35–42.

8. Коротков А.С., Курганов С.А., Филаретов В.В. Символьный анализ дискретно-аналоговых цепей с переключаемыми конденсаторами // Электричество.– 2009, № 4.– с. 37–47.

9. Cheng J., Shi G., Tai A., Lee F. Symbolic fault modeling for switched-capacitor circuits // IEEE Int. Conf. IEEE Reg. 10 (TENCON 2013).– October 2013.– P. 1–4.

10. Filaretov V.V., Gorshkov K.S., Kurganov S.A. Parameters extraction technique for optimal network functions of SC circuits // Proc. of International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON-2015). May 2015.– Omsk, Russia.– P. 1–6.

11. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования.– М.: Наука, 1971.– 288 с.

12. Филаретов В.В. Топологический анализ электронных схем методом выделения параметров // Электричество.– 1998.– № 5.– С. 43–52.

13. Filaretov V. V., Korotkov A. S. Generalized parameter extraction method in case of multiple excitation// Proc. 8th Int. Workshop on Symbolic methods and applications to circuit design (SMACD'04). Sept.2004.–Wroclaw, Poland.–P.8–11.

14. Филаретов В.В. Метод двоичных векторов для топологического анализа электронных схем по частям // Электричество.– 2001.– № 8.– С. 33–42.

Горшков Константин Сергеевич – доцент кафедры электротехники и прецизионных электромеханических систем Научно-исследовательского университета информационных технологий, механики и оптики (ИТМО).
E-mail: k.gorshkov@list.ru

НАХОЖДЕНИЕ СИМВОЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ ДЛЯ ПОСТОЯННЫХ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПРИ АНАЛИЗЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ КЛАССИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

М. Абдулатиф, Х. Саддави, С.А. Курганов

Предложен алгоритм для нахождения постоянных интегрирования в символьной форме. Приведены условия образования тождественно нулевых постоянных интегрирования. Символьный анализ в отличие от численных методов позволяет провести исследование искомых откликов – выявить условия отсутствия и неустойчивости переходного режима.

An algorithm for finding the constant of integration in symbolic form. The conditions of formation of identically zero constants of integration. Symbolic analysis, in contrast to numerical methods allows a detailed study of the desired response - to reveal the condition of the absence and instability transitional regime.

Классический метод анализа переходных процессов [1] продолжает привлекать исследователей возможностью представить решение в аналитическом виде [2–4]. Нахождение постоянных интегрирования является наиболее трудоемким этапом классического метода, требующим при определении всех n переменных состояния цепи формирования и решения n систем линейных уравнений размерностью n^2 .

По найденным переменным состояния остальные переменные рассчитываются с помощью резистивной схемы, полученной из исходной схемы заменой катушек индуктивности и конденсаторов независимыми источниками тока и напряжения с соответствующими функциями [1].

Меньших затрат для решения этой задачи требуется при использовании матрицы коэффициентов связи постоянных интегрирования – схемных коэффициентов [2]

$$K = \|k_{ij}\| = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ \hline K_2(p_1) & K_2(p_2) & \dots & K_2(p_j) & \dots & K_2(p_n) \\ \hline \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \hline K_i(p_1) & K_i(p_2) & \dots & K_i(p_j) & \dots & K_i(p_n) \\ \hline \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \hline K_m(p_1) & K_m(p_2) & \dots & K_m(p_j) & \dots & K_m(p_n) \\ \hline \end{array}, \quad (1)$$

где первая строка матрицы (с единичными элементами) соответствует базисной переменной; $i = 1 \dots m$ – номер искомой переменной (соответствующей ветви); $j = 1 \dots n$ – номер постоянного интегрирования; m, n – число переменных и порядок цепи соответственно; $p_1, \dots, p_j, \dots, p_n$ – корни характеристического полинома; $K_2(p_j), \dots, K_i(p_j), \dots, K_m(p_j)$ – передаточные операторные функции от базисной (первой) ветви к ветви с номерами $2 \dots m$, вычисленные при значениях оператора $p = p_j$.

Матрица постоянных интегрирования для переменных с номерами $j=1 \dots n$ записывается через матрицу коэффициентов связи (1) следующим образом

$$A = \|a_{ij}\| = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1j} & \dots & A_{1n} \\ \hline K_2(p_1)A_{11} & K_2(p_2)A_{12} & \dots & K_2(p_j)A_{1j} & \dots & K_2(p_n)A_{1n} \\ \hline \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \hline K_i(p_1)A_{11} & K_i(p_2)A_{12} & \dots & K_i(p_j)A_{1j} & \dots & K_i(p_n)A_{1n} \\ \hline \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \hline K_m(p_1)A_{11} & K_m(p_2)A_{12} & \dots & K_m(p_j)A_{1j} & \dots & K_m(p_n)A_{1n} \\ \hline \end{array}. \quad (2)$$

Вектор постоянных интегрирования базовой (первой) переменной $A_1 = [A_{11}, \dots, A_{1j}, \dots, A_{1n}]$ находится также на основе матрицы коэффициентов связи (1) по формуле

$$A_1 = K^{-1} \cdot [x(0_+) - x_{\text{пр}}(0_+)], \quad (3)$$

где $[x(0_+) - x_{\text{пр}}(0_+)]$ – вектор разности переменных состояния; $x(0_+)$ – значение искомого тока или напряжения в момент непосредственно после

коммутации в цепи; $x_{пр}(0_+)$ – значение принужденной составляющей искомой переменной.

Матрица (1) находится численным анализом, например, с помощью компьютерной системы *Electronics Workbench*, вспомогательных линейных цепей, которые получаются из исходной цепи путем следующих преобразований: все независимые источники нейтрализуются, базисная ветвь с искомым током или напряжением заменяется соответствующим единичным источником, а реактивные элементы – операторными сопротивлениями или проводимостями.

Оператору присваиваются последовательно значения, равные корням характеристического полинома. Корни могут принимать комплексные значения, поэтому для моделирования операторных сопротивлений и проводимостей вводят специальные схемы замещения [3]. Анализ n (по числу корней характеристического уравнения) схем замещения позволяет получить токи и напряжения в искомых ветвях, которые равны соответствующим схемным коэффициентам.

Недостатком численного анализа является использование упомянутых специальных схем замещения операторных сопротивлений и проводимостей, которые усложняют процесс получения результата. Не имеет такого недостатка символьный подход к определению коэффициентов связи на основе метода схемных определителей (МСО), который состоит в нахождении операторных передаточных коэффициентов $K_i(p)$ от базисной ветви к ветвям с искомыми переменными [4].

Численные значения коэффициентов связи получаются путем подстановки в $K_i(p)$ численных значений корней характеристического уравнения $p = p_j$. При этом из-за ограниченного размера разрядной сетки тождественно нулевые коэффициенты получаются ненулевыми. Таким образом, возникают ложные постоянные интегрирования и, следовательно, составляющие, которых нет в рассматриваемом отклике. Поэтому при наличии в отклике постоянных интегрирования с малыми значениями возникает принципиальный вопрос – эти постоянные равны

нулю при заданных численных значениях параметров или тождественны нулю независимо от численных значений параметров? Ответить на этот вопрос с помощью численных методов нельзя.

В настоящей статье предлагается символьный подход к определению постоянных интегрирования на основе МСО, который позволяет выявить тождественно нулевые постоянные интегрирования.

Некоторые формулы метода схемных определителей [5]. Схемно-алгебраическое выражение отклика – напряжения или тока – представляется в виде отношения определителей схем числителя и знаменателя. Для тока эта формула имеет вид

$$\underline{I} = \Delta_N / \Delta_D. \quad (4)$$

В (4) Δ_D – определитель схемы знаменателя, которая получается из исходной схемы при нулевых параметрах независимых источников. Символом Δ_N обозначен определитель схемы числителя, которая формируется из исходной схемы с независимыми источниками путем замены отклика на нуллятор. Соответствующий ему норатор появляется в схеме после выделения любого из независимых источников, например, источника эдс \underline{E}_j по формуле

$$\Delta_N = \underline{E}_j \cdot \Delta_M(E_j \rightarrow \text{норатор}; \underline{E}_i = 0, i \neq j; \underline{J}_k = 0) + \Delta_M(E_j = 0), \quad (5)$$

где $\Delta_M(E_j \rightarrow \text{норатор}; \underline{E}_i = 0, i \neq 0; \underline{J}_k = 0)$ – определитель схемы числителя, в которой источник E_j заменен на норатор противоположного направления, а параметрам остальных источников эдс и параметрам всех источников тока присвоены нулевые значения.

Формулы выделения сопротивления z и проводимости y записываются следующим образом [5]

$$\Delta = z\Delta^z + \Delta_z, \quad \Delta = y\Delta_y + \Delta^y, \quad (6)$$

где Δ – определитель схемы числителя или знаменателя; нижний или верхний индексы при символе Δ указывают на стягивание или удаление выделяемой ветви соответственно.

Формула выделения управляемого источника имеет вид [5]

$$\Delta = \chi \Delta(\text{УИ} \Rightarrow \text{нуллор}) + \Delta(\chi=0), \quad (7)$$

где χ – параметр УИ; $\Delta(\text{УИ} \Rightarrow \text{нуллор})$ – определитель исходной схемы, в которой УИ заменен на нулор, причем генератор УИ – на норатор, а приемник УИ – на нулатор; $\Delta(\chi=0)$ – определитель исходной схемы, в которой нейтрализован УИ.

Схемно-алгебраическое условие тождественного равенства нулю всех постоянных интегрирования в искомой переменной. При всех нулевых постоянных интегрирования переходный процесс для искомой переменной отсутствует. Для нахождения схемно-алгебраического выражения, соответствующего такому режиму цепи, рассмотрим произвольную линейную схему на рис. 1,а.

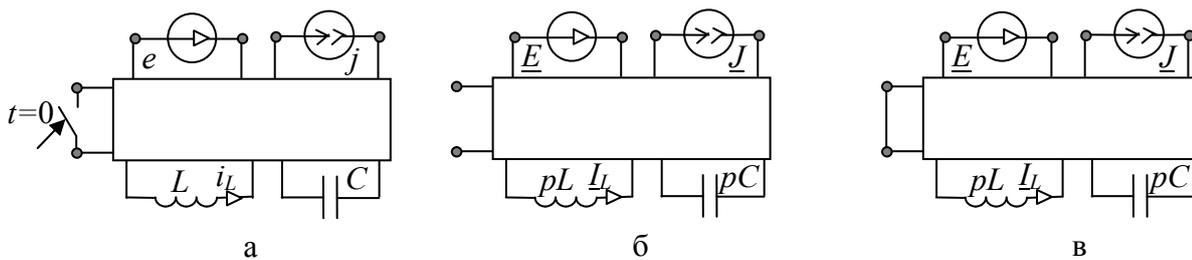


Рис. 1. Исходная схема (а); комплексные схемы для нахождения установившегося режима до (б) и после (в) коммутации: p – комплексная частота

Эта схема содержит независимые источники гармонических эдс e и тока j , катушку индуктивности L , конденсатор C и ключ, замыкающийся при $t=0$. Остальные элементы скрыты в подсхеме, представленной прямоугольником. Подсхема является неавтономной и может содержать произвольные линейные элементы, в том числе, управляемые источники и нулоры. Искомой переменной является переменная состояния цепи – ток катушки индуктивности i_L .

Переходный процесс для тока i_L отсутствует, если символьные выражения этого тока до и после коммутации тождественно равны. В схемно-алгебраическом виде это условие можно представить следующим образом

$$(8)$$

В (8) парой вертикальных линий обозначен определитель соответствующей схемы. Первая и вторая дроби являются схемно-алгебраическими выражениями тока I_L до и после коммутации соответственно. Эти дроби записаны по формуле (2) и комплексным схемам замещения на рис. 1,б и 1,в соответственно. В числителях дробей представлены определители схем с независимыми источниками, а в знаменателях – определители схем при нулевых значениях независимых источников.

Определители в (8) раскрываются путем рекурсивного выделения параметров по формулам (3)–(5). Наглядность схемно-алгебраической записи позволяет уменьшить число операций раскрытия определителей, поскольку позволяет выявить повторяющиеся фрагменты схем в числителях и знаменателях формулы (8). Полученные в результате символьные выражения могут быть равны при любых (равны тождественно) или только при определенных численных параметрах, при этом все постоянные интегрирования рассматриваемой переменной будут равны нулю.

Следует отметить, что переменная с нулевыми постоянными интегрирования не может быть выбрана в качестве базовой для нахождения постоянных интегрирования других переменных, поскольку в этом случае коэффициенты связи переменных интегрирования принимают неопределенные значения вида 0/0.

Условие образования в искомых функциях отдельных тождественно нулевых постоянных интегрирования. Отдельные нулевые постоянные интегрирования образуются при нулевых коэффициентах связи постоянных интегрирования в формуле (1). Нулевые постоянные интегрирования в базисной функции образуются также в соответствии с формулой (3) при сочетании нулевых коэффициентов связи с нулевыми разностями значений отклика $x(0_+) - x_{пр}(0_+)$.

Построим для схемы на рис. 2,а схемно-алгебраическое выражение коэффициента связи постоянных интегрирования искомого тока i с соответствующими постоянными базисного тока i_L и выведем условия, при которых отдельные постоянные интегрирования могут быть тождественно равны нулю.



Рис. 2. Исходная схема (а); схема для построения коэффициента связи постоянных интегрирования токов I и J_L (б)

Представим на рис. 2,б операторную схему при нулевых параметрах независимых источников и нулевых начальных условиях. В схему включим источник тока J_L и приемник с искомым током I . Операторный коэффициент передачи тока от источника к приемнику в соответствии с формулой (2) имеет вид

$$K_I(p) = I/J_L = N_I/D_{JL} = \left| \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right| \Bigg/ \left| \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right| \quad (9)$$

установившегося режима до и после коммутации – с помощью схемно-алгебраической формулы (8).

Б. Выбрать в качестве базисной любую переменную, для которой наблюдается переходный процесс. Построить в символьном виде коэффициенты передачи от базисной ветви к остальным ветвям переменных состояния, используя формулы вида (9).

В. Построить матрицу коэффициентов связи переменных интегрирования, используя коэффициенты передачи из п. **Б.** При этом следует проверять условие образования нулевых коэффициентов связи – наличие совпадающих сомножителей в числителе коэффициента связи (9) и характеристическом полиноме (10).

Г. Найти постоянные интегрирования базисной переменной по формуле (3) путем умножения обратной матрицы коэффициентов связи и вектора разности значений переменных интегрирования до и после коммутации. Тождественно нулевая постоянная интегрирования при этом образуется, если в каждом сочетании элемента обратной матрицы и разности значений переменной один из оказывается равным нулю.

Д. Сформировать матрицу постоянных интегрирования по формуле (2) путем умножения соответствующего постоянного интегрирования базисной переменной и коэффициента связи. Тождественно нулевая постоянная интегрирования получается при хотя бы одном нулевом сомножителе во всех ее слагаемых.

Пример нахождения постоянных интегрирования в символьном виде. Дана трехфазная цепь при двухфазном коротком замыкании (рис. 3,а). Требуется найти постоянные интегрирования для токов i_A , i_B и i_{BB} .

Действующее значение напряжения симметричного трехфазного источника эдс $E=220$ В, частота сети $f=50$ Гц. Параметры элементов: активные сопротивления $R_1=1$ Ом; $R_2=2$ Ом и $R=0,2$ Ом; реактивные сопротивления $x_1=10$ Ом и $x_2=30$ Ом катушек индуктивности L_1 и L_2 соответственно [3,4].

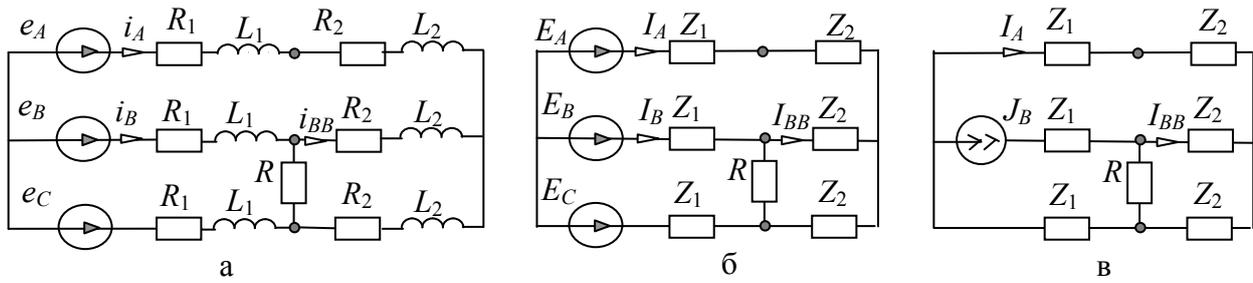


Рис. 3. Трехфазная цепь при двухфазном коротком замыкании (а); операторные схемы для: определения принужденных токов (б); построения коэффициентов связи постоянных интегрирования токов i_2, i_3 с базисным током i_1 (в)

Проверка искомых переменных на наличие переходного процесса.

Эта проверка проводится по формуле (6) на нулевые значения всех постоянных интегрирования. До коммутации существовал симметричный режим, поэтому операторные выражения токов по схеме на рис. 3,б имели вид

$$I_A = E / (Z_1 + Z_2); I_B = I_A \cdot a^2 \text{ и } I_{BB} = I_B. \quad (11)$$

После коммутации схемно-алгебраические выражения искомых операторных токов находятся в соответствии с формулой (4) в виде

$$I_A(p) = N_A / D; I_B(p) = N_B / D; I_{BB}(p) = N_{BB} / D. \quad (12)$$

Общий для всех токов знаменатель находится в виде

$$D = \left| \begin{array}{ccc} Z_1 & & Z_2 \\ & Z_1 & \\ & & Z_2 \\ Z_1 & & Z_2 \\ & R & \\ Z_1 & & Z_2 \\ & & \\ & & \end{array} \right| = (Z_1 + Z_2) \left| \begin{array}{ccc} Z_1 & & Z_2 \\ & Z_1 & \\ & & Z_2 \\ Z_1 & & Z_2 \\ & R & \\ Z_1 & & Z_2 \\ & & \\ & & \end{array} \right| + \left| \begin{array}{ccc} Z_1 & & Z_2 \\ & Z_1 & \\ & & Z_2 \\ Z_1 & & Z_2 \\ & R & \\ Z_1 & & Z_2 \\ & & \\ & & \end{array} \right|. \quad (13)$$

Исходное выражение знаменателя в (12) получено из схемы на рис. 3,б путем нейтрализации источников эдс. Из исходного выражения выделено по формуле (6) сопротивление $(Z_1 + Z_2)$. После рекурсивного выделения других сопротивлений в каждом из двух полученных в (13) определителей и приведения подобных слагаемых получается результирующее символьное выражение для знаменателя

$$D = 3(Z_1 + Z_2)[2Z_1Z_2 + R(Z_1 + Z_2)]. \quad (14)$$

Выражение для числителя тока I_A из формулы (11) получается в виде

$$N_A = \left| \begin{array}{ccc} E & Z_1 & Z_2 \\ E \cdot a^2 & Z_1 & Z_2 \\ E \cdot a & Z_1 & Z_2 \end{array} \right| = E[2Z_1Z_2 + R(Z_1 + Z_2)][2 - a^2 - a] = 3E[2Z_1Z_2 + R(Z_1 + Z_2)]. \quad (15)$$

Символьное выражение в (15) сформировано с помощью формул (5) и (6) выделения источника эдс и сопротивления, при этом учтено, что $1 + a^2 + a = 0$. После подстановки (14) и (15) в (12) и с учетом, что при заданной частоте выражение $2Z_1Z_2 + R(Z_1 + Z_2)$ не равно нулю, получаем формулу для принужденной составляющей тока, совпадающую с током (11) до коммутации. Таким образом, переходного процесса у тока i_A не будет и все три его постоянные интегрирования равны нулю. Такой ток, как уже отмечалось, нельзя использовать в качестве базисного для построения матрицы коэффициентов связи постоянных интегрирования.

Символьные выражения для числителей токов I_B и I_{BB} из формулы (11) находятся аналогично, что и для тока I_A , и имеют вид

$$N_B = \left| \begin{array}{ccc} E & Z_1 & Z_2 \\ E \cdot a^2 & Z_1 & Z_2 \\ E \cdot a & Z_1 & Z_2 \end{array} \right| = E \{ -[R(Z_1 + Z_2) + 2Z_1Z_2] + [2(Z_2 + R)(Z_1 + Z_2) + Z_2(2Z_1 + Z_2)] a^2 - [(Z_1 + Z_2)(Z_3 + 2Z_2) + Z_2^2] a \}. \quad (16)$$

$$N_{BB} = \left| \begin{array}{ccc} E & Z_1 & Z_2 \\ E \cdot a^2 & Z_1 & Z_2 \\ E \cdot a & Z_1 & Z_2 \end{array} \right| = E \{ -[R(Z_1 + Z_2) + 2Z_1Z_2] + [2R(Z_1 + Z_2) + Z_1Z_2] a^2 + [Z_1Z_2 - R(Z_1 + Z_2)] a \}. \quad (17)$$

Токи I_B и I_{BB} после коммутации не могут совпадать с их значениями до коммутации, поскольку выражения (16), (17) и (14) не могут образовать

соответствующих выражений из (11). В частности $2Z_1Z_2+R(Z_1+Z_2)$, как уже отмечалось, не равно нулю и значит первое слагаемое в (16) и (17) не может быть равно нулю. Следовательно, в токах i_B и i_{BB} в отличие от i_A будет наблюдаться переходный процесс – в их функциях будут ненулевые постоянные интегрирования.

Построение символьной матрицы коэффициентов связи постоянных интегрирования. В качестве базисного тока для построения матрицы коэффициентов связи выбран ток I_B . Схема для построения искомых коэффициентов приведена на рис. 3,в. Операторные коэффициенты связи постоянных интегрирования токов I_A и I_{BB} с базисным током I_B находятся по формуле (9) и имеют вид соответственно

$$K_A(p) = \left| \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} \text{Circuit diagram for } K_A(p) \end{array} \right] \Big/ \left[\begin{array}{c} \text{Circuit diagram for } D_J \end{array} \right] = \frac{2Z_1Z_2+R(Z_1+Z_2)}{Z_1Z_2+(Z_1+Z_2)(3Z_2+2R)} \quad (18)$$

$$K_{BB}(p) = \left| \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} \text{Circuit diagram for } K_{BB}(p) \end{array} \right] \Big/ \left[\begin{array}{c} \text{Circuit diagram for } D_J \end{array} \right] = \frac{Z_1Z_2+2R(Z_1+Z_2)}{Z_1Z_2+(Z_1+Z_2)(3Z_2+2R)} \quad (19)$$

где D_J – определитель схемы на рис. 3,в – общий знаменатель для всех коэффициентов связи.

В формируемой матрице коэффициентов связи и, соответственно, матрице постоянных интегрирования строки сверху–вниз будут соответствовать токам i_B , i_A и i_{BB} , а столбцы слева–направо – корням p_1 , p_2 , p_3 характеристического уравнения (14), причем p_1 , p_2 – это корни сомножителя второй степени $[2Z_1Z_2+R(Z_1+Z_2)]$, а p_3 – корень сомножителя первой степени (Z_1+Z_2) . При этом первая строка матрицы будет содержать только единицы. Первые два элемента второй строки оказываются нулевыми, поскольку выполняется условие образования нулевых

коэффициентов связи постоянных интегрирования – числитель K_A в (18) и характеристический полином (14) содержат общий сомножитель $[2Z_1Z_2+R(Z_1+Z_2)]$. Третий элемент во второй строке получается равным (-2) после учета равенства $(Z_1+Z_2)=0$.

Первый и второй элемент третьей строки матрицы после учета $[2Z_1Z_2+R(Z_1+Z_2)]=0$ оказываются равными отношению сопротивлений Z_1 и Z_2 , вычисленных при соответствующих корнях характеристического полинома, причем отношение берется со знаком минус. Третий элемент этой строки равен единице. В результате матрица символьных коэффициентов связи приобретает вид

$$K = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & -2 \\ \hline -\frac{Z_1(p_1)}{Z_2(p_1)} & -\frac{Z_1(p_2)}{Z_2(p_2)} & 1 \\ \hline \end{array} \quad (20)$$

Матрица содержит два нулевых коэффициента в строке тока i_A , что ведет к образованию двух нулевых постоянных интегрирования. В то же время в данном случае уже известно, что из-за совпадения установившихся режимов до и после коммутации все три постоянных интегрирования тока i_A равны нулю.

Нахождение постоянных интегрирования для базисного тока i_B .
Постоянные интегрирования тока i_B находятся по формуле (3)

$$A_B = K^{-1} \cdot \Delta_i, \quad (21)$$

где вектор постоянных интегрирования базисного тока $A_B = [A_{B1}, A_{B2}, A_{B3}]$; вектор $\Delta_i = [i_B(0_+) - i_{Bпр}(0_+), i_A(0_+) - i_{Aпр}(0_+), i_{BB}(0_+) - i_{BBпр}(0_+)]^T = [\Delta_{iB0}, 0, \Delta_{iBB0}]^T$; T – знак транспонирования.

Поскольку матрица K в формуле (20) содержит два нулевых элемента в клетках 2–1 и 2–2, то обратная матрица также будет содержать два

нулевых элемента – в клетках 3–1 и 3–3. В целом обратная матрица имеет вид

$$K^{-1} = \frac{1}{Z_1(p_1)Z_2(p_2) - Z_1(p_2)Z_2(p_1)} \begin{array}{|c|c|c|} \hline -Z_1(p_2)Z_2(p_1) & -\frac{1}{2}[Z_2(p_2)+Z_1(p_2)]Z_2(p_1) & -Z_2(p_2)Z_2(p_1) \\ \hline Z_1(p_1)Z_2(p_2) & \frac{1}{2}[Z_2(p_1)+Z_1(p_1)]Z_2(p_2) & Z_2(p_2)Z_2(p_1) \\ \hline 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \hline \end{array} \quad (22)$$

Постоянная интегрирования A_{B3} из (21) равна тождественно нулю, поскольку во всех попарных произведениях третьей строки матрицы K^{-1} и вектора разностей токов Δ_i один из элементов равен нулю. В целом вектор постоянных интегрирования базисной переменной имеет вид

$$A_B = \left[\frac{-Z_1(p_2)Z_2(p_1)\Delta_{ib0} - Z_2(p_2)Z_2(p_1)\Delta_{ibb0}}{Z_1(p_1)Z_2(p_2) - Z_1(p_2)Z_2(p_1)} ; \frac{Z_1(p_1)Z_2(p_2)\Delta_{ib0} + Z_2(p_2)Z_2(p_1)\Delta_{ibb0}}{Z_1(p_1)Z_2(p_2) - Z_1(p_2)Z_2(p_1)} ; 0 \right]. \quad (23)$$

Искомая символьная матрица постоянных интегрирования для всех переменных состояния получается по формуле (2) и имеет вид

$$A = \frac{1}{Z_1(p_1)Z_2(p_2) - Z_1(p_2)Z_2(p_1)} \cdot \begin{array}{|c|c|c|} \hline -Z_2(p_1)N(p_2) & Z_2(p_2)N(p_1) & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline Z_1(p_1)N(p_2) & -Z_1(p_2)N(p_1) & 0 \\ \hline \end{array}, \quad (24)$$

где функция $N(p) = Z_1(p)\Delta_{ib0} + Z_2(p)\Delta_{ibb0}$; оператор p принимает значения p_1 и p_2 .

После подстановки заданных численных значений параметров в формулу (24) получается матрица постоянных интегрирования, соответствующая численному результату [2] (с учетом, что за базисную функцию гармонического режима взята функция синуса):

$$A = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2,51994610 & -0.0941313829 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0,205793917 & -0,384212867 & 0 \\ \hline \end{array} \quad (25)$$

В то же время из символьного решения (24) можно получить, в отличие от численного расчета, детальную информацию об общих свойствах цепи. Переходный процесс будет неустойчивым, если знаменатель (24) принимает нулевое значение, то есть $Z_1(p_1)Z_2(p_2) - Z_1(p_2)Z_2(p_1) = 0$. После подстановки параметров элементов это выражение преобразуется к следующему: $p_1(L_1R_2 - L_2R_1) + p_2(L_2R_1 - L_1R_2) = 0$.

Поскольку корни характеристического уравнения не равны нулю, то переходный процесс будет неустойчив, если равны отношения индуктивностей и сопротивлений $L_1/L_2 = R_1/R_2$. Из формулы (24) видно, что нулевые значения постоянных интегрирования не зависят от параметров элементов – являются тождественно нулевыми, а переходный процесс тока i_A отсутствует при любых параметрах элементов.

Выводы

1. Предложен алгоритм для нахождения постоянных интегрирования в символьной форме, учитывающий наличие тождественно нулевых значений, что сокращает число операций раскрытия определителей. Алгоритм основан на формировании по методу схемных определителей символьных коэффициентов связи постоянных интегрирования базисной переменной с постоянными интегрирования других переменных.

2. Условие тождественного равенства нулю всех постоянных интегрирования для исследуемой переменной состояния (условие отсутствия переходного процесса) сведено к проверке схемно-алгебраического тождества, позволяющего сократить число операций раскрытия определителей из-за появления повторяющихся фрагментов схем.

3. Отдельные нулевые постоянные интегрирования предложено выявлять путем поиска одинаковых сомножителей в полиномах

числителей коэффициентов связи постоянных интегрирования и характеристическом полиноме электрической цепи. Нулевые постоянные интегрирования в базисной функции образуются при сочетании нулевых коэффициентов связи с нулевыми разностями значений отклика и его принужденной составляющей в момент непосредственно после коммутации.

Список литературы

1. Бычков Ю.А., Золотницкий В.М., Чернышев Э.П. Основы теории электрических цепей. Учебник для вузов.– СПб.: Лань, 2002.– 464 с.

2. Канов Л.Н., Костюков В.В. Метод моделирования нестационарных режимов электротехнических систем на основе схемных коэффициентов // Электротехника и электромеханика.– Запорожье (Украина).– 2007. – № 1. – С. 35–40.

3. Костюков В.В., Канов Л.Н. Численно-аналитическое моделирование переходных процессов в электротехнических системах методом схемных коэффициентов // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Труды междунаро. конференции КЛИН-2007.– Ульяновск: УлГТУ, 2007. – Т. 3. – С. 137–145.

4. Дворянинов К.В., Курганов С.А. Формирование символьных коэффициентов связи постоянных интегрирования для анализа линейных электрических цепей Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. труд. –Ульяновск:УлГТУ,2010.–Вып. 8.– С.37–43.

5. Филаретов В.В. Топологический анализ электронных схем методом выделения параметров // Электричество.– 1998.– № 5.– С. 43–52.

Абдулатиф Мустафа – магистрант кафедры электроснабжения Ульяновского государственного технического университета (УлГТУ), гр. Ирака, sabasamr@gmail.com.

Саддави Хайдер – магистрант кафедры электроснабжения УлГТУ, гр. Ирака, hayderjkr@gmail.com.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЗЕРКАЛЬНО-НУЛЛОРНЫХ СХЕМ НА ОСНОВЕ ВЫДЕЛЕНИЯ АНОМАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ²

М. В. Недорезов, В. В. Филаретов

Предложено упрощение символьного анализа схем с аномальными элементами всех четырех типов путем замены схемно-алгебраических операций метода схемных определителей на обычные алгебраические операции, применяемые в матричной алгебре. Комбинированное (схемно-алгебраическое и матрично-алгебраическое) разложение схемных определителей обеспечивает сокращение кода программы и времени расчетов.

Simplification of the symbolical analysis of circuits with pathological elements of all four types by replacement of circuit-algebraic operations of a method of circuit determinants by the usual algebraic operations applied in matrix algebra is offered. Combined (circuit-algebraic and matrix-algebraic) decomposition of circuit determinants provides reduction of a code of the program and time of calculations.

Аномальные элементы в моделях электронных цепей. Выделение двухполюсников и управляемых источников приводит задачу разложения схемных определителей к задаче нахождения определителя схемы, содержащей только аномальные элементы [1]. Для выделения аномальных нулловых элементов (норатора и нуллатора) была предложена операция стягивания [1].

В начале 2000-х годов схемотехника обогатилась новыми типами аномальных (патологических) элементов [2]. К нулловым элементам – норатору и нуллатору, открытым в середине 60-х годов, добавились

² Поддержано Российским Фондом Фундаментальных Исследований (РФФИ), заявка №15-07-05847

зеркальные элементы: зеркальный элемент тока (ЗЭТ) и зеркальный элемент напряжения (ЗЭН). К введению зеркальных элементов подвело развитие токовой схемотехники – схем на токовых конвейерах. Однако появление новых элементов имеет важный теоретический аспект на стыке теории электрических цепей и матричной алгебры.

Подсоединение к некоторой схеме ЗЭТ или ЗЭН соответствует вычитанию строк или столбцов матрицы проводимостей этой схемы. Номера строк или столбцов совпадают с номерами узлов подключения аномальных элементов. Напомним, что подсоединение к схеме норатора или нуллатора соответствует сложению строк или столбцов матрицы схемы.

Если среди аномальных элементов отсутствуют зеркальные элементы, то определитель такой схемы может принимать значения 0, 1 или -1 . При наличии ЗЭТ или ЗЭН определитель схемы с аномальными элементами может получать значения, большие 1 или -1 . Значения 0 имеют определители вырожденных схем.

Недавно операция стягивания обобщена для зеркальных и зеркально-нулловых элементов [3,4]. Однако особенности применения этой операции в случае зеркальных аномальных элементов, затрудняют использование и реализацию на компьютере. В то же время нулловы и зеркальные элементы весьма схожи при матричном отображении [2].

Многократные суммарные алгебраические дополнения (МСАД). МСАД [5] позволяют задать исключение из матрицы одинаковых по модулю элементов, имеющих различные или одинаковые знаки (табл. 1).

T - или Q -элементы матрицы в схемном представлении являются гибридными (зеркально-нулловыми) элементами – объединениями «ЗЭТ+нуллятор» и «норатор+ЗЭН».

После применения тождеств (слева в табл. 1) из матриц (справа в табл. 1) удаляются строка a и столбец c вместе с исчезновением соответствующих параметров N , T , Q или M .

Таблица 1. Соответствие миноров, образующих МСАД, элементам матрицы

№	Вид элемента	Матричное тождество	Элементы матрицы									
1	N -элемент (нуллор)	$\Delta_{(a+b)(c+d)} =$ $= \Delta_{ac} + \Delta_{bd} - \Delta_{ad} - \Delta_{bc}$	<table border="1"> <tr> <td></td> <td>c</td> <td>d</td> </tr> <tr> <td>a</td> <td>N</td> <td>$-N$</td> </tr> <tr> <td>b</td> <td>$-N$</td> <td>N</td> </tr> </table>		c	d	a	N	$-N$	b	$-N$	N
	c	d										
a	N	$-N$										
b	$-N$	N										
2	T -элемент (зеркально-нуллорный элемент: ЗЭТ+нуллатор)	$\Delta_{(a-b)(c+d)} =$ $= \Delta_{ac} - \Delta_{bd} - \Delta_{ad} + \Delta_{bc}$	<table border="1"> <tr> <td></td> <td>c</td> <td>d</td> </tr> <tr> <td>a</td> <td>T</td> <td>$-T$</td> </tr> <tr> <td>b</td> <td>T</td> <td>$-T$</td> </tr> </table>		c	d	a	T	$-T$	b	T	$-T$
	c	d										
a	T	$-T$										
b	T	$-T$										
3	Q -элемент (нуллорно-зеркальный элемент: норатор+ЗЭН)	$\Delta_{(a+b)(c-d)} =$ $= \Delta_{ac} - \Delta_{bd} + \Delta_{ad} - \Delta_{bc}$	<table border="1"> <tr> <td></td> <td>c</td> <td>d</td> </tr> <tr> <td>a</td> <td>Q</td> <td>Q</td> </tr> <tr> <td>b</td> <td>$-Q$</td> <td>$-Q$</td> </tr> </table>		c	d	a	Q	Q	b	$-Q$	$-Q$
	c	d										
a	Q	Q										
b	$-Q$	$-Q$										
4	M -элемент (зеркальный аномальный элемент)	$\Delta_{(a-b)(c-d)} =$ $= \Delta_{ac} + \Delta_{bd} + \Delta_{ad} + \Delta_{bc}$	<table border="1"> <tr> <td></td> <td>c</td> <td>d</td> </tr> <tr> <td>a</td> <td>M</td> <td>M</td> </tr> <tr> <td>b</td> <td>M</td> <td>M</td> </tr> </table>		c	d	a	M	M	b	M	M
	c	d										
a	M	M										
b	M	M										

Обобщенный аппарат многократных суммарно-разностных алгебраических дополнений является эффективным инструментом, как для символьного анализа электрических цепей, так и раскрытия в символьном виде определителей матриц произвольной физической природы [6,7]. При этом неважно, в какой области разработаны алгоритмы, – математике или электротехнике.

В данной статье предлагается упрощение символьного анализа схем с аномальными элементами всех четырех типов путем замены схемно-алгебраических операций метода схемных определителей на обычные алгебраические операции, применяемые в матричной алгебре.

Алгоритм выделения аномальных элементов. Основан на методике нахождения модуля и знака МСАД с перестановкой индексов перед присвоением отрицательных значений [7]. Эта методика требует

систематического изложения, доработки и детализации для реализации на компьютере.

МСАД представляется в виде последовательности индексов пар строк и пар столбцов. Чтобы не рассматривать отдельно каждый тип аномальных элементов, строкам допускается присваивать отрицательные номера. Для присвоения отрицательного знака номеру нулевых (базисных) строке или столбцу нужно вместо 0 использовать целое число, заведомо большее числа узлов в анализируемых схемах, например 255. Если обозначить базисный номер буквой «O», то $O=255$.

В результате выделения пары строк (a и b) и пары столбцов (c и d) размерность МСАД последовательно уменьшается на единицу. Это приводит к изменению типов аномальных элементов, что пришлось бы учитывать при их стягивании на схеме по алгоритму [4]. При матрично-алгебраическом решении обеспечивается единый порядок выделения строк МСАД.

Визуализация, достигаемая преобразованием схемы [1,3,4], не существенна, поскольку результатом в данном случае является не оптимальная по сложности формула, целое число со знаком – определитель МСАД или определитель соответствующей схемы из аномальных элементов.

Порядок выделения строк и столбцов МСАД может быть произвольным, например, в порядке следования пар строк и пар столбцов в их списках. Пары строк и столбцов можно хранить в массиве размерностью 4 на n , где n – число элементов МСАД.

Существуют особенные элементы МСАД, которые требуют упрощения или принятия немедленного решения о равенстве МСАД (определителя схемы из аномальных элементов) нулю, то есть вырождении схемы.

Эквивалентные упрощения элементов списка МСАД. Выполняются аналогично для строк и столбцов. Ниже перечислены эти простейшие преобразования.

1. Избавление от «отрицательных нулей»:

$$(a-0) \rightarrow (a+0); (c-0) \rightarrow (c+0)$$

и нулей слева:

$$(0-a) \rightarrow (a+0); (0+a) \rightarrow -(a+0); (0-c) \rightarrow (c+0); (0+c) \rightarrow -(c+0).$$

2. Удвоение значение определителя:

$$(a-a) \rightarrow (a+0), \text{sign}=2*\text{sign}; (c-c) \rightarrow (c+0), \text{sign}=2*\text{sign}.$$

3. Равенство определителя нулю:

$$(a+a) \rightarrow \text{sign}=0; (a+a) \rightarrow \text{sign}=0.$$

Эти преобразования реализованы в функции *redpat*, приведенной ниже.

```
void redpat(int nr,int n, int pat[4][100], int *sign)
// n – число элементов МСАД; pat[0] – первая строка (a);
// pat[1] – первый столбец (b); pat[2] – вторая строка (c);
// pat[3] – второй столбец (d); *sign – значение МСАД
{
int i, O=255; // O – номер базисного узла
for (i = nr; i<n; i++) // просмотр списка pat
{ // модификации элемента i вида:
// (a-0)->(a+0); (c-0)->(c+0)
if (pat[1][i] == -O) pat[1][i] = O;
if (pat[3][i] == -O) pat[3][i] = O;
// (0+a) -> -(a+0); (0-a) -> (a+0);
if (pat[0][i] == O)
if (pat[1][i] < 0) {pat[0][i] = abs(pat[1][i]); pat[1][i] = O;}
else {pat[0][i] = pat[1][i]; pat[1][i] = O; *sign = -(*sign);}
// (0+c) -> -(c+0); (0-c) -> (c+0)
if (pat[2][i] == O)
if (pat[3][i] < 0) {pat[2][i] = abs(pat[3][i]); pat[3][i] = O;}
else {pat[2][i] = pat[3][i]; pat[3][i] = O; *sign = -(*sign);}
// (a-a)->(a+0), sign=2*sign;
if (pat[0][i] == abs(pat[1][i]) && pat[1][i]<0)
{pat[1][i] = O; *sign = 2*(*sign);}
// (c-c)->(c+0), sign=2*sign
if (pat[2][i] == abs(pat[3][i]) && pat[3][i]<0)
{pat[3][i] = O; *sign = 2 * (*sign);}
// (a+a) или (c+c) – определитель равен нулю
if ( pat[1][i]>0 && pat[0][i]==pat[1][i]
|| pat[3][i]>0 && pat[2][i]==pat[3][i]
```

```

    || pat[0][i] == 0 && pat[0][i]==pat[1][i]
    || pat[2][i] == 0 && pat[2][i]==pat[3][i]
    { *sign=0; return;}
}
}

```

Функция *redpat* вызывается для исходного списка МСАД (*pat*) и каждого из списков, полученных в результате выделения первого по порядку элемента: $a=pat[0][0]$, $b=pat[1][0]$, $c=pat[2][0]$, $d=pat[3][0]$. Изменение индексов строк и столбцов элементов МСАД, оставшихся после выделения нулевого элемента выполняется функцией *modification*.

```

void modification(int nr,int n, int pat[4][100],
                 int ind,int n1,int n2,int *sign)
{ // модификация строк оставшихся (начиная с nr) элементов списка
  int j,t1,t2;

  if (ind==0) {n1=0; n2=1; t1 = pat[0][nr]; t2 = pat[1][nr];}
  else {n1=2; n2=3; t1 = pat[2][nr]; t2 = pat[3][nr];}
  for (j = nr + 1; j < n; j++)
  {
    if (t2 < 0)
    { // если номер второй строки (столбца) отрицательный
      if (pat[n1][j] == t1)
        if (pat[n2][j] < 0) // перестановка строк (столбцов) без смены знака
          {pat[n1][j] = -pat[n2][j]; pat[n2][j] = -t1;}
        else
          {pat[n1][j] = pat[n2][j]; pat[n2][j] = t1; *sign = -(*sign);}
      if (abs(pat[n2][j])==t1) // перестановка строк (столбцов) со сменой знака
        if (pat[n2][j] < 0) pat[n2][j] = -t2;
        else pat[n2][j] = t2;
    }
  }
  else
  { // замена номеров строк (столбцов) с сохранением знака
    if (abs(pat[n1][j]) == t1)
      if (pat[n1][j] < 0) pat[n1][j] = -t2;
      else pat[n1][j] = t2;
    if (abs(pat[n2][j]) == t1)
      if (pat[n2][j] < 0) pat[n2][j] = -t2;
      else pat[n2][j] = t2;
  } } }

```

Полная замена индексов (как строк, так и столбцов) с номера строки $t1$ на номер столбца $t3$ (идущих первыми в парах элемента МСАД) осуществляется в основной функции *det*, вызывающей упомянутые ранее функции.

```

void det(int n, int pat[4][100],int *sign)
{ // Нахождение определителя *sign
  int i,j,k,a,b,c,d, nl=0, list[50];
  *sign=1;
  if (!flag_nul) // признак замены нуллорными моделями (= 1 или 0)
    { // формирование списка узлов исходного или преобразованного МСАД
      redpat(0,n,pat,sign);
      if (!(*sign)) return;
      for (i = 0; i<n; i++)
        for (j = 0; j<4; j++)
          {
            for (k = 0; k<nl; k++)
              if (abs(pat[j][i]) == list[k]) goto br;
            list[nl]=abs(pat[j][i]); nl++;
          }
        br: ;
      }
  for (i = 0; i < n; i++)
    {
      redpat(i,n,pat,sign);
      if (!(*sign)) return;
      // очередной элемент списка pat
      a = pat[0][i]; b = pat[1][i]; c = pat[2][i]; d = pat[3][i];
      if (!flag_nul)
        for (k = 0; k<nl; k++)
          if (a == list[k])
            { // исключение a из списка номеров узлов
              for (j = k; j<nl-1; j++) list[j]=list[j+1];
              nl--; break;
            }
          if (a != c) *sign=-(*sign); // номера строк разные
          // модификация строк оставшихся элементов списка
          modification(i,n,pat,0,a,b,sign);
          // модификация столбцов оставшихся элементов списка
          modification(i,n,pat,1,c,d,sign);
          // замена номеров строк и столбцов с номером t1 на номер t3
          // с сохранением знака
          for (j = i + 1; j < n; j++)
            {
              if (abs(pat[0][j]) == a)
                if (pat[0][j] < 0) pat[0][j] = -c;
                else pat[0][j] = c;
            }
    }
}

```

```

    if (abs(pat[1][j]) == a)
        if (pat[1][j] < 0) pat[1][j] = -c;
        else pat[1][j] = c;
    if (abs(pat[2][j]) == a)
        if (pat[2][j] < 0) pat[2][j] = -c;
        else pat[2][j] = c;
    if (abs(pat[3][j]) == a)
        if (pat[3][j] < 0) pat[3][j] = -c;
        else pat[3][j] = c;
    }
}
if (!flag_nul && nl > 1) *sign=0; // в списке list более одного (базисного) узла
i=n-1; // проверка на параллельное соединение норатора и нуллатора
if ( (pat[0][i] == pat[2][i] && abs(pat[1][i]) == abs(pat[3][i])
    || pat[0][i] == abs(pat[3][i]) && abs(pat[1][i]) == pat[2][i])
    && ( pat[0][i] == 255 || pat[1][i] == 255
        || pat[2][i] == 255 || pat[3][i] == 255)) return;
else *sign=0;
}

```

Как видно из текста функции `det`, в случае использования нулловых моделей зеркальных элементов `flag_nul=1` не требуется формировать список узлов для контроля вырождения МСАД (равенства нулю). Это существенно уменьшает длину кода, поэтому программа будет работать быстрее, несмотря увеличившуюся сложность схемы, что подтверждается рассмотренными ниже экспериментами.

Примеры разложения определителей схем с аномальными элементами. Для проверки программы выделения аномальных элементов используем схему с зеркальными элементами [7], показанную на рис.1,а, и эквивалентную ей схему (рис.1,б), полученную с помощью преобразования для путей из четного числа ЗЕТ или ЗЭН [8,9].

Ниже приведен текст программы, вызывающей функцию `det` с массивами `pat` для схемы на рис. 1,б. Полученное значение определителя (`sign=4`) совпадает с результатом для схемы на рис.1,а [7].

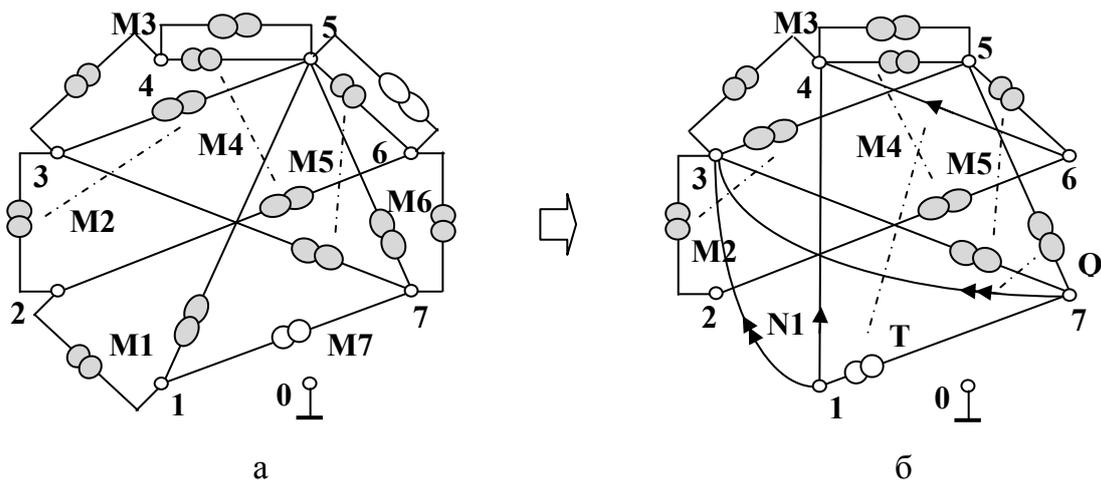


Рис. 2. 8-узловая схема с семью зеркальными элементами:
исходная схема (а) и эквивалентная ей схема (б)

```

void main()
{
  int n = 7, sign, pat[4][100];

  // N 1 3 1 4 M2 2 3 3 5 M3 3 4 4 5 M4 4 5 2 6 M5 5 6 3 7 Q 7 3 5 7 T 7 1 6 4

  pat[1][0] = 1; pat[2][0] = 3; pat[3][0] = 1; pat[4][0] = 4; pat[1][1] = 2; pat[2][1] = -3;
  pat[3][1] = 3; pat[4][1] = -5; pat[1][2] = 3; pat[2][2] = -4; pat[3][2] = 4; pat[4][2] = -5;
  pat[1][3] = 4; pat[2][3] = -5; pat[3][3] = 2; pat[4][3] = -6; pat[1][4] = 5; pat[2][4] = -6;
  pat[3][4] = 3; pat[4][4] = -7; pat[1][5] = 6; pat[2][5] = 3; pat[3][5] = 5; pat[4][5] = -7;
  pat[1][6] = 7; pat[2][6] = -1; pat[3][6] = 6; pat[4][6] = 4;

  det(act_n, pat, &s1, &s2, &t, &numb, &sign);
  printf("sign=%d\n", sign); }

```

Функция *det* была использована в новой версии программы символьного анализа электронных схем CIRSYM для обработки производных схем, содержащих исключительно нулловые и зеркальные элементы. Такие схемы образуются в результате выделения параметров двухполюсников и управляемых источников и соответствуют подвыражениям, замыкающим формируемые выражения для схемных функций или откликов.

Одной из тестовых схем была схема в виде полной восьмиузловой схемы с тремя зеркальными М-элементами [5], которая показана на рис.2,а.

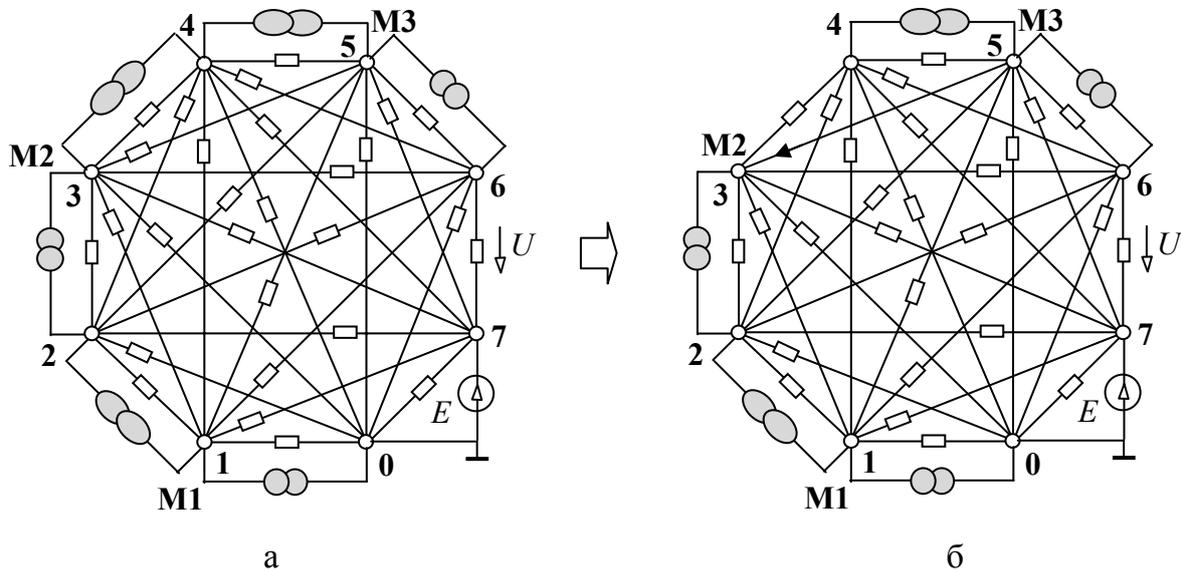


Рис. 2. Полная 8-узловая схема с тремя зеркальными элементами:
исходная схема (а) и эквивалентная ей схема (б)

Параметрам проводимостей схемы на рис. 2,а присвоены целые значения $y_k=k$, $k=1, 2, \dots, 28$. Описание (cir-файл) этой схемы для программы CIRSYM имеет вид:

```

E 0 7 1 U 6 7
M1 1 0 1 2 M2 2 3 3 4 M3 6 5 4 5
g1 0 1 1 g2 0 2 2 g3 0 3 3 g4 0 4 4 g5 0 5 5 g6 0 6 6 g7 0 7 7 g8 1 2 8 g9 1 3 9
g10 1 4 10 g11 1 5 11 g12 1 6 12 g13 1 7 13 g14 2 3 14 g15 2 4 15 g16 2 5 16
g17 2 6 17 g18 2 7 18 g19 3 4 19 g20 3 5 20 g21 3 6 21 g22 3 7 22 g23 4 5 23
g24 4 6 24 g25 4 7 25 g26 5 6 26 g27 5 7 27 g28 6 7 28
.end .

```

Учет соединения зеркальных элементов с базисным узлом и соответствующее их преобразование (например, M1 1 0 1 2 \rightarrow Q1 1 0 1 2) выполняется перед анализом, как исходной схемы, так и производных

схем, образующихся в процессе разложения определителей числителя и знаменателя.

На рис. 2,б показана схема, полученная аналогично схеме на рис. 1,б с помощью преобразования для путей из четного числа ЗЭН [9]. Для этого *M*-элемент: M2 2 3 3 4 заменяется на *T*-элемент: T2 2 3 5 3 (ЗЭТ+нуллатор). Проводимость: g20 3 5 20 (20 См между узлами 3 и 5), параллельная добавленному нуллятору, удаляется по формуле выделения проводимостей. Для схемы рис.2,б в cir-файле схемы рис.2,а строка:

M1 1 0 1 2 M2 2 3 3 4 M3 6 5 4 5

заменяется на строку: Q1 1 0 1 2 T2 2 3 5 3 M3 6 5 4 5.

Текущая версия программы CIRSYM работает в двух основных режимах: без замещения (0) и с замещением (1) зеркальных элементов нуллорными эквивалентами. Дополнительно для каждого режима предусматривается выбор из двух вариантов формул: с порядковым выделением двухполюсников или управляемых источников (0) и первоочередным выделением двухполюсников (1), стягивание которых приводит к образованию петель из ЗЭТ или ЗЭН. В формулах второго вида целые коэффициенты, кратные двум, появляются не случайно, а в порядке уменьшения значения.

Соответственно введенным обозначениям (0 и 1) программа CIRSYM позволяет получить для каждой схемы четыре варианта формул: 00, 01, 10 и 11. В табл. 2 сравниваются по длине формулы передаточной функции по напряжению для схем на рис. 2, полученные в различных режимах работы программы.

Таблица 2. Число символов в передаточных функциях схем на рис. 2.

Вид схемы	Режимы работы программы CIRSYM			
	00	01	10	11
Рис. 2,а	6713	6574	11885	11262
Рис. 2,б	6780	6573	11118	10046

Все формулы эквивалентны, для указанных в cir-файле параметров получается: $U/E=-1.1196113919124137E+00$. При использовании нулловых схем замещения вместо зеркальных элементов длина формул увеличивается почти вдвое. Однако «стоимость» этих формул по затрачиваемому времени в разы меньше.

Например, получение формулы для схемы на рис. 2,а потребовало всего 0.31 секунд (режим 11) вместо 1.27 секунд в режиме 01 – при отсутствии перехода от зеркальных элементов к их нулловым моделям. Программа компилировалась в среде TurboC++ (1992г.), а расчет выполнялся компьютером с частотой центрального процессора 2.66 ГГц.

Компиляция текста программы в среде Borland C++Builder (2002г.) значительно ускорила расчеты схем на рис.2 во всех четырех режимах (табл. 3). При этом соотношения между затратами в режимах с нулловыми моделями и без них сохранились.

Таблица 3. Затраты времени (в секундах) для анализа схем на рис.2

Вид схемы	Режимы работы программы CIRSYM			
	00	01	10	11
Рис. 2,а	0.28	0.29	0.13	0.09
Рис. 2,б	0.16	0.14	0.05	0.05

В новой версии программы CIRSYM выделение аномальных элементов всех типов при разложении определителей выполняется одинаково – путем редукции строк и столбцов МСАД, что не требует рассмотрения структуры схемы (выбора узлов, сортировки элементов) и повышает эффективность символьного анализа.

Переход на алгебраический алгоритм при обработке схем, содержащих только аномальные элементы, позволил вдвое сократить код ядра программы (функции *kernel*) за счет удаления формул выделения аномальных элементов различных типов. Также исключена (многократно вызываемая ранее) функция редукции узла, которому инцидентны только нулловые элементы.

Таким образом, базовый алгоритм символьного анализа сводится к рекурсивному применению формул выделения двухполюсников и управляемых источников (в общем виде – с двумя слагаемыми или с одним слагаемым-сомножителем). Все схемные конфигурации с аномальными элементами – от параллельного соединения норатора и нуллатора до произвольной схемы из аномальных элементов – обрабатываются унифицированным алгебраическим блоком – функцией \det .

Выводы

1. Разработаны алгоритм и программа символьного анализа схем, состоящих из аномальных элементов всех типов. Алгоритм предусматривает преобразование определителя схемы к многократному суммарно-разностному алгебраическому дополнению (МСАД).

2. Реализованная программа встроена в виде подпрограммы в программу CIRSYM, предусматривающую задание всех типов линейных элементов, что уменьшило время генерации выражений схемных функций.

3. На примерах сложных схем показано, что увеличение числа узлов и элементов при замещении зеркальных элементов (нуллорами и единичными сопротивлениями) влечет увеличение длины формулы в полтора раза. Однако при этом почти в три раза уменьшается время генерации формулы за счет более простой обработки нуллоров по сравнению с учетом зеркальных аномальных элементов.

Список литературы

1. Филаретов В.В. Формирование символьных функций для активных электрических цепей методом стягивания и удаления ветвей // Электричество.– 2001.– № 4.– С. 43–51.

2. Филаретов В.В. О взаимосвязи нуллорных и зеркальных аномальных элементов электрических цепей // Международ. сб. науч. тр. «Синтез, анализ и диагностика электронных цепей».– Ульяновск, 2015.– Вып. 12.– С. 29–50.

3. Филаретов В.В. Разложение многократных суммарных и разностных алгебраических дополнений методом схемных определителей // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: международ. сб. науч. тр. – Ульяновск: УлГТУ, 2013. – Вып. 11. – С. 191–212.

4. Филаретов В.В. Преобразование стягиванием зеркальных аномальных элементов в электрических цепях // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: международ. сб. науч. тр. – Ульяновск: УлГТУ, 2015. – Вып. 12. – С. 102–122.

5. Сигорский В.П. Анализ электронных схем.– Киев: Гос. изд-во техн. лит. УССР, 1960.– 176 с.

6. Lasota S. Multilevel hierarchical always cancellation-free symbolic analysis method for large electric networks // Elektronika: konstrukcje, technologie, zastosowania (Poland). – 2013.– Vol. 54, no. 2.– P. 51–57.

7. Недорезов М. В., Филаретов В.В. Эффективные алгоритмы разложения матричных определителей // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: международ. сб. науч. тр. – Ульяновск: УлГТУ, 2015. – Вып. 12. – С. 195–215.

8. Майко Г.В., Филаретов В.В. Эквивалентные преобразования деревьев с нулловыми и зеркальными аномальными элементами в линейных электрических цепях // Международ. сб. науч. тр. «Синтез, анализ и диагностика электронных цепей».– Ульяновск, 2013.– Вып. 11.– С. 17–38.

9. Майко Г.В., Филаретов В.В. Преобразования ориентированных деревьев с нулловыми и зеркальными аномальными элементами // Международ. сб. науч. тр. «Синтез, анализ и диагностика электронных цепей».– Ульяновск, 2015.– Вып. 12.– С. 51–70.

Недорезов Максим Владимирович – магистрант факультета аэромеханики и летательных аппаратов Московского Физико-Технического Института.
E-mail: nedmv@rambler.ru

СХЕМНО-АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ФОРМУЛЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ N -ЛУЧЕВОЙ ЗВЕЗДЫ В ЭКВИВАЛЕНТНЫЙ ПОЛНЫЙ N -УГОЛЬНИК

С. А. Курганов

Предлагаемое схемно-алгебраическое доказательство в отличие от матричного не требует построения уравнений и обладает краткостью и наглядностью. Показана возможность применения схемно-алгебраического преобразования к произвольным соединениям проводимостей. Получены формулы для преобразования в полный многоугольник двух связанных звезд из проводимостей.

The proposed circuit-algebraic proof in contrast to the matrix does not require the construction of equations, and has brevity and clarity. The circuit-algebraic transformation can be applied to arbitrary connections conductivities. The formulas for conversion to complete the polygon two related stars of conductivities.

В [1] излагаются два способа доказательства формулы преобразования n -лучевой звезды проводимостей в эквивалентный полный n -угольник проводимостей. Эта формула была предложена Розеном в следующем виде [2,3]

$$Y_{ij} = Y_i Y_j / \sum_{j=1}^n Y_j; \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad i \neq j, \quad (1)$$

где Y_{ij} – искомая проводимость многоугольника, включенная между узлами i и j ; Y_i, Y_j – проводимости лучей с номерами i, j ; нумерация узлов многоугольника совпадает с нумерацией лучей звезды.

Первый способ доказательства формулы (1), названный матрично-вычислительным методом [1], основан на операции исключения напряжения центрального узла звезды из системы узловых уравнений.

Этот способ известен в литературе и используется для исключения не только одного, но и нескольких узлов [4].

Во втором способе, так называемом аналитическом методе [1], для доказательства используется равенство узловых токов в схемах звезды и искомого многоугольника. На основе этого равенства формула (1) выведена в учебнике [5, с. 41].

В [6] формула (1) выводится путем обращения матрицы сопротивлений исходной звезды. По отсутствию нулей в обратной матрице делается вывод о единственности преобразования звезды в полный многоугольник, содержащий $n(n-1)/2$ проводимостей.

Таким образом, известные методы получения формулы (1) основаны на построении и преобразовании систем уравнений [1,4–6]. Представляет интерес доказательство формулы (1) без формирования уравнений цепи. Для этого предлагается использовать метод схемных определителей [7].

Нахождение передаточных проводимостей методом схемных определителей [8]. Схемно-алгебраическая формула для передаточной проводимости может быть записана с использованием схемы произвольного неавтономного многополюсника на рис. 1,а.

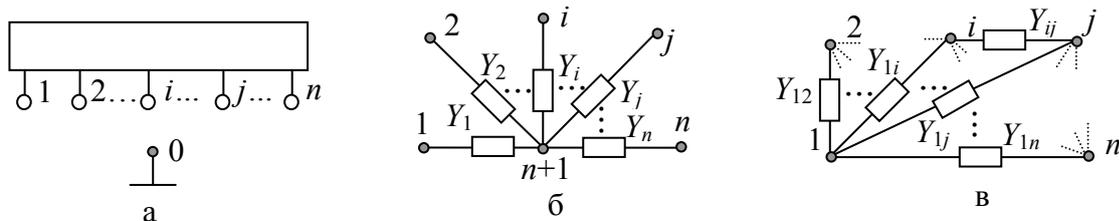


Рис. 1. Многополюсник с n внешними полюсами и произвольным числом внутренних узлов (а); n -лучевая звезда проводимостей с произвольным нулевым узлом (б) и полный n -угольник (в)

Проводимость Y'_{ij} из матрицы узловых проводимостей для схемы на рис. 1,а находится как передаточная проводимость от узла j к узлу i с помощью следующей схемно-алгебраической формулы

$$Y_{ij} = -Y'_{ij} = - \left| \begin{array}{c} \begin{array}{c} \text{---} 2 \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} 1 \text{---} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{---} i \text{---} \\ \downarrow Y_i \\ \text{---} n+1 \text{---} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{---} j \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} n \text{---} \end{array} \\ Y_2 \quad \vdots \quad Y_j \quad \vdots \quad Y_n \end{array} \right| \Bigg/ \left| \begin{array}{c} \text{---} 2 \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} 1 \text{---} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{---} i \text{---} \\ \downarrow Y_i \\ \text{---} n+1 \text{---} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{---} j \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} n \text{---} \end{array} \\ Y_2 \quad \vdots \quad Y_j \quad \vdots \quad Y_n \end{array} \right| . \quad (8)$$

В числителе (8) выделяем по формуле (5) проводимости Y_i и Y_j , последовательные с нуллатором и норатором соответственно и удаляем все остальные проводимости, поскольку они параллельны норатору (нуллатору). В знаменателе все проводимости соединены параллельно и преобразуются к одной разомкнутой проводимости. В результате формула (8) приводится к следующему виду

$$Y_{ij} = -Y_i Y_j \left| \begin{array}{c} \text{---} i \text{---} \\ \downarrow \\ \text{---} n+1 \text{---} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{---} j \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} n \text{---} \end{array} \right| \Bigg/ \left| \begin{array}{c} \text{---} \sum_{j=1}^n Y_j \text{---} \\ \downarrow \\ \text{---} \end{array} \right| . \quad (9)$$

Поскольку определитель последовательного согласного соединения норатора и нуллатора в (9) равен -1 , а определитель разомкнутой проводимости равен самой проводимости, то формула (9) приводится к известной формуле (1) преобразования звезды в полный многоугольник. Таким образом, формула (1) доказана без построения уравнений.

О существовании преобразования звезды проводимостей в полный многоугольник. Решение (8)–(9) существует и является единственным, если определитель схемы – сумма всех проводимостей звезды – отличен от нуля. Определитель может быть равен нулю, если проводимости звезды имеют реактивный характер и одновременно двух типов как индуктивного, так и емкостного. В этом случае при определенном сочетании численных значений реактивных проводимостей преобразование звезды в полный многоугольник не существует.

Если преобразование существует, то эквивалентный многоугольник получается полным – содержит $n(n-1)/2$ ветвей, поскольку числитель (1) является ненулевым при любых проводимостях звезды. Нулевые проводимости в звезде приводят, естественно, к исключению

соответствующих лучей, а бесконечные проводимости – к замене их проводниками.

При существовании решения преобразование звезды с комплексными проводимостями в полный многоугольник не всегда может быть реализовано в пассивном элементном базисе. При определенных сочетаниях численных значений комплексных проводимостей исходной звезды могут получиться отрицательные значения резистивных проводимостей многоугольника – угол комплексной проводимости по модулю больше 90 градусов. В этом случае реализация многоугольника возможна только в активном элементном базисе.

Преобразование двух связанных звезд в эквивалентный многоугольник. Схемно-алгебраическая формула (3) для определения передаточных проводимостей может быть применена для преобразования произвольных цепей. Приведем преобразование в многоугольник часто встречающейся в электрических сетях схемы двух связанных звезд. Исходная схема приведена на рис. 2,а, а схема полного многоугольника – на рис. 2,б.

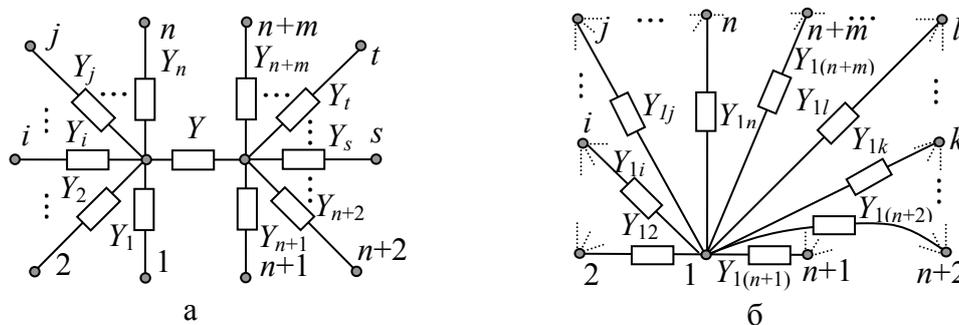


Рис. 2. Схема в виде двух связанных звезд из проводимостей (а) и полный n -угольник (б)

Знаменатель всех проводимостей эквивалентного многоугольника на рис. 2,б получается из формулы (3) в виде определителя схемы на рис. 2,а с соединенными между собой $n+m$ полюсами. После выделения по формуле (4) проводимости Y , связывающей между собой звезды, получим следующее выражение знаменателя

$$D = Y \sum_1^{n+m} Y_i + \sum_1^n Y_i \cdot \sum_{n+1}^{n+m} Y_j. \quad (10)$$

В первом слагаемом (8) получилась сумма проводимостей $Y_1 \dots Y_{n+m}$, поскольку после замены проводимости Y проводником из двух звезд образовалась одна звезда, как в формуле (6). Во втором слагаемом после удаления проводимости Y получились две подсхемы с одним общим узлом, определитель которой находится по формуле (5) как произведение определителей подсхем.

Аналогично находятся числители проводимостей сторон искомого многоугольника. Если искомая проводимость относится к стороне, связывающей полюса первой (слева на рис. 2,а) звезды, то формула имеет вид

$$Y_{ij} = [Y_i Y_j (Y + \sum_{n+1}^{n+m} Y_i)] / D. \quad (11)$$

Для проводимости стороны, связывающей полюса второй (справа на рис. 2,а) звезды, формула отличается тем, что в ней суммируются проводимости не второй звезды, как в (9), а первой. Так проводимость стороны $s-t$ имеет вид

$$Y_{st} = [Y_s Y_t (Y + \sum_1^n Y_i)] / D. \quad (12)$$

Проводимость стороны, связывающей полюса разных звезд, вообще не содержит суммы проводимостей, поскольку при удалении проводимости Y норатор и нуллятор оказываются в разных подсхемах. Определитель такой схемы равен нулю. Так проводимость стороны $k-s$ на рис. 2,б находится по формуле

$$Y_{ks} = [Y_k Y_s Y] / D. \quad (13)$$

Условие существования преобразования схемы двух связанных звезд в многоугольник. Этим условием является ненулевой определитель D в (10). Определитель D может быть равен нулю при нулевых значениях суммарных проводимостей обеих звезд

$$\sum_1^n Y_i = 0; \sum_{n+1}^{n+m} Y_j = 0. \quad (14)$$

Последнее возможно, если проводимости обеих звезд реактивные и различного характера. В этом случае равенства (14) могут выполняться при определенном сочетании численных значений проводимостей.

Эквивалентный многоугольник может быть неполным. Отдельные группы сторон многоугольника могут отсутствовать, если

$$Y + \sum_{n+1}^{n+m} Y_i = 0 \quad \text{или} \quad Y + \sum_1^n Y_i = 0. \quad (15)$$

Одно из равенств (15) может выполняться, если проводимости одной из двух звезд, в том числе проводимость связи, чисто реактивные, причем имеют как индуктивный, так и емкостный характер. При этом будут отсутствовать стороны многоугольника, соединяющие полюсы первой или второй звезды. Могут выполняться оба равенства (15), тогда будут отсутствовать стороны, соединяющие между собой полюсы первой звезды и стороны, соединяющие полюсы второй звезды. Будут присутствовать в соответствии с формулой (13) только «междוזвездные» стороны многоугольника – соединяющие между собой полюсы первой и второй звезд.

Выводы

1. Предложено доказательство формулы эквивалентного преобразования звезды проводимостей в полный многоугольник на основе схемно-алгебраического выражения для передаточной проводимости. Это доказательство не требует построения уравнений и выполняется непосредственно по схеме.

2. Предложенный подход позволяет получить формулы для преобразования произвольной линейной пассивной схемы в многоугольник на заданных полюсах. Показано преобразование в

многоугольник схемы двух связанных звезд. Определены условия существования различных сторон многоугольника.

Список литературы

1. Молодцов В.С. Преобразование n -звезды проводимостей в эквивалентный полный n -угольник // Известия вузов. Электромеханика. 2016, №1.– С. 12–18.
2. Rozen A. A new network theorem. — Journal of the Institution of Electrical Engineers (London), 1924, vol. 62.
3. Филаретов В.В. Топологические формулы для преобразования полного электрического многоугольника в эквивалентную звезду// Электричество.– 1995.– № 11.– С. 50–55.
4. Мельников Н.А. Матричный метод анализа электрических цепей.– М.–Л.: Энергия, 1966.– 216 с.
5. Основы теории цепей: учебник для вузов / Г.В.Зевеке, П.А.Ионкин, А.В.Нетушил, С.В.Страхов.– М.: Энергоатомиздат, 1989.– 528 с.
6. Витязь О. А. Матричный метод преобразования полного электрического многоугольника и многолучевой звезды // Электроника и связь. Тематический выпуск «Проблемы электроники». Ч. 1. 2008. С. 132 – 136.
7. Филаретов В.В. Топологический анализ электронных схем методом выделения параметров // Электричество.– 1998.– № 5.– С. 43–52.
8. Бондаренко Е.В., Курганов С.А., Филаретов В.В. Формирование уравнений многополюсников на основе схемных определителей// Синтез, анализ, диагностика электронных цепей: Международн. сб. науч. трудов. – Ульяновск: УлГТУ, 2012.– Вып.10.– С. 105–112.

Курганов Сергей Александрович – д.т.н, профессор кафедры «Электроснабжение» Ульяновского государственного технического университета. 432027, Ульяновск, ул. Северный Венец, 32. Тел. 8-8422-77-81-05. E-mail: sak@ulstu.ru.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СХЕМНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ К АНАЛИЗУ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В СИММЕТРИЧНЫХ ТРЕХФАЗНЫХ ЦЕПЯХ

Л. Н. Канов, В. В. Костюков

Предлагаемый метод схемных коэффициентов предназначен для численно-аналитического моделирования переходных процессов в электротехнических системах. Метод проиллюстрирован на примере анализа переходного процесса в симметричной трехфазной цепи при наличии кратных корней характеристического уравнения.

The proposed method of circuit coefficients for numerical and analytical modeling of transients in electrical systems. The method is illustrated by the example of the analysis of the transition process in a symmetrical three-phase circuit in the presence of multiple roots of characteristic equation .

Введение. Для обеспечения надежной и эффективной работы электротехнических систем необходим тщательный анализ их как рабочих, так и аварийных нестационарных режимов.

Наиболее эффективным и наглядным является классический метод, позволяющий получить точные аналитические выражения.

Общий подход к анализу нестационарных режимов заключается в составлении нелинейных дифференциальных уравнений n -го порядка относительно величины $x(t)$, для определения общего решения которых составляется характеристическое уравнение и находятся его корни p_i , $i=1,2,\dots,n$.

Решения для переменных состояния $x_j(t)$ (где $j=1, 2, \dots, n$) представляются

$$x_j(t) = x'_j(t) + \sum_{i=1}^n A_{ji} \exp(p_i t), \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{12} \\ \dots \\ A_{1n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x_1(0) \\ \Delta x_2(0) \\ \dots \\ \Delta x_n(0) \end{bmatrix}. \quad (3)$$

В этом выражении k_{ji} – коэффициенты связи, выражающие i -е постоянные интегрирования j переменной через аналогичные постоянные базовой, k -й переменной (в случае (3) – первой). Эти коэффициенты связи названы схемными коэффициентами системы.

Решение системы (3) дает постоянные интегрирования A_{ki} для базовой переменной $x_k(t)$. Постоянные интегрирования для других переменных состояния $x_j(t)$, $j=1, 2, \dots, n$, $j \neq k$ находятся с помощью схемных коэффициентов

$$A_{ji} = k_{ji} A_{ki}; \quad i, j = 1, 2, \dots, n; \quad k \in [1, 2, \dots, n]; \quad j \neq k.$$

Выражение для схемных коэффициентов (3) сохраняет справедливость и для случая, когда корни характеристического уравнения являются попарно комплексно-сопряженными. Соответствующие этим корням схемные коэффициенты также будут попарно комплексно-сопряженными.

Схемные коэффициенты для j -й переменной, соответствующие различным корням характеристического уравнения p_i , имеют одинаковую структуру и зависят только от значения корня. Это обстоятельство позволяет формализовать процедуру определения схемных коэффициентов.

При наличии группы кратных корней характеристического уравнения свободная составляющая каждой переменной имеет вид:

$$x_j(t) - x_j'(t) = \Delta x_j(t) = \sum_{i=1}^g \sum_{k=1}^{n_i} A_{ijk} t^{k-1} \exp(p_i t); \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

Теорема выполняется для тех постоянных интегрирования, которые не входят в решение с полиномиальными сомножителями t^{k-1} , $k=2, 3, \dots, n_k$.

Чтобы определить постоянные, входящие в переменные состояния с полиномиальным сомножителем t , следует продифференцировать выражений (4) по t и рассмотреть полученные уравнения при $t=0_+$

$$\frac{d\Delta x_j(0)}{dt} = \sum_{i=1}^g (A_{ji} p_i + A_{j2}); \quad A_{ij} \neq 0,$$

для $n \times g$ неизвестных постоянных интегрирования A_{ij2} , $j=1, 2, \dots, n$; $i=1, 2, \dots, g$.

Схемные коэффициенты можно найти из уравнений динамики системы, выразив с их помощью постоянные интегрирования небазовых переменных состояния через постоянные интегрирования базовой переменной. При наличии схемы получить схемные коэффициенты можно, поместив вместо элемента, ток или напряжение которого взяты за базовую переменную, соответственно или единичный источник тока, или единичный источник напряжения. Схемные коэффициенты можно выразить также через алгебраические дополнения определителя системы с последующей нормировкой.

В качестве примера применения метода схемных коэффициентов при наличии кратных корней характеристического уравнения рассмотрим симметричную трехфазную цепь с сосредоточенными параметрами. Проанализируем переходной процесс при условии, что ее питание осуществляется от источника бесконечной мощности. Исследуем режим симметричного короткого замыкания (рис. 1) при нулевых начальных условиях.

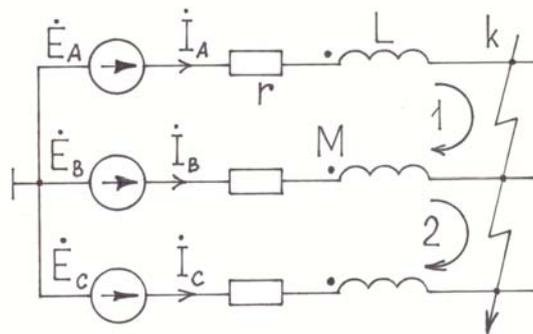


Рис. 1. Трехфазное короткое замыкание

Переходной процесс описывается уравнением для точки короткого замыкания k и двумя уравнениями для контуров 1 и 2, при этом учитывается напряжение взаимной индукции между ветвями цепи

$$\left. \begin{aligned} i_a + i_b + i_c &= 0 \\ i_a r + L \frac{di_a}{dt} + M \frac{di_b}{dt} + M \frac{di_c}{dt} - r i_b - L \frac{di_b}{dt} - M \frac{di_a}{dt} - M \frac{di_c}{dt} &= e_A - e_B \\ i_b r + L \frac{di_b}{dt} + M \frac{di_a}{dt} + M \frac{di_c}{dt} - r i_c - L \frac{di_c}{dt} - M \frac{di_a}{dt} - M \frac{di_b}{dt} &= e_B - e_C \end{aligned} \right\}.$$

Последние два уравнения упрощаются к виду:

$$\left. \begin{aligned} i_a r + \frac{di_a}{dt} (L - M) - r i_b - \frac{di_b}{dt} (L - M) &= e_A - e_B \\ i_b r + \frac{di_b}{dt} (L - M) - r i_c - \frac{di_c}{dt} (L - M) &= e_B - e_C \end{aligned} \right\}. \quad (5)$$

На основании метода формальной алгебраизации получаем корни характеристического уравнения, приравнивая определитель системы к нулю

$$\begin{vmatrix} p(L-M)+r & -p(L-M)-r & 0 \\ 0 & p(L-M)+r & -p(L-M)-r \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получаем: $3[p(L-M)+r]^2=0$, откуда заключаем, что характеристическое уравнение имеет пару кратных корней: $p_1=p_2=p=-r/(L-M)$.

Принимая за базовую переменную ток i_a , получаем свободную составляющую $i_{a\text{св}}=(A_{11}+A_{12}t)\exp(pt)=0$.

Для определения схемных коэффициентов k_{21} и k_{22} переменной с индексом 2, т.е. тока i_b , подставим в однородное уравнение для тока i_a системы (5) выражения $i_{a\text{св}}$ и $i_{b\text{св}}=(A_{21}+A_{22}t)\exp(pt)$. Сокращая на $\exp(pt)$ и группируя слагаемые по степеням t , получаем равенства:

$$\begin{aligned} A_{11}[r+(L-M)p]+A_{12}(L-M) &= A_{21}[r+(L-M)p]+A_{22}(L-M), \\ A_{12}[r+(L-M)p] &= A_{22}[r+(L-M)p], \end{aligned}$$

Отсюда: $A_{12}=A_{22}$; $A_{11}=A_{21}$. Таким образом, схемные коэффициенты $k_{21}=A_{21}/A_{11}=1$; $k_{22}=A_{22}/A_{12}=1$ оказываются единичными. Аналогично убеждаются в том, что схемные коэффициенты k_{13} и k_{32} для переменной i_c также единичные. Т.к. определитель матрицы схемных коэффициентов в

этих условиях нулевой, определим постоянные интегрирования A_{11} и A_{12} непосредственно по начальным значениям токов и их производных.

Для определения нового установившегося режима получим решение системы (5) для токов в фазах:

$$i_{aycm}(t) = \frac{E_M}{z} \sin(\omega t - \varphi); \quad i_{bycm}(t) = \frac{E_M}{z} \sin(\omega t - 120^\circ - \varphi); \quad i_{cycm}(t) = \frac{E_M}{z} \sin(\omega t + 120^\circ - \varphi);$$

где $z = \sqrt{r^2 + [\omega(L-M)]^2}$; $\varphi = \arctg \frac{\omega(L-M)}{r}$.

Производные от установившихся токов при $t=0$:

$$\frac{di_{aycm}(0)}{dt} = \frac{E_M \omega}{z} \cos(-\varphi); \quad \frac{di_{bycm}(0)}{dt} = \frac{E_M \omega}{z} \cos(-120^\circ - \varphi); \quad \frac{di_{cycm}(0)}{dt} = \frac{E_M \omega}{z} \cos(120^\circ - \varphi).$$

Чтобы определить начальные значения производных от токов, решим систему (5) при нулевых токах: $i_a(0) = i_b(0) = i_c(0) = 0$. Определитель этой системы $\Delta = 3(L-M)^2$; определители, соответствующие производным токов:

$$\Delta_a = 0; \quad \Delta_b = -\frac{3\sqrt{3}}{2} E_M (L-M); \quad \Delta_c = \frac{3\sqrt{3}}{2} E_M (L-M), \quad \text{откуда получаем } \frac{di_a(0)}{dt} = 0.$$

Постоянные A_{11} , A_{21} и A_{31} получаем непосредственно как разности начальных и установившихся токов при $t=0$:

$$A_{11} = \frac{E_M}{z} \sin \varphi; \quad A_{21} = \frac{E_M}{z} \sin(\varphi + 120^\circ); \quad A_{31} = \frac{E_M}{z} \sin(\varphi - 120^\circ).$$

Производная тока в фазе A имеет вид:

$$\frac{di_a(t)}{dt} = A_{12} e^{\frac{r}{L-M}t} - (A_{11} + A_{12}t) \frac{r}{L-M} e^{\frac{r}{L-M}t} + \frac{di_{aycm}(t)}{dt},$$

откуда при $t=0$:

$$A_{12} = \frac{E_M}{z} \sin \varphi \cdot \frac{r}{L-M} - \frac{E_M}{z} \cos(-\varphi) \cdot \omega = 0, \quad \text{Т.К. } \sin \varphi = \omega \frac{L-M}{z}; \quad \cos \varphi = \frac{r}{z}.$$

Аналогично убеждаемся в том, что $A_{22} = A_{32} = 0$. Таким образом, переходной процесс описывается выражениями:

$$\begin{aligned} i_a(t) &= I_M \sin \varphi \cdot \exp(pt) + I_M \sin(\omega t - \varphi); \\ i_b(t) &= I_M \sin(\varphi + 120^\circ) \cdot \exp(pt) + I_M \sin(\omega t - \varphi - 120^\circ); \\ i_c(t) &= I_M \sin(\varphi - 120^\circ) \cdot \exp(pt) + I_M \sin(\omega t - \varphi + 120^\circ); \end{aligned}$$

где $I_M = \frac{E_M}{z}$.

При малых сопротивлениях r угол φ близок к $\pi/2$, постоянная времени велика, поэтому возникает режим двойного сверхтока. Аналогичные выводы можно сделать и при ненулевой начальной фазе источников ЭДС.

Вывод. Симметричная трехфазная цепь при одновременном трехфазном коротком замыкании ведет себя как цепь первого порядка. Тот же результат сохраняется при коротком замыкании предшествующего ненулевого режима.

Список литературы

1. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники: Электрические цепи / Л.А. Бессонов. – 8-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1984. – 559 с.

2. Костюков В.В. Связь постоянных интегрирования с начальными условиями при анализе переходных процессов в линейных цепях/ В.В. Костюков // Вестник СевНТУ. Сер. Механика, энергетика, экология: Сб. науч. тр. – Севастополь, 2003. – Вып. 48. – С. 87-93.

3. Канов Л.Н. Схемное моделирование линейных электрических цепей переменного тока / Л.Н. Канов // Вестник СевНТУ. Сер. Механика, энергетика, экология: Сб. науч. тр. – Севастополь, 2002. – Вып. 41. – С.151-155.

4. Костюков В.В., Канов Л.Н. Численно-аналитическое моделирование переходных процессов в электротехнических системах методом схемных коэффициентов // Труды Международной «Конференции по логике, информатике, науковедению» - Ульяновск, 2007, том 3. – С. 137-145.

Канов Лев Николаевич, к. т. н., доц. кафедры судового электрооборудования Севастопольского государственного университета (СевГУ). 299053, г. Севастополь, ул. Университетская, 33, ауд. А302.

E-mail: lkanov48@mail.ru

Костюков Валентин Викторович – к.т.н., доц. кафедры судового электрооборудования СевГУ. 299053, г. Севастополь, ул. Университетская, 33, ауд. А302. E-mail: kostjukovVV@yandex.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ДИАГНОСТИКА ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ И СИСТЕМ

МОДЕЛИРОВАНИЕ НАДЕЖНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ПОМОЩИ ГРАФИЧЕСКОГО ПРОЦЕССОРА

А. А. Гришкевич

Рассмотрена алгоритмическая имитационная модель функционирования двух элементов электроэнергетической системы с использованием графического процессора (graphics processing unit, GPU) на основе технологии C++ AMP (C++ Accelerated Massive Parallelism). Увеличена производительность вычислений за счет параллельного использования нескольких сотен (384, NVIDIA GeForce GT 740m) ядер GPU по сравнению с использованием нескольких (4, Intel Core i5-3317U) ядер центрального процессора (central processing unit, CPU).

An algorithmic simulation model of operation for two elements of a power system with the usage of the graphics processing unit (GPU) based on the C++ AMP is implemented. It allows to increase the performance of calculations by the parallel use of several hundred GPU cores compared with several cores of central processing unit (CPU).

Введение. Методы моделирования просты для реализации и понимания. Позволяют учесть различные расклады случайных величин. Однако требуют большего числа испытаний (вычислительной мощности), которая резко возрастает с ростом размерности задач.

При моделировании надежности на персональном компьютере традиционной последовательной программой достижение приемлемой

точности для представляющей практический интерес размерности представляется недостижимым ввиду длительности процесса моделирования. Однако вполне позволяет оценить требуемые вычислительные ресурсы для подобных расчетов [1].

Вычислительный кластер / суперкомпьютер [2] позволяет достичь производительности, обеспечивающей практическое использование методов моделирования. Это, в свою очередь, порождает весьма серьезные организационные, технические и экономические сложности.

Центральный процессор (CPU) персонального компьютера не является единственным вычислительным устройством в персональном компьютере. Значительной вычислительной мощностью обладают карты графические (GPU). Технологическая модернизация графических процессоров привела к тому, что вычислительная мощность GPU стала значительно опережать вычислительную мощность центрального процессора (CPU). Использование графических карт представляет альтернативу использования кластера / суперкомпьютера, позволяя на более удобный способ доступа к вычислительным ресурсам. Ниже предлагается описание компьютерного моделирования надежности функционирования двух элементов электроэнергетической системы на GPU.

Выбор подхода к реализации имитационной модели на графической карте. Устройство графических процессоров (GPU) значительно отличаются от устройства центрального процессора (CPU). Ориентация на специфические для машинной графики операции привела к существенно иной архитектуре подобных устройств. В CPU насчитываются десятки ядер, а в современных GPU – тысячи.

Центральный процессор представляет собой универсальный процессор или процессор общего назначения, оптимизированный для выполнения одного потока последовательных инструкций с максимальной производительностью. Графический процессор предназначен для выполнения огромного количества параллельных потоков команд. Потоки команд графического процессора распараллелены изначально, что облегчает распараллеливание инструкций. Графические и центральные

процессоры различаются и по принципам доступа к памяти. В GPU доступ к памяти легко предсказуем, и не нужна кэш-память большого размера

В универсальных процессорах большую часть площади кристалла занимают различные буферы команд и данных, блоки декодирования, блоки аппаратного предсказания ветвления, блоки переупорядочения команд и кэшпамять первого, второго и третьего уровней. Все эти аппаратные блоки нужны для ускорения исполнения потоков команд за счет их распараллеливания на уровне ядра процессора. В графическом процессоре основную площадь занимают многочисленные исполнительные блоки, что позволяет одновременно обрабатывать несколько тысяч потоков команд. Графические процессоры предназначены для параллельных вычислений с большим количеством арифметических операций.

Знание OpenGL / DirectX и необходимость программирования на шейдерных языках сдерживали распространение вычислений общего назначения на GPU. Одной из первых попыток описать «общие» вычисления на графическом процессоре явилась разработанная компанией Nvidia технология CUDA (Compute Unified Device Architecture) [3]. Развитием данной технологии можно считать разработанную корпорацией Microsoft технологию ускорения написанных на C++ приложений за счет исполнения кода на графических процессорах C++ Accelerated Massive Parallelism (C++ AMP) [4]. Модель программирования в C++ AMP основана на библиотеке и двух расширениях языка C++, интегрированных в компилятор Visual Studio. Использование этой технологии требует от видеокарты поддержки DirectX 11 (и может работать на видеокартах различных производителей в отличие от CUDA).

Текст программы для вычислений на GPU отличается от текста программы для вычислений на CPU. Вычисления на GPU описываются некоторым подмножеством (`restrict(amp)`) команд C++. Например, команда `goto` не подходит для исполнения на GPU. Ввиду этого компьютерная модель для моделирования надежности на GPU существенно отличается от распределенной кластерной модели [2].

Модель Маркова функционирования двух элементов электроэнергетической системы с точки зрения надежности. Каждый элемент E электроэнергетической системы (применительно к электроэнергетике это трансформатор, выключатель и т.д.) может находиться в одном из четырех состояний. Будем считать E_n – состоянием нормальной работы, E_s – состоянием между отказом и завершением оперативных переключений, E_r – состоянием аварийного ремонта, E_m – состоянием предупредительного ремонта (преднамеренного отключения) элемента; t_{E_x} – случайное время перехода элемента E из состояния E_x в состояние E_y . Состояние системы определяется состоянием каждого элемента системы.

Пространство состояний и диаграмма переходов между состояниями при моделировании надежности функционирования двух элементов I, K представлены на рис.1 [2].

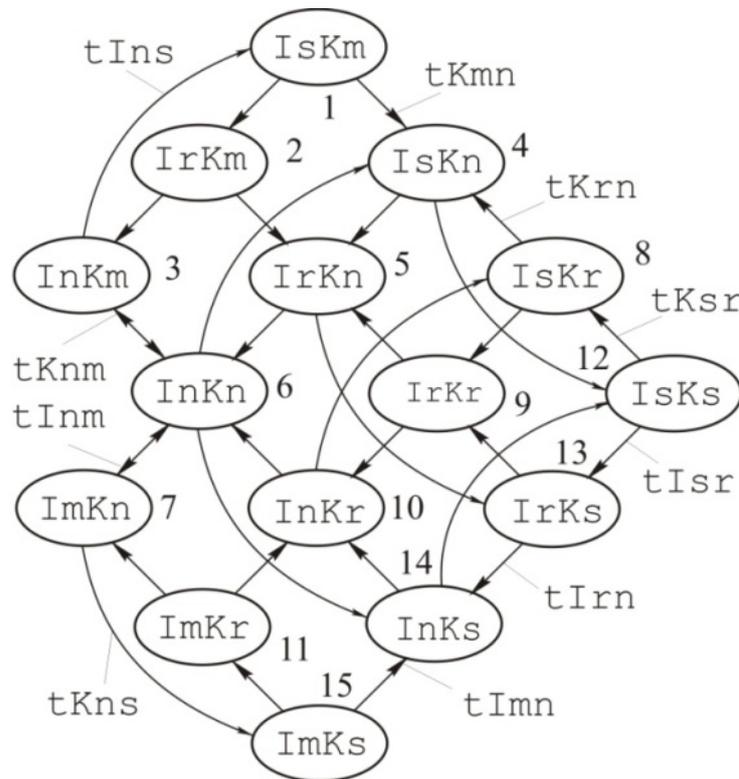


Рис.1. Диаграмма переходов между состояниями для двух элементов

Для удобства состояния пронумерованы, т.е. $IsKn=S4, \dots$. Для модели двух элементов рассматривается 15 состояний. Численные тестовые значения показателей надежности элементов I, K взяты согласно [2]: $TIns0=1/0,01$ [год] – среднее время перехода элемента I из состояния In в состояние Is ; $TInm0=1/2,2$ [год]; $TIsr0=2/8760$ [год]; $TInr0=11,39/8760$ [год]; $TImn0=7,96/8760$ [год]; $TKns0=1/0,04$ [год]; $TKnm0=1$ [год]; $TKsr0=2/8760$ [год]; $TKrn0=2,19/8760$ [год]; $TKmn0=7/8760$ [год]. Эти численные значения трактовались как параметры экспоненциального распределения соответствующей случайной величины.

Алгоритмическая реализация имитационной модели на языке программирования C++ AMP. Процесс моделирования заключается в генерации последовательности состояний системы, начиная от начального состояния $InKn$. Для каждого состояния элемента E_x генерируется случайная величина tEx , описывающая продолжительность времени пребывания элемента в соответствующем состоянии [2].

Суммарное время моделирования T и время Tsk пребывания в состоянии Sk определяется количеством испытаний N , которое рассчитывается посредством формулы

$$N=licznik1_serii*Niti*licznik2_TimeOUT,$$

где $licznik1_serii$ – количество серий, $Niti * licznik2_TimeOUT$ – количество испытаний в одной серии. Количество испытаний в серии для графической карты подбирается экспериментально из условия нагрузки графического процессора менее 2 секунд, что обеспечивает его стабильную работу. В Microsoft Windows, чтобы не дать процессу слишком интенсивно потреблять ресурсы графического процессора (в результате чего дисплей перестает отвечать), используется механизм TDR (Time-Out Detection and Recovery). По умолчанию TDR сбрасывает представление ускорителя, если буфер прямого доступа к памяти выполняется дольше двух секунд. В этом случае программа, написанная с применением C++ AMP, завершается. Количество испытаний в серии складывается из количества запущенных в графическом процессоре нитей $Niti$

и количества испытаний для одной нити `licznik2_TimeOUT`. Таким образом, алгоритмически процесс моделирования задается кодом

```
#include <amp.h>
```

```
...
```

```
const int Niti = 1536;
```

```
extent<1> e_Niti (Niti);
```

```
...
```

```
for (i = 0; i < licznik1_serii; i++) {
```

```
parallel_for_each(e_Niti, [(index<1> idx) restrict(amp) {
```

```
for (j = 0; j < licznik2_TimeOUT; j++) { ... }}}
```

Команда `parallel_for_each` запускает вычисления на графическом процессоре, а экстен `e_Niti` определяет конфигурацию вычислительной среды графического процессора – количество параллельно запущенных нитей (процессов) в GPU. В данном случае запускается 1536 нитей (параллельных процессов).

Подключение библиотеки генерации случайных чисел [5] обеспечивает работу параллельного генератора случайных чисел на GPU

```
#include "amp_tinymt_rng.h"
```

```
...
```

```
int seed = 5489;
```

```
tinymt_collection<rank> myrand(e_Niti, seed + i);
```

```
parallel_for_each(e_Niti, [(index<1> idx) restrict(amp) {
```

```
auto t = myrand[idx];
```

```
t.next_single(); ... }
```

Вызов метода `next_single()` обеспечивает генерацию следующего случайного числа (равномерное распределение) в интервале $[0,1]$.

Фрагмент кода программы моделирования процессов перехода между состояниями для модели двух элементов на языке программирования C++ с ограничением `restrict(amp)` применительно к состоянию `IsKn` представлен ниже

```
...
```

```
S06_InKn = true; S04_IsKn = false;
```

```
S05_IrKn = false; S12_IsKs = false; ...
```

```
...
```

```

if (S04_IsKn){
    if (tIsr <= tKns) //IsKn -> IrKn
{tKns = tKns - tIsr;
    TS4 = TS4 + tIsr;
    получить новое значение случайной величины tIsr ;
    //tIsr: EXPO(TIsr0)
    S04_IsKn = false;
    S05_IrKn = true;}
else //IsKn -> IsKs
{tIsr = tIsr - tKns;
    TS4 = TS4 + tKns;
    получить новое значение случайной величины tKns ;
    // tKns : EXPO(TKns0)
    S04_IsKn = false;
    S12_IsKs = true;}} ...

```

В представленном фрагменте кода текущее моделируемое состояние системы определяется значением "TRUE" логической переменной SXX_XxXx. Гарантированный переход к моделированию нового состояния системы осуществляется в следующей итерации цикла

```
for (j = 0; j<licznik2_TimeOUT; j++) {...}
```

Моделирование экспоненциально распределенной случайной величины tExy с параметром TExy0 в языке программирования C++ AMP на основе равномерного распределения (функция t.next_single() библиотеки генерации случайных чисел) задается выражением

```

#include "amp_math.h"
...
do {
tExy = -(TExy0*precise_math::log(t.next_single()));
}
while (tExy==INFINITY);//tExy: EXPO(TExy0)

```

Функция log() из пространства имен precise_math [6] сконструирована для вычисления на графическом ускорителе. Петля do {...} while (...)

исключает ошибки генератора случайных чисел, заключающиеся в генерации больших (бесконечных, INFINITY) чисел.

Тестирование имитационной модели. Расчеты осуществлялись на компьютере Intel(R) Core(TM) CPU i5-3317U @ 1.70GHz (4 ядра) с видеокартой NVIDIA GeForce GT 740M (384 графических ядра – shaders).

Одна серия моделирования ($\sim 3,65 \cdot 10^9$ лет)

```
parallel_for_each(e_Niti, [(index<1> idx) restrict(amp) {  
  for (j = 0; j < licznik2_TimeOUT; j++) { ... }  
}
```

выполняется на графическом процессоре 79,2 с.

Моделирование промежутка времени $T_{IK} = 5,43 \cdot 10^{11}$ ($4,00 \cdot 10^{12}$) лет потребовало 3:27 (24:06) часа работы используемого компьютера. Получено $\sim 4,5$ ускорение по сравнению с двухпроцессорным кластером (8 ядер) [2].

На рис.2 приводится график наибольшей относительной погрешности δ_{max} вероятности состояния для конца интервала моделирования. Из графика рис.2 видно, что при промежутке моделирования большем $2,5 \cdot 10^{11}$ ($7 \cdot 10^{11}$, $1,3 \cdot 10^{12}$) лет наибольшая относительная погрешность вероятности состояния системы меньше 2% (1%, 0,5%). Указанная точность достигается соответственно за 1:30 (4:10, 7:50) часа работы графического процессора.

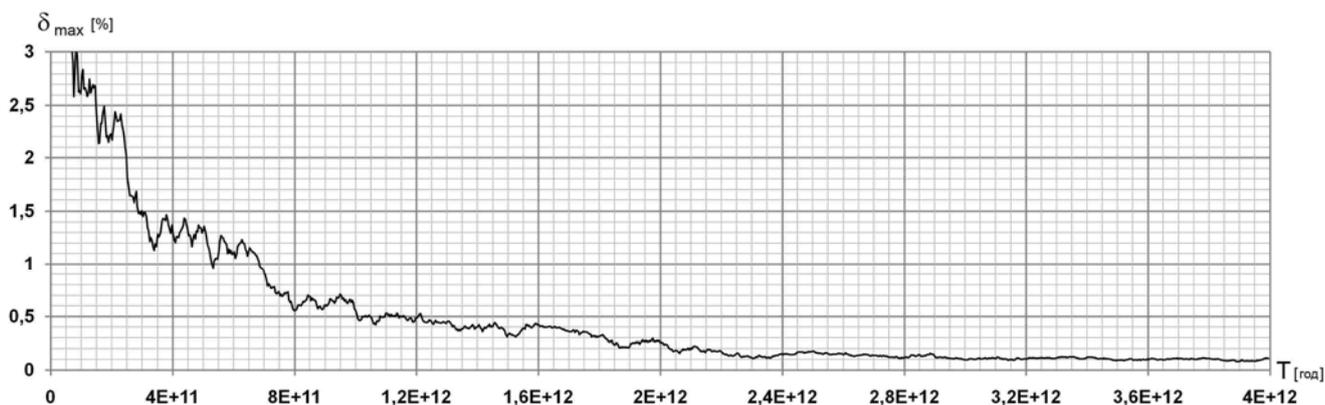


Рис.2. Наибольшая относительная погрешность вероятности состояния для конца интервала моделирования

Выводы. 1. Графические процессоры обладают вычислительной мощностью для обеспечения приемлемой точности моделирования

структурной надежности сложных электроэнергетических систем за разумное время. 2. Компьютеры для имитационного моделирования целесообразно оснащать мощными графическими адаптерами с большим числом графических ядер (shaders) и поддержкой арифметики двойной точности (double precision). Перенос расчетов с CPU на GPU позволяет ускорить получение результатов. 3. Представляет интерес организация параллельной работы с обменом информацией ядер центрального процессора и графического адаптера.

Список литературы

1. Гришкевич А.А., Бурмутаев А.Е. Статистическое моделирование интервальных оценок показателей структурной надежности электрических систем // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международный сборник научных трудов / под ред. В. В. Филаретова. – Ульяновск: УлГТУ, 2011. – Вып. 9. – С. 163-170.

2. Grishkevich A., Rozproszone modele symulacyjne pozwalające oszacować wskaźniki niezawodności strukturalnej systemów elektroenergetycznych // Przegląd Elektrotechniczny (Electrical Review) . – 2015. – Vol. R91, nr. 12. – P. 106-109.

3. Сандерс Дж., Кэндрот Э. Технология CUDA в примерах: введение в программирование графических процессоров.–М.:ДМК Пресс,2013.–232 с.

4. Грегори К., Миллер Э. С++ AMP: построение массивно параллельных программ с помощью Microsoft Visual C++. – М.: ДМК Пресс, 2013. – 412 с.

5. С++ AMP RNG Library (Random Number Generator).

<http://amprng.codeplex.com/>

6. Concurrency::precise_math Namespace.

<https://msdn.microsoft.com/en-us/library/hh553049.aspx>

Гришкевич Андрей Александрович – д.т.н., чл.-корр. АЭН, профессор Ченстоховского политехнического института; Polska, 42-200, Czestochowa, al. Armii Krajowej, 17, Politechnika Czestochowska (Czestochowa university of technology)); e-mail: a.grischkevich@el.pcz.czest.pl; grishkev_ramb@rambler.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕР КАЧЕСТВА МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ОЦЕНИВАНИЯ СОСТОЯНИЯ ТЕХНИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА

Г. Р. Кадырова

Представлен статистический пакет «Система поиска оптимальных регрессий» (СПОР), реализующий подход адаптивного регрессионного моделирования и обеспечивающий оценку адекватности модели данным и поиск ее оптимальной структуры. Исследованы свойства меры «скользящего экзамена», основанной на всей выборке данных и использующей ее в качестве контрольной, по отношению к известным внутренним и внешним мерам. Показана перспектива ее применения для идентификации оптимальной модели прогноза в рамках СПОР.

Ключевые слова: регрессионное моделирование, прогнозирование, методы структурной идентификации, меры качества, система поиска оптимальных регрессий, статистический пакет.

The statistical package "System of Search of Optimum Regressions" (SSOR) realizing approach of adaptive regression modeling and providing an assessment of adequacy of model to data and search of its optimum structure is presented in article. Properties of the measure of "the sliding examination" based on all selection of data and using it as control in relation to known internal and external measures are investigated. The prospect of its application for identification of an optimum forecasting model within SSOR is shown.

Key words: regression modeling, forecasting, methods of structural identification, quality measure, statistical package.

Адаптивное регрессионное моделирование. Получение моделей, адекватно описывающих состояние технических объектов с последующим их использованием для прогноза выходных характеристик (откликов), является весьма актуальной задачей. Поиск адекватной модели в рамках

подхода регрессионного моделирования (РМ) [1] является чрезвычайно трудозатратной процедурой, требующей использования в процессе адаптации набора критериев, базисных функций, методов структурно-параметрической идентификации, а также возможности реализации различных логически обоснованных сценариев обработки.

Альтернативой традиционному подходу является стратегия адаптивного регрессионного моделирования (РМ), нацеленная на оптимизацию модели обработки данных и предусматривающая на этапе получения МНК-оценок параметров статистический анализ модели и ее членов (регрессионный анализ РА), а так же использующая дополнительные этапы обработки: проверку соблюдения предположений РА-МНК, адаптацию в случае их нарушений.

Регрессионное моделирование – это системный подход, при котором корректность применения любого элемента системы (выборки, модели, методов оценивания параметров и структурной идентификации, критерия качества, набора предположений) может быть подвергнута сомнению и проверке с соответствующей адаптацией при нарушении заданных условий.

Запишем исходную модель РА в матричном виде:

$$Y = X\beta + \varepsilon, \quad (1)$$

где Y – вектор наблюдений размера $(n \times 1)$, содержащий n наблюдаемых значений y_1, y_2, \dots, y_n зависимой переменной или отклика Y (Y – случайная величина); X – регрессионная матрица размера $(n \times p)$, содержащая $x_{10} = x_{20} = \dots = x_{n0} = 1$ и элементы x_{ij} как i -е наблюдения ($i = \overline{1, n}$) над регрессорами x_{ij} ($j = \overline{1, p-1}$) (x_{ij} – неслучайная величина), p – количество регрессоров; β – вектор размера $(p \times 1)$ истинных неизвестных параметров β_j ($j = \overline{0, p-1}$), подлежащих оцениванию (β_j – неслучайная величина); ε – вектор ошибок размера $(n \times 1)$, содержащий неизвестные погрешности наблюдений ε_i ($i = \overline{1, n}$) (ε_i – случайная величина).

В линейном РА модель (1) считается неизвестной как по структуре, под которой понимается состав и размерность модели, так и по параметрам – элементам β_j – вектора β . Назовем задачей параметрического оценивания задачу нахождения по результатам наблюдений оптимальных оценок β_j . Задачу нахождения оптимальной структуры модели можно назвать тогда задачей структурной идентификации.

Подход адаптивного РМ предлагает проверку соблюдения условий применения МНК: постоянство дисперсии, независимость регрессоров, нормальность распределения ошибок, нулевое значение математического ожидания ошибок, независимость ошибок. При этом избыточные члены модели находят с помощью t – критерия; мультиколлинеарность может быть обнаружена по коэффициентам парной корреляции.

С целью максимального ослабления влияния взаимозависимости регрессоров используются центрирование данных и далее устойчивые к мультиколлинеарности вычислительные схемы МНК (метод Хаусхолдера). Адаптация к нарушению предположения о нормальности выполняется применением робастных методов. Нарушение условия однородности наблюдений или постоянства дисперсии проверяется по графикам остатков. Для проверки нарушения условия независимости ошибок используется критерий Дарбина-Уотсона. Если основные условия применения МНК соблюдаются, построенная модель может использоваться для прогнозирования.

Эффективность предложенной методологии, под которой понимается сокращение размерности модели и повышение точности определения ее параметров и прогноза, прямо пропорциональна размерности, степени зашумленности и мультиколлинеарности исходных данных, что позволяет считать ее применение для описания состояния технических объектов наиболее перспективным математическим подходом [5].

О системе поиска оптимальных регрессий: программный пакет СПОР. Программный пакет СПОР (система поиска оптимальных

регрессий) [2, 3] является специализированной системой, реализующей стратегию адаптивного РМ. Пакет обеспечивает оценку адекватности модели наблюдениям и поиск ее оптимальной структуры, эффективную настройку на различные сценарии обработки и автоматизацию процесса адаптации вычислительных схем к нарушениям условий метода наименьших квадратов (МНК) [4].

Одной из важнейших задач при анализе данных является задача выбора меры сравнения конкурирующих описаний. Для моделей небольшой размерности, предназначенных для прогноза, использование внутренних мер качества, например средней квадратической ошибки, не всегда может дать точное представление о предпочтительности той или иной конкурирующей структуры.

В ходе надежного вычислительного эксперимента удалось показать, что наилучшей может быть мера, построенная на принципе «скользящего экзамена» (СЭ). Ее применение гарантирует при заданной доверительной вероятности попадание ошибки прогноза в оптимальный интервал по внешним критериям точности.

При организации оптимальной предметной стратегии РМ необходимо учесть наличие различных выборок, предположений, классов функций, методов оценивания, мер качества и их наборов для принципа многокритериальности, методов структурной идентификации, конкурирующих в соответствии с принципом неокончательных решений стратегий адаптации к нарушению предположений.

Для практического применения регрессионного моделирования прежде всего требуется полная автоматизация всех заявленных процедур, для чего было разработано программное обеспечение [6]. Пакет СПОР включает в себя управляющий модуль и модуль формирования запроса; библиотеку функциональных процедур; блоки сценария, настройки системы, редактора данных, формирования таблиц, а также справочник [7].

Основным инструментом положительного воздействия на прогностические свойства модели является алгоритм поиска ее

оптимальной структуры. В пакете реализованы следующие процедуры структурно-параметрической идентификации: 1) множественная линейная регрессия; 2) гребневая регрессия; 3) робастное оценивание; 4) полный перебор структур; 5) неполный перебор структур (перебор с ограничением на количество включаемых регрессоров в модель); 6) перебор нормальных систем; 7) пошаговая регрессия с включением-исключением; 8) случайный поиск с адаптацией и возвратом.

Перечисленные процедуры могут быть вызваны как в автоматическом режиме для обработки целого ряда выборок данных, так и при обработке отдельной выборки данных по реализованному оптимальному сценарию. В пакете предусмотрена процедура построения и анализа графика остатков, что является полезным статистическим инструментом для проверки адекватности оцененной модели регрессии имеющимся данным.

Первая версия программного пакета была реализована на языке Object Pascal с использованием библиотек Turbo Vision и функционировала под управлением ОС MS DOS. Версия СПОР 2.0. разработана на платформе ОС Windows. В настоящее время ведутся работы по наращиванию функциональных возможностей СПОР и ее интеллектуализации [8, 9, 10].

Внутренние меры качества. Качество модели РА обычно определяют по внутренним мерам – средней квадратической ошибке σ , которая применяется как для оценки адекватности модели, так и для сравнения различных моделей друг с другом; выборочному коэффициенту множественной корреляции R , который используют как меру линейной связи (1): чем больше значение R ($0 \leq R \leq 1$), тем сильнее связь, то есть тем лучше аппроксимирующая функция соответствует наблюдениям, также высокое значение R гарантирует пригодность модели для прогноза; F – критерию, при $F > 4F_T(\alpha; p-1, n-p)$ (F_T – критическое значение, взятое из таблицы для F – критерия) модель признается заслуживающей внимания на предмет ее использования для прогноза.

Оценив эффективность модели по одной или нескольким мерам и признав ее пригодной к использованию, затруднительно полагать ее полностью адекватной – такой, что никакой другой набор регрессоров из

использованных не даст статистически значимого улучшения в прогнозе \hat{Y} . Задача формирования полностью адекватной модели требует анализа каждого регрессора, включенного в модель.

Проверка гипотезы $H_0: \beta_j = 0$ для $j = \overline{1, p-1}$ означает проверку предположения о том, что регрессор x_j не улучшает прогноз \hat{Y} по сравнению с прогнозом, получаемым с помощью модели по $(p-2)$ другим регрессорам, то есть проверку предположения о том, что x_j – статистически незначимая переменная. Наиболее просто гипотезу можно проверить, применяя статистику

$$F_j = \frac{\hat{\beta}_j^2}{\hat{\sigma}_j^2}, \quad (2)$$

где $\hat{\sigma}_j^2$ – диагональные элементы дисперсионно-ковариационной матрицы $D\hat{\beta}$. В отличие от общего F -критерия, статистика F_j называется частным F -критерием. Для H_0 эта статистика имеет F -распределение с 1 и $(n-p)$ степенями свободы. Кроме (2), часто используется статистика

$$t_j = \frac{\hat{\beta}_j}{\hat{\sigma}_j}, \quad (3)$$

имеющая для H_0 t -распределение с $(n-p)$ степенями свободы. Значению t_j , удовлетворяющему неравенству $t_j \leq t_T$, при котором гипотеза H_0 отвергается на уровне значимости α , соответствует согласно формуле (3) значение $\hat{\sigma}_j$, равное определяемой оценке $\hat{\beta}_j$ или меньше ее.

Мера t является полностью структурной мерой. С ее помощью решается задача выбора информативного по t -критерию набора регрессоров. Мера необязательно приводит к набору с минимальной ошибкой, к тому же эффективность ее зависит от степени соблюдения предположения <3.1> [1] о независимости регрессоров.

Итак, при статистическом анализе регрессоров в первую очередь оценивается значимость каждого члена модели. Кроме этого, возможно еще оценить и степень важности каждого регрессора, анализируя так называемые частные коэффициенты корреляции. В результате

статистического анализа регрессоров можно установить их значимость, а также проранжировать по степени важности для регрессионной модели.

Рассмотренные внутренние меры качества характеризуют адекватность модели только по отношению к использованной для ее построения выборке точек. Это первый этап исследования модели, на котором экспериментатор должен быть убежден, что модель соответствует наблюдениям.

Одной из важнейших задач при анализе данных является задача выбора меры сравнения конкурирующих описаний. В рамках СПОР предоставляется возможность, помимо классических внутренних мер, вычисления внешних мер и мер СЭ.

Внешние меры качества. Если модель предназначена для прогноза, то надо быть уверенным в ее пригодности для определения области, не совпадающей с выборочными точками y_i . Для оценки внешней адекватности (точности прогноза) используются контрольные точки. Общим для всех подходов к построению внешних мер является деление исходной выборки на обучающую (ОВ) и контрольную (КВ). На первой выборке строится модель или множество моделей; на второй – выполняется оценка ее адекватности или дискриминация по статистикам – внешним мерам качества. Внешние меры основаны на анализе расхождений между прогнозом \hat{Y} и известным наблюдаемым значением Y для объектов, не участвовавших в получении модели.

Назовем разность между наблюдаемым значением отклика y_i для объекта, не использованного в модели для ОВ, и его прогнозом \hat{y}_i расхождением Δ_i в отличие от понятия остатка e_i для точек ОВ. Расхождение Δ_i можно записать в виде:

$$\Delta_i = y_i - \hat{y}_i, \quad (4)$$

где $i = \overline{1, n_{KB}}$ и n_{KB} – количество точек в КВ.

Мера

$$\bar{\Delta} = \sum_{i=1}^{n_{KB}} \frac{\Delta_i}{n_{KB}} \quad (5)$$

или ее абсолютная величина

$$|\bar{\Delta}| = \sum_{i=1}^{n_{KB}} \frac{|\Delta_i|}{n_{KB}} \quad (6)$$

могут служить характеристикой систематической ошибки, обусловленной в общем смысле методом обработки, а статистики

$$\sigma_{\Delta_1} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_{KB}} \Delta_i^2}{n_{KB} - p}}, \quad (7)$$

$$\sigma_{\Delta_2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_{KB}} (\Delta_i - \bar{\Delta})^2}{n_{KB} - p}}, \quad (8)$$

$$\sigma_{\Delta_{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_{KB}} \Delta_i^2}{n_{KB} - 1}}, \quad (9)$$

$$\sigma_{|\Delta|} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (|\Delta_i| - \bar{\Delta})^2}{n_{KB} - p}} \quad (10)$$

являются характеристиками случайной выборки.

Мера R_{Δ} может рассматриваться как мера линейной связи между прогнозом и наблюдением: чем выше R_{Δ} , тем лучше модель соответствует наблюдениям. Для оценки качества прогноза можно использовать так называемый средний квадрат ошибки предсказания (СКОП) [11] или безусловный средний квадрат ошибки UMSE [12]:

$$СКОП = \frac{(n_{KB}^2 - n_{KB} - 2)(n_{KB} - 1) \hat{\sigma}_{\Delta}^2 (1 - \hat{R}_{\Delta}^2)}{n_{KB}(n_{KB} - p)(n_{KB} - p - 1)}. \quad (11)$$

Меры скользящего экзамена (СЭ). Поскольку, работая с малыми выборками, нет возможности разделить ее на обучающую и контрольную с достаточно большим количеством точек, для оценки внешней адекватности мы предлагаем использовать внешние меры, основанные на «скользящей» контрольной выборке.

Если последовательно каждый из объектов выборки выводить из нее, полагая этот объект контрольным, и пересчитывать заново параметры модели, то разности между y_i и \hat{y}_i для скользящей контрольной точки $\Delta_i =$

«наблюдение минус прогноз» ($i = \overline{1, n}$; где n – общее количество объектов) могут быть использованы для построения ряда внешних мер, в дальнейшем для удобства называемых мерами СЭ.

Последовательное исключение объектов, соответствующее удалению определенных строк из матрицы данных X , дает возможность сформулировать искусственно новую выборку (проверочную или контрольную) того же объема, что и исходная. Внешние меры, основанные на поодиочном выделении всех объектов в группу контрольных, позволяют исследовать модель на всем исходном выборочном пространстве, в отдельных зонах и точках.

Введем понятие скользящего расхождения (c -расхождения), имея в виду в (4) под $y_i (i = \overline{1, n})$ значения наблюдаемых откликов для объектов выборки, а под \hat{y}_i – прогнозы по моделям, полученным по выборкам объема $(n-1)$, из которых каждый раз при образовании Δ_i удаляется i -й объект. Таким образом, имеющаяся в распоряжении исследователя выборка используется одновременно и как обучающая, и как контрольная, точнее, как скользящая контрольная выборка. Выражение (4) можно переписать в виде:

$$\Delta_i = y_i - x_i^T \hat{\beta}_c, \quad (12)$$

где x_i^T – i -я строка матрицы X ; $\hat{\beta}_c$ – оценка вектора $\hat{\beta}$, полученная с матрицей X без этой i -й строки и вектором Y без i -го элемента в соответствии с формулой $\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y$.

Соблюдаемое обычно на практике неравенство $\Delta_i > e_i$ является следствием того, что $\hat{\beta}_c \neq \hat{\beta}$. Модель $\hat{Y} = X \hat{\beta}_c$ для объема выборки $(n-1)$ «не схватывает» в отличие от $\hat{Y} = X \hat{\beta}$ для объема n индивидуальные особенности выделенной из выборки i -й точки, увеличивая тем самым различие между наблюдением и прогнозом.

Следовательно, получаемые таким образом c -расхождения будут оценивать качество прогноза в точках зон, являющихся окрестностями точек выборки. Естественно, в последних качество прогноза определяется

остатками e_i . Оценки c -расхождений будут несколько завышены по сравнению с реальными расхождениями, так как в действительности для прогноза используется модель по выборке объема n .

Таким образом, с помощью c -расхождений, построенных на точках выборки, мы характеризуем прогностические свойства соответствующей ей модели в окрестностях этих точек. При этом предполагается, что модель для полной выборки и n моделей скользящей процедуры существенно не отличаются друг от друга, т. е. аномальные выбросы должны быть предварительно выведены из выборки.

Если в РА везде остатки e_i заменить на c -расхождения Δ_i , то на всех стадиях статистического анализа можно получить более объективные суждения, чем ранее. При этом все внутренние критерии превратятся во внешние; по ним будет оцениваться адекватность модели на скользящей выборке (псевдовыборке), играющей роль контрольной. Проверка предпосылок $\langle 1 \rangle$ – $\langle 5 \rangle$ [1] по Δ_i и критериям, основанным на c -расхождениях, обеспечивает относительно точные результаты и быструю сходимость процесса последовательной адаптации в РМ.

Численный анализ мер. Анализ мер с помощью пакета СПОР выполнялся по результатам обработки 45 выборок данных. Исследовались свойства меры СЭ. Решалась задача численного исследования свойств меры СЭ по отношению к внутренним и внешним мерам, перспективы ее применения для идентификации оптимальных моделей.

Статистический анализ моделей для 45 выборок позволил выяснить, какая мера: стандартная ошибка σ или мера СЭ $\sigma_{СЭ}$ – лучше приближается к внешней мере σ_{Δ} . Сравнение по точности прогноза моделей, полученных по внутренней мере σ и мере СЭ $\sigma_{СЭ}$, проводилось

по отношению дисперсий: $\frac{(\sigma_{\Delta}^{\sigma})^2}{(\sigma_{\Delta}^{\Delta})^2}$ и $\frac{(\sigma_{\Delta}^{СЭ})^2}{(\sigma_{\Delta}^{\Delta})^2}$ и разностей случайных ошибок:

$\sigma_{\Delta}^{\sigma} - \sigma_{\Delta}^{\Delta}$ и $\sigma_{\Delta}^{СЭ} - \sigma_{\Delta}^{\Delta}$, где $\sigma_{\Delta}^{\sigma}, \sigma_{\Delta}^{СЭ}$ – внешняя мера σ_{Δ} для оптимальных

моделей, полученных по мерам σ и $\sigma_{СЭ}$ соответственно; σ_{Δ}^{Δ} – внешняя мера σ_{Δ} для оптимальных моделей, полученных по мере σ_{Δ} .

Результаты сравнения отражают явное преимущество меры СЭ по сравнению с внутренней мерой: в 30 случаях зарегистрировано значимое (отношение дисперсий больше 2,18) ухудшение прогностических свойств моделей, полученных по мере σ по сравнению с 12 случаями при СЭ.

Если весь диапазон полученных значений отношений дисперсий разделить на интервалы, получим, что при СЭ основная доля (11 случаев) попадает в интервал (2;4) и лишь в одном случае зарегистрировано ухудшение прогностических свойств в 5,623 раз; в десяти случаях – совпадение по точности прогноза, в остальных случаях – незначимое ухудшение прогноза (диапазон отношений дисперсий: (1;2)).

Для моделей, полученных по внутренней мере, основная доля (22 случая) значимого ухудшения прогностических свойств попадает в интервал (3;14); максимальное ухудшение, равное 13,171, зарегистрировано для выборки № 339; полное совпадение по точности прогноза получено только в четырех случаях. Таким образом, модели, полученные по мере СЭ, по прогностическим свойствам примерно в 3 раза лучше моделей, полученных по внутренним мерам.

Кроме улучшения по точности прогноза, модели, полученные по мере $\sigma_{СЭ}$, почти не содержат незначимых по t -статистике регрессоров. В 70% всех случаев модели, оптимальные по внутренней мере, содержат малоинформативные слагаемые.

Модели, оптимальные по мере СЭ, лишь в 17% всех случаев содержат незначимые слагаемые. Модели, содержащие малоинформативные слагаемые, полученные по мере СЭ, содержат по одному незначимому регрессору. В то же время модели, полученные по внутренней мере σ , включают, как правило, два и более малоинформативных слагаемых.

Было оценено, значимое ли улучшение по внешней точности дает использование в качестве критерия качества меры СЭ. Для этого

вычислялось отношение средних дисперсий $\frac{(\bar{\sigma}_{\Delta}^{\sigma})^2}{(\bar{\sigma}_{\Delta}^{CЭ})^2}$ и сравнивалось с табличным значением F_T . Анализ показал, что использование меры СЭ дает значимое улучшение прогностических свойств по сравнению с внутренними мерами.

Выводы

1. Эффективность предложенной методологии, под которой понимается сокращение размерности модели и повышение точности определения ее параметров и прогноза, прямо пропорциональна размерности, степени зашумленности и мультиколлинеарности исходных данных, что позволяет считать ее применение для описания состояния технических объектов перспективным математическим подходом.

2. Путем вычислительного эксперимента показано, что модели, полученные по мерам «скользящего экзамена» (СЭ), по прогностическим свойствам лучше моделей, полученных по внутренним мерам, то есть меры СЭ лучше приближаются к внешним мерам. Меры СЭ обеспечивают устранение незначимых слагаемых (сокращение размерности модели). Таким образом, если модель предназначена для прогноза, то для малых выборок в качестве меры поиска оптимальной модели лучше использовать меры СЭ.

Список литературы

1. Валеев С.Г. Регрессионное моделирование при обработке наблюдений. – М. : Наука, 1991. – 272 с.
2. Валеев Г.Р., Кадырова Г.Р. Система поиска оптимальных регрессий. – Казань : ФЭН, 2003. – 160 с.
3. Кадырова Г.Р. Пакет адаптивного регрессионного моделирования для описания, оптимизации, управления и прогноза функционирования технического объекта // Современные проблемы проектирования, производства и эксплуатации радиотехнических систем. – 2015.– № 1–2 (9). – С. 217 – 219.

4. Валеев Г.Р., Кадырова Г.Р. Автоматизированная система для решения задач метода наименьших квадратов // Известия Вузов. Сер.: Геодезия и аэрофотосъемка. – 1999. – № 6. – С. 9–14.

5. Кадырова Г.Р. Оценка и прогнозирование состояния технического объекта по регрессионным моделям // Автоматизация процессов управления. – 2015. – № 4 (42). – С. 90–95.

6. Валеев С.Г., Кадырова Г.Р., Турченко А.А. Программная система поиска оптимальных регрессий // Вопросы современной науки и практики. Серия технические науки. – 2008. – № 4(14), т. 2. – С. 97 – 101.

7. Кадырова Г.Р. Программная система поиска оптимальных регрессионных моделей прогноза // Путь науки.–2014.– № 7 (7).– С. 10–11.

8. Кадырова Г.Р., Турченко А.А., Касимова Л.Л. Программная реализация переборных алгоритмов структурной идентификации на основе многопоточного программирования // Информационные и интеллектуальные технологии: тр. межд. конф. по логике, информатике, науковедению. – Ульяновск, 2007. – С. 34–36.

9. Кадырова Г.Р. Возможности программной системы регрессионного моделирования для оценивания модели и поиска ее оптимальной структуры // Радиоэлектронная техника. – 2015.– № 2 (8). – С. 228 – 233.

10. Кадырова Г.Р. Система поиска оптимальной модели. Состояние дел и перспективы развития // Потенциал современной науки. – 2015. – № 4 (12). – С. 8–10.

11. Себер Д. Линейный регрессионный анализ.– М.:Мир, 1980.– 450 с.

12. Афифи А., Эйзен С. Статистический анализ. Подход с использованием ЭВМ. – М. : Мир, 1982. – 487 с.

Кадырова Гульнара Ривальевна – кандидат технических наук, доцент кафедры «Прикладная математика и информатика» Ульяновского государственного технического университета. E-mail: g.kadyrova1403@mail.ru, gulya@ulstu.ru.

ПРИМЕНЕНИЕ СХЕМНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ АНАЛИЗА И ОПТИМИЗАЦИИ ЭЛЕКТРОПРИВОДА ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

Л. Н. Канов, А. В.Солодкий

Предложена методика построения схемной модели и схемы в производных для моделирования и оптимизации механических характеристик асинхронного электропривода по максимуму момента. Рассчитаны критические точки характеристик. Показано, что предложенная методика дает более точные результаты, чем обычно применяемые.

The method of construction of scheme model and scheme in derivatives is offered for a design and optimization of mechanical descriptions of asynchronous electromechanic on a maximum of moment. The critical points of descriptions are expected. It is shown that the offered method gives more exact results, than usually applied.

Введение. Современный этап промышленного развития характеризуется расширением применения регулируемых электроприводов переменного тока. Распространенным типом приводного двигателя является асинхронный двигатель (АД) с короткозамкнутым ротором. Электропривод содержит преобразователь частоты с микропроцессорной системой управления. Регулирование скорости вращения АД достигается изменением частоты напряжения $\omega_{0.эл}$ при одновременном изменении его величины U . Частота принимается за независимое воздействие, а напряжение изменяется так, чтобы при заданной частоте достигалась оптимальная механическая характеристика. Критерием оптимальности в значительном числе случаев считается такой, при котором во всем диапазоне регулирования скорости поддерживается постоянный максимальный момент АД. Для реализации такого способа

регулирования система управления должна изменять величину напряжения так, чтобы обеспечить постоянство отношения $\frac{U}{\omega_{0.эл}} = \lambda = const$ [1].

Для линейной математической модели АД при выполнении этого отношения максимальный момент остается неизменным лишь при нулевом сопротивлении обмотки статора $r_1 = 0$ [1, 2, 3]. Представляет интерес анализ и оптимизация механических характеристик при ненулевом сопротивлении статора с учетом нелинейности магнитной цепи АД.

Подобные расчеты представляют затруднения из-за громоздкости математического описания и выполняются приближенно по Т и П – образным схемам замещения АД [3]. Одним из путей преодоления этих затруднений является схемное моделирование на основе эквивалентных схем замещения [4].

Постановка задачи. Целью работы является развитие метода схемного моделирования в направлении анализа и оптимизации механических характеристик сложных электромеханических систем электропривода переменного тока на основе асинхронного двигателя с частотным управлением.

Методика и материалы исследования. Статический режим АД с короткозамкнутым ротором и с насыщением описывается уравнениями [2, 3]

$$\left. \begin{aligned} u_{1d} &= r_1 i_{1d} - \omega_{0.эл} \Psi_{1q}(i_{1q} i_{2q}); & 0 &= r_1 i_{1q} + \omega_{0.эл} \Psi_{1d}(i_{1d} i_{2d}); \\ 0 &= r_2 i_{2d} - \omega_p \Psi_{2q}(i_{1q} i_{2q}); & 0 &= r_2 i_{2q} + \omega_p \Psi_{2d}(i_{1d} i_{2d}); \\ M &= 2 \cdot 1.5 \cdot p_n \cdot (\Psi_0(i_{0d}) i_{1q} - \Psi_0(i_{0q}) i_{1d}) \end{aligned} \right\}. \quad (1)$$

В этих уравнениях u_{1d} – напряжение, подаваемое на ротор; $i_{1d}, i_{1q}, i_{2d}, i_{2q}, \Psi_{1d}, \Psi_{1q}, \Psi_{2d}, \Psi_{2q}$ – продольные и поперечные составляющие токов и магнитных потокосцеплений статора и ротора АД; $i_{0d} = i_{1d} + i_{2d}$,

$i_{0q} = i_{1q} + i_{2q}$ – продольный и поперечный ток АД; M – электромагнитный вращающий момент АД;

ω_p – частота тока, наводимого в обмотке ротора; p_n – число пар полюсов.

В условиях насыщения составляющие потокоцеплений имеют вид

$$\begin{aligned} \Psi_{1q}(i_{1q}, i_{2q}) &= \Psi_0(i_{0q}) + L_{1\sigma}i_{1q}, & \Psi_{1d}(i_{1d}, i_{2d}) &= \Psi_0(i_{0d}) + L_{1\sigma}i_{1d}, \\ \Psi_{2q}(i_{1q}, i_{2q}) &= \Psi_0(i_{0q}) + L_{2\sigma}i_{2q}, & \Psi_{2d}(i_{1d}, i_{2d}) &= \Psi_0(i_{0d}) + L_{2\sigma}i_{2d}. \end{aligned} \quad (2)$$

В этих выражениях L_σ – индуктивность рассеяния, а главные потокоцепления аппроксимируются гладкой зависимостью, например, $\Psi_0(i_0) = a \cdot \arctg(bi_0) + ci_0$,

отражающей насыщение магнитной цепи.

Механическая характеристика АД есть зависимость момента от скорости вращения Ω , для целей исследования выбираем ее в виде $M = f(\omega_p)$. Условие максимума момента получаем из последнего уравнения в (1)

$$\frac{dM}{d\omega_p} = \frac{2 \cdot 3}{2} p_n \cdot \left(\frac{d\Psi_0(i_{0d})}{di_{0d}} \frac{di_{0d}}{d\omega_p} i_{1q} + \Psi_0(i_{0d}) \frac{di_{1q}}{d\omega_p} - \frac{d\Psi_0(i_{0q})}{di_{0q}} \frac{di_{0q}}{d\omega_p} i_{1d} - \Psi_0(i_{0q}) \frac{di_{1d}}{d\omega_p} \right) = 0. \quad (3)$$

Непосредственный расчет производных токов затруднен, поэтому построим схемную модель электромагнитной цепи АД, трактуя уравнения (1), как записи первого закона Кирхгофа [4]. Эта модель изображена на рис.1 и содержит четыре контура, соответствующие первым четырем уравнениям (1) и два формирователя потокоцеплений по выражениям (2).

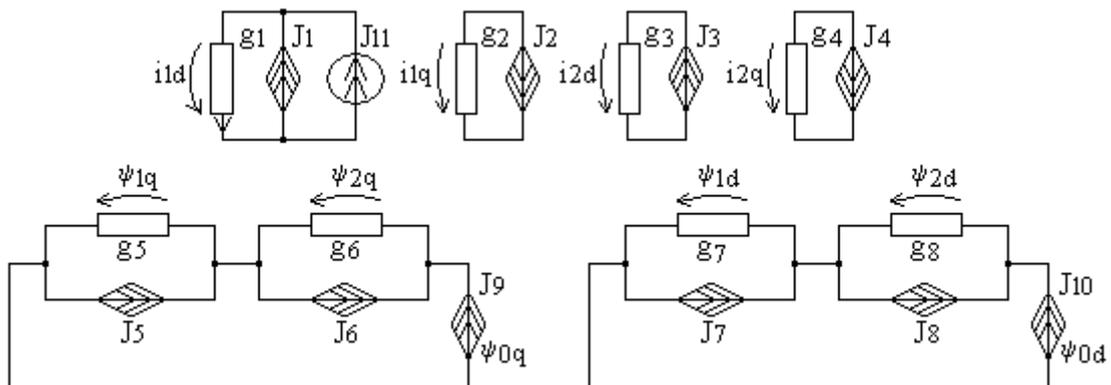


Рис.1. Схемная модель электромагнитной цепи асинхронного двигателя

На рис.1 обозначены единичные проводимости $g_1 \dots g_8$; управляемые источники тока, подсчитываемые по выражениям: $J_1 = \omega_{0.эл} \Psi_{1q}$, $J_2 = \omega_{0.эл} \Psi_{1d}$, $J_3 = \omega_p \Psi_{2q}$, $J_4 = \omega_p \Psi_{2d}$, $J_5 = L_{1\sigma} i_{1q}$, $J_6 = L_{2\sigma} i_{2q}$, $J_7 = L_{1\sigma} i_{1d}$, $J_8 = L_{2\sigma} i_{1d}$, $J_9 = \Psi_{0q} = \Psi_0(i_{0q})$, $J_{10} = \Psi_{0d} = \Psi_0(i_{0d})$, независимый источник тока $J_{11} = U_{1d}$.

Построенная схемная модель рассчитывается при заданных величинах U_{1d} , $\omega_{0.эл}$, ω_p программным обеспечением, допускающим построение управляемых источников тока, например, *EWB*.

Для определения производных на основании схемной модели построим схему в производных путем дифференцирования компонентов модели по частоте ротора [4], рис.2. На этом рисунке обозначены единичные проводимости $g_9 \dots g_{12}$. Обозначения управляемых источников тока $J_{12} \dots J_{21}$ приведены в Приложении.

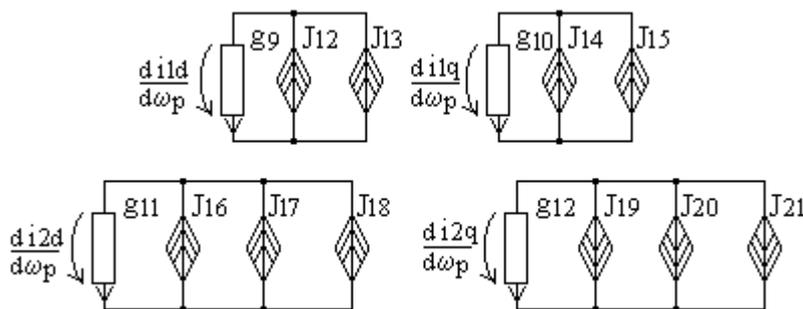


Рис.2. Схема в производных

Наконец, на рис.3 изображена схемная модель, соответствующая выражению (3). На рисунке обозначена нулевая проводимость g_{13} и

управляемые источники тока: $J_{22} = \frac{d\Psi_0}{di_{0d}} \frac{di_{0d}}{d\omega_p} i_{1q}$, $J_{23} = \Psi_0(i_{0d}) \frac{di_{1q}}{d\omega_p}$,

$J_{24} = \frac{d\Psi_0}{di_{0q}} \frac{di_{0q}}{d\omega_p} i_{1d}$, $J_{25} = \Psi_0(i_{0q}) \frac{di_{1d}}{d\omega_p}$.

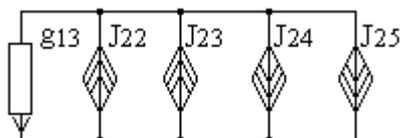


Рис.3. Схемное представление условия максимума момента

Задаваясь частотой напряжения статора $\omega_{0.эл}$ и его величиной $U_{1d} = \lambda \omega_{0.эл}$ совместным расчетом схемных моделей на рис.1–3 получаем критическую частоту $\omega_{p.кр}$, при которой достигается максимальный момент АД, величину этого момента $M_{макс}$, а также составляющие токов и их производные. По выражению $\omega_p = \omega_{0.эл} - p_n \Omega$ подсчитываем критическую скорость вращения.

На рис.4 показано расположение критических точек механической характеристики АД (кривая 1), а также соответствующие значения токов статора I_1 и ротора I_2 (кривые 2 и 3). Расчет выполнен для двигателя мощностью 90 кВт с типичными параметрами: $r_1 = 0,0247$ Ом, $r_2 = 0,021$ Ом, $I_{1.ном} = 156$ А, $\Omega_{ном} = 103,67$ с⁻¹, $U_{ном} = 380$ В, $\psi_{2d.ном} = 0,657$ Вб, $a = 0,9588$, $b = 0,015$, $c = 0,0056$. Рисунок показывает, что со снижением частоты $\omega_{0.эл}$ и величины напряжения статора U_{1d} максимальный момент снижается, особенно при $\omega_{0.эл} < 100$ с⁻¹. Соответственно уменьшается критическая скорость вращения.

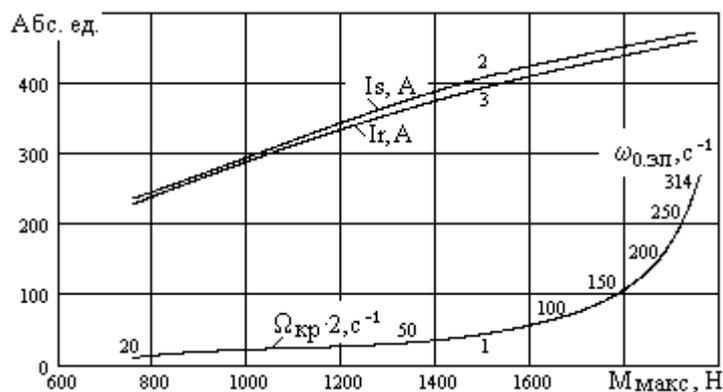


Рис.4. Механическая характеристика двигателя

Обсуждение результатов. Для поддержания максимального момента на неизменном уровне при снижении частоты $\omega_{0.эл}$ следует увеличивать напряжение статора U_{1d} по сравнению с принятым значением $U_{1d} = \lambda \omega_{0.эл}$. Чтобы подсчитать увеличенное напряжение, вслед за [3] определим ток статора $I_{01} = \sqrt{i_{0.1d}^2 + i_{0.1q}^2}$ при $r_1 = 0$ для заданных значений ω_p и $\omega_{0.эл}$ и для принятого напряжения U_{1d} путем решения первых четырех уравнений (1). Затем решением тех же уравнений при $r_{1.ном}$ определяем такое новое значение U_{1d} , при котором ток статора $I_1 = \sqrt{i_{1d}^2 + i_{1q}^2}$ принимает значение I_{01} .

Таким образом, анализ выполняется одновременным расчетом схемной модели по рис.1 при $r_1 = 0$ и $U_{1d} = \lambda \omega_{0.эл}$ и той же модели при $r_{1.ном}$ с учетом условия $i_{0.1d}^2 + i_{0.1q}^2 = i_{1d}^2 + i_{1q}^2$ с расчетом нового значения U_{1d} .

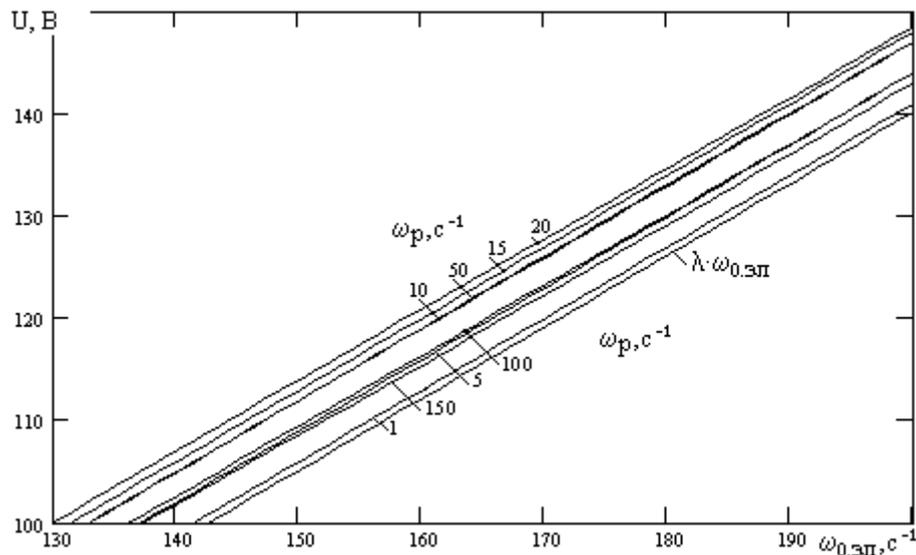


Рис.5. Оптимальная зависимость величины напряжения от его частоты

На рис.5 изображены графики зависимостей рассчитанного напряжения U_{1d} при различных частотах ротора ω_p и статора $\omega_{0.эл}$, необходимого для поддержания постоянного максимального момента при изменении частоты $\omega_{0.эл}$. Рисунок показывает необходимость

существенного увеличения напряжения U_{1d} по сравнению со значениями, полученными для $r_1 = 0$. Кроме того, напряжение U_{1d} имеет максимум при критической частоте ротора $\omega_{p.kp}$. При увеличении ω_p выше критического значения напряжение U_{1d} снижается, рис.6.

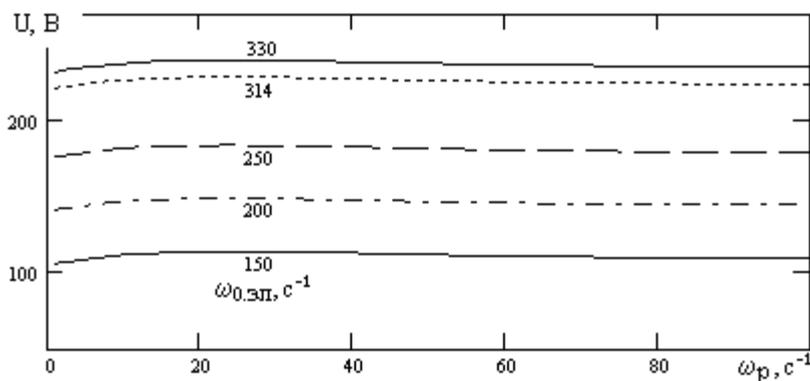


Рис.6. Зависимость оптимального напряжения от частоты ротора

Максимум напряжения объясняется достижением моментом также максимального значения $M_{max} = 2070$ Н. Этот эффект особенно заметен при больших сопротивлениях ротора.

Выводы

1. Проведенный анализ показал эффективность построенных схемных моделей и схем в производных электропривода переменного тока для оптимизации механических характеристик по максимуму момента. Предлагаемая методика позволила рассчитать критические точки механической характеристики привода, его максимальный момент и критическую скорость вращения.

2. Вследствие наличия ненулевого сопротивления ротора и нелинейности магнитной цепи напряжение статора должно увеличиваться по сравнению со значениями, полученными по обычно применяемому пропорциональному закону. Исследование выявило наличие максимума этого напряжения при критической скорости вращения.

3. Перспективным направлением дальнейшего исследования является построение системы управления электроприводом, реализующей разработанное оптимальное управление.

Приложение

Величины управляемых источников тока: $J_{12} = \omega_{0.эл} \frac{d\psi_0}{di_{0q}} \frac{di_{0q}}{d\omega_p}$,

$$J_{13} = \omega_{0.эл} L_{1\sigma} \frac{di_{1q}}{d\omega_p}, \quad J_{14} = \omega_{0.эл} \frac{d\psi_0}{di_{0d}} \frac{di_{0d}}{d\omega_p}, \quad J_{15} = \omega_{0.эл} L_{1\sigma} \frac{di_{1d}}{d\omega_p}, \quad J_{16} = \psi_{2q},$$

$$J_{17} = \omega_p \frac{d\psi_0}{di_{0q}} \frac{di_{0q}}{d\omega_p}, \quad J_{18} = \omega_p L_{2\sigma} \frac{di_{2q}}{d\omega_p}, \quad J_{19} = \psi_{2d}, \quad J_{20} = \omega_p \frac{d\psi_0}{di_{0d}} \frac{di_{0d}}{d\omega_p},$$

$$J_{21} = \omega_p L_{2\sigma} \frac{di_{2d}}{d\omega_p}.$$

Список литературы

1. Ключев В.И. Теория электропривода.– М.:Энергоиздат,2001.–714 с.
2. Шрейнер Р.Т. Математическое моделирование электроприводов переменного тока с полупроводниковыми преобразователями частоты. – Екатеринбург: Изд-во УРО РАН, 2000. – 654 с.
3. Соколовский Г.Г. Электроприводы переменного тока с частотным регулированием. – М.: Изд. центр «Академия», 2006. – 272 с.
4. Канов Л.Н. Схемное моделирование динамического режима электрической системы // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей. Международный сборник научных трудов / Под ред. В.В.Филаретова. – Ульяновск: УлГТУ, 2015. – Вып. 12. – С. 176–181.

Канов Лев Николаевич – к.т.н., доц. кафедры судового электрооборудования Севастопольского государственного университета (СевГУ). 299053, Севастополь, ул. Университетская, 33, ауд.А302.
E-mail: lkanov48@mail.ru

Солодкий Антон Васильевич – аспирант кафедры судового электрооборудования СевГУ.

ДИАГНОСТИКА ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ НА ОСНОВЕ КОСВЕННОЙ КОМПЕНСАЦИИ ПОДСХЕМ С НЕИЗВЕСТНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

К. С. Горшков, С. А. Курганов, В. В. Филаретов

Сформулирована и доказана теорема о косвенной компенсации подсхемы с неизвестными параметрами. На основе теоремы задача диагностики с многократным экспериментом сведена к задаче анализа – расчету токов и напряжений на полюсах исследуемой подсхемы. По токам и напряжениям находятся искомые параметры. Предлагаемый подход в отличие от блочно-матричного метода не требует трудоемкого вывода и применения специальной матричной формулы для каждой системы параметров, а позволяет использовать для диагностики известные алгоритмы и программы символьного или численного анализа электрических цепей.

We formulate and prove a theorem on indirect compensation subcircuit with unknown parameters. On the basis of the theorem problem diagnosis with multiple experiments reduced to the analysis - the calculation of current and voltage at the poles of the test subcircuit. According to the currents and voltages are desired settings. The proposed approach in contrast to the block-matrix method does not require time-consuming inference and application of special matrix formula for every system of parameters, and allows the use for the diagnosis of known algorithms and programs of symbolic or numerical analysis of electric circuits.

В процессе эксплуатации электрических цепей изменяется только часть параметров элементов. Для определения таких параметров решается задача диагностики электрических цепей на основе однократного или многократного эксперимента [1,2]. При этом схема цепи является известной, а эксперимент состоит в измерении независимых токов и напряжений на доступных ветвях и полюсах. Если число доступных точек

измерения не менее числа неизвестных параметров, то проводится однократный, иначе – многократный эксперимент. При однократном эксперименте математическая модель диагностики получается линейной, при многократном эксперименте модель диагностики может быть как линейной [1], так и нелинейной [3].

Линейная модель диагностики с многократным экспериментом [1]. При многократном эксперименте модель получается линейной, если число измерительных точек в цепи не менее числа n независимых узлов у подсхемы с неизвестными параметрами. При этом число экспериментов должно быть также не менее числа узлов исследуемой подсхемы. Эксперименты должны отличаться структурой цепи, которая изменяется с помощью режимов холостого хода и короткого замыкания или путем подключения дополнительных источников и сопротивлений. Полученные в результате измерений n^2 напряжений и токов используются для расчета параметров исследуемой подсхемы.

Расчет параметров выполняется *блочно-матричным методом*. При этом формируется блочно-матричная система узловых уравнений, которая решается относительно искомой матрицы проводимостей исследуемой подсхемы. Эта матрица представляется в виде выражения, содержащего известные матрицы проводимостей и измеренных напряжений и токов. Полученная численная матрица проводимостей исследуемой подсхемы позволяет найти значения проводимостей элементов подсхемы [1].

В то же время требуется рассчитывать не только Y , но и Z , и гибридные параметры подсхемы, тем более что априори невозможно назвать координаты, в которых модель имеет более высокую численную обусловленность. *Поэтому целесообразно разработать такой подход к диагностике с многократным экспериментом, который позволил бы получить универсальную формулу для параметров исследуемой подсхемы – пригодную для различных систем координат.*

Универсальную формулу для параметров исследуемой подсхемы можно получить, если, используя результаты экспериментов, рассчитать токи и напряжения на полюсах или сторонах подсхемы независимо от ее

модели – без построения матрицы проводимости или другой матрицы параметров исследуемой подсхемы. Полученные токи и напряжения на полюсах подсхемы позволяют определить параметры подсхемы в любой системе координат. Для решения задачи анализа цепи с неизвестной подсхемой – определения токов и напряжений на ее полюсах – можно использовать идею косвенной компенсации сопротивления с неизвестным параметром [4].

Метод косвенной компенсации [5]. По методу косвенной компенсации задача диагностики с однократным экспериментом сводится к задаче символьного анализа. Для этого элементы с неизвестными параметрами – сопротивления, проводимости, генераторы управляемых источников (УИ) – заменяются (компенсируются) направленным нулатором, а измеренные токи и напряжения учитываются в схеме с помощью фиксаторов тока и напряжения, построенных на основе направленного нулатора и независимых источников напряжения и тока. Компенсация называется косвенной, поскольку измерения выполняются не на компенсируемых элементах, а в произвольных доступных точках электрической цепи.

По схеме с компенсированными элементами (СКЭ) формируются для искомым параметров схемно-минорные формулы (СМФ), содержащие схемные миноры – определители производных схем, полученных из СКЭ. Для построения компактных выражений все независимые источники преобразуются в источники, управляемые нулатором, совокупность которых называется многомерным управляемым источником [6]. В результате схемно-минорная формула, например, для искомого сопротивления имеет вид [5]

$$Z = -\Delta_Z / \Delta^Z, \quad (1)$$

где Δ_Z, Δ^Z – схемные миноры – определители схем, полученных из СКЭ с многомерным управляемым источником путем стягивания (замены проводником) и удаления соответственно сопротивления Z .

Достаточными условиями существования решения (1) являются ненулевой определитель СКЭ и ненулевой режим элемента [5]. Искомые символьные выражения для неизвестных параметров, содержащие известные параметры и измеренные токи и напряжения, формируются из (1) путем рекурсивного выделения параметров элементов из схемных миноров Δ_Z и Δ^Z [7]. При этом получаются компактные символьные выражения, поскольку, во-первых, МСО не генерирует в отличие от матричных методов избыточных – равных по модулю, но противоположных по знаку – слагаемых [7], а, во-вторых, формулы вида (1) обеспечивают выделение элементов по признаку максимального участия параметра в символьном выражении [8].

В то же время метод косвенной компенсации предназначен для базисной задачи диагностики (на основе однократного эксперимента), при решении которой схема максимально детализируется, и компенсируется каждый элемент с неизвестным параметром. Для диагностики на основе многократного эксперимента, когда число m элементов с неизвестными параметрами больше числа n измерительных точек, этот метод использовать непосредственно невозможно. Требуется его обобщение для компенсации подсхем.

Таким образом, задачей настоящей статьи является обобщение метода косвенной компенсации на подсхемы и использование его для нахождения параметров подсхемы в произвольной системе координат.

Теорема о косвенной компенсации линейной подсхемы. Подсхема **1** на рис. 1,а с n независимыми полюсами (сторонами), содержащая произвольные линейные элементы, в том числе, управляемые и независимые источники, может быть эквивалентно заменена (компенсирована) n нуллорами и таким же числом независимых источников напряжения и тока, параметры которых равны соответствующим переменным, измеренным в доступных точках электрической цепи. При этом нораторы подключаются вместо подсхемы, образуя дерево на ее полюсах, а нуллаторы с источниками напряжения и

тока образуют фиксаторы соответствующих переменных и подключаются к измерительным полюсам электрической цепи (рис. 1,б).

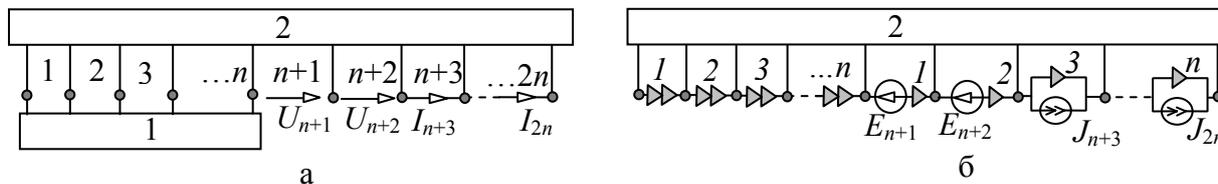


Рис. 1. Исходная (а) и эквивалентная (б) цепи: 1, 2, 3, ..., n и n+1, n+2, n+3, ..., 2n – номера сторон у подсхем 1 и 2; 1, 2, 3, ..., n – номера нуллаторов и нораторов; $\underline{E}_{n+1} = \underline{U}_{n+1}$; $\underline{E}_{n+2} = \underline{U}_{n+2}$; $\underline{J}_{n+3} = \underline{I}_{n+3}$; ...; $\underline{J}_{2n} = \underline{I}_{2n}$ – параметры источников

Приведем доказательство теоремы для $n = 2$, когда у подсхемы 1 имеется две стороны, а в подсхеме 2 измерено столько же напряжений $\underline{U}_{n+1} = \underline{U}_3$ и $\underline{U}_{n+2} = \underline{U}_4$. Представим на рис. 2,а и 2,б схемы замещения цепей, изображенных на рис. 1,а и 1,б, на основе Z-параметров, при этом управляемые источники (УИ) обозначим соответствующими передаточными сопротивлениями, а управляющие токи УИ показывать не будем из-за недостатка места. Их номера определяются по второй цифре в нижнем индексе управляющего сопротивления, например, УИ с параметром Z_{23}^1 имеет управляющий ток I_3^1 .

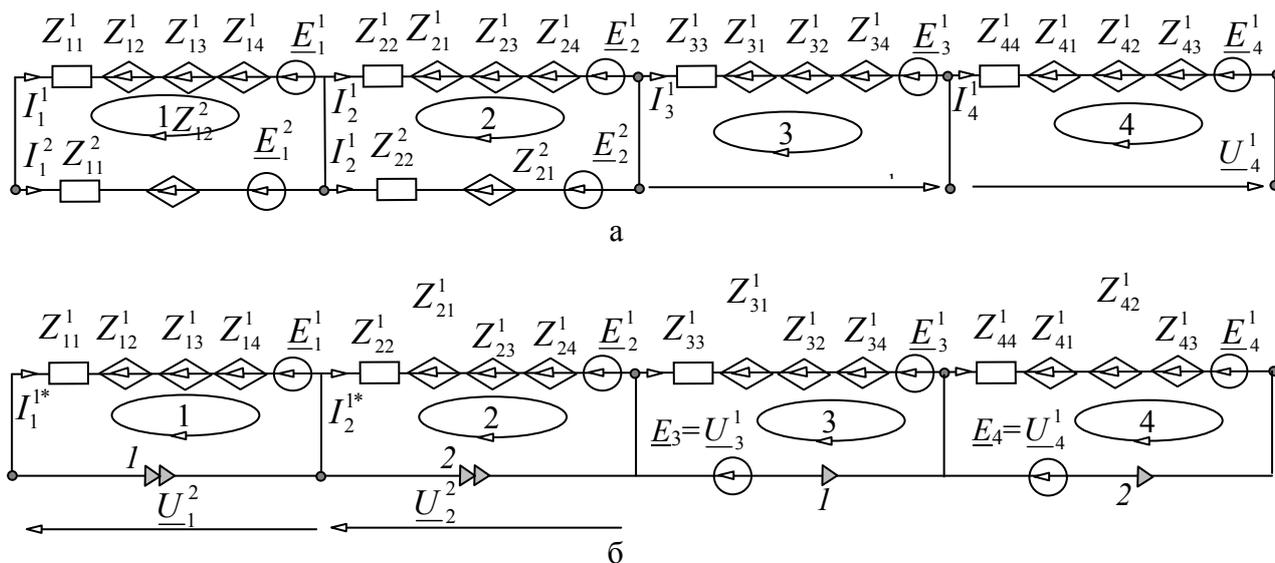


Рис. 2. Z-схемы замещения (а) и (б) цепей на рис. 1,а и 1,б при $n=2$

Для доказательства эквивалентности схем на рис. 2,а и 2,б, учитывая их одинаковую структуру, достаточно показать, что режимы этих схем эквивалентны – соответствующие токи попарно равны между собой: $I_1^{1*} = I_1^1$ и $I_2^{1*} = I_2^1$. С этой целью составим системы уравнения для контуров 3 и 4 схемы на рис. 2,а

$$Z_{31}^1 I_1^1 + Z_{32}^1 I_2^1 - U_3^1 = -E_3^1; \quad Z_{31}^1 I_1^1 + Z_{32}^1 I_2^1 - U_3^1 = -E_3^1. \quad (2)$$

и схемы на рис. 2,б

$$Z_{31}^1 I_1^{1*} + Z_{32}^1 I_2^{1*} = -E_3^1 + U_3^1; \quad Z_{31}^1 I_1^{1*} + Z_{32}^1 I_2^{1*} = -E_3^1 + U_3^1. \quad (3)$$

Соответствующие коэффициенты систем уравнений (2) и (3) совпадают, следовательно, будут совпадать и решения этих систем уравнений: $I_1^{1*} = I_1^1$ и $I_2^{1*} = I_2^1$. Напряжения на сторонах 1 и 2 схем на рис. 2,а и 2,б будут равны вследствие одинакового набора элементов в подсхеме 1 на рис. 2,а и 2,б. Таким образом, режимы схем рис. 2,а и 2,б совпадают и, следовательно, схемы на рис. 1,а и 1,б при $n=2$ эквивалентны.

Аналогично доказывается справедливость косвенной компенсации подсхемы с числом сторон или независимых полюсов $n=3, 4, \dots$. Также доказывается возможность компенсации подсхемы с использованием не только измеренных напряжений, но и токов.

Формула для параметров неавтономной подсхемы при диагностике с многократным экспериментом. Вывод формулы выполняется по схеме на рис. 3,а. В этой схеме имеется исследуемый четырехполюсник $A_?$ и произвольный линейный автономный многополюсник \hat{A} с известной схемой и параметрами элементов. Схема многополюсника $A_?$ неизвестна. Определению подлежат Y, Z или другие первичные параметры. По первичным параметрам можно определить параметры элементов при известной схеме многополюсника. При этом все узлы многополюсника должны быть внешними.

У многополюсника \hat{A} имеется n сторон $1', 2', \dots, n'$, доступных для измерения комплексного действующего напряжения \underline{U}_V или тока \underline{I}_A соответственно. Каждый k -й из n проводимых экспериментов состоит в измерении напряжений и токов $\underline{U}_{V1}, \underline{I}_{A2}, \dots, \underline{U}_{Vn}$ в схеме на рис. 3,а. При этом схема многополюсника \hat{A}^k отличается в k -м эксперименте, по крайней мере, одним элементом – подключенным (отключенным) проводником, сопротивлением, источником тока или напряжения.

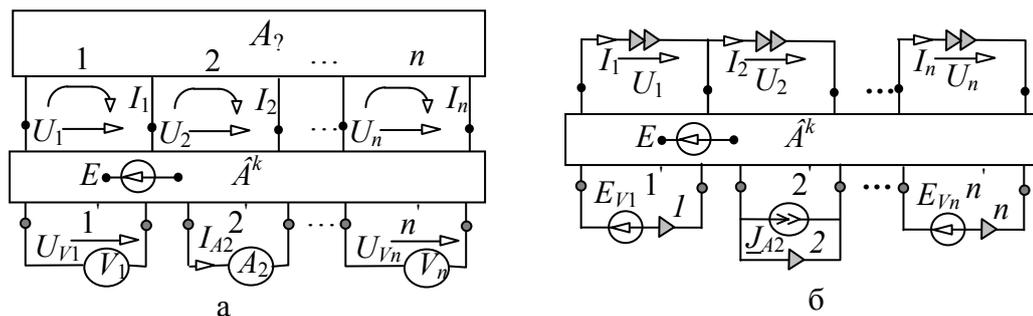


Рис. 3. Переход от схемы, содержащей многополюсник $A_?$ с неизвестными параметрами (а) к эквивалентной схеме с компенсированным многополюсником (б)

Используя результаты измерения, переходим по теореме о косвенной компенсации от исходной схемы на рис. 3,а к схеме с компенсированными элементами (СКЭ) на рис. 3,б. Исследуемый многополюсник $A_?$ компенсирован n нораторами с номерами $1, 2, \dots, n$, которые подключаются вместо соответствующих сторон многополюсника. При этом вольтметры и амперметры V_1, A_2, \dots, V_n заменяются фиксаторами напряжения и тока с источниками эдс и тока $\underline{E}_{V1} = \underline{U}_{V1}, \underline{J}_{A2} = \underline{I}_{A2}, \dots, \underline{E}_{Vn} = \underline{U}_{Vn}$.

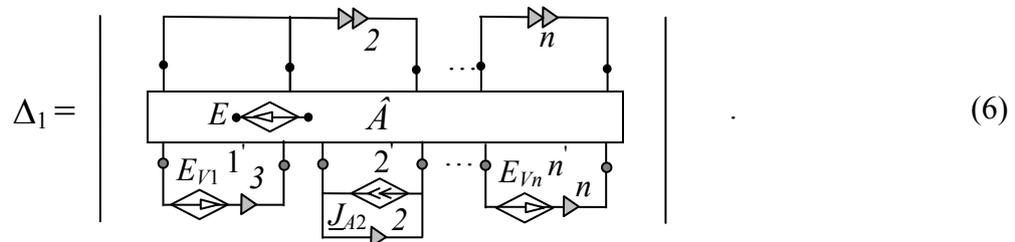
По схеме на рис. 3,б запишем схемно-алгебраическую формулу (САФ) для напряжения на стороне 1 исследуемого многополюсника при k -м эксперименте

$$\underline{U}_1^k = \left| \begin{array}{c} \begin{array}{c} \text{Circuit diagram for } \underline{U}_1^k \text{ calculation} \\ \text{Top part: } \hat{A}^k \text{ with current sources } J_1, J_2, \dots, J_n \text{ and voltage sources } E_{V1}, E_{V2}, \dots, E_{Vn} \\ \text{Bottom part: } \hat{A}^k \text{ with terminals } 1, 2, \dots, n \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \text{Circuit diagram for } \underline{U}_1^k \text{ calculation} \\ \text{Bottom part: } \hat{A}^k \text{ with terminals } 1, 2, \dots, n \end{array} \end{array} \right| \cdot (4)$$

В (4) схема числителя получена из схемы на рис. 3,б путем замены приемника искомого напряжения \underline{U}_1 нуллатором с номером 3, который управляет многомерным источником, состоящим из источников напряжения и тока с параметрами \underline{E} , \underline{E}_{V1} , \underline{J}_{A2} , ... \underline{E}_{Vn} . Схема знаменателя получена также из схемы на рис. 3,б при нулевых параметрах независимых источников. Формулу (4) можно записать кратко

$$\underline{U}_1 = -\Delta(k)_1 / \Delta(k)_E^J. \quad (5)$$

В (5) символом Δ_E^J обозначен определитель схемы знаменателя из (4), в котором нижний и верхний индексы означают замену источников эдс \underline{E} , \underline{E}_V проводником и удаление источника \underline{J}_A . Определитель схемы числителя имеет вид



Формула (6) получена из (4) путем взаимной замены номеров у нуллаторов 1 и 3 с учетом изменения знака определителя в (5) на противоположный и последующей замены параллельного соединения одноименных норатора и нуллатора проводником. Нижний индекс 1 означает, что соответствующая сторона многополюсника $A_?$ закорочена проводником.

По аналогии с (5) получаются схемно-минорные формулы для напряжений других сторон многополюсника $A_?$

$$\underline{U}_2 = -\Delta_2 / \Delta_E^J; \dots \underline{U}_n = -\Delta_n / \Delta_E^J. \quad (7)$$

Также находятся формулы для токов сторон исследуемой подсхемы, при этом учитывается, что знаменатель этих функций будет тот же, что и в (5) и (7), а в числителях соответствующая сторона многополюсника будет разомкнутой, поскольку норатор и нуллатор оказываются соединенными последовательно. Знак выражения будет положительным,

поскольку в этом случае выполняется две операции, изменяющие знак определителя – это взаимная смена номеров у нуллаторов и удаление последовательного согласного соединения норатора и нуллатора. Таким образом, формулы для токов сторон исследуемой подсхемы имеют вид

$$\underline{I}_1 = \Delta^1 / \Delta_E^J; \underline{I}_2 = \Delta^2 / \Delta_E^J; \dots; \underline{I}_n = \Delta^n / \Delta_E^J, \quad (8)$$

где, как и ранее, верхний и нижний индекс означает, что схема определителя получена из СКЭ на рис. 3,б путем замены соответствующей стороны многополюсника (элемента) разрывом и проводником соответственно.

В формулах (5), (7) и (8) для напряжений и токов подсхемы в k -м эксперименте знак определителя будет обозначаться как Δ^k с соответствующими индексами. Соответствующие этим определителям схемы на рис. 3,б должны отличаться, как уже отмечалось, не менее, чем одним элементом в подсхеме \hat{A} . При этом по формулам (5), (7) и (8) формируется n^2 формул для напряжений и столько же для токов. Ток и напряжение j -й стороны многополюсника в k -эксперименте будут обозначаться как \underline{I}_j^k и \underline{U}_j^k .

Эти напряжения и токи распределяются между откликами и воздействиями для построения системы уравнений многополюсника в заданной системе координат. В общем виде эта система имеет вид

$$W = \Pi \cdot X, \quad (9)$$

где $X=(x_{jk})$ и $W=(w_{jk})$ – матрицы воздействий и откликов на полюсах подсхемы, размерностью n^2 ; j и k – как и ранее, номер стороны подсхемы и номер эксперимента; $\Pi=(\pi_{j,i})$ – матрица параметров многополюсника; $j, i=1, 2, \dots, n$ – номера откликов и воздействий.

Уравнение (9) можно упростить, учитывая, что знаменатели воздействий и откликов (напряжений и токов) одинаковы и по условию диагностируемости отличаются от нуля. После умножения обеих частей

уравнения (9) на указанный знаменатель искомую матрицу параметров можно записать в виде

$$\Pi = N_w N_x^{-1}, \quad (10)$$

где N_w, N_x – числители воздействий и откликов подсхемы – числители напряжений и токов вида (6) в формулах (5), (7)–(8).

Формула (10) обладает универсальным характером – по ней можно получить любую систему параметров подсхемы. Для этого необходимо распределить напряжения и токи на сторонах подсхемы между воздействиями и откликами в соответствии с заданной системой координат и подставить в нее символьные выражения или численные значения для числителей этих напряжений и токов, полученные по формулам вида (6). Достаточным условием существования решения (10) являются ненулевые определители СКЭ для всех n экспериментов:

$$\Delta(k)_E^J \neq 0; k = 1 \dots n. \quad (11)$$

Рассмотрим построение формул для параметров частного случая многополюсника – проходного четырехполюсника, который широко используется для моделирования транзисторов, трансформаторов, фильтров, линий передач и других устройств.

Схемно-минорные формулы для параметров неавтономных проходных четырехполюсников. Четырехполюсник имеет две стороны и характеризуется четырьмя параметрами. Для их определения требуется проведение двух экспериментов. Схемы для вывода формулы получаются из общих схем на рис. 3,а и 3,б при числе сторон $n=2$. Полученные схемы приведены на рис. 4,а и 4,б.

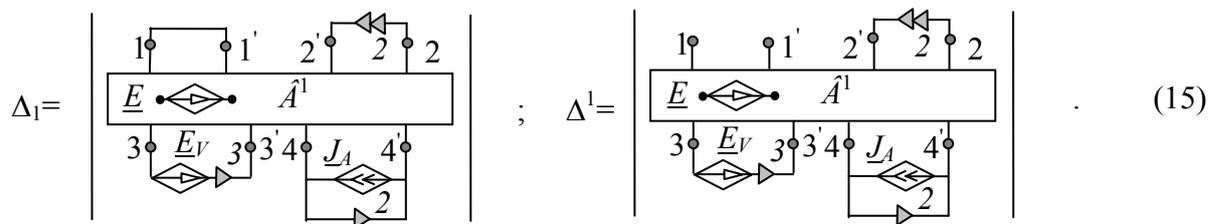
У многополюсника \hat{A}^k на рис. 4,а имеется две стороны с полюсами 3–3' и 4–4', доступных для измерения комплексного действующего напряжения \underline{U}_V и тока \underline{I}_A соответственно. Верхний индекс k принимает значения 1 и 2, и означает номер эксперимента. При этом схемы многополюсников \hat{A}^1 и \hat{A}^2 отличаются, как уже отмечалось, по крайней

Формула (13) является универсальной – из нее можно получить систему параметров в любой заданной системе координат, достаточно присвоить числителям откликов и воздействий значений числителей соответствующих токов и напряжений на полюсах подсхемы. Например, формулы для H -параметров получаются при $x_1=N_{11}$; $x_2=N_{U2}$; $w_1=N_{U1}$; $W_2=N_{I2}$, где N_{11} , N_{U2} , N_{U1} , N_{I2} – определители схем числителей соответствующих токов и напряжений (верхний индекс не показан). С учетом (5), (7), (8) искомые формулы имеют вид

$$H_{11} = \frac{\Delta_1 \delta_2 - \delta_1 \Delta_2}{D}; \quad H_{12} = \frac{-\Delta_1 \delta^1 + \delta_1 \Delta^1}{D}; \quad H_{21} = \frac{\Delta^2 \delta_2 - \delta^2 \Delta_2}{D}; \quad H_{22} = \frac{-\Delta^2 \delta^1 + \delta^2 \Delta^1}{D};$$

$$D = \Delta^1 \delta_2 - \Delta_2 \delta^1. \quad (14)$$

В формуле (14) Δ и δ – это символы определителей схем числителей токов и напряжений при первом и втором эксперименте соответственно. Верхний или нижний индекс означает, как и ранее, что у исследуемой подсхемы разомкнута или замкнута соответствующая сторона. Так, схемные определители из (14) с нижним и верхним индексом 1 для эксперимента 1 имеют вид соответственно



В схемных определителях δ_1 и δ^1 для второго эксперимента в отличие от Δ_1 и Δ^1 вместо \hat{A}^1 подключен многополюсник \hat{A}^2 . Формулы для других параметров четырехполюсника Y , Z , A , B находятся аналогично H -параметрам в (14).

Пример диагностики электрической цепи на основе косвенной компенсации многополюсников. Задана трансформаторная схема электроснабжения на рис. 5,а [9]. Известны: эдс E источника, токи нагрузок $J_1 \dots J_6$ и комплексные сопротивления линий $Z_1 \dots Z_6$. Параметры

трансформаторов T_1 и T_2 неизвестны. Для измерения напряжений доступны полюса 1...4. Требуется найти параметры трансформатора T_1 .

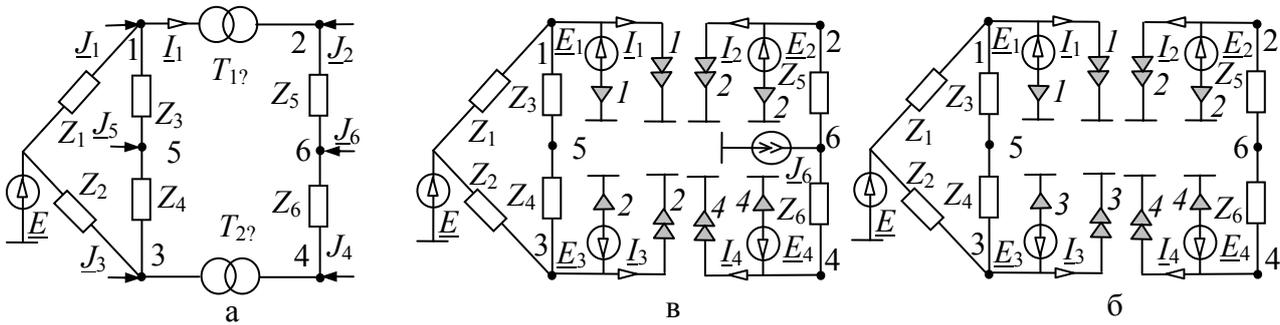


Рис. 5. Схема электроснабжения (а), компенсированные схемы для двух экспериментов: на холостом ходу (б) и с нагрузочным источником током \underline{J}_6 (в)

Трансформатор T_1 представим системой F -параметров, которые получаются из (13) заменой переменных: $x_1 = N_{U1}$; $x_2 = N_{I2}$; $w_1 = N_{I1}$; $w_2 = N_{U2}$. Эти же параметры можно получить и из формул для H -параметров (14), где достаточно нижние (верхние) индексы преобразовать в верхние (нижние). Полученные в результате формулы имеют вид:

$$F_{11} = \frac{\Delta^1 \delta^2 - \delta^1 \Delta^2}{D_F}; \quad F_{12} = \frac{-\Delta^1 \delta_1 + \delta^1 \Delta_1}{D_F}; \quad F_{21} = \frac{\Delta_2 \delta^2 - \delta_2 \Delta^2}{D_F}; \quad F_{22} = \frac{-\Delta_2 \delta_1 + \delta_2 \Delta_1}{D_F};$$

$$D_F = \Delta_1 \delta^2 - \Delta^2 \delta_1. \quad (16)$$

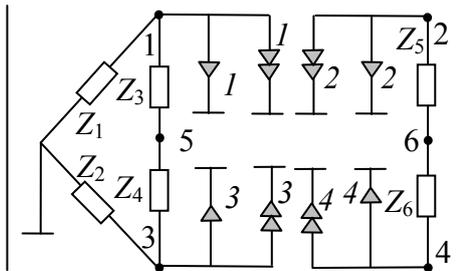
Для нахождения в (16) определителей Δ и δ с нижним и верхним индексами 1 и 2 проведем 2 эксперимента. Первый эксперимент – при наличии в схеме на рис. 5,а нагрузки с током \underline{J}_6 , второй – на холостом ходу, когда все токи потребителей равны нулю. Измеренные при этом напряжения на доступных полюсах 1...4 обозначим как \underline{U}_1^k , \underline{U}_2^k , \underline{U}_3^k , \underline{U}_4^k , где номер эксперимента k принимает два значения 1 и 2. Используя измеренные напряжения, построим в соответствии с рис. 4,б схемы с компенсированными трансформаторами, представленные на рис. 5,б и 5,в для экспериментов при нагрузочном источнике \underline{J}_6 ($k=1$) и на холостом ходу ($k=2$).

Поскольку напряжения на полюсах трансформатора T_1 известны (измерены), вычисления сокращаются путем преобразования формул (15):

$$F_{11} = \frac{\Delta^1 \delta^2 - \delta^1 \Delta^2}{D_F \cdot \Delta}; \quad F_{12} = \frac{-\Delta^1 U_1^2 + \delta^1 U_1^1}{D_F}; \quad F_{21} = \frac{U_2^1 \delta^2 - U_2^2 \Delta^2}{D_F}; \quad F_{22} = \frac{(-U_2^1 U_1^2 + U_2^2 U_1^1) \cdot \Delta}{D_F};$$

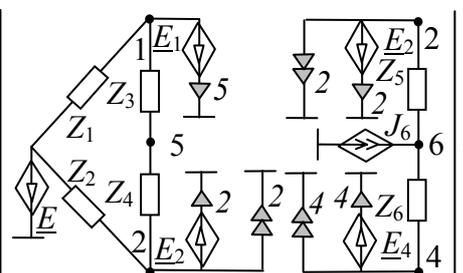
$$D_F = U_1^1 \delta^2 - \Delta^2 U_1^2, \quad (17)$$

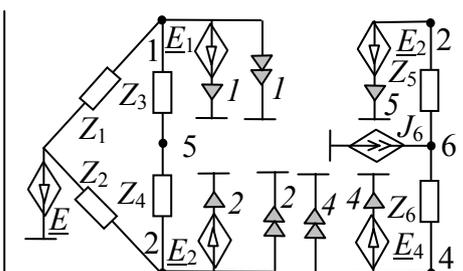
где определитель СКЭ, одинаковый для обоих экспериментов, получается из схем на рис. 5,б или 5,в при нулевых параметрах источников по формуле (11) и имеет вид

$$\Delta = \left| \begin{array}{cccc} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{array} \right| = (Z_3+Z_4)Z_1Z_2(Z_5+Z_6). \quad (18)$$


Символьное выражение (18) определителя СКЭ получено с помощью следующих операций МСО – замены параллельных соединений нуллатора и норатора проводником, сложения последовательных сопротивлений Z_5 , Z_6 и Z_3 , Z_4 , и выделения сопротивлений, замкнутых в контур. Для разрешимости поставленной задачи диагностики выражение (18) должно быть отлично от нуля. Откуда следует, что ненулевыми должны быть сопротивления Z_1 , Z_2 , (Z_3+Z_4) и (Z_5+Z_6) .

Находим схемные определители из (17), используя выражения (14). Для эксперимента 1 – с нагрузочным источником тока J_6 – определители имеют вид

$$\Delta^1 = \left| \begin{array}{cccc} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{array} \right| = (Z_5+Z_6) Z_2 [(Z_3+Z_4) E - E_1^1 (Z_1+Z_3+Z_4) + Z_1 E_3^1]; \quad (19)$$


$$\Delta^2 = \left| \begin{array}{cccc} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{array} \right| = Z_1 Z_2 (Z_3+Z_4) (-E_2^1 - Z_6 J_6 + E_4^1). \quad (20)$$


Как видно из (19), определитель Δ^1 не зависит от нагрузочного тока \underline{J}_6 , следовательно, соответствующий ему определитель для эксперимента 2 на холостом ходу может быть получен из (19) путем замены номера эксперимента 1 на 2 в верхнем индексе эдс:

$$\delta^1 = (Z_5 + Z_6) Z_2 [(Z_3 + Z_4) E - E_1^2 (Z_1 + Z_3 + Z_4) + Z_1 E_3^2]. \quad (21)$$

Определитель δ^2 находится из (20) при $\underline{J}_6 = 0$ с учетом номера эксперимента в верхнем индексе эдс:

$$\delta^2 = Z_1 Z_2 (Z_3 + Z_4) [-E_2^2 + E_4^2]. \quad (22)$$

Таким образом, символьные выражения (17) для искомым F -параметров трансформатора T_1 включают подвыражения (19)–(22). Эти подвыражения при сложной схеме формируются с помощью известной программы символьного анализа *CirSym*, разработанной В. В. Филаретовым [10].

С помощью этой же программы проведена проверка полученных выражений (17), (19)–(22). Для этого сформированы символьные выражения напряжений \underline{U}_1^k , \underline{U}_2^k , \underline{U}_3^k , \underline{U}_4^k ($k=1$ и 2) исходной схемы на рис. 5,а, в которой трансформаторы представляются F -параметрами. Эти напряжения получены в численном виде для произвольных численных параметров схемы, подстановка которых в выражения (17), (19)–(22) позволяет получить численные значения F -параметров трансформатора T_1 с точностью используемой разрядной сетки.

Выводы.

1. Доказано, что подсхема с n сторонами может быть эквивалентно заменена n нораторами и таким же числом фиксаторов напряжения и тока, содержащих источники тока или напряжения и нулаторы.

2. На основе компенсированной схемы получена универсальная формула для параметров исследуемой подсхемы, позволяющая переходить от одной системы параметров к другой с помощью одной операции замены переменных, в отличие от блочно-матричного метода, предусматривающего построение уравнений.

Список литературы

1. Киншт Н.В., Петрунько Н.Н. Тестовая диагностика активных электрических цепей на основе коммутационных воздействий // *Электричество*. – 2014. - №6. – С. 49–55.
2. Киншт Н.В., Петрунько Н.Н. О двух концепциях в теории диагностики электрических цепей // *Электричество*. – 2012. – №9. – С. 59–64.
3. Grasso F., Luchetta A., Manetti S., Piccirilli M. C. A Method for the Automatic Selection of Test Frequencies in Analog Fault Diagnosis // *IEEE Transactions on instrumentation and measurement*, vol. 56, no. 6, december 2007. – P. 2322–2329.
4. Kozemchak E., Murray-Lasso M. Computer-sided circuit design by singular imedding. – *BSTJ*, 1967, v. 48, № 1. – p. 275.
5. Курганов С.А., Филаретов В.В. Формулы для символьной параметрической диагностики линейных электрических цепей // *Электричество*. – 2006, № 4. – С. 47–60.
6. Filaretov V. V., Korotkov A. S. Generalized parameter extraction method in case of multiple excitation, in Proc. 8th Int. Workshop on Symbolic methods and applications to circuit design (SMACD`04), Wroclaw, Poland, pp.8–11, Sept. 2004.
7. Филаретов В.В. Топологический анализ электронных схем методом выделения параметров // *Электричество*. – 1998. – № 5. – С. 43–52.
8. Филаретов В. В. Метод двоичных векторов для топологического анализа электронных схем по частям // *Электричество*. – 2001. – № 8. – С. 33–42.
9. Хачатрян В.С., Бадалян Н.П., Хачатрян К.В. Метод построения и коррекции узловых сопротивлений при учете комплексных коэффициентов трансформации // *Электричество*. – 2009. – №8. – С. 27–32.
10. Филаретов В. В. Программа символьного анализа CIRSYM: история создания, структура и функции // *Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. научн. труд. – Ульяновск: УлГТУ, 2010. – Вып. 10. – С.158–171.*

АЛГОРИТМЫ СИНТЕЗА ГРАФОВ

АЛГОРИТМЫ ПЕРЕЧИСЛЕНИЯ НЕИЗОМОРФНЫХ КОРНЕВЫХ ДЕРЕВЬЕВ НА ОСНОВЕ ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКОГО УПОРЯДОЧЕНИЯ

В. В. Филаретов

Рассмотрены различные лексикографически упорядоченные последовательности комбинаций, используемые для перечисления неизоморфных корневых деревьев. Представлены точные оценки для числа комбинаций в зависимости от количества вершин. Показано, что отношение числа комбинаций в последовательностях кодов для текущего и предыдущего числа вершин увеличивается с каждой следующей вершиной, а для уровневых кодов отличается комбинаторным ростом.

Various lexicographic ordered sequences of combinations used for generation of non-isomorphic rooted trees are considered. Precise values for number of combinations depending on quantity of vertexes are presented. It is shown, that the attitude of number of combinations in code sequences for current and previous number of vertexes increases with each following vertex, and code of levels differs combinatorial growth.

Перечисление неизоморфных корневых деревьев. Задача перечисления неизоморфных корневых деревьев относится к числу классических задач теории графов [1]. В [1] приведена таблица с числом деревьев этого вида до 26 вершин. Расчеты проводились без перечисления деревьев, а с помощью перечислительных рядов. Ученик Харари – Принс рассчитал число неизоморфных корневых деревьев до 39 вершин [3]. Рид

[3] рассмотрел двоичный код и код уровней для непомеченных (без нумерации вершин) корневых деревьев.

Отечественные и зарубежные специалисты заинтересовались задачей перечисления (генерации) неизоморфных корневых деревьев почти одновременно – в конце 70-х годов прошлого века [4,5,6]. Исходными посылками к исследованию в работе [5] были теоретические работы [1,2], авторы других работ [4] и [6] оттолкнулись от бинарного кода и кода уровней (последовательности уровней).

Разработка алгоритмов перечисления (программ генерации) неизоморфных корневых деревьев продолжается до сих пор [7–11]. Причиной этого является отсутствие простой взаимосвязи между соседними неизоморфными деревьями (некоторым деревом и его преемником), что препятствует реализации надежных программ генерации неизоморфных корневых деревьев.

Авторы, приводя сложные доказательства своих алгоритмов, не удосуживаются рассмотреть сложные тестовые примеры, чтобы подтвердить свои результаты, хотя бы по числу деревьев, с давно опубликованными данными [1,2]. В лучшем случае приводятся сведения о программной реализации алгоритмов [4] без указания на способ подтверждения или приводят описание программы и теоретический расчет числа неизоморфных корневых деревьев, но стесняются добавить строку о том, что число деревьев, сгенерированных программой, совпадает с теоретическими оценками [6].

Алгоритмы перечисления неизоморфных корневых деревьев, подразделяются на две группы, которые основаны на: 1) прямом получении («выращивании», синтезе) неизоморфных деревьев [6–8,10,11]; 2) выборе неизоморфных (лексикографически старших) деревьев из некоторого пространства комбинаций [4,5].

Алгоритмы выращивания неизоморфных корневых деревьев, минуя трудоемкую проверку комбинаций, содержащих изоморфные деревья, не являющиеся представителями класса [5,10]. Однако процесс синтеза

оказывается довольно сложен для понимания и программной реализации, а объем различного вида комбинаций, подлежащих проверке, не оценен.

Поэтому алгоритмы второй группы требуют дополнительных исследований для разработки простых методик перечисления и реализации эффективных программ, что является целью настоящей статьи.

Использование полного графа. Неизоморфные корневые деревья могут быть найдены как подмножество деревьев корневого полного графа. Такой граф для 7 вершин с корнем в вершине 0 показан на рис. 1,а. Для этого нужно использовать упорядоченную нумерацию ребер [10], которая показана на рис. 1,б.

Для перечисления деревьев полного графа можно использовать простейший алгоритм, предусматривающий полный перебор сочетаний из числа ребер $q(q-1)/2$ по $q-1$, где q – число вершин. Каждое сочетание проверяется на достаточное свойство дерева – не иметь циклов. Для проверки на цикл в алгоритме из [11] используются пометки вершин – корневая пометка и пометка предшествования.

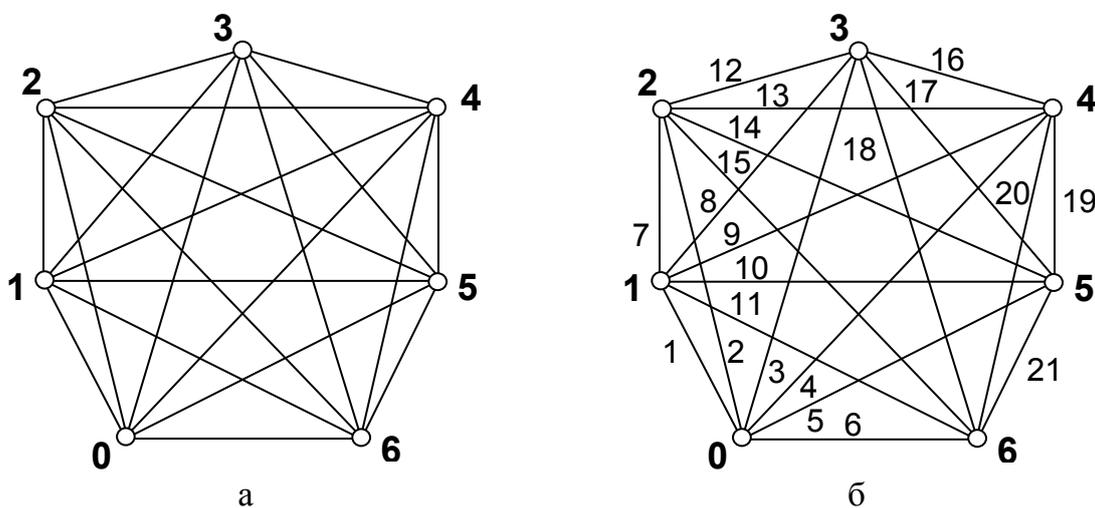


Рис. 1

Перебор сочетаний выполняется таким образом, чтобы сохранялись первые по порядку ребра, а заменялось последнее ребро. Если его не удастся заменить вследствие отсутствия следующих по порядку ребер, то заменяется предпоследнее по порядку в списке ребро и т.д.

Учет симметрий (лексикографического порядка) при переборе сочетаний. Попутно с проверкой на цикл выполняется учет симметрий в соответствии с лексикографическим упорядочением пар вершин, соответствующих ребрам. Учет симметрий позволяет резко сократить пространство поиска и избежать проверки генерируемых деревьев на изоморфизм.

При этом кандидатами на добавление к дереву являются ребра из вершинных множеств, согласно их очередности. В число ведущих ребер, инцидентных вершине, входят выходящие ребра и не входит входящее ребро (ближайшее к корню). **Замена ведущего ребра другим ведущим ребром не допускается, поскольку это приведет к добавлению в список изоморфных деревьев.**

Упорядочение ребер полного графа выполняется таким образом, чтобы в ходе перебора ребер выделялись вершинные множества. Например, для графа с 7 вершинами это 6 подмножеств ребер: 1) 1, 2, 3, 4, 5, 6; 2) 7, 8, 9, 10, 11; 3) 12, 13, 14, 15; 4) 15, 16, 17; 5) 18, 19; 6) 21. Это позволяет выполнять перечисление рекурсивно, при этом перечисление деревьев исходного графа сводится к перечислению графов с меньшим числом вершин.

На первом этапе разложения исходного графа ведущими ребрами являются ребра 1, 2, 3, 4, 5, 6, то есть вершинное множество корневой вершины образовано только ведущими ребрами. У графов с меньшим числом вершин ведущими ребрами являются ребра оставшихся вершинных множеств.

В дерево может включаться либо одно ребро (первое по порядку), либо (при наличии мест) сразу несколько первых по порядку ребер соответствующего вершинного множества. Во втором случае выполняется переход на рекурсию с выбором новых ведущих ребер, и процедура перечисления повторяется для графа с меньшим числом вершин.

Ведущие ребра во избежание добавления в список изоморфных деревьев не должны заменяться другими (следующими по порядку) ведущими ребрами, что также видно на графе. Возглавлять разложение

исходного или производного графа на деревья могут только первые по порядку ведущие ребра, потому что вершины ведущих ребер симметричны. Это позволяет «вырезать» (без рассмотрения) фрагменты множества деревьев полного графа, заведомо не содержащие неизоморфных (старших) корневых деревьев.

Нахождение неизоморфных корневых деревьев с семью вершинами для двух ведущих ребер 1 и 2. В качестве примера рассмотрим перечисление 16 неизоморфных корневых деревьев, содержащих два первых ведущих ребра 1 и 2. Эти деревья находятся под номерами 13–28 перечисляемого списка деревьев и отражают особенности этого вида деревьев.

Первые 12 деревьев обсуждаемого списка отличаются от аналогичного списка деревьев с 6 вершинами наличием одного нового дерева. Последующие деревья этого списка под номерами 29–48 полностью воспроизводят полный список деревьев с 6 вершинами (20 деревьев) при подсоединении ребра к корневой вершине и приданию статуса корня другой вершине добавленного ребра.

Перебор сочетаний ребер деревьев 13–28 начинается так: 12789,10. Это первое сочетание бракуется, так как ребро 7 образует цикл с ребрами 1 и 2. Следующим сочетанием будет 1289,10,11. Далее бракуются замены ребра 11 ребрами 12, 13 и 14, как образующими циклы с уже имеющимися в дереве ребрами. Принимается сочетание 1289,10,15. Затем бракуются замены ребра 15 ребрами 16 и 17, как образующими циклы с уже имеющимися в дереве ребрами. Принимается сочетание 1289,10,18.

Далее бракуются замены ребра 18 ребрами 19, 20 и 21, как относящимися к вершинным множествам 4 и 5, смежным не первому (8), а второму (9) и третьему (10) ведущим ребрам. Такие замены приведут к образованию изоморфных деревьев. Список замен исчерпан, поэтому в сочетании удаляется предпоследнее ребро 10. Заменять это ребро ребром 11 нельзя, так как оно находится в числе ведущих ребер на текущем этапе разложения (вершина 1). Поэтому выполняется переход ко второму

вершинному множеству. Ребра 12 и 13 пропускаются, как образующие цикл. Ребра 14 и 15 принимаются, отсюда 1289,14,15.

Ребро 16 и 17 отбрасывается, как образующие цикл. Ребро 18 принимается: 1289,14,18. После удаления ребра 18 исчерпывается список ведущих ребер третьего вершинного множества. Четвертое вершинное множество относится ко второму ведущему ребру (ребру 9), поэтому оно пропускается и выполняется переход к пятому вершинному множеству с одним ребром 21. Отсюда: 1289,14,21.

Список замен последнего ребра исчерпан, поэтому в сочетании удаляется предпоследнее ребро 14. Заменять это ребро ребром 15 нельзя, так как оно находится в числе ведущих ребер на текущем этапе разложения (вершина 2). Поэтому выполняется переход к третьему вершинному множеству. Ребро 16 пропускается, как образующее цикл. Ребра 17 и 18 принимаются, отсюда 1289,17,18.

Ребро 19 пропускается, как образующее цикл. Ребра 20 и 21 по отдельности принимаются, отсюда получается два дерева: 1289,17,20 и 1289,17,21.

Список замен последнего ребра исчерпан, поэтому в сочетании удаляется предпоследнее ребро 17. Заменять это ребро ребром 18 нельзя, так как оно находится в числе ведущих ребер на текущем этапе разложения (вершина 3). Поэтому выполняется переход к третьему вершинному множеству. Это вершинное множество соединено с ведущим ребром 9, поэтому добавление его ребер приведет к образованию изоморфных деревьев. Следовательно, ребро 9 само требует замены. Вместо него берется ребро 13 из следующего – второго по порядку – вершинного множества.

Процесс перечисления деревьев продолжается аналогично до получения дерева 128,16,19,21. Переход к обновлению ребер этого дерева требует удаления пяти ребер: 21, 19, 16, 8 и 2. Это приведет к образованию первого по порядку дерева с единственным ведущим ребром, что не входит в поставленную задачу. Итак, сформированный список из 16 деревьев (13–28) имеет вид:

$$\begin{array}{lll}
1289,10,11 & 1289,10,15 & 1289,10,18 \\
1289,14,15 & 1289,14,18 & 1289,14,21 \\
1289,17,18 & 1289,17,20 & 1289,17,21 \\
128,13,17,18 & 128,13,17,20 & 128,13,17,21 \\
128,16,17,18 & 128,16,17,20 & \\
128,16,19,20 & 128,16,19,21 & .
\end{array} \tag{1}$$

Сравнение с алгоритмами перечисления без использования полного графа. Полный корневой граф с упорядоченной нумерацией ребер является наглядной, хотя и наиболее избыточной, формой представления множества неизоморфных корневых деревьев. ЛГ-порядок при добавлении ребер учитывается их упорядочением по вершинным множествам в соответствии с порядковыми номерами вершин [10] (рис. 1).

Отказ от задания ребер парами вершин обеспечивает неявный (автоматический) учет ЛГ-порядка вершин у ребер дерева. При перечислении вручную рисунок графа является «картой», на которой виден цикл, образуемый ребром – претендентом на включение в дерево, а также вершинные множества, подключаемые при ветвлении дерева.

При использовании такого алгоритма не требуется никаких записей, кроме формируемых сочетаний ребер. Порядок перечисления легко запомнить или запрограммировать. Например, для полного графа с 4 вершинами (6 ребер) будет 20 сочетаний: 123, 124, 125, 126, 134, 135, 136, 145, 146, 156, 234, 235, 236, 245, 246, 256, 345, 346, 356, 456.

В процессе перечисления не придется рассматривать все 20 комбинаций – подавляющая их часть будет забракована при учете симметрий. Однако уже на этом перечислении видно, сколь избыточен такой алгоритм, ведь на четырех вершинах существует всего 4 неизоморфных корневых дерева. Поэтому такой алгоритм более подходит для теоретических рассуждений, а также как весьма прозрачная иллюстрация к задаче нахождения неизоморфных корневых деревьев.

Для разработки эффективной программы более предпочтительны алгоритмы перечисления неизоморфных корневых деревьев [4–6], которые используют лексикографическое упорядочение (ЛГ-упорядочение) списков вершин. Комбинация в виде ЛГ-упорядоченного списка вершин удовлетворяет свойству дерева, что сокращает пространство перебора до числа комбинаций, не столь значительно превышающего число неизоморфных деревьев.

Векторы начальных вершин. Задание деревьев упорядоченными номерами ребер компактнее задания парами вершин, но для восстановления деревьев требуется рисунок исходного графа. В случае корневых деревьев имеется другой способ кодирования, состоящий в модификации задания с помощью пар вершин. При этом также используется два вектора: вектор начальных вершин и вектор конечных вершин. Однако вектор конечных вершин не требуется указывать для каждого дерева, поскольку он одинаков для всех деревьев с заданным числом вершин. Это натуральный ряд: $12\dots N$, где $N=q-1$. Векторы начальных вершин образованы номерами вершин, начинающимися с 0 и оканчивающимися $n-1$ [9].

Список из 16 деревьев, заданных векторами начальных вершин, соответствующий списку (1), представлен в (2). При этом неизоморфные корневые деревья выделены курсивом.

001111 001112 001113 001114 001115
001122 001123 001124 001125
 001133 001134 001135
 001233 001234 001235
 001333 001334 001335
 001344 001345 . (2)

Важно, что если оперировать не номерами ребер, как при использовании полного графа, а номерами начальных вершин, то не потребуется трудоемкая проверка на цикл. Например, во второй строке следует пропустить слагаемое 001124 не как цикл, а как дерево (01)(02)(13)(14)(25)(46), изоморфное ранее перечисленному. Таким

образом, пространство поиска для выбора неизоморфных корневых деревьев многократно сокращается.

Очевидно, можно генерировать ЛГ-последовательность и пропускать те комбинации в ней, которые соответствуют не первому из ведущих ребер. В этом случае можно избежать весьма сложного нахождения s -классов, как в алгоритме из [9].

Добавленные в последовательность комбинации являются нестаршими (изоморфными) деревьями. Старшие (неизоморфные) и нестаршие деревья образуют ЛГ-последовательность векторов начальных вершин. Во втором столбце табл. 1 приводится число ЛГ-комбинаций в диапазоне вершин 4–14, которое получено экспериментально [14].

Таблица 1. Количество комбинаций в ЛГ-последовательностях, число двоичных кодов и неизоморфных корневых деревьев

Число вершин	ЛГ-комбинации	Двоичные коды	Ярусные коды	Деревья [1]
4	4	5	4	4
5	12	14	9	9
6	39	42	23	20
7	128	132	66	48
8	424	429	210	115
9	1424	1430	733	286
10	4855	4862	2781	719
11	16788	16796	11378	1842
12	58777	58786	49864	4766
13	208002	208012	232769	12486
14	742889	742900	1151915	32973

Двоичное кодирование корневых деревьев. Известен третий способ кодирования неизоморфных корневых деревьев, предусматривающий использование двоичных чисел: 1 и 0 [2,3]. Пространство двоичных кодов для 4 вершин имеет вид: 111000 110100 110010 101100 101010 . Код 101100 должен быть забракован, поскольку соответствует нестаршему

(изоморфному) дереву. Количества двоичных кодов, полученные с помощью программы [12], помещены в третий столбец табл. 1.

Как видно, количества ЛГ-векторов и двоичных кодов очень близки, поэтому сопоставимы по трудоемкости алгоритмы перечисления, основанные на этих пространствах поиска.

Ярусное (уровневое) кодирование корневых деревьев. Ярусный код корневого дерева [3,6,7], как и двоичный код, не содержит информации о номерах вершин, то есть непосредственно по нему нельзя восстановить дерево, как по вектору начальных вершин. Однако это не мешает сравнивать непомеченные деревья на старшинство, что, собственно, и требуется при генерации неизоморфных корневых деревьев.

На рис.2 ярусные коды (без первого номера 0) указаны под двадцатью деревьями с висячей корневой вершиной. Эти деревья завершают список из 48 неизоморфных корневых деревьев с 7 вершинами.

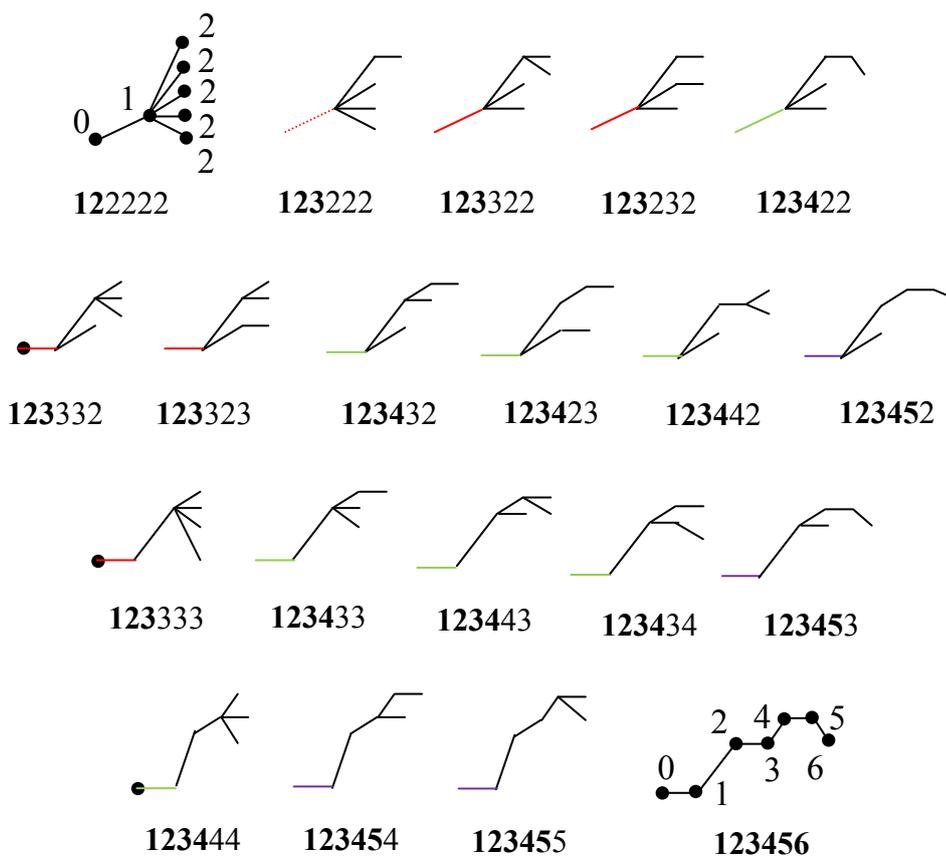


Рис. 2. Последние 20 деревьев из 48 деревьев с 7 вершинами (под каждым деревом указан его ярусный код)

Жирным шрифтом на рис.2 выделены участки ярусного кода максимальной глубины. Порядок перечисления деревьев рис.2 соответствует лексикографическому упорядочению векторов начальных вершин, которое использовалось в предыдущих примерах. Однако под деревьями указаны не векторы начальных вершин, а ярусные коды. Их образование понятно при нумерации вершин номерами ярусов, как показано, во избежание загромождения, только на первом и последнем из деревьев. Заметим, что эти 20 деревьев (без ребра 0–1) соответствуют неизоморфным корневым деревьям с 6 вершинами.

Деревья на рис.2 можно группировать по первым (порядковым) цифрам ярусного кода, которые указаны жирным шрифтом (рис.3). В таком порядке перечисляются неизоморфные корневые деревья по алгоритму [6].

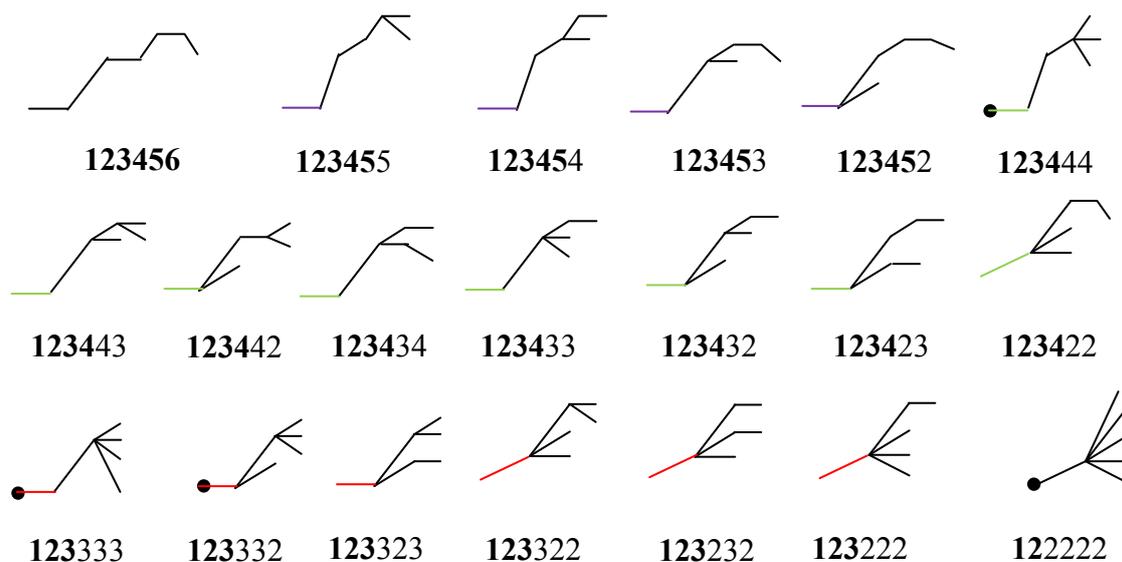


Рис. 3. Генерация по Бейеру 20 деревьев для 6 вершин
(цепь сворачивается в ромашку)

Деревья на рис.3, относящиеся к каждому множеству, имеют одинаковую глубину, то есть расстояние (в ребрах) от корневой вершины. Исходное дерево 122222 имеет глубину в одно ребро, а заключительное дерево 123456 с глубиной 5 ребер. Таким образом, «прорыв» в глубину

(порядковые номера уровней) одинаковы у всех деревьев с одинаковой глубиной.

На рис.4 показаны деревья рис.3 в обратном (привычном) порядке – по возрастанию кода. Отсюда видно, что число комбинаций, которые нужно «просеять», чтобы выбрать неизоморфные (старшие) деревья, рассчитывается по формуле

$$\sum_{i=1}^{q-1} i^{q-i-1}. \quad (1)$$

Для рассматриваемого случая $q=6$ получается $1^4+2^3+3^2+4^1+5^0=23$ комбинации. Первое слагаемое соответствует единственному соединению по 4 из {2}. Второе слагаемое учитывает соединения по 3 из {2,3}. Забракованными комбинациями будут: 223, 233. Третье слагаемое составляют соединения по 2 из {2,3,4}, комбинация 24 бракуется. Четвертое слагаемое включает соединения по 1 из {2,3,4,5}, брака нет. Последнее – пятое слагаемое соответствует единственному соединению по 0 из {2,3,4,5,6}.

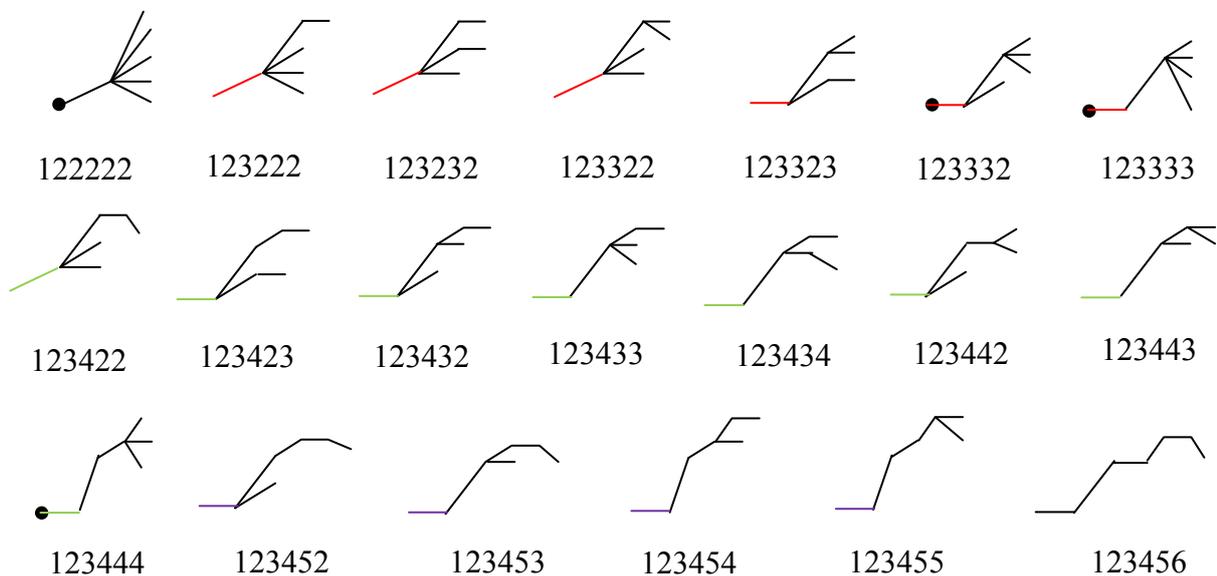


Рис. 4. Деревья рис.3 в обратном порядке – по возрастанию кода (ромашка разворачивается в цепь)

В алгоритме [6] указанные соединения не перебираются, а по сформулированным правилам восстанавливается следующая комбинация

по текущей комбинации. Учет условий для пропуска изоморфных деревьев (оставления только старших представителей) затрудняет программирование. По-видимому, не случайно в [6] скромно не указано, что с помощью реализованной авторами программы подтверждены данные Харари по числу неизоморфных корневых деревьев [1], а приводятся только сведения о скорости их генерации.

Между тем, образование комбинаций для поэтапного перечисления деревьев заданной глубины выполняется весьма просто. В искомый вектор заносится порядковое начало комбинации. Затем в комбинацию дописывается сгенерированное соединение. Например, для рассматриваемого примера с $q=6$ восемь соединений по 3 из $\{2,3\}$ получаются в результате декартового произведения множеств $\{2,3\}\{2,3\}\{2,3\}$. Девять соединений по 2 из $\{2,3,4\}$ являются результатом произведения $\{2,3,4\}\{2,3,4\}$.

Для получения вектора начальных вершин из ярусного кода выполняется порядковая нумерация вершин, начиная со второго яруса и заканчивая последним q -м ярусом. Вектор начальных вершин, соответствующий сгенерированной комбинации, можно проверить на старшинство функцией `testing`, которая уже используется в двух алгоритмах генерации неизоморфных корневых деревьев [14,15].

Однако для перечисления вручную алгоритм на основе векторов начальных вершин более пригоден, поскольку лексикографические комбинации генерируются по простому закону, и легко проверяются на старшинство визуально. Для программной реализации алгоритм на основе ярусных кодов также оказывается менее пригоден, поскольку объем генерируемых комбинаций оказывается существенно большим. В четвертом столбце табл.1 приводится число комбинаций в виде ярусных кодов, рассчитанное по формуле (1).

О взаимосвязи между способами кодирования корневых деревьев. Ярусный код не слишком удобен для распознавания при программировании. Более пригоден промежуточный код, который

используется для преобразования двоичного кода в вектор начальных вершин [15]. Например, ярусному коду 123432 соответствует промежуточный код: $\{(1234), (3), (2)\}$, то есть каждая ветвь ярусного кода, соответствует строке промежуточного кода.

Воспроизвести промежуточный код по ярусному коду несложно, поэтому для преобразования ярусного кода в вектор начальных вершин можно использовать алгоритм и программу [15]. При этом вершины корневого дерева будут помечены порядковыми номерами, то есть оно будет полностью задано. Соответственно, для преобразования двоичного кода в ярусный код могут быть использованы другой алгоритм и программа, предложенные в [15] для преобразования двоичного кода в промежуточный код.

Таким образом, в отличие от векторов начальных вершин двоичный, ярусный и промежуточный коды, являются «обезличенными» – не содержат фактических номеров вершин. Это затрудняет их использование для проверки поддеревьев корневого дерева на изоморфизм, лежащей в основе перечисления неизоморфных корневых деревьев [14,15].

Лексикографически упорядоченные векторы начальных вершин упорядочивают ветви (поддеревья) корневого дерева. Следовательно, можно проверять поддеревья на изоморфизм, бракуя нестаршие (изоморфные) деревья по мере добавления вершин к текущему вектору.

При этом удастся, не перебирать все комбинации (второй, третий и четвертый столбцы табл.1), а управлять их генерацией, радикально сокращая пространство поиска, что используется в программе генерации неизоморфных корневых деревьев [15].

Подсоединение правильных ребер к дереву (добавление старших вершин к вектору) обеспечивается в алгоритме [15] рассмотрением всего двух крайних поддеревьев: старшего и младшего. Только эти поддеревья проверяются снизу доверху на изоморфизм путем поярусного рассмотрения полустепеней исхода вершин.

Выводы

1. Табл. 1 позволяет оценить долю искомым неизоморфных деревьев в трех различных лексикографических пространствах поиска, если использовать их для перечисления. Число неизоморфных корневых деревьев увеличивается примерно в 3 раза при добавлении одной вершины и не зависит от текущего числа вершин q . В то же время отношение числа комбинаций в лексикографических последовательностях для текущего и предыдущего числа вершин увеличивается с каждой следующей вершиной.

2. Увеличение доли избыточных комбинаций с увеличением количества вершин указывает на то, что разработка эффективного алгоритма перечисления неизоморфных корневых деревьев для большого числа вершин требует сокращения используемых для генерации пространств поиска.

3. Показано, что комбинации с ярусными кодами применять для генерации неизоморфных корневых деревьев, предусматривающей проверку на старшинство, нецелесообразно, поскольку этот вид пространства поиска отличается комбинаторным ростом (формула (1)) для большого числа вершин.

4. Указано на соответствие промежуточного кода корневого дерева его ярусному коду. Рассмотрена взаимосвязь различных способов задания корневого дерева: двоичного, ярусного и промежуточного кодов, а также вектора начальных вершин.

Список литературы

1. Харари Ф. Теория графов.– М.: Мир, 1973.– 301 с.
2. Prins G. The automorphism group of a tree: Doctoral Dissertation / University of Michigan.– 1957.
3. Read R.C. How to grow trees // Combinatorial Structures and their Applications.– New York: Gordon and Breach, 1970.
4. Диниц Е.А., Зайцев М.А. Алгоритмы генерации неизоморфных деревьев // Автоматика и телемеханика.– 1977.– Вып. 4.– С. 121–126.

5. Kozina A.V. Coding and generation of nonisomorphic trees // Plenum Publishing Corporation.– 1980.– Translated from Kibernetika.– 1979.– N5.– PP. 38 – 43.
6. Beyer T., Hedetniemi S. M. Constant time generation of rooted trees // Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics: Computation.– 1980.– Vol. 9, no. 4.– P. 706–712.
7. Nakano S.I., Uno T. Efficient generation of rooted trees // National Institute of Informatics: Technical Report: NII-2003-005E. – 2003 (July).– P. 1–9.
8. Sawada J. Generating rooted and free plane trees // ACM Transactions on Algorithms.– 2006.– Vol. 2, no. 1 (January).– P. 1–13.
9. Chen I.M., Burdick J.W. Enumerating the non-isomorphic assembly configurations of modular robotic systems // The International Journal of Robotics Research.– 1998.– Vol. 17, no.7.– P. 702–719.
10. Свирщёва Э.А. Структурный синтез неизоморфных систем с однородными компонентами. – Харьков,1998. – 256 с. (Переработанный в 2005г. вариант находится на сайте электронной технической библиотеки).
11. Кручинин В.В. Алгоритмы генерации корневых деревьев на основе процедуры полного разбиения // Прикладная дискретная математика.– 2009.– С. 99–103.
12. Филаретов В.В. К цифровому моделированию электронных схем в топологическом базисе ветвей // Электрон. моделирование.– 1985.– № 6.– С. 92–94.
13. Christofides N. Graph Theory: An Algorithmic Approach. New York, London, San Francisco: Academic Press.– 1975.– 400 p.
14. Недорезов М.В., Недорезов П.В., Филаретов В.В. Алгоритм и программа генерации неизоморфных корневых деревьев на основе векторов начальных вершин // Настоящий выпуск.– С. 150–163.
15. Недорезов П.В., Филаретов В.В. Применение двоичных кодов для генерации неизоморфных корневых деревьев // Настоящий выпуск. – С. 164–175.

СИММЕТРИИ И ПОСТРОЕНИЕ НЕИЗОМОРФНЫХ КОРНЕВЫХ ДЕРЕВЬЕВ

Э. А. Свирщёва

Введено лексикографическое упорядочение корневых деревьев с заданным числом вершин. Рассмотрено выявление симметрий и применение информации о симметриях в процессе конструктивного перечисления неизоморфных корневых деревьев. Разработана каноническая процедура рекурсивного структурного синтеза всех семейств неизоморфных корневых деревьев с числом вершин, меньшим и равным заданному числу.

A lexicographic ordering of rooted trees is entered. Revealing of symmetry and application of the information about symmetry during constructive enumeration of non-isomorphic rooted trees is considered. The recursive procedure of structural synthesis for all families of not isomorphic rooted trees with number of vertexes, smaller or equal n is presented.

Конструктивное перечисление неизоморфных корневых деревьев.

Первые работы [1,2], посвященные конструктивному перечислению исключительно неизоморфных корневых деревьев, стали появляться, начиная с 70-х годов прошлого столетия. Методы, предложенные в [1,2], эффективнее известных ранее методов [3 и др.], в которых многократно порождаются изоморфные деревья, требующие довольно трудоемкой их отбраковки.

Надо отдать должное искусству первопроходцев в этой области: они тогда еще не могли опереться ни на законы, по которым образуются изоморфные варианты, ни на обоснованные математические модели процесса образования таких вариантов. Осознание роли симметрий в образовании изоморфных комбинаторных объектов, и, в том числе, изоморфных деревьев, наступило позже [4].

Знание указанных законов и использование их при разработке методов и алгоритмов порождения неизоморфных корневых деревьев позволяет сделать эти методы более простыми, прозрачными и доступными для понимания, открывая тем самым путь к их дальнейшему развитию и обобщениям, позволившим извлекать общие принципы из множества подходов к решению одних и тех же задач.

В работе [5], посвященной обобщениям в области рекурсивного структурного синтеза семейств комбинаторных объектов, введено понятие канонической процедуры структурного синтеза таких объектов по аналогии с понятием канонического комбинаторного объекта, введенного И.А.Фараджевым в [11]. Характерные особенности канонической процедуры – использование упорядочения комбинаторных объектов с целью обеспечения перехода от меньшего (в некотором смысле) канонического комбинаторного объекта к большему (в том же смысле) также каноническому объекту, т.е. минуя изоморфные варианты последнего. Преимущества канонического структурного синтеза, отмеченные в [5], заключаются в том, что он применим к большому числу самых разнообразных проблем; позволяет задействовать богатую группу симметрий; позволяет не хранить большие массивы данных, а также допускает распараллеливание процесса синтеза, обеспечивая простое повышение его эффективности.

Из приведенных в [5] примеров канонического структурного синтеза видно, что для каждого комбинаторного объекта с учетом его природы требуется свой подход к выбору его математической модели, способа упорядочения множества таких объектов, определения большего (меньшего) объекта и построения канонической процедуры структурного синтеза.

Статья посвящена выявлению симметрий корневого дерева и применению информации о симметриях такого дерева и его поддеревьев для предотвращения образования изоморфных вариантов в процессе построения корневых деревьев.

Упорядочение множества корневых деревьев и его роль в построения их неизоморфных вариантов. Корневое [6] (посаженное [7], выходящее [8], ориентированное [9]) дерево T условимся представлять списком векторов из номеров j его вершин (координат), $j=0,1,2,\dots, p$ [10]:

$$\{(j'_1, j''_1), (j'_2, j''_2), \dots, (j'_i, j''_i), \dots, (j'_q, j''_q)\}, \quad (1)$$

где q – количество его ребер; i – номер ребра, $i=1,\dots, q$; 0 – номер корневой вершины, $p=q$ – количество ненулевых вершин дерева.

Учитывая естественную ориентацию ребер от корня дерева, i -ое ребро условимся представлять вектором (j'_i, j''_i) , в котором $j'_i < j''_i$, и считать его исходящим из вершины с номером j'_i . Таким образом, координаты каждого ребра (j'_i, j''_i) , $i = 0,1,2,\dots,q$, оказываются упорядоченными лексикографически в алфавите $(0,1,2, \dots, q)$: $j'_i \succ^{lex} j''_i$.

Упорядочим ребра дерева T лексикографически в алфавите $(0,1,2,\dots, q)$, т.е. будем считать $(i-1) \succ^{lex} i$, если

$$(j'_{(i-1)}, j''_{(i-1)}) \succ^{lex} (j'_i, j''_i).$$

Введем порядок на множестве деревьев T путем лексикографического упорядочения в алфавите $(0,1,2,\dots, q)$ их описаний (1). При указанном упорядочении множества $M = \{T^1, T^2, \dots, T^m, \dots, T^{|M|}\}$ корневых деревьев с q ненулевыми вершинами и q ребрами каждое его подмножество изоморфных между собой деревьев также оказывается упорядоченным. Очевидно следующее

Утверждение 1. *Представители по одному от каждого подмножества изоморфных деревьев составляют множество неизоморфных деревьев.*

Самое старшее дерево представляется наиболее удобным для выделения его в качестве представителя подмножества изоморфных деревьев. Оно отличается тем, что его невозможно сделать еще старше никакой подстановкой на множестве его вершин, т.е. перенумерацией

последних. В соответствии с [11] условимся в дальнейшем называть такие деревья каноническими. Из [4] следует, что для проверки каноничности дерева достаточно ограничиться только частью таких подстановок: подстановками-автоморфизмами некоторых поддеревьев корневого дерева, отражающих их симметрии.

Поэтому конструктивное перечисление неизоморфных корневых деревьев логично свести к построению канонических представителей подмножеств изоморфных деревьев. Примером канонического может служить корневое дерево T в виде «звезды» или «ромашки» с описанием

$$\{(0,1),(0,2),\dots,(0,i),\dots,(0,p)\}. \quad (2)$$

В списке (2) ненулевые координаты – это номера вершин дерева, которые в порядке лексикографического старшинства присоединены к корневой вершине. Очевидно, что такую последовательность из ненулевых координат невозможно сделать старше лексикографически никакой перенумерацией его вершин. Тем более ничто не может быть лексикографически старше нулевых координат списка (2).

Переход от канонического дерева с описанием (2) к любым другим деревьям, в том числе к каноническим представителям подмножеств изоморфных деревьев осуществляется выбором координат j'_i описания (1), $i=1,\dots, q$. В этом случае искомые канонические представители подмножеств изоморфных деревьев могут быть представлены как

$$\{(j'_1,1),(j'_2,2),\dots,(j'_i,i),\dots,(j'_q,q)\}. \quad (3)$$

Из лексикографической упорядоченности описаний корневых деревьев с q ребрами следует, что эти описания могут отличаться между собой только нумерацией начальных вершин j'_i ребер.

Последовательность концевых вершин j''_i ребер одинакова для всех деревьев с одинаковым количеством вершин. Поэтому каждое такое дерево однозначно определяется одной из комбинаций $J' = (j'_1, j'_2, \dots, j'_i, \dots, j'_q)$ или соответствующим кодом в виде последовательности из

номеров начальных вершин его ребер $j'_1 j'_2 \dots j'_i \dots j'_q$. Оба этих способа полезны для компактного представления корневого дерева.

Будем говорить, что дерево $T^{(m)}$ минимально отличается по старшинству от дерева $T^{(m-1)}$, если между ними в упорядоченном множестве деревьев M нет никаких промежуточных деревьев. Это значит, что между соседними элементами упорядоченной последовательности деревьев не может быть такого элемента, который старше одного из них и при этом младше другого.

Очевидно, что и описания таких деревьев минимально отличаются лексикографически. Это значит, что между ними также не может быть промежуточных описаний. Например, деревьями, минимально отличающимися по старшинству, являются каноническое дерево с описанием (2) и следующее за ним дерево с описанием

$$\{(0,1),(0,2),\dots,(0,i),\dots,(1,p)\}.$$

Таким образом, необходимым условием каноничности дерева среди изоморфных ему деревьев является лексикографическое старшинство его описания (1), или (3), как и его представлений $J' = (j'_1, j'_2, \dots, j'_i, \dots, j'_q)$ или $j'_1 j'_2 \dots j'_i \dots j'_q$.

Утверждение 2. Пусть дерево $T^{(m-1)}$ является каноническим в своем подмножестве изоморфных деревьев. Для того, чтобы дерево $T^{(m)}$ также было каноническим в своем подмножестве изоморфных деревьев необходимо и достаточно, чтобы его описание: 1) было лексикографически упорядоченным; 2) лексикографически минимально отличалось от описания дерева $T^{(m-1)}$; 3) не могло стать лексикографически старше под действием подстановок-автоморфизмов его поддеревьев.

Доказательство. Необходимость следует из определения минимального отличия по старшинству между двумя деревьями.

Не все деревья $T^{(m)}$, описания которых минимально отличаются лексикографически от описания дерева $T^{(m-1)}$, являются каноническими

представителями своих подмножеств изоморфных деревьев. Некоторые из них могут быть приведены к каноническим, если найдутся необходимые для этого подстановки-автоморфизмы их поддеревьев.

Таким образом, множество деревьев, минимально отличающихся между собой по старшинству, может содержать два типа деревьев: канонические деревья (т.е. такие, которые никакими подстановками на множестве номеров их вершин невозможно сделать еще старше), и такие, которые можно сделать старше подстановками-автоморфизмами их поддеревьев. Поэтому для получения только канонических деревьев $T^{(m)}$ достаточно на каждом шаге процесса их конструктивного перечисления не допускать построения деревьев второго типа.

Пример 1. Деревья с описаниями $\{(0,1),(0,2),(0,3),(0,4)\}$, $\{(0,1),(0,2),(0,3),(1,4)\}$, $\{(0,1),(0,2),(0,3),(2,4)\}$ и $\{(0,1),(0,2),(0,3),(3,4)\}$ удовлетворяют требованиям 1) и 2) утверждения 2. Но не все из них являются каноническими. Третье и четвертое деревья приводятся ко второму дереву подстановками (12) и (13) соответственно. Первая из них является подстановкой-автоморфизмом дерева с описанием $\{(0,1),(0,2)\}$, которое является поддеревом второго и третьего деревьев, вторая – подстановкой-автоморфизмом дерева с описанием $\{(0,1),(0,3)\}$, т.е. поддерева второго и четвертого деревьев. Поэтому каноническими представителями своих классов эквивалентности-изоморфизма в соответствии с утверждением 2 являются только два первых дерева из четырех, перечисленных выше.

Обозначим множество корневых деревьев с p вершинами и $q = p - 1$ ребрами, удовлетворяющих условиям 1) и 2) утверждения 2, буквой M' , а канонические, т.е. удовлетворяющие всем трем требованиям утверждения 2, – буквой M'' . Очевидно, что $M'' \subset M' \subset M$.

Пример 2. В примере 1 множество M' – это четыре дерева с приведенными описаниями, а M'' – два первых дерева.

Из утверждения 2 следует, что структурный синтез неизоморфных корневых деревьев сводится к решению двух подзадач.

Первая подзадача заключается в построении такой последовательности старших деревьев, начиная с канонического дерева с описанием (2), из которых каждое минимально отличается от предшествующего.

Решением второй подзадачи вводятся дополнительные ограничения на просматриваемые варианты старших деревьев. Назначение этих ограничений – не допускать появления в указанной последовательности лексикографически старших деревьев, которые могут стать еще старше под действием подстановок-автоморфизмов (т.е. симметрий) их поддеревьев.

Из утверждения 2 следует, что строгое упорядочение множества корневых деревьев вместе с использованием информации о симметриях их поддеревьев позволяет строить исключительно канонические, т.е. оригинальные деревья с заданным количеством вершин p , которые являются самыми старшими представителями от каждого из множеств изоморфных деревьев. Такой подход к построению неизоморфных

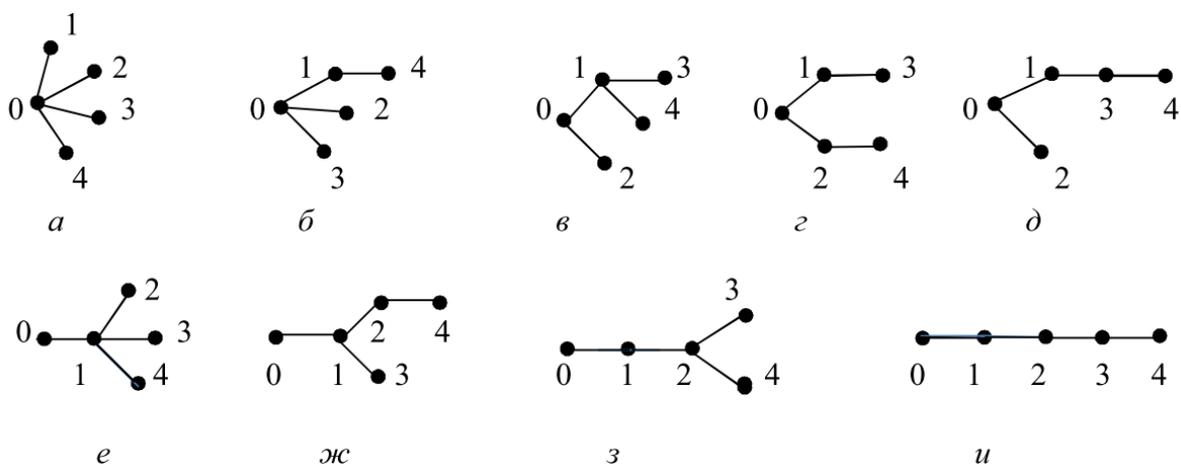


Рис.1.

корневых деревьев был положен в основу методов и алгоритма их генерирования, приведенного в [4]. Этим алгоритмом предусмотрено построение канонических корневых деревьев в последовательности, при которой их описания упорядочены лексикографически. Такая последовательность на рис.1 показана для $p=5$.

В данной статье предложена модификация этого метода, основанная на переходе от канонического дерева T_q с q ребрами к каноническим же деревьям $T_{(q+1)}$ с $q+1$ ребрами.

Переход от канонического дерева с q ребрами к каноническим деревьям с $q+1$ ребрами. Нам понадобятся положения утверждения 2 и следствие из него, приведенное ниже.

Следствие. Для того, чтобы просматриваемые комбинации $(j'_1, j'_2, \dots, j'_i, \dots, j'_q)$ были лексикографически упорядоченными, необходимо, чтобы они удовлетворяли следующим ограничениям:

$$j'_i < j''_i, \quad i=1, \dots, q; \quad (4)$$

$$j'_{(i-1)} \leq j'_i, \quad i=1, \dots, q; \quad (5)$$

$$j''_i = i, \quad i=1, \dots, q.$$

(6)

Ограничения (4), (5), (6) означают, что номера просматриваемых начальных вершин j'_i могут меняться только в таких пределах:

$$j'_1 = 0; \quad 0 \leq j'_2 \leq 1; \quad 0 \leq j'_3 \leq 2; \quad 0 \leq j'_4 \leq 3; \dots, \quad 0 \leq j'_i \leq i-1; \dots$$

Утверждение 3. Пусть дерево T_q является каноническим представителем своего подмножества изоморфных деревьев. Для того, чтобы дерево $T_{(q+1)}$, полученное путем присоединения $(q+1)$ -го ребра к одной из вершин дерева T_q , было также каноническим представителем своего подмножества изоморфных деревьев, необходимо, чтобы эта вершина была: 1) лексикографически не старше начальной вершины младшего ребра дерева T_q ; 2) лексикографически старшей среди симметричных ей вершин дерева T_q ; 3) упорядоченной по не возрастанию ее полустепеней исхода по отношению к соседней по ярусу лексикографически старшей вершине, если они могут меняться местами под действием симметрий поддеревьев дерева T_q .

Доказательство. Первое ограничение следует из условия 1) утверждения 2 и соотношений (4),(5),(6). Из равенства (6) следует, что младшее ребро дерева T_q с q вершинами в его описании представлено вектором (j'_q, q) , а дерева $T_{(q+1)}$ с $q+1$ вершинами – вектором $(j'_{q+1}, (q+1))$. При этом из (4) следует неравенство $j'_{q+1} < j''_{q+1} = q+1$, ограничивающее максимальное значение координаты $j'_{q+1} = q$. А из (5) следует неравенство $j'_q \leq j'_{q+1}$, ограничивающее минимальное значение координаты j'_{q+1} . Таким образом, ограничениями (4), (5), (6) определяется диапазон вершин дерева T_q , к которым допускается присоединение $(q+1)$ -го ребра, исходя из требования 1) утверждение 2 и его следствия. Подмножество этих вершин условимся обозначать буквой J'_q , $J'_q = (j'_q, j'_q + 1, j'_q + 2, \dots, j''_q = q)$.

Второе ограничение определяется симметриями дерева T_q с q вершинами. Доказывается от противного. Предположим, что дерево $T_{(q+1)}$ каноническое, хотя его вершина $j'_q \in J'_q$, выбранная для присоединения к нему $(q+1)$ -го ребра, не является старшей среди симметричных ей вершин дерева T_q . Тогда найдется такая подстановка-автоморфизм множества J'_q вершин дерева T_q , под действием которой выбранная вершина станет старше. В описании дерева $T_{(q+1)}$ станет старше соответствующая начальная координата присоединенного ребра. При этом упорядоченность остальных вершин дерева $T_{(q+1)}$, предшествующих выбранной вершине, не изменится, так как они находятся под действием симметрий дерева T_q . В результате станет лексикографически старше описание дерева $T_{(q+1)}$. Это значит, что дерево $T_{(q+1)}$ станет старше, что противоречит первоначальному предположению.

Третье ограничение также доказывается от противного. Предположим, что дерево $T_{(q+1)}$ каноническое, но полустепень исхода

вершины $j'_q \in J'_q$, выбранной для присоединения к нему $(q+1)$ -го ребра, равна или больше, чем у лексикографически старшей соседней по ярусу вершины. Если обе они являются симметричными концевыми вершинами одного из поддеревьев T_q , значит, существует подстановка-автоморфизм, которая меняет местами эти вершины вместе с висящими на них поддеревьями, не влияя на остальную часть дерева $T_{(q+1)}$. В результате в описании дерева $T_{(q+1)}$ становится старше координата j'_{q+1} добавленного ребра, и это описание становится лексикографически старше. Следовательно, старше стало и дерево $T_{(q+1)}$, что противоречит первоначальному предположению.

Шаг нарастания номера младшей вершины $(q+1)$ -го ребра $j'_q \in J'_q$ должен быть минимальным, т.е. равным единице. Это следует из условия 2) утверждения 2. Однако при наличии симметричных вершин в подмножестве J'_q , необходимо использовать только старшую из них для присоединения $(q+1)$ -го ребра. Это следует из условия 3) утверждения 2.

Перечисленные выше сведения о связи между деревьями T_q и $T_{(q+1)}$ являются обоснованием метода построения неизоморфных корневых деревьев $T_{(q+1)}$ путем присоединения к каждому неизоморфному дереву T_q одного ребра разными допустимыми способами. Здесь под допустимостью подразумевается соответствие утверждению 3.

Метод включает в себя следующие действия. **1.** Определение подмножества J'_q вершин дерева T_q . Элементами этого подмножества ограничивается список номеров вершин дерева T_q , среди которых могут находиться допустимые вершины для присоединения дополнительного ребра при переходе к деревьям $T_{(q+1)}$. **2.** Выявление симметрий дерева T_q и определение вершин подмножества J'_q , которые удовлетворяют требованиям 2) и 3) утверждения 3. Множество этих вершин условимся обозначать буквой J_q , $J_q \in J'_q$. **3.** Переход от каждого дерева T_q к

деревьям $T_{(q+1)}$ путем поочередного присоединения $(q+1)$ -го ребра к каждой из вершин подмножества J_q множества J'_q .

Симметрии корневых деревьев и методы их выявления.

Математическая модель симметрий корневого дерева с p вершинами – это группа S подстановок-автоморфизмов на множестве его вершин $J = (0, 1, 2, \dots, i, \dots, p)$ относительно операции умножения.

При действии подстановок $s \in S$ на множестве вершин дерева естественным образом определена эквивалентность [12]: $j_1 \sim j_2$, $j_1, j_2 \in J$, означает, что существует такая подстановка $s \in S$, что $j_2 = sj_1$.

Условимся подмножество вершин дерева, которое под действием его подстановки-автоморфизма отображается на себя, называть эквивалентным по симметриям дерева, или для краткости по аналогии с [4] – s -классом (от слова symmetry).

Каждой подстановке-автоморфизму поставим в соответствие подмножество вершин дерева, на котором эта подстановка определена, т.е. s -класс. Применение s -классов в процессе выявления симметрий позволяет заменить операции над подстановками операциями над множествами, такими как сопоставление множеств, подмножеств и их элементов. Каждым s -классом, как будет показано ниже, может быть представлено целое множество подстановок-автоморфизмов. Частные случаи s -классов имеют свои названия: орбиты или области транзитивности [13], орбители [7] и другие.

Переход от подстановок-автоморфизмов к s -классам и обратно не вызывает затруднений.

Симметричные поддеревья корневого дерева в зависимости от типа симметрий, действующих на множестве его вершин, можно классифицировать следующим образом.

1. «Звезда» или «ромашка» состоит из плетей единичной длины (плеть – это ветвь без разветвлений, длина плети – это количество ребер в ее составе). Отображение на себя такого поддерева осуществляется

подстановкой-автоморфизмом на множестве номеров его концевых вершин.

Симметрии этого типа составляют симметрическую группу автоморфизмов. Количество подстановок-автоморфизмов такого типа определяется числом k лучей «звезды» (лепестков «ромашки») и равно $k!$. Этот тип симметрий составляет основную часть симметрий корневых деревьев. И метод их выявления относится к наиболее простым. Пример такого поддерева приведен на рис.2а.

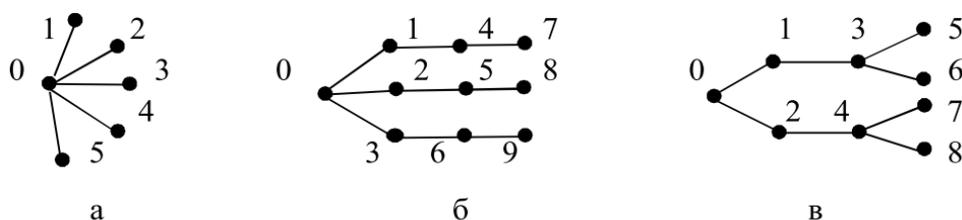


Рис.2

2. «Пучок» симметричных плетей одинаковой длины l , превышающей единицу. Такое поддерево отображается на себя подстановкой-автоморфизмом, которая допускает разложение на l частей (циклов), не имеющих общих элементов. Подстановки-автоморфизмы циклов являются взаимозависимыми, так как могут быть реализованы только перестановкой плетей. Пример такого поддерева приведен на рис.2б.

3. «Пучок» симметричных ветвей, на одних и тех же вершинах которого действуют одновременно несколько групп подстановок-автоморфизмов, в том числе и названных выше типов. Пример дерева с симметричными ветвями показан на рис.2в.

Симметриям деревьев первого типа соответствуют s -классы, состоящие из номеров концевых вершин звезды (ромашки). Например, s -класс поддерева приведенного на рис.2а – это подмножество вершин $(1,2,3,4,5)$, на котором определены $5!$ подстановок-автоморфизмов.

Симметриям деревьев второго типа соответствует объединение s -классов. Так, s -классы поддерева рис.2.б – это $(1,2,3) \cup (4,5,6) \cup (7,8,9)$, на

которых определены $3!$ подстановок-автоморфизмов, действующих одновременно на элементах каждого из объединенных s -классов.

При представлении s -классами более сложных симметрий деревьев третьего типа, кроме симметричных вершин, встречаются также взаимозаменяемые (симметричные) s -классы.

Например, s -классы $(5,6)$ и $(7,8)$ поддерева на рис.2в являются симметричными, т.е. они эквивалентны между собой по подстановке-автоморфизму $(12)(34)$, которой соответствует объединение s -классов $(1,2) \cup (3,4)$. Это значит, что на каждом из s -классов $(5,6)$ и $(7,8)$ определены независимые подстановки-автоморфизмы первого типа (56) и (78) , при этом они могут меняться местами под действием подстановки-автоморфизма $(12)(34)$.

Для s -классов перечисленных типов введем обозначения s_1, s_2, s_3 соответственно. Из [4] следует, что под действием подстановки-автоморфизма корневого дерева множество вершин каждого его яруса отображается на себя. Это значит, что каждое подмножество симметричных вершин, т.е. s -класс – это часть вершин одного из ярусов дерева.

Приведенные сведения об известных типах и формах представления симметрий корневых деревьев использованы в предлагаемой ниже процедуре выявления симметрий.

1. Исходные данные о дереве, симметрии которого необходимо определить, условимся представлять в виде таблицы, обеспечивающей удобство сопоставления множеств его начальных вершин $j'_i \in J'$, конечных вершин $j''_i \in J''$ и полустепеней исхода этих вершин $d \in D$. Источником этих данных является описание дерева.

Пример 3. Таблица имеет следующий вид для дерева с описанием $\{(0,1),(0,2),(0,3),(0,4),(1,5),(1,6),(1,7),(1,8),(5,9)\}$

J''		1	2	3	4	5	6	7	8	9
J'	0	0	0	0	0	1	1	1	1	5
D	4	4	0	0	0	1	0	0	0	0

2. С помощью таблицы определяем симметрии дерева и их типы по признакам, перечисленным ниже.

Признак s_1 -класса – это совпадение характеристик $d \in D$ и $j'_i \in J'$ подмножества входящих в него элементов $j''_i \in J''$. Например, из приведенной таблицы видно, что такими s_1 -классами являются подмножества (2,3,4) и (6,7,8):

J''		1	2	3	4	5	6	7	8	9
J'	0	0	0	0	0	1	1	1	1	5
D	4	4	0	0	0	1	0	0	0	0
s_1 -классы		(2,3,4)			(6,7,8)					

Признак s_2 -класса – это совпадение характеристик $d \in D$ и нарастающие с одинаковым шагом характеристики $j'_i \in J'$ подмножества его элементов $j''_i \in J''$. Исключением является старший из объединенных s_2 -классов, который определяется по тем же признакам, что и s_1 -класс.

Переход от младшего из объединенных s_2 -классов к следующему по старшинству интерпретируется в таблице переходом от его концевых вершин $j''_i \in J''$ к его начальным вершинам $j'_i \in J'$, которые одновременно являются концевыми вершинами следующего из связанных s_2 -классов.

Пример 4. По таблице, построенной для дерева с описанием $\{(0,1),(0,2),(0,3),(0,4),(1,5),(2,6),(3,7),(5,8),(6,9)\}$, и признакам, указанным выше, находим объединение s_2 -классов:

J''		1	2	3	4	5	6	7	8	9
J'	0	0	0	0	0	1	2	3	5	6
D	4	1	1	1	0	1	1	0	0	0
s_2 -классы		(1,2) ∪		(5,6) ∪			(8,9)			

Признак симметричности s_1 - или s_2 -классов – это наличие еще одного s_3 -класса, элементы которого являются их прообразами. Наличие s_3 -класса также легко установить по таблице.

Пример 5. По таблице, пользуясь указанным признаком, находим s_3 -класс и симметричные s_1 -классы для дерева с описанием $\{(0,1),(0,2),(0,3),(0,4),(1,5),(1,6),(2,7),(2,8),(3,9)\}$:

J''		1	2	3	4	5	6	7	8	9
J'	0	0	0	0	0	1	1	2	2	3
D	4	2	2	1	0	0	0	0	0	0
s_3 -класс	(1,2)									
s_1 -классы	(5,6) (7,8)									

По признакам s_1 -классов находим, что их в таблице три: (1,2), (5,6) и (7,8). При этом вершины с номерами 1 и 2 s_1 -класса (1,2) являются прообразами s_1 -классов (5,6) и (7,8) соответственно. Следовательно, (1,2) – это s_3 -класс, а (5,6) и (7,8) – это симметричные s_1 -классы.

Правила отбора вершин дерева T_q для присоединения $(q+1)$ -го ребра. После выявления симметрий дерева можно приступить к формированию множества J_q его вершин, которые пригодны для присоединения к ним $(q+1)$ -го ребра.

При всем многообразии симметрий дерева нам при формировании множества J_q достаточно учесть только s -классы, относящиеся к множеству J'_q . Элементы множества J_q устанавливаются путем анализа отношения элементов $j'_i \in J'_q$ к найденным s -классам. Кроме того, в процессе этого отбора важно не допустить, чтобы было нарушено упорядочение элементов J_q по невозрастанию полустепеней исхода $d \in D$. (В дальнейшем для краткости этот вид упорядоченности условимся называть d -упорядоченностью).

К множеству J_q следует отнести без изменения их первоначальной последовательности те элементы J'_q , которые: 1) либо не принадлежат ни одному из s -классов и при этом не нарушают d -упорядоченности; 2) либо являются старшими элементами s -классов, за исключением старших элементов не старших s -классов.

Для проверки d -упорядоченности элемента J'_q по отношению к соседнему старшему элементу достаточно сравнить их полустепени

исхода по таблице. Проверяемый элемент можно включить в множество J_q только при условии, что его полустепень исхода хотя бы на единицу меньше, чем у соседнего элемента слева в таблице. Иначе присоединение к этому элементу $(q+1)$ -го ребра нарушит d -упорядоченность вершин дерева $T_{(q+1)}$.

Элементы J'_q , которые принадлежат лексикографически старшему пути в дереве от корневой его вершины к концевой, можно включать в множество J_q без проверки, так как их не с чем сравнивать.

Если соседний элемент слева оказался симметричным проверяемому элементу J'_q , его нельзя включать в множество J_q , так как их полустепени исхода совпадают. Это значит, что присоединение к нему $(q+1)$ -го ребра обязательно нарушит d -упорядоченность вершин дерева $T_{(q+1)}$.

Рассмотрим формирование множества J_q на примерах с разными типами симметрий.

Пример 6. Из описания дерева в примере 3 находим $j'_q = 5$ и $j''_q = 9$. Значит, $J'_q = (5,6,7,8,9)$ – это множество вершин дерева T_q , среди которых следует искать допустимые вершины для присоединения дополнительного ребра при переходе к деревьям $T_{(q+1)}$. В этой области есть только один s_1 -класс: $(6,7,8)$. Из него выбираем для множества J_q старший элемент 6. Кроме него, в множество J_q войдут элементы 5 и 9 так как они не принадлежат ни одному s -классу и являются элементами лексикографически старшего пути в дереве. В результате $J_q = (5,6,9)$.

Пример 7. Из описания дерева в примере 4 находим $J'_q = (6,7,8,9)$. Слева от элемента 6 в таблице находится симметричный ему элемент 5. Поэтому элемент 6 не может входить в множество J_q как не старший элемент s -класса. Элемент 7 войдет в множество J_q как не относящийся ни к одному s -классу множества J'_q и не нарушающий d -упорядоченности по отношению к соседнему элементу 6, с которым они могут меняться местами под действием симметрий одного из поддеревьев дерева T_q .

Элемент 8 войдет в множество J_q как старший элемент s -класса (8,9). Таким образом, $J_q = (7,8)$.

Пример 8. Из описания дерева в примере 5 находим $j'_q = 3$, $J'_q = (3,4,5,6,7,8,9)$. В множество J_q войдут элементы 3 и 4, так как они не относятся ни к каким s -классам множества J'_q и не нарушают d -упорядоченности по отношению к вершинам 2 и 3 соответственно: элементы каждой из пар 2,3 и 3,4 могут меняться местами под действием симметрий поддеревьев дерева T_q .

Элемент 9 войдет в множество J_q . Он также не относится ни к каким s -классам множества J'_q и не может нарушить d -упорядоченность по отношению к вершине 8 из-за отсутствия в дереве T_q поддеревьев, симметрии которых могли бы поменять их местами.

Элемент 5 войдет в множество J_q как старший элемент старшего из двух симметричных s -классов. Поскольку s -класс (7,8) не является старшим среди симметричных s -классов, его элементы не входят в множество J_q . Таким образом, $J_q = (3,4,5,9)$.

Примеры перехода от канонического дерева с q ребрами к каноническим деревьям с $q+1$ ребрами

Пример 9. Воспользуемся предлагаемым методом добавления ребра для перехода от канонических корневых деревьев с 5 вершинами, приведенных на рис.1, к таким же каноническим деревьям с 6 вершинами.

Для этого определим множества J_q вершин деревьев этого рисунка, к которым допускается присоединение 6-го ребра. Для контроля d -упорядоченности элементов J_q условимся приводить в этом примере их полустепени исхода.

Из описания $\{(0,1),(0,2),(0,3),(0,4)\}$ дерева рис.1а находим $J'_q = (0,1,2,3,4)$; s -класс: (1,2,3,4); $J_q = J'_q \setminus (2,3,4) = (0,1)$. $D = (0,0)$. Из описания $\{(0,1),(0,2),(0,3),(1,4)\}$ дерева рис.1б находим $J'_q = (1,2,3,4)$; s -класс: (2,3); $J_q = J'_q \setminus (3) = (1, 2, 4)$. $D = (1,0,0)$. Из описания $\{(0,1),(0,2),(1,3),(1,4)\}$ дерева

рис.1в находим $J'_q = (1,2,3,4)$; s-класс: $(3,4)$; $J_q = J'_q \setminus (4) = (1, 2, 3)$. $D = (2,0,0)$. Из описания $\{(0,1),(0,2),(1,3),(2,4)\}$ дерева рис.1г находим $J'_q = (2,3,4)$; s-классы: $(1,2) \cup (3,4)$. Полустепени исхода симметричных вершин 2 и 1, как и симметричных вершин 4 и 3, совпадают. Поэтому вершины 2 и 4 нельзя включать в множество J_q . Следовательно, $J_q = (3)$. $D = (0)$.

Из описания $\{(0,1),(0,2),(1,3),(3,4)\}$ дерева рис.1д, у которого нет симметрий, находим $J = J'_q = (3,4)$; $D = (1,0)$. Из описания $\{(0,1),(1,2),(1,3),(1,4)\}$ дерева рис.1е находим $J'_q = (1,2,3,4)$; s-класс: $(2,3,4)$; $J_q = J'_q \setminus (3, 4) = (1,2)$. $D = (3,0)$. Из описания $\{(0,1),(1,2),(1,3),(2,4)\}$ дерева рис.1ж, у которого нет симметрий, находим $J_q = J'_q = (2,3,4)$. $D = (1,0,0)$. Из описания $\{(0,1),(1,2),(2,3),(2,4)\}$ дерева рис.1з находим $J'_q = (2,3,4)$; s-класс: $(3,4)$; $J_q = J'_q \setminus 4 = (2, 3)$. $D = (2,0)$. Из описания $\{(0,1),(1,2),(2,3),(3,4)\}$ дерева рис.1и, у которого нет симметрий, находим $J_q = J'_q = (3,4)$. $D = (1,0)$.

На рис.3 вершины, принадлежащие множествам J_q , выделены отсутствием зачернения. Выделенными вершинами каждого из деревьев рис.3 определяются их потомки среди деревьев с 6 вершинами, образующие семейства, размеры которых определяются количествами

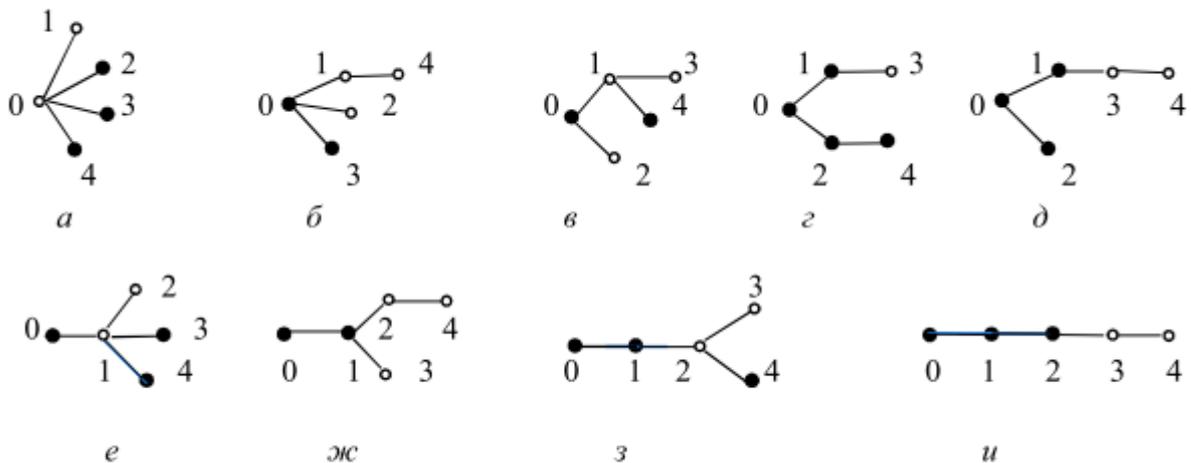


Рис. 3

таких вершин. В данном случае размеры семейств составляют, как видно из рис.3, последовательность: 2,3,3,1,2,2,3,2,2.

Общим числом выделенных вершин рис.3 определяется количество неизоморфных корневых деревьев с $q = 6$. Соответствующие неизоморфные деревья с 6 вершинами приведены на рис. 4. Список этих деревьев не отличается от синтезированных в [2].

Пример 10. Аналогично определяем списки J_q для деревьев, приведенных на рис.4. На них выделены вершины, к которым допускается присоединение седьмого ребра. Выделенными вершинами каждого из деревьев рис.4 определяются порожденные ими потомки среди деревьев с 7 вершинами. В данном случае размеры таких семейств составляют, как видно из рис.4, последовательность: 2,3,3,2,2,3,3,3,3,2,2,2,3,3,1,2,2,3,2,2.

По общему числу выделенных вершин определяем количество неизоморфных корневых деревьев с $q = 7$. Оно равно 48, что совпадает с количеством неизоморфных деревьев с 7 вершинами, рассчитанным в [8].

Учитывая быстрый рост числа неизоморфных деревьев с увеличением количества их вершин p , целесообразно переходить к более компактному их представлению каждого дерева, например, множеством $J' = (j'_1, j'_2, \dots, j'_i, \dots, j'_q)$ или кодом $j'_1 j'_2 \dots j'_i \dots j'_q$.

Пример 11. Ниже приведен в виде кодов список 48 деревьев с 7 вершинами, которые получены присоединением по одному ребру к не зачерненным вершинам деревьев рис. 4.

```

000000 000001 000011 000012 000015 000111 000112
000114 000123 000124 000144 000145 001111 001112
001113 01122 001123 001125 001133 001134 001135
001233 001234 001235 001333 001334 001344 001345
011111 011112 011122 011123 011125 011222 0011223
011224 011234 011244 011245 012222 012223 012233
012234 012235 012333 012334 012344 012345

```

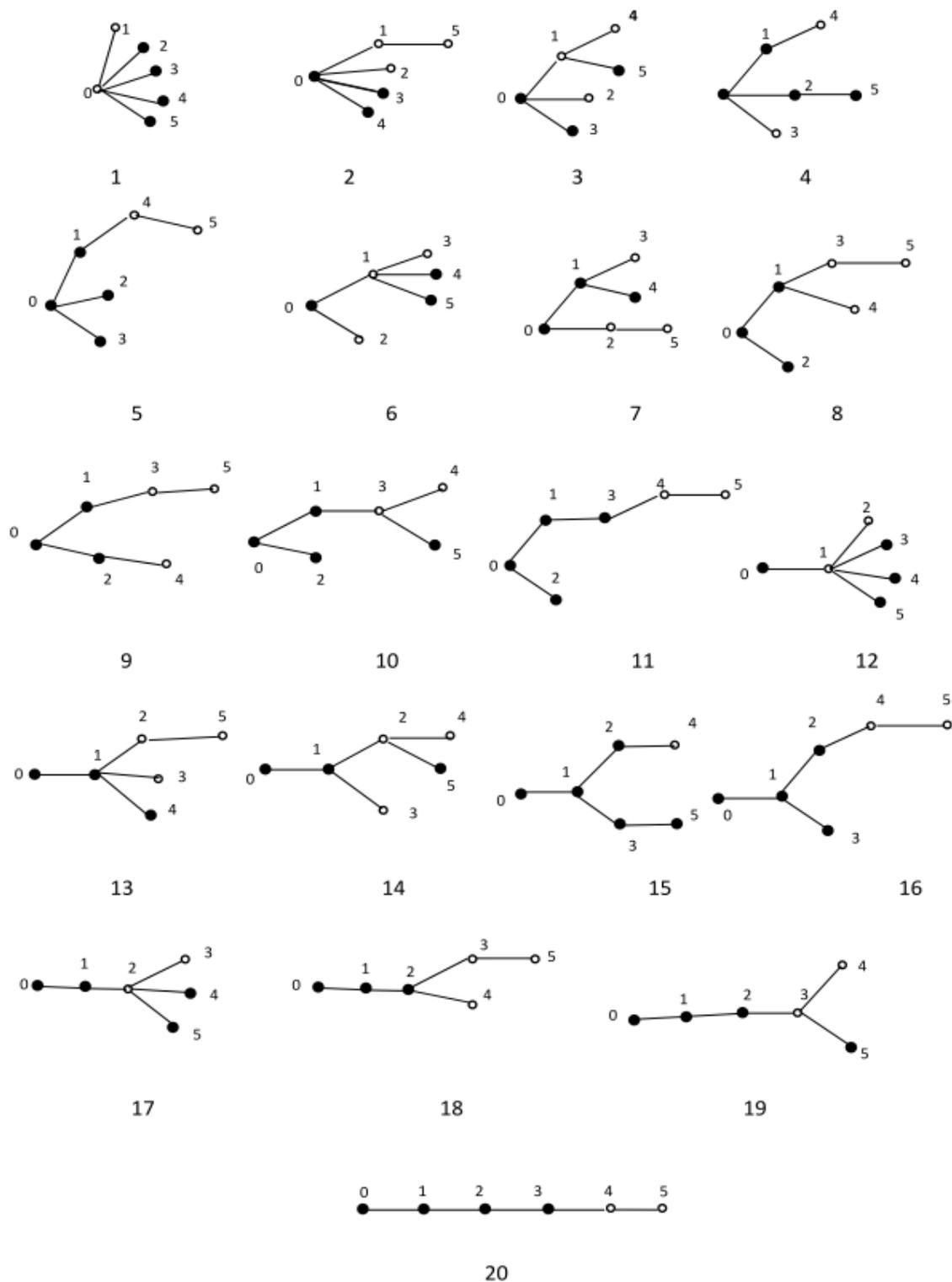


Рис. 4

О разбиении задачи генерирования неизоморфных корневых деревьев на подзадачи. Рассмотренную процедуру порождения

неизоморфных корневых деревьев можно представить деревом вариантов, на q -м ярусе которого каждое корневое дерево $(q-1)$ -го яруса дополняется q -м ребром всеми допустимыми способами.

На рис.5 дерево порождения таких деревьев с числом вершин от $q = 1$ до $q = 5$ представлено номерами их вершин в виде отдельных семейств.

В дереве вариантов для представления каждого неизоморфного дерева применен лексикографически упорядоченный список номеров его вершин с выделенными курсивом и более крупным шрифтом начальными вершинами, к которым можно поочередно присоединять ребро для перехода к следующему ярусу с неизоморфными деревьями.

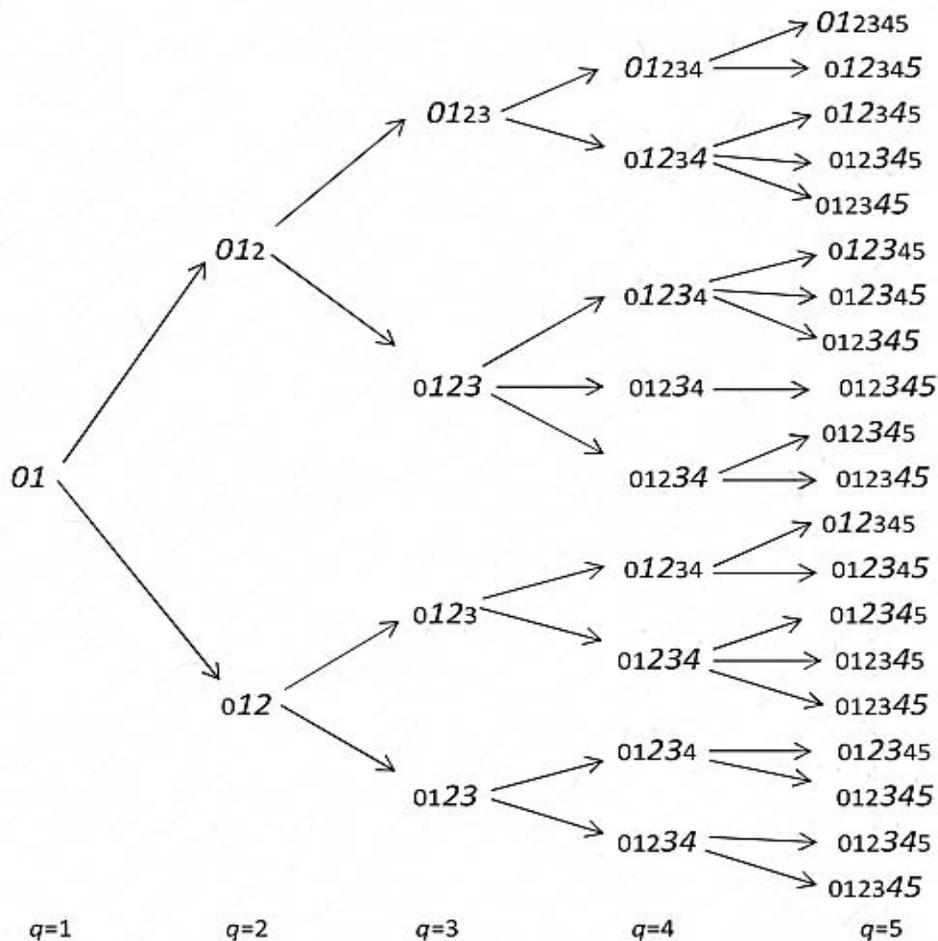


Рис. 5

Пример 12. Этим же способом представим 115 неизоморфных деревьев с 8 вершинами, выразив их через деревья с 7 вершинами из примера 11.

01234567 01234567 01234567 01234567 01234567 01234567 01234567
01234567 01234567 01234567 01234567 01234567 01234567
01234567 01234567 01234567 01234567 01234567 01234567
01234567 01234567 01234567 01234567 01234567 01234567
01234567 01234567 01234567 01234567 01234567 01234567
01234567 01234567 01234567 01234567 01234567 01234567
01234567 01234567 01234567 01234567 01234567 01234567
01234567 01234567 01234567 01234567 01234567 01234567

В этом списке курсивом и увеличенным шрифтом выделены 115 вершин. Если в каждом дереве с 7 вершинами поочередно присоединить восьмое ребро к выделенным вершинам, получим 115 неизоморфных корневых деревьев с 8 вершинами, что соответствует данным [8]. Построить эти деревья по их описанию, приведенному выше, не сложно.

На рис. 6 приведена часть дерева рис. 5, начиная с одной из вершин с $q = 2$. На нем эта часть дерева рис.5 показана в виде корневых деревьев с выделенными вершинами. Из рис. 6 видно, что задача порождения неизоморфных вариантов корневых деревьев разбивается разными способами на самостоятельные подзадачи, которые можно решать отдельно, в том числе параллельно. Такое разбиение интерпретируется разделением дерева вариантов на независимые поддеревья, начиная как с корневой вершины, так и с вершин с любым значением q .

Об учете симметрий трех типов. Предложенный выше метод построения неизоморфных корневых деревьев показывает, что использование информации о симметриях корневых деревьев и их поддеревьев позволяет полностью исключить построение изоморфных деревьев с заданным числом вершин. Однако автоматизации метода препятствует отсутствие эффективных средств выявления симметрий второго и третьего типов с соответствующими s-классами.

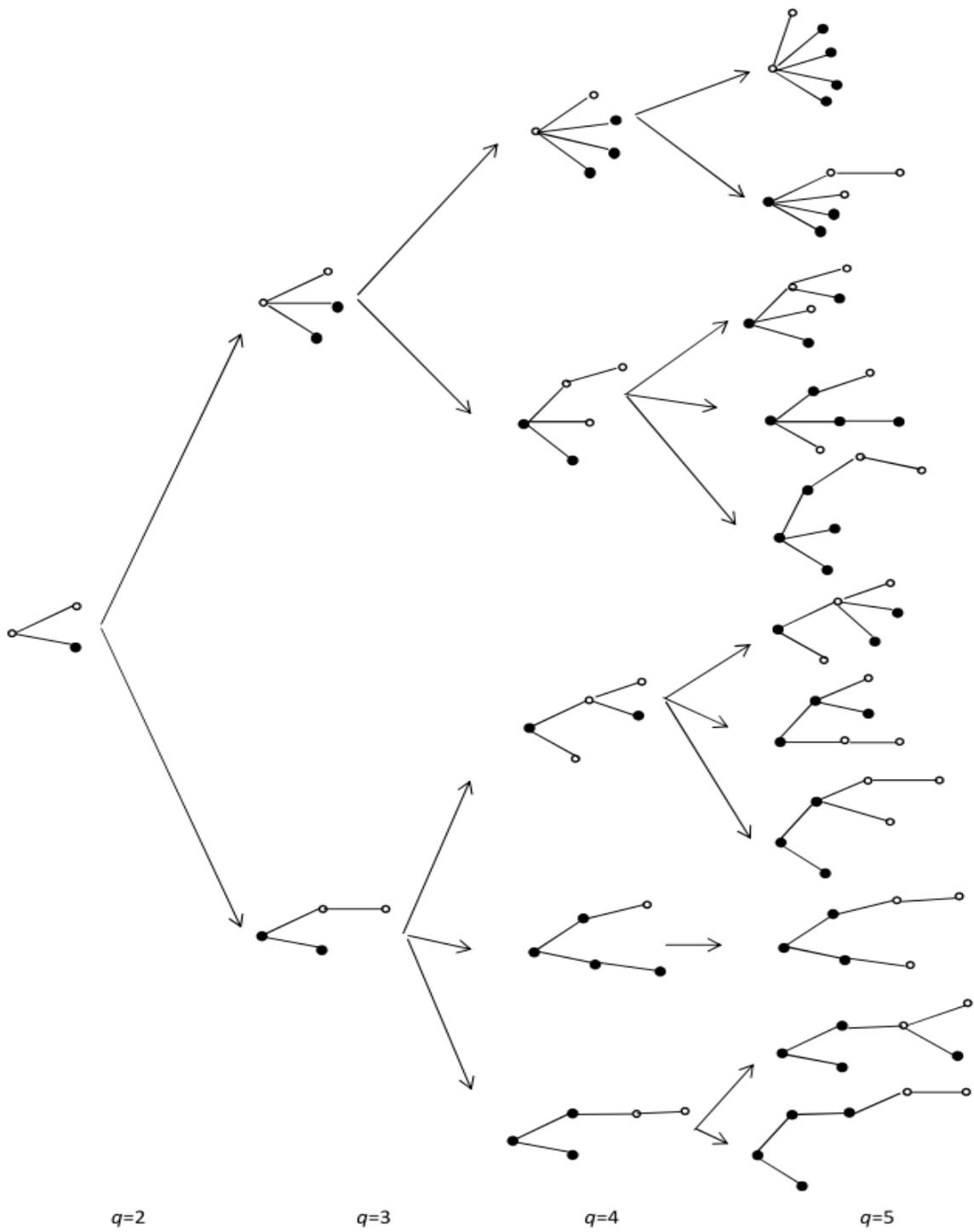


Рис. 6

Пока не вызывает затруднений выявление симметрий только первого типа, которыми обусловлено образование подавляющей части изоморфных деревьев. Например, из 115 неизоморфных деревьев с 8 вершинами только 12 деревьев содержат симметрии второго или третьего типов. Среди остальных деревьев встречаются только симметрии первого типа.

Таким образом, учет всех симметрий первого типа обеспечит исключение основной части изоморфных вариантов старших деревьев, если информацию об этих симметриях использовать в алгоритмах генерирования избыточных комбинаций (включающих изоморфные деревья) с последующей их отбраковкой. Это позволит существенно сократить объем проверок.

Выводы

1. Для представления корневого дерева выбран более простой математический аппарат, чем матрицы, которые для этой цели были использованы в [4]. Введено лексикографическое упорядочение корневых деревьев с заданным числом вершин. Рассмотрено выявление симметрий и применение информации о симметриях в процессе конструктивного перечисления неизоморфных корневых деревьев.

2. Разработана каноническая процедура рекурсивного синтеза всех семейств неизоморфных корневых деревьев с числом вершин, не превышающим заданного числа. Эта процедура относится к каноническим процедурам структурного синтеза со всеми его достоинствами, отмеченными в [5].

Список литературы

1. Kozina A. V. Coding and generation of nonisomorphic trees // *Kibernetika*.–1979.– No.5.– P.38–43; *Cybernetics*.–1975.– No.15.– P. 645–651.
2. Nakano S.I., Uno T. Efficient generation of rooted trees // *National Institute of Informatics: Technical Report: NII-2003-005E*.–2003 (July).–P.1–9.

3. Read R.C. How to grow trees // Combinatorial Structures and their Applications.– New York: Gordon and Breach, 1970.
4. Свирщёва Э.А. Структурный синтез неизоморфных систем с однородными компонентами. – Харьков,1998. – 256 с. (Переработанный в 2005г. вариант находится на сайте электронной технической библиотеки).
5. Brendan D. McKay, Isomorph-Free Exhaustive Generation / Computer Science Department.– Australian National University, Canberra, ACT 0200, Australia, 1997. – 19 p.
6. Берж К. Теория графов и ее применение. – М.: ИЛ, 1962.
7. Пойа. Д. Комбинаторные вычисления для групп, графов и химических соединений // Перечислительные задачи комбинаторного анализа. – М.: Мир, 1970.– С. 36–136.
8. Харари Ф. Теория графов. М.: Мир, 1973. – 301 с.
9. Свами М. Тхуласираман К. Графы, сети и алгоритмы.-Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 455 с.
10. Токарев Ю.В. Определение изоморфизма электрических схем. Синтез, анализ, диагностика электронных цепей: международ. сб. науч. тр. – Ульяновск: УлГТУ, 2012. – Вып.10.– С.23–27.
11. Фараджев И.А. Конструктивное перечисление комбинаторных объектов // Алгоритмические исследования в комбинаторике.– М.: Наука, 1978.– С.3–11.
12. Математическая энциклопедия: Т. 4 / Гл. ред. И.М. Виноградов.– М.: Сов. Энциклопедия.– 1982.– 1216 с.
13. Баннаи Э., Ито Т. Алгебраическая комбинаторика. Схемы отношений. М.: Мир, 1987. – 375 с.

Свирщёва Эльвира Александровна – кандидат технических наук,
г. Харьков, Украина. E-mail: svirshchieva@mail.ru; olel@kharkov.ukrtel.net

АЛГОРИТМ И ПРОГРАММА ГЕНЕРАЦИИ НЕИЗОМОРФНЫХ КОРНЕВЫХ ДЕРЕВЬЕВ НА ОСНОВЕ ВЕКТОРОВ НАЧАЛЬНЫХ ВЕРШИН

М. В. Недорезов, П. В. Недорезов, В. В. Филаретов

Разработан генератор неубывающих лексикографических последовательностей чисел натурального ряда. Предложен простой алгоритм проверки комбинаций на соответствие старшим представителям изоморфных деревьев. Сокращение пространства комбинаций путем отбраковки неполных выборок в ходе генерации приводит к многократному снижению затрат времени на перечисление неизоморфных корневых деревьев.

The generator of not decreasing lexicographic sequences of natural numbers is developed. The simple algorithm for combination checking on conformity to the senior representatives of isomorphic rooted trees is offered. Reduction of space of combinations by rejection incomplete выборок during generation leads to repeated decrease in expenses of time for generation of non- isomorphic rooted trees.

Векторы начальных вершин. В [1] имеется таблица, содержащая количества неизоморфных корневых деревьев для заданного числа вершин. При разработке эффективных алгоритмов генерации таких деревьев [2,3,4] обычно используется их уровневое (ярусное) представление (level sequence) [5]. Однако по ярусным кодам трудно визуально воспроизвести корневое дерево и проверить, является ли оно старшим представителем класса изоморфных корневых деревьев.

Для корневых деревьев имеется другой способ кодирования, состоящий в модификации задания с помощью пар вершин [6,7,8]. При этом также используется два вектора: вектор начальных вершин и вектор конечных вершин. Однако вектор конечных вершин не требуется

указывать для каждого дерева, поскольку он одинаков для всех деревьев с заданным числом вершин. Это натуральный ряд: $12 \dots N$, где $N=q-1$. Векторы начальных вершин образованы номерами вершин, начинающимися с 0 и оканчивающимися $n-1$ [9].

Среди известных алгоритмов отсутствуют алгоритмы, в которых использовались бы вектора начальных вершин, как для генерации комбинаций, так и для их проверки на соответствие старшему представителю множества изоморфных деревьев (проверки на старшинство). Такой алгоритм и реализующая его программа предлагаются в данной статье.

Генератор ЛГ-упорядоченных векторов. Неизоморфные корневые деревья находятся в числе комбинаций лексикографического счетчика (ЛГ-счетчика) [5,6]. В простейшем случае четырех вершин ЛГ-последовательность совпадает со списком векторов неизоморфных деревьев: 000 001 011 012. Для 5 вершин существует 9 векторов неизоморфных деревьев: 0000 0001 0011 0012 0013 0111 0112 0122 0123, которые предстоит выбрать из 12 ЛГ-комбинаций: 0000 0001 0011 0012 0013 0022 0023 0111 0112 0113 0122 0123.

В первую очередь необходимо разработать алгоритм и реализовать программу генерации последовательности ЛГ-счетчика для произвольного n . Нетрудно перечислять ЛГ-комбинации вручную для небольших n – закон перечисления очень простой.

Вначале по образцовой последовательности следует сформулировать свойства ЛГ-последовательностей, а затем использовать их для получения комбинаций. Для реализации программы оказалось достаточно исследование ЛГ-последовательности для 6 вершин:

00000, 00001, 00011, 00012, 00013, 00014, 00022, 00023, 00024, 00033, 00034, 00111, 00112, 00113, 00114, 00122, 00123, 00124, 00133, 00134, 00222, 00223, 00224, 00233, 00234, 01111, 01112, 01113, 01114, 01122, 01123, 01124, 01133, 01134, 01222, 01223, 01224, 01233, 01234.

Разработанная М.В.Недорезовым программа (язык Си) имеет вид:

```
for (i = 0; i < N-2; i++) num[i] = 0; // исходная комбинация 0...011
num[N-2] = 1;      num[N-1] = 1;
for (i=N-1; i>0; i--)
  {if (i==N-1)
    {for (j = num[i - 1]; j < N; j++)
      { num[i] = j; // модификация комбинации
        comb++; // счетчик комбинаций
        testing(N,num,&pr); // проверка полной комбинации
          count1++; // счетчик неизоморфных корневых деревьев
        } } }
  else
  rep1: if (num[i]++<i)
  for (++i; i<N; i++)
    {num[i]=num[i-1];
      if (num[i] != 1)
        { testing(i,num,&pr); // проверка начала комбинации
          if (pr>1) {num[i]++; goto rep1;}
        } } }
```

Все перечисленные комбинации ЛГ-счетчика соответствуют корневым деревьям. ЛГ-комбинации в отличие от ярусных кодов нетрудно перечисляются без помощи компьютера, поскольку последовательность комбинаций неубывающая и правило перехода к следующей комбинации очевидно.

Теперь нужно выбрать среди ЛГ-комбинаций только те, которые соответствуют неизоморфным корневым деревьям. Это составляет едва ли больше труда, чем перечисление всех комбинаций. Предлагаемая методика иллюстрируется в примере.

Нахождение первых 28 деревьев с 7 вершинами. Требуется найти 28 первых по порядку неизоморфных деревьев с семью вершинами (всего их 48, см. табл.1). Ниже перечислены $28+21=49$ комбинаций с 000000 по 001345, сгенерированных ЛГ-счетчиком. Среди них только 28 искомым

неизоморфных деревьев, 21 оставшихся комбинаций необходимо забраковать.

Решение помещено в табл.1. После списка начальных вершин каждого дерева (кроме исходного дерева) перечисляются s -классы (классы симметричных вершин) [7], начиная с s -класса поддерева, общего с предыдущим деревом, до присоединения последнего ребра. Список конечных вершин у всех деревьев одинаков: 123456.

В строках с рисунками последним следует соответствующее неизоморфное дерево или промежуточное дерево, обуславливающее браковку комбинации. Строки 17, 32, 33, 37 содержат более одной комбинации, поэтому число строк табл.1 меньше числа рассматриваемых комбинаций (42 меньше 49).

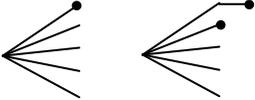
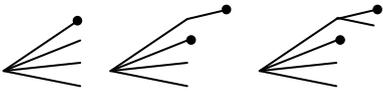
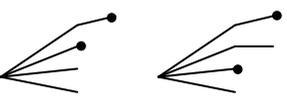
Первые вершины в компонентах s -классов, отделенных запятыми, являются старшими по ЛГ-порядку вершинами. Курсивом выделены забракованные комбинации. В третьем столбце табл. 1 показано образования дерева (текущей комбинации) путем добавления ребер.

В четвертом столбце табл. 1 для искомым неизоморфных деревьев указаны ярусные коды. Как видно, эти коды не подчиняются лексикографическому порядку следования, их перечисление нетривиально, а переход от некоторого кода к коду-преемнику довольно сложен [2]. Кроме того, как показано в [8], количество выборок ярусного код увеличивается комбинаторно с увеличением числа вершин.

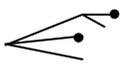
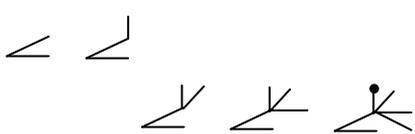
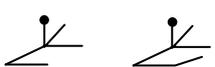
Браковка комбинации в строке 16 табл.1 требует усложнения алгоритма. Присоединение ребра (5,6) отклоняется, так как выделенные вершины симметричны, а попытка подсоединения этого ребра делается к младшей из этих вершин.

Сложность заключается в том, что эту комбинацию нельзя забраковать как другие неподходящие комбинации, поскольку симметричные вершины не являются лепестками ромашки, а принадлежат старшему или младшему изоморфным поддеревам. В то же время эта симметрия видна визуально и для ручного использования алгоритм на основе лг-генератора достаточно удобен.

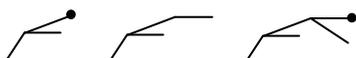
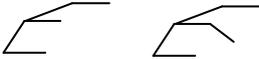
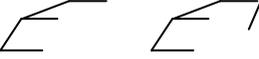
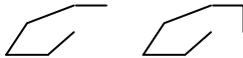
Таблица 1. Построение 28 первых по порядку
неизоморфных деревьев с семью вершинами

Номер	Векторы начальных вершин и коды s -классов	Этапы построения деревьев	Код уровней [2] или причины браковки комбинации
1	2	3	4
1	000000 (123456)		1222222
2	000001 (12345) (1,2345,6)		1232222
3	000011 (1234) (1,234,5) (1,234,56)		1233222
4	000012 (1,234,5) (12,34,56)		1232322
5	<i>000013</i> (1,234,5)		3 нарушает лг-порядок
6	<i>000014</i> (1,234,5)		4 нарушает лг-порядок
7	000015 (1,234,5) (1,234,5,6)		1234222
8	000111 (123) (123,456)		1233322
9	000112 (1,23,45) (1,2,3,45,6)		1233232

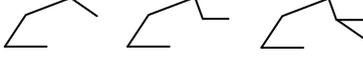
Продолжение табл. 1

1	2	3	4
10	<i>000113</i> (1,23,45)		3 нарушает лг-порядок
11	000114 (1,23,45) (1,23,4,5,6)		1234322
12	<i>000115</i> (1,23,45)		5 нарушает лг-порядок
13	<i>000122</i> (1,23,4)		Ветвление не из старшей вершины яруса
14	000123 (1,23,4) (12,3,45) (123,456)		1232323
15	000124 (12,3,45) (1,2,3,4,5,6)		1234232
16	<i>000125</i> (12,3,45)		5 нарушает лг-порядок
17	<i>000133</i> <i>000134</i> <i>000135</i> (1,23,4)		3 нарушает лг-порядок
18	000144 (1,23,4) (1,23,4,5) (1,23,4,56)		1234232
19	000145 (1,23,4,5) (1,23,4,5,6)		1234522
20	001111 (12) (1,2,3) (1,2,34) (1,2,345) (1,2,3456)		1233332
21	001112 (1,2,345) (1,2,345)		1233323
22	001113 (1,2,345) (1,2,3,45,6)		1234332

Продолжение табл. 1

1	2	3	4
23	<i>001114</i> (1,2,345)		4 нарушает лг-порядок
24	<i>001115</i> (1,2,345)		5 нарушает лг-порядок
25	001122 (1,2,34) (1,2,34,5) (1,2,34,5)		1233233
26	001123 (1,2,34,5) (1,2,3,4,5,6)		1234323
27	<i>001124</i> (1,2,34,5)		4 нарушает лг-порядок
28	001125 (1,2,34,5) (1,2,34,5,6)		1233234
29	001133 (1,2,34) (1,2,3,4,5) (1,2,3,4,56)		1234432
30	001134 (1,2,3,4,5) (1,2,34,56)		1234342
31	001135 (1,2,3,4,5) (1,2,3,4,5,6)		1234532
32	<i>001144, 001145</i>		4 нарушает лг-порядок
33	<i>001222, 001223, 001224, 001225</i>		Ветвление не из старшей вершины яруса
34	001233 (1,2,3) (12,34) (1,2,3,4,5)		1234423
35	001234 (1,2,3,4,5) (12,34,56)		1234234
36	001235 (1,2,3,4,5) (1,2,3,4,5,6)		1234523

Продолжение табл. 1

1	2	3	4
37	<i>001244, 001245</i> (12,34)		4 нарушает лг-порядок
38	001333 (1,2,3) (1,2,3,4) (1,2,3,45) (1,2,3,456)		1234442
39	001334 (1,2,3,45) (1,2,3,4,5,6)		1234542
40	<i>001335</i> (1,2,3,45)		5 нарушает лг-порядок
41	001344 (1,2,3,4) (1,2,3,4,5) (1,2,3,4,56)		1234552
42	001345 (1,2,3,4,5) (1,2,3,4,5,6)		1234562

Алгоритм браковки изоморфных деревьев. Методика браковки комбинаций, не являющихся старшими (неизоморфными) деревьями, которая отражена в табл.1, реализована в функции `testing`, которая проверяет на старшинство текущий вектор начальных вершин `num`. Как принято в языке Си, нумерация элементов вектора начинается с нуля. Результатом работы функции является значение переменной `pr=1` (неизоморфное дерево) или `pr=2` (изоморфное дерево).

Для повышения эффективности программы перечисления неизоморфных корневых деревьев выборка, поступающая с генератора ЛГ-комбинаций, анализируется не целиком, а с начала – до появления первой вершины (ребра) которая нарушает старшинство добавления ребер. Проверка комбинаций выполняется в цикле от 1 до N (числа элементов в векторе начальных вершин).

```
for (k=1; k<=N; k++)
    { // Проверка комбинаций добавлением вершин
```

```

if (num[k-2]==0 && num[k-1] > 1) {*pr=2; break;} // после 0 идет номер > 1
if (num[k-1]==0 || num[k-1]==1) continue; // при 0 и 1 не может быть брака
ipr=0; // счётчик лепестков в ромашке
l1=num[k-1]; // текущая вершина
n0=num[l1-1]; // перескок ближе к корню
sims=0; // счетчик старших вершин младшего поддерева
rep: // Обратный просмотр num для поиска ромашки
for (l=l1-1; l>=1; l--)
{ n1=num[l-1]; // соседний слева элемент для n0
  if (n0 == n1) // следующий лепесток этой ромашки
  { ipr++;
    if (n0>1 &&
      num[n0-2]==num[n0-1] // проверка конца ромашки
      n0>2 && // лепесток другой ромашки
      num[n0-2]!=num[n0-1] // вершины n0-2 и n0-1 с общим предком
      && (num[n0-3]!=num[n0-2] && num[n0-1]!=num[n0])
      && num[num[n0-2]-1]==num[num[n0-1]-1])
    {isomorph(n0-1,n0,k,num,&mir,&ipr);
      if (ipr>mir) {*pr=2; return;}}
    l0=l; // позиция начала роста старшего поддерева
    break; }
  else if (!ipr && l1>1)
  { // sec0 – обратный вектор старших вершин младшего поддерева
    l1=n0; // обновление начала счетчика позиций
    n0=num[n0-1]; // спуск к корню
    sec0[2+sims++]=n0;
    goto rep;
  } }
if (!ipr) continue;
sims++;
sec0[0]=num[k-1];
sec0[1]=num[sec0[0]-1]; // упорядочение sec0[sims] в sec[sims]
for (i=0; i<=sims; i++) sec[i]=sec0[sims-i];
simf=0; // вектор старших вершин старшего поддерева fir[simf]
fir[0]=sec[0]; // общее начало поддеревьев
r=l0;

```

```

for (m=r; m<=k; m++) if (r==num[m-1]) {fir[++simf]=r; r=m;}
// Поярусное выявление симметрии (изоморфизма)
// старшего и младшего поддеревьев
if (sims>simf) sim=sims; else sim=simf;
// sim - максимальная размерность векторов sec и fir
for (i=1;i<=sim;i++)
    {isomorph(fir[i],sec[i],k,num,&mipr,&ipr);
    if (mipr==2 && ipr==1) iso=0;
    else if (ipr==1 && mipr==1) iso=1;
    if (ipr>mipr) {*pr=2; return;}
    else if (ipr<mipr && iso || !iso) {*pr=1; goto con;}
    } // End for (i=1;i<=sim;i++)
con: ; } }

```

В процессе рассмотрения частичной комбинации ($k < N$) выполняется возврат к корню дерева от k -й вершины для выделения «ромашки» (последовательности одинаковых вершин). Нарушения старшинства при добавлении лепестков ромашки (текущей и соседней слева) обрабатываются функцией isomorph:

```

void isomorph(int n1,int n2,int k,int *num,int *mipr,int *ipr)
{int s0=0,s1=0,m,j,mip,pow0[30],pow1[30];
*mipr=0; // Счётчик числа вершин i-го яруса старшего поддерева
*ipr=0; // Счётчик числа вершин i-го яруса младшего поддерева
for (m=1;m<=k;m++)
    {mip=0; // формирование векторов из полустепеней исхода
    if (num[m-1]==n1) // для старшего поддерева
    {for (j=1;j<=k;j++) if (m==num[j-1]) mip++;
    pow0[s0++]=mip; (*mipr)++; }
    mip=0;
    if (num[m-1]==n2) // для младшего поддерева
    {for (j=1;j<=k;j++) if (m==num[j-1]) mip++;
    pow1[s1++]=mip; (*ipr)++; } }
if (s0 && s0==s1) // число вершин у поддеревьев на ярусе одинаково
{for (m=0; m<s0; m++)
    {if (pow0[m]<pow1[m]) {*mipr=1; *ipr=2; return;} // бракуется
    else if (pow0[m]>pow1[m]) {*mipr=2; *ipr=1; return;} // принимается

```

```
else if (pow0[m]==pow1[m]) continue; }  
*mir=1; *ipr=1; // поддеревья изоморфные } }
```

Вызов функции `isomorph` для каждого яруса позволяет учесть симметрии соседних поддеревьев – старшего и младшего. Эти поддеревья задаются векторами старших вершин на ярусах – `fir` и `sec`. Предварительным условием симметрии вершин поддеревьев на ярусе является равенство числа вершин яруса для старшего и младшего поддерева (соответственно $s_0=s_1$).

Номер яруса определяется путем следования из корня дерева с подсчетом проходимых ребер. Важно, что вся информация для построения поддеревьев в компактной форме содержится в векторе начальных вершин. Далее сравнивается число исходящих ребер на каждом ярусе старшего и младшего поддерева (`mir` и `ipr`, соответственно).

Полустепени исхода старших вершин на ярусах этих поддеревьев не должны быть меньше полустепеней исхода младших вершин ярусов. Если на некотором ярусе имеет место изоморфизм старшего и младшего поддеревьев, то полустепень исхода старшей вершины старшего поддерева не должна быть меньше полустепени исхода старшей вершины младшего поддерева.

Для точного установления изоморфизма поддеревьев используются векторы полустепеней исхода вершин старшего и младшего поддерева (`row0` и `row1`, соответственно), которые, наряду с переменными `mir` и `ipr` формируются и используются в функции `isomorph`. Переменная признака изоморфизма `iso=1` (поддеревья изоморфны) и `iso=0` (поддеревья неизоморфны).

Генерация неизоморфных корневых деревьев на компьютере. При отладке программы использовались оценки для числа этого вида деревьев, приведенные в [1]. Отладку затрудняло отсутствие эталонных списков неизоморфных корневых деревьев. При выявлении изоморфных (неправильных) и, наоборот, неизоморфных деревьев хорошо зарекомендовала себя базовая методика, использованная при построении табл.1.

Множественное сокращение затрат времени, как следует из приведенного выше текста генератора ЛГ-упорядоченных векторов, обеспечивает «вырезание» из пространства поиска фрагмента комбинаций с вершиной, нарушающей старшинство. Сравнительные затраты времени для 64-разрядного компьютера с тактовой частотой 2,4 ГГц отражены в табл. 2.

Таблица 2. Эффект сокращения объема ЛГ-комбинаций в ходе генерации неизоморфных корневых деревьев

Число вершин q	Генерация неизоморфных корневых деревьев в режимах				
	проверки каждой ЛГ-комбинации		браковки комбинаций в ходе генерации		
	Время t , в сек.	t_q/t_{q-1}	Время, в сек.	Отношения	
t_q/t_{q-1}				L_q/L_{q-1}	
15	1	–	0,5	–	–
16	4	4.00	2	4.00	2.93...
17	16	4.00	5	2.50	2.93...
18	60	3.75	14	2.80	2.93...
19	221	3.68...	44	3.14...	2.93...
20	798	3.61...	135	3.06...	2.93...
21	2980	3.73...	404	2.99...	2.93...
22	12452	4.17...	1242	3.07...	2.93...
23	–	–	3872	3.11...	2.60...
24	–	–	11689	3.01...	3.29...

Как видно, предложенное совмещение генерации комбинаций с их проверкой позволяет компенсировать повышение показателя избыточности ЛГ-комбинаций с увеличением числа вершин (пятый столбец табл. 1). Обеспечивается стабильное (в 3 раза) возрастание времени генерации при добавлении одной вершины. Использование режима проверки каждой комбинации оказывается невозможным для большого числа вершин.

Важно, что трехкратное увеличение времени генерации обусловлено почти таким же увеличением списка неизоморфных корневых деревьев с

добавлением одной вершины. Это показывают отношения размеров файлов результатов для текущей и предыдущей вершины (L_q/L_{q-1}), которые приводятся в шестом столбце табл. 2. Таким образом, большая часть времени расходуется на сохранение в дисковой памяти результата (списка деревьев)

Следует отметить, что известные алгоритмы восстановления (синтеза) неизоморфных деревьев, не использующие избыточной генерации [7], являются весьма сложными для программирования. Многопроцессорная реализация в этом случае оказывается еще более затруднительной.

Выводы

1. Разработан алгоритм и реализована программа генерации неизоморфных корневых деревьев в лексикографическом порядке на основе векторов начальных вершин. Алгоритм нагляден, проверка на старшинство деревьев выполняется визуально – по вектору начальных вершин, что позволяет выполнять перечисление вручную. Количества сгенерированных деревьев соответствуют полиномиальным оценкам Ф.Харари [8].

2. Предложено сокращение пространства комбинаций путем отбраковки неполных выборок в ходе генерации, что приводит к многократному снижению затрат времени на перечисление неизоморфных корневых деревьев. При добавлении одной вершины время генерации увеличивается пропорционально увеличению списка неизоморфных деревьев (табл. 2), то есть не уступает реализованным алгоритмам [2,3].

3. Генерация комбинаций может начинаться и оканчиваться произвольной парой выборок, поэтому в рамках предложенного алгоритма просто реализовать параллельные вычисления с любым количеством процессоров. Вектор начальных вершин в отличие от ярусного кода содержит номера вершин, что позволяет легко построить дерево или перейти к другому способу его задания [9].

Список литературы

1. Харари Ф. Теория графов.– М.: Мир, 1973.– 301 с.
2. Beyer T., Hedetniemi S. M. Constant time generation of rooted trees // Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics: Computation.– 1980.– Vol. 9, no. 4.– P. 706–712.
3. Nakano S.I., Uno T. Efficient generation of rooted trees // National Institute of Informatics: Technical Report: NII-2003-005E.–2003 (July).–P. 1–9.
4. Sawada J. Generating rooted and free plane trees // ACM Transactions on Algorithms.– 2006.– Vol. 2, no. 1 (January).– P. 1–13.
5. Read R.C. How to grow trees // Combinatorial Structures and their Applications.– New York: Gordon and Breach, 1970.
6. Kozina A.V. Coding and generation of nonisomorphic trees // Plenum Publishing Corporation.– 1980.– Translated from Kibernetika.– 1979.– N5.– PP. 38 – 43.
7. Свирщёва Э.А. Структурный синтез неизоморфных систем с однородными компонентами. – Харьков, 1998. – 256 с. (Переработанный в 2005г. вариант находится на сайте электронной технической библиотеки).
8. Филаретов В.В. Алгоритмы перечисления неизоморфных корневых деревьев на основе лексикографического упорядочения // Настоящий выпуск. – С. 109–124.
9. Недорезов П.В., Филаретов В.В. Применение двоичных кодов для генерации неизоморфных корневых деревьев // Настоящий выпуск. – С. 164–175.

Недорезов Максим Владимирович – магистрант факультета аэромеханики и летательных аппаратов Московского Физико-Технического Института.
E-mail: nedmv@rambler.ru

Недорезов Петр Владимирович – ученик 11-го класса гимназии №1 им. В.И.Ленина, г. Ульяновск. E-mail: pyatakry@rambler.ru

ПРИМЕНЕНИЕ ДВОИЧНЫХ КОДОВ ДЛЯ ГЕНЕРАЦИИ НЕИЗОМОРФНЫХ КОРНЕВЫХ ДЕРЕВЬЕВ

П. В. Недорезов, В. В. Филаретов

Двоичное кодирование корневых деревьев. Двоичное кодирование является одним из компактных способов задания корневых деревьев [1]. В отличие от задания вектором начальных вершин, имеющего размерность $n=N-1$ (N —число вершин дерева), двоичный код имеет размерность $2n$, его можно представить одним десятичным числом.

Двоичные коды уже использовались в алгоритме перечисления неизоморфных корневых деревьев [2]. В данной статье предлагаются алгоритмы и программы генерации двоичных кодов корневых деревьев, а также преобразования их двоичных кодов в векторы начальных вершин [3] для последующей проверки на старшинство с помощью подпрограммы testing [4].

Двоичное кодирование корневых деревьев предусматривает использование двоичных чисел: 1 и 0 [1,2]. Например, пространство двоичных кодов для 4 вершин имеет вид: 111000 110100 110010 101100 101010 . Первая комбинация соответствует путевому дереву 0123...n, а последняя – звездному дереву – 000...0. Каждая комбинация содержит n единиц и n нулей, причем на любом начальном отрезке комбинации единиц содержится не меньше, чем нулей.

Единицы и нули в двоичном коде следуют блоками, содержащими одну и более одинаковых цифр. Каждая единица соответствует одной из вершин вектора начальных вершин, к которому можно перейти от двоичного кода по предлагаемому здесь алгоритму. Для этого вводится промежуточный код, который представляет собой последовательность строк, образующих иерархическую структуру корневого дерева.

Первая строка промежуточного кода образована номерами начальных вершин исходной ветви дерева, которую можно назвать «стволом». К стволу и последующим ветвям ствола подсоединяются другие ветви,

соответствующие оставшимся строкам промежуточного кода. Для правильного подсоединения ветвей важен номер первой по порядку вершине в строке-ветви.

Номера других вершин строк-ветвей устанавливаются порядковыми, поскольку эти номера будут корректироваться в ходе формирования вектора начальных вершин, поскольку включение в вектор очередной вершины может изменять позиции последующих вершин, что требует изменения их номеров.

Генератор двоичных кодов корневых деревьев. Работа генератора основана на последовательном преобразовании исходной комбинации 111...1000...0 в последующие комбинации, имеющие меньшее десятичное значение, вплоть до комбинации 101010...10. Каждая комбинация получается из предыдущей путем сдвига вправо последней единицы или не только ее, но и предшествующих ей единиц. При этом образуются все возможные двоичные числа с одинаковым числом единиц и нулей – n .

```
n_b=2*n;
for (i = 0; i < n; i++) bin[i] = 1; // исходная комбинация 111...1000...0
for (i = n; i < n_b; i++) bin[i] = 0; // дерево-путь 012...n
count1=1; // счетчик неизоморфных корневых деревьев
one=1; // счетчик пар 1 и 0 в конце комбинации
beg:
for (i = n_b-1; i > 0; i--)
{
  if (bin[i] && i<n_b-2)
  {
    bin[i]=0; bin[i+1]=1;
    if (one>1)
    {
      for (j = 1; j < one; j++) bin[i+j+1]=1;
      for (k = i+one+1; k < n_b; k++) bin[k]=0;
      one=1;
    }
  }
  // вывод очередной комбинации
```

```

on=0; // счетчик единиц в блоке
nu=0; // счетчик нулей в блоке
inon=0; // inon=1 признак окончания подсчета блока единиц в коде
cur=0; // текущий номер первой вершины новой ветви в sub
n_on=0; // счетчик единиц в комбинации
n_sub=0; // счетчик строк промежуточного кода
for (i = 0; i < n_b; i++)
{
    if (bin[i] && !inon)
    {
        sub[n_sub][on]=cur; // заполнение строки промежуточного кода
        cur++; on++; n_on++;
    }
    else
    if (!bin[i] && n_on!=n)
    {
        nu++; inon=1; // единицы в блоке сосчитаны
    }
    else
    if (bin[i] && inon || n_on==n)
    {
        sub[n_sub][on]=-1; // конец строки промежуточного кода
        if (on-nu >= 0) cur=sub[n_sub][on-nu];
        else cur=sub[n_sub][0]-nu+on;
        n_sub++; // возврат на новую ветвь и переход к новой строке
        on=0; nu=0; inon=0; // обнуление для нового блока единиц
        if (n_on < n) {i--; continue;} // не все единицы просмотрены
        else break; // промежуточный код получен
    }
}
// преобразование промежуточного кода в вектор начальных вершин
transform(n_b,n_sub,num);
// проверка вектора начальных вершин
testing(n,num,&pr);
count1++; // добавление неизоморфного дерева
goto beg; // переход на следующую двоичную комбинацию

```

```

    }
else
{
    if (one == 1)
        for (k = n_b-1; k > 0; k-=2)
            {// подсчет пар 1 и 0 в конце комбинации
                if (bin[k-1] && !bin[k]) { i-=2; one++;}
                else break;
                if (one == n) return; // генерация комбинаций окончена
                // комбинацией 101010...10 (звездным деревом)
            }
    }
}

```

Количества двоичных кодов для корневых деревьев с 4–14 вершинами, рассчитанные по приведенной выше программе, помещены в табл. 1 [5]. Как следует из комментариев, имеющих в тексте программы, попутно с генерацией двоичных комбинаций выполняется построение промежуточного кода *sub*. Размерность строк промежуточного кода *sub* равна числу единиц в соответствующих блоках двоичного кода. Для удобства программирования строки в массиве *sub* заканчиваются элементом с отрицательным значением (–1).

Промежуточный код используется далее в подпрограмме *transform*, выполняющей преобразование промежуточного кода в вектор начальных вершин. Последующая проверка этого вектора на предмет соответствия свойствам неизоморфного дерева осуществляется подпрограммой *testing* [5].

Пример преобразования двоичного кода корневого дерева в вектор начальных вершин. Двоичному коду **111110001110000111010000** соответствует промежуточный код со строками **(01234, 234, 123, 3)**. Этот код оказывается более удобным для восприятия и преобразования, как в программе, так и без использования компьютера. Чтобы подчеркнуть

особое положение первой по порядку строки (ствола), начнем нумерацию строк в промежуточном коде с 0.

Как видно, нулевая строка образована перечислением натуральных чисел по числу единиц, следующих первыми в двоичном коде, начиная с нуля (корня). Напомним, что позиции вектора начальных вершин num соответствуют номерам конечных вершин: $123\dots n$. В данном случае двоичный код содержит 24 цифры, поэтому $n=24/2=12$.

В первую очередь в вектор num заносится нулевая строка $num=01234$. Далее к текущему вектору num подсоединяются по порядку оставшиеся строки промежуточного кода – «ствол обрастает ветвями».

Присоединение первой строки (ветви). Первая строка 234 своим первым элементом (вершиной 2) подсоединяется к вершине 2 нулевой строки, то есть исходного вектора num . Для этого в num после элемента 2 вставляется элемент 2. Получается $num=012234$. После вставки элемента произошло смещение позиций, начиная с позиции 4, поэтому нужно увеличить на 1 номера вершин ≥ 4 . В данном случае это вершина 4, которая является потомком номера 3, оказавшегося в позиции 5.

В первой строке-ветви за вершиной 2 следуют вершины с формальными номерами 3 и 4. Номер 3 нужно заменить номером 4, поскольку вершина 2 стоит в 4-й позиции. После вставки вершины 4 она окажется в позиции 6: $num=0122345$, поэтому вершина 4 должна получить номер 6. Отсюда получаем результат подсоединения первой строки-ветви из промежуточного кода: $num=01223456$.

Присоединение второй строки. Вторая строка первым элементом (вершиной 1) подсоединяется к вершине 1 текущего вектора num . Для этого в num после элемента 1 вставляется элемент 1: $num=011223456$. Номера, равные и большие позиции вставки (≥ 3), увеличиваются на 1: $num=011224567$.

Во второй строке-ветви за вершиной 1 следуют вершины с формальными номерами 2 и 3. Номер 2 нужно заменить номером 3, поскольку вершина 1 стоит в 3-й позиции. После вставки вершины 3 она окажется в позиции 6 ($num=0112234567$), поэтому номера, равные и

большие позиции вставки (≥ 6), увеличиваются на 1 – $num=0112234578$, а вершина 3 должна получить номер 6. Отсюда получаем результат подсоединения второй строки-ветви из промежуточного кода: $num=01122345678$.

Присоединение третьей строки. Присоединение второй ветви потребовало замены формального номера 3 на номер 6. Однако номер 3 является первым элементом следующей – третьей – строки, то есть третья ветвь порождается не стволом (нулевой строкой), а второй ветвью. Поэтому в третьей строке номер 3 следует заменить на номер 6.

Третья строка единственным первым элементом (вершиной 6) подсоединяется к вершине 6 текущего вектора num . Для этого в num после элемента 6 вставляется элемент 6. Отсутствуют номера, равные или большие позиции вставки (≥ 9), поэтому num не претерпевает изменений. Таким образом, искомый вектор начальных вершин $num=011223456678$.

Алгоритм преобразования промежуточного кода корневого дерева в вектор начальных вершин. Рассмотренный выше пример показал, что алгоритм преобразования основан на последовательном добавлении строк (ветвей) промежуточного кода к нулевой строке (стволу). Вектор начальных вершин num формируется итеративно – по мере добавления строк к нулевой строке или текущему вектору num , содержащему поддереву, сформированное на предыдущих шагах подсоединения.

Первоначально в вектор num заносится нулевая строка промежуточного кода $sub[0]$. Далее выполняется подсоединение строк по номеру нулевого элемента каждой строки. Этот элемент необходимо вставить за элементом с таким же номером в текущем num . Вставка элемента потребует увеличения на единицу номеров у всех элементов num , которые равны или больше номеру позиции, в которую помещен новый элемент.

Следующие (первый, второй и т.д.) элементы подсоединяемой строки вставляются в лексикографическом порядке, сцепляемые друг за другом. Формальные порядковые номера этих элементов, указанные в sub ,

заменяются на номера позиций, в которых оказываются эти элементы при подсоединении. Так, первый элемент подсоединяемой строки получает номер позиции num , в которую уже помещен нулевой элемент, второй элемент – номер позиции, в которую помещается первый элемент и т.д.

После вставки первого, второго и т.д. элементов некоторой строки выполняется обновление значений в следующих по порядку строках sub , нулевые элементы которых должны быть подсоединены к соответствующим элементам, которые получили новые (не формальные) номера.

Если обновился номер нулевого элемента некоторой строки, то требуют замены номера следующих элементов этой строки. Новые номера этих элементов также являются формальными – порядковыми, и начинаются с нового номера нулевой строки, увеличенного на единицу.

Для предотвращения повторного обновления номеров для одной и той же строки используется «двойник» $sub - sub0$, обновляемый перед добавлением элементов каждой строки. Массив $sub0$ в начале содержит значения, например, 1000, а после обновления элементов в sub соответствующие элементы в $sub0$ получают значения 2000, препятствующие повторному обновлению в рамках одной и той же строки.

Чтобы подсоединение строк (ветвей к стволу) выполнялось правильно, необходимо проверять, к той ли строке i относится нулевой элемент из строк с большим номером. Для этого проверяется, не относится ли рассматриваемый нулевой элемент к элементу с таким же номером из строки $j > i$. Вектор начальных вершин num будет сформирован после учета всех строк sub .

Программная реализация на языке Си. Вставки в текущий вектор num выполняются в лексикографическом порядке (ЛГ-порядке). Действует общее правило: номера, равные и большие позиции вставки, увеличиваются на 1. Для ЛГ-вставки используется подпрограмма *lexin*.

```
void lexin(int *N,int *num, int pst)
{ // ЛГ-упорядочение и сдвиг num после вставки элемента pst
```

```

int i,j;
for (j=0;j<=*N-1;j++)
  { // pst - значение (номер вершины)
    if ( num[j]==pst
        || num[j]<pst && num[j+1]>pst && j!=*N-1
        || num[j]<pst && j==*N-1)
      {
        for (i=*N-1;i>=j;i--) num[i+1]=num[i];
        (*N)++;
        num[j+1]=pst;
        break;
      }
  }
}

```

В целом алгоритм преобразования промежуточного кода в вектор начальных вершин реализован в подпрограмме transform, приведенной ниже и снабженной подробными комментариями.

```

int sub[50][50];
void transform(int n_b,int n_sub,int *num)
{ // преобразование промежуточного кода sub
  // в вектор начальных вершин num
  int N=-1, k, k0, k1, k2, k3, k4, k5, k6, k7, k8, k10, k20;
  int i, j, pst, fl_pst, ind, sub0[50][50];
  while (sub[0][++N]!=-1) num[N]=sub[0][N]; // занесение в num 0-й строки sub
  for (i=1; i<n_sub; i++)
    { // подключение к num i-й строки sub
      for (k1=i; k1<n_sub; k1++)
        { // разметка sub0 для запрета двойного обновления
          k=-1;
          while (sub[k1][++k]!=-1)
            sub0[k1][k]=1000;
        }
      pst=sub[i][0]; // определение номера позиции k3 для элемента pst
      for (k=0; k<N;k++) if (num[k]==pst) k3=k+1;
      for (k=k3; k<N;k++) if (num[k]>=k3+1) (num[k])++; // учет вставки pst
      lexin(&N,num,pst); // вставка нулевого элемента i-й строки
    }
}

```

```

k=0;
while (sub[i][++k] != -1) // включение других элементов i-й строки
{ // вычисление позиции k3 элемента pst
for (k1=0;k1<N;k1++) if (num[k1]==pst) k3=k1+1;
lexin(&N,num,k3); // вставка k-го элемента с новым номером k3
for (k2=i+1;k2<n_sub;k2++)
{ // обновление sub для следующих строк
if (sub[k2][0]==sub[i][k])
{ // совпадение с нулевым элементом строки k2
for (k0=i+1;k0<k2;k0++)
{ // выявление предыдущих ссылок на элемент sub[i][k]
k1=-1; // элемент sub[i][k] пропускается
while (sub[k0][++k1] != -1) if (sub[k0][k1]==sub[i][k]) goto con;
}
}
if (sub0[k2][0]==1000)
{ // обновление нулевого элемента строки k2
sub[k2][0]=k3;
sub0[k2][0]=2000; // метка для запрета обновления
}
k1=0;
while (sub[k2][++k1] != -1)
{ // обновление следующих элементов
k6=sub[k2][k1]; // копия sub[k2][k1]
if (sub0[k2][k1]==1000)
{ // обновление элементов с учетом порядка
sub[k2][k1]=k3+k1;
sub0[k2][k1]=2000;
}
}
for (k5=k2+1;k5<n_sub;k5++)
{ // выявление предыдущих ссылок на элемент k6
if (sub[k5][0]==k6)
{ // совпадение с нулевым элементом строки k5
for (k7=k2+1;k7<k5;k7++)
{
k8=-1; // элемент sub[i][k] пропускается
while (sub[k7][++k8] != -1)

```

```

        if (sub[k7][k8]==k6) goto con1;
    }
    if (sub0[k5][0]==1000)
    { // обновление нулевого элемента
      sub[k5][0]=k3+k1;
      sub0[k5][0]=2000;
    }
    con1: ;
    } // совпадение с нулевым элементом строки k5
  } // выявление предыдущих ссылок на элемент k6
} // обновление следующих элементов
} // совпадение с нулевым элементом строки k2
} // обновление sub для следующих строк
con: ;
  pst=k3; // Ìõîñîîðð num, âû÷èñëáíèà ïçèòèè k3 ýèáááðà pst
  for (k1=0;k1<N;k1++) if (num[k1]==pst) k3=k1+1;
  for (j=k3; j<N;j++) if (num[j]>=k3) (num[j])++; // Ó÷, ò áñòàâèè ííàðà
  pst=k3;
  } // включение с первого по последний элемент i-й строки sub
} // подключение к num i-й строки sub
}

```

Пример работы программы *transform*. Этот пример показывает, как первая–шестая строки промежуточного кода подключаются к нулевой строке (исходный вектор начальных вершин *num*), образуя искомый вектор *num*. В ходе подключения при соответствующих условиях (совпадении номеров вершин) выполняются обновления строк промежуточного кода.

У шестой строки номер элемента изменяется дважды. Подключение третьей строки влечет изменения в четвертой строке: 1→2. К четвертой строке должна подключаться шестая строка, поэтому в ней: 2→3. В результате подсоединения пятой строки номер 3 оказывается в позиции 9, поэтому в шестой строке выполняется вторая замена 3→9.

110101001101100011101000 заданный двоичный вектор
{01, 1, 1, 01, 12, 012, 2} строки промежуточного кода

0. 01 исходный вектор начальных вершин *nit* (нулевая строка)

1. 1 первая строка

2. 1 вторая строка

0111 подключение первой и второй строки

3. 01 третья строка

001112 подключение третьей строки

4. 23 четвертая строка с новыми номерами: 1→2, 2→3

00111227 подключение четвертой строки

5. 012 пятая строка

00011122389 подключение пятой строки

6. 9 шестая строка с новыми номерами: 2→3, 3→9

000111223899 подключение шестой строки, искомый *nit*

Отладка приведенных текстов подпрограмм выполнялась в составе программы генерации неизоморфных деревьев [4]. Для этого было запрограммировано поэлементное сравнение двух множеств неизоморфных корневых деревьев, сформированных на основе ЛГ-упорядоченных векторов и двоичных кодов.

Проверка векторов начальных вершин на старшинство в обоих случаях проводилась с помощью подпрограммы *testing*. Количество сгенерированных неизоморфных деревьев в диапазоне вершин 4–15 совпадает с результатами [5], что подтверждает правильность генерации двоичных кодов и их преобразования в векторы начальных вершин.

4766 неизоморфных деревьев для 12 вершин были сгенерированы на компьютере с тактовой частотой 2,4ГГц за 2 секунды. В рамках этого времени было получено с помощью программы [5] эталонное множество деревьев и выполнялась проверка совпадения двух множеств неизоморфных корневых деревьев. 1000-му по порядку дереву в проверяемом множестве деревьев соответствуют приведенные далее характеристики. Двоичный код: 1111110011001000110000;

промежуточный код: (012345, 45, 4, 23) и вектор начальных вершин: 01223455578.

Выводы

1. Рассмотрено двоичное кодирование корневых деревьев. Предложен десятичный код в виде последовательности строк-ветвей дерева, занимающий промежуточное положение между двоичным кодом и вектором начальных вершин. Промежуточный код может быть использован для отображения произвольных иерархических структур.

2. Предложены алгоритмы и программы генерации двоичных кодов корневых деревьев, а также преобразования двоичного кода в промежуточный код и промежуточного кода в вектор начальных вершин корневого дерева.

Список литературы

1. Read R.C. How to grow trees // Combinatorial Structures and their Applications.– New York: Gordon and Breach, 1970.

2. Диниц Е.А., Зайцев М.А. Алгоритмы генерации неизоморфных деревьев // Автоматика и телемеханика.– 1977.– Вып. 4.– С. 121–126.

3. Свирщёва Э.А. Структурный синтез неизоморфных систем с однородными компонентами. – Харьков, 1998. – 256 с. (Переработанный в 2005г. вариант находится на сайте электронной технической библиотеки).

4. Недорезов М.В, Недорезов П.В., Филаретов В.В. Алгоритм и программа генерации неизоморфных корневых деревьев на основе векторов начальных вершин // Настоящий выпуск. – С. 150–163.

5. Харари Ф. Теория графов.– М.: Мир, 1973.– 300 с.

Недорезов Петр Владимирович – ученик 11-го класса гимназии №1 им. В.И.Ленина, г. Ульяновск. E-mail: pyatakry@rambler.ru

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

АНАЛОГИЯ ЗАКОНОВ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ И ГРАВИТАЦИОННЫХ ПОЛЕЙ

В. В. Федоров, М. С. Портной

Дано сравнение законов электромагнетизма и гравитации. Рассмотрена существующая связь гравитационного взаимодействия с электромагнитным.

A comparison of the laws of electromagnetism and gravity is given. The existing relationship of gravitational interaction with electromagnetic one is represented.

В настоящее время под гравитационным полем понимают поле тяготения, в котором все тела вне зависимости от их массы движутся одинаковым образом. На основании **закона всемирного тяготения Ньютона** любые два тела притягиваются друг к другу с силой, которая направлена по линии, их соединяющей, прямо пропорциональной массам обоих тел и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними

$$\vec{F}_{\text{гр}} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{e}_r,$$

где m_1 , m_2 – массы тяготеющих тел, γ – постоянная тяготения Кавендиша.

Согласно общей теории относительности гравитация представляет собой просто геометрию пустого пространства и времени. Гравитация – это искривленное пространство – время. Понятие об ускорении заменено искривлением пространства. Электромагнетизм в ней – всего лишь часть гравитационного поля, действующая в пятом дополнительном измерении пространства, которое мы не в состоянии наглядно представить.

Исходя из такого определения электромагнетизма и гравитации, можно предположить существование глубокой связи между ними. Действительно, между электромагнитным и гравитационным полями, исходя из сравнения их основных законов, много общего. Так, силы в поле тяготения и электростатическом поле определяются аналогичными законами всемирного тяготения Ньютона и Кулона

$$\bar{F}_{\text{Гр}} = -\frac{m_1 m_2}{4\pi\epsilon_{\text{Гр}}r^2}\bar{e}_r; \quad \bar{F}_{\text{эл}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_{\text{эл}}r^2}\bar{e}_r,$$

где $\epsilon_{\text{Гр}}=1/4\pi\gamma$ – гравитационная проницаемость поля ускорений среды.

На основании второго закона Ньютона сила, действующая на тело, равна произведению массы тела на создаваемое этой силой ускорение, причем направления силы и ускорения совпадают, или ускорение равно отношению силы, деленной на массу тела. По аналогии с электрическим полем в гравитационном можно ввести понятие напряженности $\bar{E}_{\text{Гр}}$ поля ускорений как силы, с которой поле ускорений действует на точечное тело с единичной массой (инертной массой) 1 кг

$$\bar{E}_{\text{Гр}} = \bar{F}_{\text{Гр}} / m; \quad \bar{E}_{\text{эл}} = \bar{F}_{\text{эл}} / q_{\text{эл}}.$$

Из закона сохранения массы гравитационный ток, по аналогии с электрическим, можно определить как количество инертной массы, выходящее за некоторый промежуток времени через замкнутую поверхность S , ограничивающую объем V , равное величине уменьшения находящейся в объеме инертной массы тела, за то же время:

$$I_{\text{Гр}} = -\frac{\partial m}{\partial t} = \int_s \bar{j}_{\text{Гр}} d\bar{S}; \quad I_{\text{эл}} = -\frac{\partial q_{\text{эл}}}{\partial t} = \int_s \bar{j}_{\text{эл}} d\bar{S},$$

где $\bar{j}_{\text{Гр}}$ – плотность гравитационного тока.

В дифференциальной форме закон сохранения инертной массы, как и электрического заряда, представляется в виде уравнений непрерывности:

$$\text{div}(\bar{J}_{\text{Гр}} + \frac{\partial \bar{D}_{\text{Гр}}}{\partial t}) = 0; \quad \text{div}(\bar{J}_{\text{эл}} + \frac{\partial \bar{D}_{\text{эл}}}{\partial t}) = 0,$$

где $\bar{D}_{\text{Гр}}$ – вектор индукции поля ускорений, равный произведению гравитационной проницаемости среды $\varepsilon_{\text{Гр}}$ на вектор напряженности поля ускорений: $\bar{D}_{\text{Гр}} = \varepsilon_{\text{Гр}} \bar{E}_{\text{Гр}}$; $\bar{D}_{\text{Эл}} = \varepsilon_{\text{Эл}} \bar{E}_{\text{Эл}}$.

Поток вектора индукции поля ускорений $\bar{D}_{\text{Гр}}$ через замкнутую поверхность S , по аналогии с теоремой Гаусса для электростатического поля, равен массе тела (инертной массе), находящейся внутри объема, ограниченного этой поверхностью:

$$\oint_S \bar{D}_{\text{Гр}} d\bar{S} = -m; \quad \oint_S \bar{D}_{\text{Эл}} d\bar{S} = q,$$

или в дифференциальной форме:

$$\text{div } \bar{D}_{\text{Гр}} = -\rho_{\text{Гр}}; \quad \text{div } \bar{D}_{\text{Эл}} = \rho_{\text{Эл}},$$

где $\rho_{\text{Гр}}$ – объемная плотность инертной массы тела.

Последнее уравнение с учетом закона сохранения массы совпадает с известным в механике сплошных сред уравнением неразрывности в переменных Эйлера:

$$\frac{\partial \rho_{\text{Гр}}}{\partial t} + \text{div } \rho_{\text{Гр}} \bar{v} = 0.$$

Отрицательный знак перед массой тела в законах сохранения заряда учитывает притяжение тел в гравитации по сравнению с отталкиванием одноименных электрических зарядов в электростатике.

В статическом гравитационном поле, как и в электростатическом, можно ввести понятие скалярного гравитационного потенциала $U_{\text{Гр}}$:

$$\bar{E}_{\text{Гр}} = -\nabla U_{\text{Гр}} \quad \text{или} \quad U_{\text{Гр}1} - U_{\text{Гр}2} = \int_1^2 \bar{E}_{\text{Гр}} d\bar{l},$$

где разность скалярных гравитационных потенциалов равна работе по перемещению единичной массы тела из одной точки в другую. Так, например, при нормировании потенциала в бесконечно далекой точке $U_{\text{Гр}2} = 0$, скалярный потенциал на поверхности Земли при ее массе $m = 6 \cdot 10^{24}$ кг равен $6.3 \cdot 10^7$ Дж/кг, а напряженность поля ускорений $E_{\text{Гр}}$

= 9.8 Н/кг, и она притягивает тело массой в один килограмм к своей поверхности с силой в 9.8 Н.

Общее выражение для энергии статического гравитационного поля по аналогии с электростатическим полем

$$W_{\text{гр}} = \frac{1}{2} \int_V \bar{E}_{\text{гр}} \bar{D}_{\text{гр}} dV$$

может быть с учетом основного тождества

$$\text{div}(U_{\text{гр}} \bar{D}_{\text{гр}}) = \bar{D}_{\text{гр}} \text{grad} U_{\text{гр}} + U_{\text{гр}} \text{div} \bar{D}_{\text{гр}},$$

преобразовано к виду:

$$W_{\text{гр}} = \frac{1}{2} \int_V U_{\text{гр}} \text{div} \bar{D}_{\text{гр}} dV - \frac{1}{2} \int_V \text{div}(U_{\text{гр}} \bar{D}_{\text{гр}}) dV.$$

После замены $\text{div} \bar{D}_{\text{гр}}$ удельной объёмной массой $-\rho_{\text{гр}}$, а во втором слагаемом объёмного интеграла – на поверхностный интеграл, получаем:

$$W_{\text{гр}} = -\frac{1}{2} \int_V U_{\text{гр}} \rho_{\text{гр}} dV - \frac{1}{2} \int_S U_{\text{гр}} \bar{D}_{\text{гр}} d\bar{S}.$$

Если масса сосредоточена в ограниченной области V_0 , то при удалении поверхности S в бесконечность поверхностный интеграл исчезает, так как площадь этой поверхности увеличивается с расстоянием как r^2 , а произведение $U_{\text{гр}} \bar{D}_{\text{гр}}$ при этом уменьшается как r^{-3} .

Поэтому гравитационная энергия массы, находящейся в ограниченной области V_0 , будет равна

$$W_{\text{гр}} = -\frac{1}{2} \int_{V_0} \rho_{\text{гр}} U_{\text{гр}} dV.$$

Эта зависимость совпадает с выражением для энергии электростатического поля при условии взаимной замены скалярных потенциалов $U_{\text{эл}}$, $U_{\text{гр}}$ и объёмных плотностей $\rho_{\text{эл}}$, $-\rho_{\text{гр}}$.

Итак, подобие законов всемирного тяготения и Кулона, сохранения массы и заряда, а также уравнений непрерывности позволяет говорить об аналогии гравитационного поля ускорений с электрическим полем.

Кроме напряженности электрического поля, движущиеся или изменяющиеся во времени электрические заряды создают магнитное поле. Предположим, что при движении или изменении во времени инертных масс вокруг них образуется второе гравитационное поле, напряженность которого $\bar{H}_{\text{гр}}$ определяется из закона, аналогичного закону Био – Савара

$$\bar{H}_{\text{гр}} = \frac{[I_{\text{гр}} d\bar{l} \times \bar{e}_r]}{4\pi r^2},$$

где $I_{\text{гр}} d\bar{l}$ – элемент гравитационного тока.

Судя по размерности, вектор $\bar{H}_{\text{гр}}$ [кг/(м·с)] характеризует импульсное поле. Произведение массы тела на его скорость называют в механике импульсом тела (векторной величиной). Вектор напряженности импульсного гравитационного поля определяет значение импульса на единицу поверхности 1 м^2 .

Всеобщий закон сохранения импульса о постоянстве суммарного импульса системы при отсутствии внешних сил, даже если тела системы разрушаются, отражает то, что векторные линии импульсного поля, как и магнитного, всегда замкнуты, не имеют ни начала, ни конца. Итак, вторым полем в гравитации может быть импульсное поле, совместно с полем ускорений образующее единое гравитационное поле.

Уравнения Максвелла для гравитационного поля. Связь между импульсным полем и полем ускорений, исходя из рассмотренной аналогии между гравитацией и электромагнетизмом, а также исходя из единства природы и ее закономерностей, может быть определена из уравнений, аналогичных уравнениям Максвелла (табл. 1) и трех уравнений связи или вещественных уравнений [2]:

$$\bar{D}_{\text{гр}} = \varepsilon_{\text{гр}} \bar{E}_{\text{гр}}; \quad \bar{B}_{\text{гр}} = \mu_{\text{гр}} \bar{H}_{\text{гр}}; \quad \bar{J}_{\text{гр}} = \gamma_{\text{гр}} \bar{E}_{\text{гр}},$$

где $\bar{B}_{\text{гр}}$ – вектор индукции импульсного поля, $\mu_{\text{гр}}$ – проницаемость импульсного поля среды, $\gamma_{\text{гр}}$ – удельная гравитационная проводимость.

Для эфира, исходя из равенства скоростей электромагнитных и гравитационных волн инертных масс электромагнитного поля в нём и

величины постоянной тяготения Кавендиша, гравитационные проницаемости равны:

$$\varepsilon_{\text{гр}} = 1.19 \cdot 10^9 \text{ кг} \cdot \text{с}^2 / \text{м}^3, \mu_{\text{гр}} = 9.35 \cdot 10^{-27} \text{ м/кг}.$$

Таблица 1

Интегральная форма уравнений	Дифференциальная форма уравнений
$\oint_L \bar{H}_{\text{гр}} d\bar{l} = \int_S (\gamma_{\text{гр}} \bar{E}_{\text{гр}} + \frac{\partial \bar{D}_{\text{гр}}}{\partial t} - \rho_{\text{гр}} \bar{v}) d\bar{S}$	$\text{rot } \bar{H}_{\text{гр}} = \gamma_{\text{гр}} \bar{E}_{\text{гр}} + \frac{d\bar{D}_{\text{гр}}}{dt} - \rho_{\text{гр}} \bar{v}$
$\oint_L \bar{E}_{\text{гр}} d\bar{l} = - \int_S \frac{\partial \bar{B}_{\text{гр}}}{\partial t} d\bar{S}$	$\text{rot } \bar{E}_{\text{гр}} = - \frac{d\bar{B}_{\text{гр}}}{dt}$
$\oint_S \bar{D}_{\text{гр}} d\bar{S} = -q_{\text{гр}}$	$\text{div } \bar{D}_{\text{гр}} = -\rho_{\text{гр}}$
$\oint_S \bar{B}_{\text{гр}} d\bar{S} = 0$	$\text{div } \bar{B}_{\text{гр}} = 0.$

Для движущихся со скоростью v тел, обладающих гравитационными зарядами (массами, определяемыми из закона Ньютона) гравитационные проницаемости сред находятся из выражения, аналогичного фазовой скорости эквивалентной волны $v = v_{\text{ф}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{\text{гр}} \mu_{\text{гр}}}}$.

Для определения уравнения, которому удовлетворяет каждый вектор поля в пространстве вне гравитационных источников, применим операцию ротации к I и II уравнениям Максвелла для гравитационного поля:

Волновые уравнения. Для определения уравнения, которому удовлетворяет каждый вектор поля в пространстве вне гравитационных источников, применим операцию ротации к I и II уравнениям Максвелла для гравитационного поля:

$$\text{rot rot } \bar{H}_{\text{гр}} = \gamma_{\text{гр}} \text{rot } \bar{E}_{\text{гр}} + \frac{\partial \text{rot } \bar{D}_{\text{гр}}}{\partial t} - \text{rot } (\rho_{\text{гр}} \bar{v}); \text{rot rot } \bar{E}_{\text{гр}} = - \frac{\partial \text{rot } \bar{B}_{\text{гр}}}{\partial t}.$$

После подстановки значений роторов векторов и замены двойного ротора разностью $\text{rot rot } \bar{E}_{\text{гр}} = \text{grad div } \bar{E}_{\text{гр}} - \nabla^2 \bar{E}_{\text{гр}}$ находим

$$\text{grad div } \bar{H}_{\text{гр}} - \nabla^2 \bar{H}_{\text{гр}} = -\gamma_{\text{гр}} \mu_{\text{гр}} \frac{\partial \bar{H}_{\text{гр}}}{\partial t} - \varepsilon_{\text{гр}} \mu_{\text{гр}} \frac{\partial^2 \bar{H}_{\text{гр}}}{\partial t^2} - \text{rot } (\rho_{\text{гр}} \bar{v});$$

$$\text{grad div } \bar{E}_{\text{Гр}} - \nabla^2 \bar{E}_{\text{Гр}} = -\gamma_{\text{Гр}} \mu_{\text{Гр}} \frac{\partial \bar{E}_{\text{Гр}}}{\partial t} - \varepsilon_{\text{Гр}} \mu_{\text{Гр}} \frac{\partial^2 \bar{E}_{\text{Гр}}}{\partial t^2} + \mu_{\text{Гр}} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_{\text{Гр}} \bar{v}).$$

С учётом III и IV уравнений Максвелла получаем обобщенные неоднородные векторные волновые уравнения:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \bar{H}_{\text{Гр}} &= \gamma_{\text{Гр}} \mu_{\text{Гр}} \frac{\partial \bar{H}_{\text{Гр}}}{\partial t} + \varepsilon_{\text{Гр}} \mu_{\text{Гр}} \frac{\partial^2 \bar{H}_{\text{Гр}}}{\partial t^2} + \text{rot} (\rho_{\text{Гр}} \bar{v}); \\ \nabla^2 \bar{E}_{\text{Гр}} &= \gamma_{\text{Гр}} \mu_{\text{Гр}} \frac{\partial \bar{E}_{\text{Гр}}}{\partial t} + \varepsilon_{\text{Гр}} \mu_{\text{Гр}} \frac{\partial^2 \bar{E}_{\text{Гр}}}{\partial t^2} - \mu_{\text{Гр}} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_{\text{Гр}} \bar{v}) - \text{grad} \frac{\rho_{\text{Гр}}}{\varepsilon_{\text{Гр}}}. \end{aligned}$$

Таким образом, в однородном пространстве вне источников (когда возбуждающие сторонние токи находятся за его пределами) векторы напряженности поля ускорений и импульсного поля удовлетворяют обобщенным неоднородным векторным волновым уравнениям. Волновые дифференциальные уравнения второго порядка в частных производных в гравитации описывают распространение колебаний в среде. Они наряду с пространственными производными второго порядка содержат вторые производные по времени.

Волновые уравнения для стационарного, независимого от времени гравитационного поля, $\frac{\partial \bar{H}_{\text{Гр}}}{\partial t} = 0$ или $\frac{\partial \bar{E}_{\text{Гр}}}{\partial t} = 0$, переходят в уравнения Пуассона, описывающие потенциальные поля:

$$\nabla^2 \bar{H}_{\text{Гр}} = \text{rot} (\rho_{\text{Гр}} \bar{v}); \quad \nabla^2 \bar{E}_{\text{Гр}} = -\text{grad} \frac{\rho_{\text{Гр}}}{\varepsilon_{\text{Гр}}}.$$

Волновые уравнения записаны в форме, пригодной для любой системы координат. Для решения раскрывается оператор Лапласа и векторные уравнения заменяются системой скалярных уравнений. Любая краевая задача теории гравитационного поля сводится к определению в пространстве и времени векторов $\bar{H}_{\text{Гр}}$ и $\bar{E}_{\text{Гр}}$, удовлетворяющих волновым уравнениям при заданных начальных и граничных условиях.

Вывод. На основе введения гравитационных токов (проводимости, смещения, конвекции) и импульсного гравитационного поля предложено

новое понятие гравитации, включающее в себя как статическое поле (поле тяготения), так и динамические гравитационные поля. Стало возможным ряд статических и динамических задач механики решать полевыми методами с использованием уравнений Максвелла для гравитационного поля и методов теории электрических цепей.

Список литературы

1. Башарин С.А., Федоров В.В. Теоретические основы электротехники. Теория электрических цепей и электромагнитного поля.–М.: Академия, 2013.
2. Федоров В.В. Электродинамика и гравитация в единой теории поля. СПб: Изд-во СПб ГЭТУ «ЛЭТИ», 2014.– 156 с.
3. Седов Л.И. Механика сплошной среды. М.: Наука, 1976.
4. Федоров В.В. Уравнения Максвелла для гравитационного поля.– СПб: «Известия» СПбГЭТУ «ЛЭТИ».– 2009.– №6.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М: Изд-во технико-теоретической литературы, 1957.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М: Наука, 1967.
7. Федоров В.В. Поле однопроводной линии. – СПб: «Известия» СПбГЭТУ «ЛЭТИ».– 2009.– №2.
8. Баранов А.М Фазовые переходы в гравитационных и электромагнитных полях с точки зрения алгебраической классификации Петрова // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия.– 2012.– С. 15–28.
9. Балакин А.Б. Аксионная электродинамика земной атмосферы: поиск сигналов, индуцированных гравитационными волнами // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия.– 2014.– №2– С. 72–78.

Федоров Виктор Викторович – д.т.н., профессор кафедры ТОЭ, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет (СПбГЭТУ) Адрес: 197376, Россия, г. Санкт-Петербург, ул. Проф. Попова, д. 5, СПбГЭТУ, кафедра ТОЭ. Тел.: (812) 346-17-96. E-mail: fedorov32@mail.ru

Портной Марк Саулович – доцент кафедры ТОЭ СПбГЭТУ. Тел.: (812) 346-17-96. E-mail: rimelena@yahoo.com

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О МАГНИТНЫХ ЛИНИЯХ

Е. Н. Меньшов

Разработанная математическая модель сил диполь-дипольного взаимодействия во внешнем магнитном поле объясняет причину формирования картины дискретных линий, образованных железными опилками в поле постоянного магнита. Эта модель добавляет строгие аргументы в пользу точки зрения об условности силовых линий поля.

The mathematical model of the forces of dipole-dipole interaction in an external magnetic field has allowed to explain the reason for the formation of a pattern of discrete lines formed by iron filings in the field of the permanent magnet. This model simply adds the arguments in favor of the perspective on the conventions of the field lines.

В соответствии с современными научными воззрениями под силовыми линиями понимаются «воображаемые линии, которые проводят для изображения какого-либо силового поля (электрического, магнитного, гравитационного)» [1].

Представления о силовых линиях было введено М. Фарадеем на основе анализа хорошо известных экспериментальных картин выстраивания железных опилок в магнитном поле постоянного магнита в соответствии с рис. 1.

Фарадей считал физически существующими дискретные электрические и магнитные силовые линии. На основе представления о дискретных магнитных силовых линиях (линий индукции) он ввел понятия о трубках, поверхности которых образуются системой таких линий, поток магнитной индукции через каждое поперечное сечение трубки должен быть одинаковым.

Несмотря на то, что идеи Фарадея о реальности силовых линий и трубок оказались несостоятельными, они впоследствии находили возрождение в различных формах.

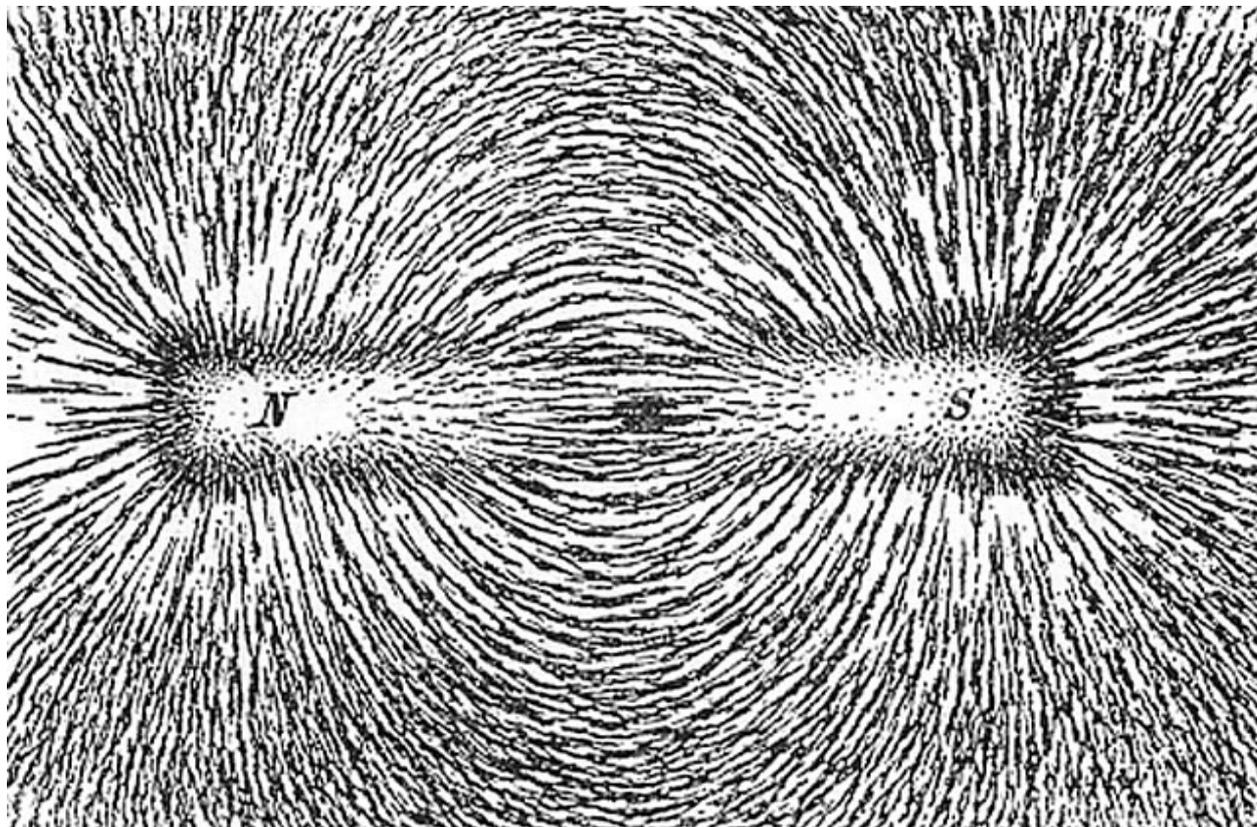


Рис. 1. Картина распределения железных опилок в магнитном поле постоянного магнита

В трудах Дж. Дж. Томсона в конце 19 – начале 20 веков силовые линии рассматривались как дискретные трубки индукции электрического поля; в трудах Ф.М. Миткевича в 30 – 40-ых годах 20 века как силовые трубки магнитного поля с источниками на полюсах; в работе П.А.М. Дирака 1963 года [2]; в статье академика АН Арм. ССР А.Г. Иосифьяна в 1987 году [3].

Уравнения Максвелла составляют фундамент современной классической электродинамики. Эти уравнения являются математической моделью электромагнитного фрагмента объективной реальности

(электромагнитного поля). Известны внутренние принципиальные противоречия классической электродинамики, приводящие к расхождению теории с опытом и со здравым смыслом, т.е. применяемая математическая модель в некоторых аспектах не соответствует реальным явлениям.

Попытки «материализовать» отвергнутые фарадеевские представления обусловлены стремлениями снятия противоречий в современной электродинамике без изменения самих максвелловских уравнений. При этом во всех этих работах имеются рациональные зерна, на которые необходимо посмотреть с другого ракурса.

Причины, приводящие к выстраиванию железных опилок во внешнем магнитном поле постоянного магнита, одной природы с причинами, приводящими к процессам магнитной коагуляции ферромагнитной дисперсной фазы в дисперсионной среде во внешнем магнитном поле [4,5].

Выявленные в [5] отталкивающие силы между намагниченными феррочастицами в поперечном направлении к магнитным линиям внешнего поля служат весомой причиной объединения феррочастиц вдоль магнитных линий в устойчивые нитеобразные агрегаты (то есть в дискретные образования) при магнитной коагуляции [6].

Аналогичный механизм формирует в поле постоянного магнита картину дискретных линий, состоящих из намагниченных железных опилок, закрепленных на плоскости бумажного листа силами сцепления. **Поэтому картины распределения железных опилок не могут выступать доказательством реальности дискретности магнитных силовых линий**, попытки, ввести которые в качестве основ строения ЭМП предпринимались известными и выдающимися учеными (Дж. Дж. Томсоном, Ф.М. Миткевичем, П.А.М. Дираком и А.Г. Иосифьяном).

Вывод. Добавлены строгие аргументы в пользу официальной точки зрения, что представления о силовых линиях условны и введены в качестве методического приема для удобства понимания распределения поля в пространстве. При этом результаты, полученные Дж. Дж.

Томсоном, Ф.М. Миткевичем, П.А.М. Дираком и А.Г. Иосифьяном, раскрывают только новые ракурсы этого методического приема понимания распределения поля в пространстве [7].

Список литературы

1. Физический энциклопедический словарь/ Гл.ред. А.М. Прохоров. М.: Сов. энциклопедия, 1984. – 944 с.
2. Dirac P.A.M. The evolution of the physical picture of nature. – Scientific American. – 1963. – vol. 205. – № 5.
3. Иосифьян А.Г. Эволюция физических основ электротехники и электродинамики// Электричество. – 1987. – № 12. – С. 18–29.
4. Булыжев Е.М. Меньшов Е.Н. Математическая теория магнитной коагуляции ферромагнитных частиц в слабозагрязненных сточных водах // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – 2014. – Т.16. – №1. – С. 247–254.
5. Меньшов Е.Н. Математическая модель взаимодействия ферромагнитной дисперсной фазы в дисперсной системе во внешнем магнитном поле // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей : межд. сб. науч. тр. – Ульяновск : УлГТУ, 2013. – Вып. 11. – С. 230–234.
6. Меньшов Е.Н. Математическая модель магнитной коагуляции при магнитной сепарации водно-технологических жидкостей от ферромагнитных частиц. [Электронный ресурс] / Е.Н. Меньшов// Интернет-журнал Науковедение. – 2015. – Том 7. – № 6. – 17 с. – Режим доступа: <http://naukovedenie.ru/PDF/133TVN615.pdf>.
7. Меньшов Е.Н. Скорректированные уравнения Максвелла // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Межд. сб. научн. тр. – Ульяновск: УлГТУ, 2012. – Вып. 10. – С. 172 –178.

Меньшов Евгений Николаевич – к.т.н., доцент УлГТУ, г. Ульяновск.

E-mail: raynd2@rambler.ru

ИЗ ОПЫТА РАБОТЫ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СРАБАТЫВАНИЯ ЖИДКОМЕТАЛЛИЧЕСКОГО ПРЕДОХРАНИТЕЛЯ

В. В. Чикин, Р. Ф. Тимиргазин

Предложена математическая модель срабатывания жидкометаллического предохранителя в цепи короткого замыкания. В отличие от известной модели, предложенная модель учитывает сопротивление электрической дуги и позволяет более точно описать процесс ограничения тока короткого замыкания.

A mathematical model of the liquid-metal tripping the fuse in the short circuit. In contrast to the well-known model, the proposed model takes into account the resistance to electric arc and allows for a more accurate description of the process of limiting the short-circuit current.

Введение. Жидкометаллический предохранитель – это электрический аппарат, предназначенный для ограничения тока короткого замыкания в электрической сети. В нем в качестве плавкого элемента применяется жидкий металл, расположенный в канале диэлектрической втулки. При срабатывании предохранителя металл из жидкого состояния переходит в парообразное и ограничивает ток короткого замыкания. После остывания и конденсации паров предохранитель готов к повторному срабатыванию [1, 2]. В настоящее время жидкометаллические предохранители мало изучены.

Известная математическая модель. При рассмотрении известной математической модели срабатывания жидкометаллического

предохранителя в цепи короткого замыкания [1] выявлен недостаток, который заключается в отсутствии описания процесса возникновения электрической дуги. В дальнейшем это приводит к получению ошибочной картины ограничения тока в цепи короткого замыкания. Данная статья посвящена описанию срабатывания жидкометаллического предохранителя в цепи короткого замыкания с учетом процесса возникновения электрической дуги.

Предлагаемая математическая модель. Эквивалентная схема процесса короткого замыкания в сети защищаемой жидкометаллического предохранителя представлена на рис. 1а.

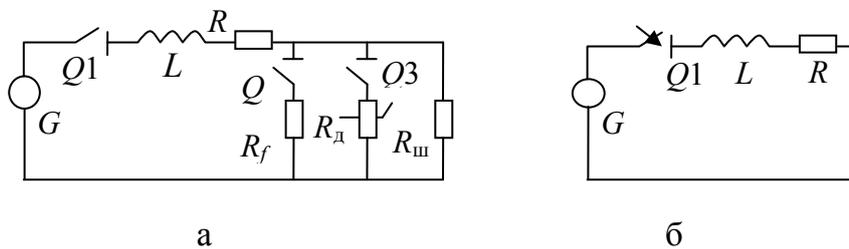


Рис.1. Эквивалентная схема защищаемой сети (а) и схема замещения на первом этапе (б)

Она состоит из источника переменного напряжения G , индуктивности сети L , активного сопротивления сети R , сопротивления плавкой вставки жидкометаллического предохранителя R_f , сопротивления дуги R_d , возникающей при срабатывании ЖСП, шунтирующего сопротивления $R_{ш}$. В исходном состоянии ключи $Q1$, $Q2$ разомкнуты, а ключ $Q3$ замкнут. Процесс срабатывания жидкометаллического предохранителя при коротком замыкании делится на семь этапов.

Первый этап происходит на временном интервале от 0 до t_1 , где t_1 – время, соответствующее нагреву плавкой вставки под действием тока короткого замыкания до температуры кипения и переходу в парообразное состояние.

В общем виде равенство, по которому возможно высчитать время t_1 , имеет вид:

$$I^2 t_1 = AS^2 \quad (1)$$

Эквивалентная схема замещения первого этапа представлена на рис.1б. На этом этапе в начальный момент времени ключ $Q1$ замыкается и в цепи по сопротивлениям $R, L, R_f, R_{ш}$ потекут токи. Учитывая, что сопротивление R_f плавкой вставки мало по сравнению с сопротивлением $R_{ш}$ им можно пренебречь и принять равным нулю. Тогда схема замещения (рис.1а) преобразуется к виду, изображенному на рис.1б. Уравнение переходного процесса на первом этапе будет выглядеть следующим образом:

$$U_m \sin(\omega t + \psi) = L \frac{di}{dt} + Ri \quad (2)$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$i_1 = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi) - I_m \sin(\psi - \varphi) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3)$$

Второй этап процесса происходит на интервале времени от t_1 до t_2 . Этот этап характеризуется наличием в канале ЖСП паровой пробки, возникающей в результате нагрева плавкой вставки до температуры кипения. Пары жидкого металла обладают высоким сопротивлением. Электрическая цепь разрывается, что эквивалентно размыканию ключа $Q2$. На рис. 2а представлена эквивалентная схема этапа. Длительность этапа не большая, определяется экспериментально.

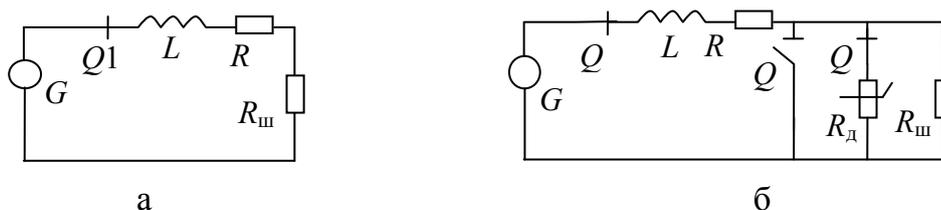


Рис.2. Эквивалентная схема замещения на втором этапе (а) и третьем этапе (б).

Уравнение переходного процесса на втором этапе будет выглядеть следующим образом:

$$U_m \sin(\omega t + \psi) = L \frac{di}{dt} + (R + R_{ш})i \quad (4)$$

Решив это уравнение, получим:

$$i_2 = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi_2) + (I_{c1} - I_m \sin(\omega t_1 + \psi - \varphi_2)) e^{-\frac{-(t-t_1)}{\tau_2}} \quad (5)$$

Третий этап происходит на интервале времени от t_2 до t_3 . На этом этапе в начальный момент времени происходит дуговой пробой газовой пробки, что эквивалентно размыканию ключа Q_2 , и возникновению электрической дуги, что эквивалентно замкнутому ключу Q_3 . Эквивалентная схема замещения этого этапа представлена на рис.2б.

Уравнение переходного процесса будет иметь вид:

$$U_m \sin(\omega t + \psi) = L \frac{di}{dt} + Ri + U_\delta(I_\delta), \quad (6)$$

где

$$U_\delta = U_{ш} = U_c - I(R + X_l). \quad (7)$$

Для математического описания нелинейного сопротивления дуги используем метод кусочно-линейной аппроксимации. Разобьем временной интервал на котором происходит третий этап срабатывания предохранителя на малые временные промежутки, на которых сопротивление дуги можно считать линейным и постоянным, количество таких интервалов равно n . На каждом n -м отрезке времени сопротивление будет вычисляться так:

$$R_{\delta i} = \frac{U_{\delta i}}{I_{\delta i}}, \text{ где } i \in [1, 2, 3, \dots, n] \quad (8)$$

Значения тока и напряжения дуги мы получаем экспериментальным путем – снятием вольтамперной характеристики. Для того чтобы математически описать нелинейное сопротивление дуги представим его в виде n параллельно подключенных сопротивлений. Таким образом, схему замещения на третьем этапе можно представить в виде n параллельно включенных линейных сопротивлений, поочередно коммутируемых ключами, как показано на рис.3.

Изменение сопротивления дуги ввиду изменения ее геометрических размеров представляется как поочередное переключение выключателей. На первом временном интервале, на котором сопротивление дуги считается линейным, ключ Q_3 замкнут, а остальные ключи разомкнуты. Как только этот этап заканчивается, Q_3 размыкается и замыкается ключ Q_4 и так до Q_i .

Решив это уравнение, получим:

$$i_3 = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi_i) + (I_0 - I_m \sin(\omega t_2 + \psi - \varphi_i))e^{\frac{(t_2-t)}{\tau_i}}, \quad (9)$$

где

$$I_0 = I_m \sin(\omega t_2 + \psi - \varphi_2) + (I_{c1} - I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi_i))e^{\frac{(t_1-t_2)}{\tau_i}}. \quad (10)$$

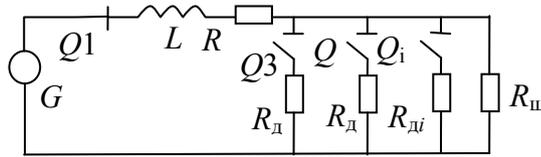


Рис.3. Эквивалентная схема замещения третьего этапа.

Третий этап закончится при погасании дугового процесса во время естественного перехода тока через ноль или при восстановлении диэлектрической прочности газового промежутка.

Четвертый этап процесса происходит в интервале времени от t_3 до t_4 . В начале этого этапа ключ $Q3$ размыкается. Весь ток аварийного режима теперь идет непосредственно через шунтирующее сопротивление, и эквивалентная схема замещения принимает вид, представленный на рис.2а.

Решение уравнения переходного процесса на данном этапе будет иметь вид:

$$i_4 = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi_2) + (I_{c2} - I_m \sin(\omega t_3 + \psi - \varphi_j))e^{\frac{(t_3-t)}{\tau_2}}, \quad (11)$$

где

$$I_{c2} = I_m \sin(\omega t_3 + \psi - \varphi) + (I_0 - I_m \sin(\omega t_2 + \psi - \varphi_2))e^{\frac{-t_3}{\tau}}. \quad (12)$$

На пятом этапе жидкометаллический предохранитель восстанавливается, его сопротивление снова стремится к нулю, это эквивалентно замыканию ключа $Q2$. Эквивалентная схема замещения на данном этапе выглядит аналогично рис.1б.

Пятый этап происходит на временном интервале $t_4 \leq t \leq t_5$, где t_5 – время, соответствующее нагреву плавкой вставки под действием тока короткого замыкания до температуры кипения и переходу в парообразное состояние.

Решение уравнения переходного процесса на данном этапе будет иметь вид:

$$i_5 = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi) + (i_4 - I_m \sin(\omega t_4 + \psi - \varphi_2)) e^{\frac{t_4 - t}{\tau}}, \quad (13)$$

где

$$i_4 = I_m \sin(\omega t_4 + \psi - \varphi_2) + (I_{c2} - I_m \sin(\omega t_3 + \psi - \varphi_j)) e^{\frac{(t_3 - t_4)}{\tau_2}}. \quad (14)$$

Шестой этап процесса происходит на интервале времени $t_5 \leq t \leq t_6$. Этот этап характеризуется наличием в канале ЖСП паровой пробки, возникающей в результате нагрева плавкой вставки до температуры кипения. Пары жидкого металла обладают высоким сопротивлением. Электрическая цепь разрывается, что эквивалентно размыканию ключа $Q2$. На рис. 2а представлена эквивалентная схема этапа. Длительность этапа не большая, определяется экспериментально.

Решение уравнения переходного процесса будет иметь вид:

$$i_6 = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi_2) + (I_{c5} - I_m \sin(\omega t_5 + \psi - \varphi_2)) e^{\frac{-(t - t_5)}{\tau_2}}, \quad (15)$$

где

$$I_{c5} = I_m \sin(\omega t_5 + \psi - \varphi) + (i_4 - I_m \sin(\psi - \varphi)) e^{\frac{-t_5}{\tau}}. \quad (16)$$

Седьмой этап происходит на интервале времени от t_6 до t_7 . На этом этапе в начальный момент времени происходит дуговой пробой газовой пробки, что эквивалентно размыканию ключа $Q2$, и возникновению электрической дуги, что эквивалентно замкнутому ключу $Q3$. Эквивалентная схема замещения этого этапа представлена на рис.3.

Решение уравнения переходного процесса будет иметь вид:

$$i_7 = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi_i) + (I_{00} - I_m \sin(\omega t_6 + \psi - \varphi_i)) e^{\frac{(t_6 - t)}{\tau_i}}, \quad (17)$$

где

$$I_{00} = I_m \sin(\omega t_6 + \psi - \varphi_2) + (I_{c5} - I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi_i)) e^{\frac{(t_5 - t_6)}{\tau_i}}. \quad (18)$$

Седьмой этап закончится при погасании дугового процесса во время естественного перехода тока через ноль или при восстановлении диэлектрической прочности газового промежутка.

На рис.4 представлена расчетная зависимость изменения тока в цепи короткого замыкания при срабатывании жидкометаллического предохранителя при параметрах $A = 180 \frac{\text{Дж}}{\text{Ом}\cdot\text{мм}^4}$, $S = 0.095 \text{ мм}^4$, $L = 0.035 \text{ Гн}$, $R = 0.1 \text{ Ом}$, $f = 50 \text{ Гц}$, $\psi = 1$, $U_m = 220 \text{ В}$, $R_{ш} = 5 \text{ Ом}$.

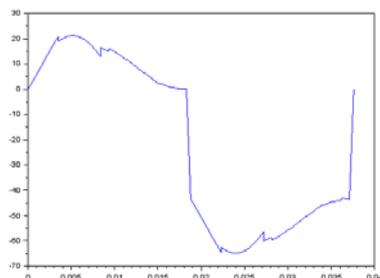


Рис.4. Расчетная зависимость изменения тока в цепи короткого замыкания при срабатывании жидкометаллического предохранителя

Выводы. Математическая модель с учетом процесса возникновения электрической дуги позволяет дать более точную картину ограничения тока короткого замыкания, что позволит уточнить выбор жидкометаллического предохранителя для защиты электрической сети.

Список литературы

1. Жидкометаллические предохранители и инвестиционная привлекательность их разработки / А.В.Кузнецов. – М.: Энергоатомиздат, 2006. – 207 с.
2. Энергетика. Оборудование Документация. [Электронный ресурс]. URL: <http://forca.ru/spravka/spravka/predohraniteli.html>

Чикин Владислав Владимирович – студент 2 курса кафедры Электроснабжение ВО «Ульяновский государственный технический университет» (УлГТУ). E-mail: chikin_vladislav@mail.ru

Тимиргазин Рустем Фидусович – аспирант кафедры Электроснабжение УлГТУ. E-mail: Timirgazin.rust@yandex.ru

ОСОБЕННОСТИ ОБЕСПЕЧЕНИЯ ГИГИЕНИЧЕСКИХ ТРЕБОВАНИЙ К БАЗОВЫМ СТАНЦИЯМ СЕТЕЙ WI-FI В ЗАКРЫТЫХ ПОМЕЩЕНИЯХ

Н. Б. Догадин

Рассмотрены особенности прогнозирующего расчета санитарно-защитной зоны вокруг приемо-передающих антенн базовых станций (БС) сети Wi-Fi внутри закрытых помещений. Даны примеры расчета и рекомендации, позволяющие уменьшить неблагоприятное влияние электромагнитных полей, излучаемых БС, на здоровье человека.

Features of the predicting calculation of the hygienic protective zone set around transmitting antennas of the base stations (BS) of the Wi-Fi network in the closed premises are considered. Numerical examples of calculation are given, the recommendations allowing to reduce unfavorable influence of the electromagnetic fields radiated by BS to people's health are worked out.

Электромагнитные поля, создаваемые излучающими радиоэлектронными устройствами, воздействуют на организм человека, и такое воздействие может быть неблагоприятным. Для исключения этого в Государственных санитарно-эпидемиологических правилах и нормативах (СанПиН) установлены предельно допустимые уровни (ПДУ) электромагнитного излучения [1–3]. Для обеспечения безопасности людей выделяют санитарно-защитную зону (СЗЗ).

Для точного определения границ СЗЗ используют приборы, но при массовом распространении сетей Wi-Fi целесообразно проведение прогнозирующего расчета границ СЗЗ. Это упрощает выбор технических параметров оборудования, места расположения, ограждения и обозначения СЗЗ в общественных помещениях и жилых домах.

Часто реализацию сети Wi-Fi самостоятельно выполняют обычные владельцы компьютерных средств. Предлагаемая здесь методика

позволяет даже им определить расстояния до границы СЗЗ. Если проведение инструментального контроля затруднено из-за отсутствия необходимого оборудования, то такой расчет будет единственным средством определения места расположения СЗЗ и обеспечения гигиенических требований при эксплуатации сети.

Расчет расстояния от центра антенны до границы СЗЗ. При эксплуатации сети Wi-Fi в закрытых помещениях основным источником электромагнитных полей, воздействующих на среду обитания и здоровье человека, служит базовая станция сети (БС), приемо-передающая антенна которой излучает колебания. В настоящее время для обмена данными применяют радиосигналы диапазонов частот 2,4 ГГц (2400...2483,5 МГц) и 5 ГГц (5150...5350 МГц), и для них предельно допустимый уровень (ПДУ) плотности потока энергии (ППЭ) электромагнитного излучения внутри закрытых помещений, установленный в СанПиН, не должен превышать $P_{\text{ПДУ}} = 10,0 \text{ мкВт/см}^2$ [1...3]. Для нескольких источников излучения этот уровень равен суммарному значению ППЭ.

Расстояние до границы СЗЗ зависит как от технических показателей радиосредств, так и от условий распространения радиоволн. Как правило, в технических описаниях оборудования, предлагаемого торговыми организациями, технические параметры устройств приведены в логарифмических значениях величин, для которых в качестве базовых используют обычно применяемые значения. Для упрощения вычислений целесообразно и в расчетных формулах использовать именно эти значения, а окончательный результат получать в сантиметрах.

Учитывая $P_{\text{ПДУ}} = 10,0 \text{ мкВт/см}^2$, логарифмическое значение расстояния от центра антенны до границы СЗЗ находится по формуле [4]

$$R_{\text{СЗЗ,дБ}} (\text{исх. 1 см}) = P_{\text{ПЕР,дБм}} + G_{\text{ПЕР,дБи}} + F_{\text{ПЕР,дБ}} (\alpha) + F_{\text{ПЕР,дБ}} (\varphi) + \eta_{\text{ПЕР,дБ}} + k_{\text{Ф,дБ}} + 9, \quad (1)$$

где $P_{\text{ПЕР,дБм}}$ – выходная мощность радиопередатчика БС, для которой в качестве базового выбрано значение 1 мВт; $G_{\text{ПЕР,дБи}}$ – коэффициент усиления передающей антенны в направлении максимального излучения, определенный относительно изотропного излучателя, имеющего значение

$G = 1$; $F_{\text{ПЕР,дБ}}(\alpha)$ – нормированное относительно максимального значение диаграммы направленности антенны (ДН) по мощности в вертикальной плоскости для угла, образованного направлениями на точку наблюдения и главного лепестка диаграммы направленности; $F_{\text{ПЕР,дБ}}(\varphi)$ – нормированное относительно максимального значение ДН по мощности в горизонтальной плоскости для угла, образованного направлениями на точку наблюдения и главного лепестка диаграммы направленности; $\eta_{\text{ПЕР,дБ}}$ – коэффициент, характеризующий потери в антенно-фидерном тракте радиопередатчика (при их отсутствии $\eta_{\text{ПЕР}} = 1$); $k_{\text{Ф,дБ}} = 20 \lg k_{\text{Ф}}$ – коэффициент, учитывающий изменение ППЭ из-за отражения радиоволн от поверхности, расположенной в непосредственной близости к антенне. Он определен относительно излучения в свободном пространстве, для которого $k_{\text{Ф}} = 1$. Для антенны, расположенной около диэлектрической поверхности, $k_{\text{Ф,дБ}} = 1,5$ дБ ($k_{\text{Ф}} = 1,2$), а металлической поверхности – $k_{\text{Ф,дБ}} = 3$ дБ ($k_{\text{Ф}} = 1,41$) [4]. Перевод значений, вычисленных по (1), к дольной единице длины (сантиметр) выполняют по формуле $R_{\text{СЗЗ}} = 10^{R_{\text{СЗЗ,дБ}}/20}$.

В технических описаниях для ДН обычно указывают $G_{\text{ПЕР,дБ}}$ и ширину ДН, определяемую углом между двумя направлениями ДН, границы которого соответствуют, как правило, двойному уменьшению мощности излученного радиосигнала – $2\theta_{0,5}$. Обычно считают, что ширина ДН в любой из плоскостей симметрична относительно направления ее главного лепестка, поэтому оба направления диаграммы, совпадающие с ее шириной, составляют с направлением главного лепестка одинаковые углы ($\pm \theta_{0,5}$), сумма которых определяет ширину ДН ($2\theta_{0,5}$).

Для ДН в вертикальной плоскости в принятых выше обозначениях это будет значение $2\alpha_{0,5}$, а в горизонтальной – $2\varphi_{0,5}$. Тогда при расчете расстояния в обоих направлениях ширины ДН по мощности нужно в (1) использовать значение $F_{\text{ПЕР,дБ}}(\theta_{0,5}) = \text{минус } 3$ дБ. В этом случае расстояние от центра антенны до границы СЗЗ по сравнению с расстоянием в направлении главного лепестка антенны $R_{\text{СЗЗ МАХ}}$ в логарифмическом

значении изменится на минус 3 дБ, а в единице длины (сантиметр) его можно рассчитать по формуле $R_{СЗЗ 0,5} = 0,707 R_{СЗЗ МАХ}$.

Для примера рассмотрим расчет расстояния от центра антенны до границы СЗЗ при использовании одного из вариантов комплекта оборудования БС сети Wi-Fi, часто предлагаемого торговыми организациями. В его состав входит БС, имеющая значение выходной мощности радиопередатчика 17 дБм, и коллинеарная антенна, реализованная на основе симметричного полуволнового вибратора, которую рекомендуют устанавливать вертикально. Коэффициент усиления антенны относительно изотропного излучателя $G_{ПЕР,дБи} = 5$ дБи, в горизонтальной плоскости она излучает равномерно по всем направлениям ($F_{ПЕР,дБ}(\varphi) = 0$ дБ), а вертикальной плоскости ширина ДН антенны составляет $2\alpha_{0,5} = 32^\circ$. Подключение антенны к БС непосредственное, поэтому можно принять $\eta_{ПЕР,дБ} = 0$ дБ.

Расстояние (1) от центра антенны до границы СЗЗ в направлении максимального излучения в свободном пространстве ($k_{\Phi,дБ} = 0$ дБ) составит 31 дБ или ориентировочно $R_{СЗЗ МАХ} = 35,4$ см. При расположении антенны вблизи диэлектрической отражающей поверхности (например, кирпичной стене), для которой принимаем $k_{\Phi,дБ} = 1,5$ дБ, расстояние увеличится до 42,2 см, а к металлической поверхности ($k_{\Phi,дБ} = 3$ дБ) – до 50,1 см. В направлении границ ширины ДН эти расстояния составят: в свободном пространстве – 25,1 см, при диэлектрической отражающей поверхности – 29,8 см, при металлической – 35,4 см.

Форма СЗЗ. Антенна в различных направлениях может излучать по-разному, поэтому расстояния до границы СЗЗ рассчитывают от центра антенны, относительно которого определяют и форму СЗЗ. Рассчитать наиболее точную форму СЗЗ позволяет приведение в техническом описании антенны графического изображения ее ДН, из которого можно для каждого из углов (α и φ) определить и использовать при расчете соответствующие значения $F_{ПЕР,дБ}(\alpha)$ и $F_{ПЕР,дБ}(\varphi)$. Но очень часто графическое изображение ДН отсутствует, и в этом случае форму СЗЗ целесообразно выбрать в виде простых геометрических фигур.

Рассмотрим возможные варианты формы СЗЗ на примере часто используемых на практике установленных вертикально симметричного полуволнового вибратора или указанной выше коллинеарной антенны, имеющих похожий вид ДН. В горизонтальной плоскости эти антенны излучают равномерно во всех направлениях, и при их расположении в свободном пространстве СЗЗ в этой плоскости имеет форму круга радиуса $R_{СЗЗ\text{ МАХ}}$, в центре которого размещена антенна.

Типовым служит размещение антенны около стены помещения или корпуса оборудования. В этом случае расположение рассматриваемых антенн в непосредственной близости к вертикальной отражающей поверхности вызовет наибольшее увеличение расстояния до границы СЗЗ в направлении, противоположном направлению нормального (перпендикулярного) падения радиоволны на поверхность отражения. Тогда значение расстояния между центром антенны и границей СЗЗ в этом направлении нужно рассчитывать, применяя для диэлектрической отражающей поверхности $k_{Ф,дБ} = 1,5$ дБ, а для металла – $k_{Ф,дБ} = 3$ дБ.

В других направлениях расстояние до границы СЗЗ может быть и значительно меньше максимального, но для упрощения целесообразно принять, что СЗЗ в этой плоскости имеет вид круга постоянного радиуса $R_{СЗЗ\text{ МАХ}}$, вычисленного при соответствующем значении $k_{Ф,дБ}$, с центром в месте размещения антенны, и этот круг ограничен отражающей поверхностью. Возникающее в этом и других рассмотренных ниже случаях завышение расстояния до границы СЗЗ будет составлять гигиенический запас, снижающий риск воздействия.

В вертикальной плоскости излучение антенн ограничено шириной ДН, и форму СЗЗ в этой плоскости относительно оси антенны можно выбрать прямоугольной. Для излучения в свободном пространстве она будет симметричной относительно этой оси. Тогда размер прямоугольника в направлении главного лепестка ДН определит расстояние от центра антенны до границы СЗЗ, и его следует принять равным $R_{СЗЗ\text{ МАХ}}$. Смежная сторона в прямоугольнике симметрична относительно направления главного лепестка ДН, и ее размер определит

сумма отклонений расположения границ для $\alpha_{0,5}$ от направления главного лепестка ДН. При симметричности ширины ДН каждое из отклонений рассчитывается по формуле $l_{\text{откл}} = R_{\text{СЗЗ } 0,5} \sin \alpha_{0,5}$. В случае расположения антенны на высоте, не превышающей рост человека, для повышения безопасности разделять СЗЗ по вертикали на сектора нецелесообразно.

Если вертикальная отражающая поверхность расположена в пределах ширины ДН, то при расчете расстояний от центра антенны до границы СЗЗ в направлении главного лепестка ДН и размера смежной стороны необходимо учитывать соответствующие значения $k_{\text{ф,дб}}$. В этом случае форму СЗЗ целесообразно принять прямоугольной относительно оси антенны, но ограниченной отражающей поверхностью.

Изменение расположения рассматриваемых антенн с вертикального на горизонтальное приведет к изменению соответственно и форм СЗЗ в плоскостях. Теперь в горизонтальной плоскости форма СЗЗ будет прямоугольной, а в вертикальной – иметь вид круга, сохранив при этом рассчитанные выше значения параметров этих фигур.

У антенн, излучение которых в основном сосредоточено в направлении, противоположном плоскости отражения (например, при расположении на такой плоскости панельной антенны), влиянием отражения можно пренебречь. Если антенна расположена на высоте, не превышающей рост человека, то для повышения безопасности людей разделять СЗЗ по вертикали на сектора нецелесообразно.

Влияние на границу СЗЗ высоты расположения антенны. В некоторых случаях, например при реализации сети Wi-Fi в образовательных организациях или жилых помещениях, существует возможность присутствия в СЗЗ людей, особенно детей. Для исключения этого нижнюю границу СЗЗ для излучений данного диапазона частот устанавливают на высоте 2 м от поверхности, на которой может пребывать человек [1, 2]. В помещениях это нижний настил: пол, ступени лестницы, пандус и т.д. Тогда антенну следует установить на высоту h_A , при которой расстояние дополнительного подъема ее центра h_D от

двухметрового уровня должна обеспечивать границу СЗЗ в направлении нижнего настила помещения на высоте не менее 2 м от него.

Направление максимального излучения антенны в вертикальной плоскости может быть различным: в сторону настила помещения (при потолочных антеннах), параллельно ему (у вертикально установленных симметричного полуволнового вибратора или коллинеарной антенны) или другим, что необходимо учитывать при расчете $h_{\text{д}}$.

Если известен угол между направлением главного лепестка ДН и проходящей через центр антенны плоскостью горизонта ($\alpha_{\text{доп}}$), то высота дополнительного подъема центра антенны в направлении настила помещения рассчитывается по формуле $h_{\text{д}} = R_{\text{СЗЗ}} \sin(\alpha + \alpha_{\text{доп}})$, где α – угол между направлениями на точку наблюдения в сторону настила и главным лепестком ДН. Например, у потолочных антенн $\alpha = 0^\circ$, $\alpha_{\text{доп}} = 90^\circ$ и высота дополнительного подъема равна $R_{\text{СЗЗ MAX}}$ – расстоянию до границы СЗЗ в направлении главного лепестка ДН антенны.

Если главный лепесток ДН направлен параллельно настилу помещения ($\alpha_{\text{доп}} = 0^\circ$), и в описании для вертикальной плоскости указана лишь ширина ее ДН ($2\alpha_{0,5}$), то высота дополнительного подъема центра антенны $h_{\text{д}0,5} = R_{\text{СЗЗ}0,5} \sin \alpha_{0,5}$. Например, для вертикально установленной коллинеарной антенны ширина ее ДН в вертикальной плоскости $2\alpha_{0,5} = 32^\circ$, поэтому при размещении антенны вдали от отражающей поверхности высота дополнительного подъема антенны составит $h_{\text{д}0,5} = 25,1 \sin 16^\circ = 6,9$ см, а общая высота расположения ее центра $h_{\text{А}}$ должна быть не менее 206,9 см. При размещении антенны вблизи диэлектрической поверхности $h_{\text{д}0,5 \text{ ДП}} = 8,2$ см, и общая высота расположения – не менее 208,2 см, а вблизи металлической поверхности $h_{\text{д}0,5 \text{ МП}} = 9,7$ см и общая высота – не менее 209,7 см.

В случае, когда значение $\alpha_{\text{доп}}$ можно определить лишь приближенно, целесообразно при определении высоты дополнительного подъема рассчитать отклонение расположения границ от проходящей через центр антенны плоскости горизонта как в направлении главного лепестка ДН, так и ее ширины, и высотой подъема выбрать большее из них.

Формула (1) позволяет найти расстояние до границы СЗЗ для оборудования с различными техническими показателями. Если их нет в документации, то можно воспользоваться табл. 1, в которую сведены расчеты для двух типовых комплектов сетей Wi-Fi.

Таблица 1. Расчет расстояний до границы СЗЗ

Выходная мощность передатчика БС, $P_{\text{ПЕР,дБм}}$, дБм	20 (100 мВт)			17 (50 мВт)		
$k_{\text{Ф,дБ}}$, дБ	0	1,5	3	0	1,5	3
Антенна - симметричный полуволновой вибратор $G_{\text{ПЕР,дБи}} = 2,15$ дБи, $2\varphi_{0,5} = 360^\circ$, $2\alpha_{0,5} = 80^\circ$						
$R_{\text{СЗЗ МАХ}}$, см	36,1	43	50,9	25,5	30,4	36,1
$R_{\text{СЗЗ 0,5}}$, см	25,5	30,4	36,1	18,1	21,5	25,5
$l_{\text{ОТКЛ}}$, см	16,4	19,7	23,1	11,6	13,8	16,4
$h_{\text{А}}$, см	216,4	219,7	223,1	211,6	213,8	216,4
$k_{\text{Ф,дБ}}$, дБ	0	1,5	3	0	1,5	3
Коллинеарная антенна $G_{\text{ПЕР,дБи}} = 5$ дБи, $2\varphi_{0,5} = 360^\circ$, $2\alpha_{0,5} = 32^\circ$						
$R_{\text{СЗЗ МАХ}}$, см	50,1	59,7	70,7	35,4	42,2	50,1
$R_{\text{СЗЗ 0,5}}$, см	35,4	42,2	50,1	25,1	29,8	35,4
$l_{\text{ОТКЛ}}$, см	9,7	11,6	13,8	6,9	8,2	9,7
$h_{\text{А}}$, см	209,7	211,6	213,8	206,9	208,2	209,7

Технические параметры одного из них приведены выше, а второй комплект включает в себя передатчик БС с выходной мощностью 20 дБм и антенну – симметричный полуволновой вибратор ($G_{\text{ПЕР,дБи}} = 2,15$ дБи), ширина ДН которого в вертикальной плоскости составляет $2\alpha_{0,5} = 80^\circ$, а в горизонтальной плоскости антенна излучает равномерно по всем направлениям ($F_{\text{ПЕР,дБ}}(\varphi) = 0$ дБ).

Выбор такого второго типового комплекта обусловлен тем, что максимально допустимое значение выходной мощности радиопередатчика БС, эксплуатация которого в закрытых помещениях не требует регистрации в государственных органах и оформления отдельных разрешений на использование радиочастот или радиочастотных каналов,

для диапазона 2,4 ГГц не должна превышать 20 дБм (100 мВт). Эти комплекты предполагают непосредственное соединение БС и антенн, поэтому при расчетах принято $\eta_{\text{ПЕР,дБ}} = 0$ дБ.

Вывод. Предложенная методика позволяет вычислить ориентировочные значения расстояний до границы санитарно-защитной зоны, а реальное расположение границ определяется инструментальным контролем. Это позволит уменьшить неблагоприятное влияние на здоровье человека электромагнитных полей, создаваемых антеннами аздовых станций сети Wi-Fi внутри закрытых помещений.

Список литературы

1. СанПиН 2.1.8/2.2.4.1383-03 Гигиенические требования к размещению и эксплуатации передающих радиотехнических объектов (ред. от 19.12.2007 г.). [Электронный ресурс]. URL: <http://base.garant.ru/12131290/> (дата обращения: 26.09.2016).

2. СанПиН 2.1.8/2.2.4.1190-03 Гигиенические требования к размещению и эксплуатации средств сухопутной подвижной радиосвязи. [Электронный ресурс]. URL: <http://www.consultant.ru/cons/cgi/online.cgi?req=doc&base=LAW&n=41563&fld=134&dst=1000000001,0&rnd=0.3805381335681064> (дата обращения: 26.09.2016).

3. СанПиН 2.1.2.2645-10 Санитарно-эпидемиологические требования к условиям проживания в жилых зданиях и помещениях. [Электронный ресурс]. URL: <http://www.rg.ru/2010/07/21/sanpravila-dok.html> (дата обращения: 26.09.2016).

4. Догадин Н.В. Ориентировочный расчет границ санитарно-защитной зоны в местах размещения базовых станций сетей Wi-Fi в закрытых помещениях // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ.– 2016.– Вып. 13.– С. 238–246.

Догадин Николай Борисович – д.т.н, профессор, г. Волгоград.
E-mail: dogadin@vspu.ru

В ПОРЯДКЕ ОБСУЖДЕНИЯ

ОБ УТРАТЕ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ В МАТЕМАТИКЕ, МЕХАНИКЕ И ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ: ДИСЦИПЛИНА ОБСУЖДЕНИЙ

Р. И. Березуев

Рассматривается проблема нелинейности рассуждений с использованием нескольких формальных систем на протяжении одной цепочки теоретических построений. Объясняются причины появления нетеоретических частей в случае описания эксперимента.

The problem of nonlinearity of reasonings with use of several formal systems during one chain of theoretical constructions is considered. The reasons for occurrence of not theoretical parts in case of the description of experiment are finding.

Подготовительный этап и сравнение с эталоном. В работах Клышко Д.Н. и Липкина А.И. недостаточно разъясняется, почему «подготовительный этап» нельзя включить в теоретическую часть квантовой механике (КМ).

Отсутствие достаточного обоснования признают сами авторы: «процедура измерения (сравнения с эталоном) содержит часть, которая не может быть описана в рамках того раздела физики, в котором она используется»[3, с. 759].

Основная идея статьи состоит в том, что теоретики в принципе не могут обобщить свою теорию или модель, включив в неё операциональный смысл. Вместо рассмотрения всех процедур измерения достаточно рассмотреть только случаи нарушения детерминизма – когда следствия не удается предсказать по известным предпосылкам.

Междисциплинарные задачи. Теоретическая физика может предсказать далеко не все результаты измерений. Это связано со сложностью и стохастичностью явлений. Примером случайного события может служить выпадение «герба» при бросании монеты. Отметим, что каждое случайное событие, в частности выпадение «герба», есть следствие действия очень многих случайных факторов (в рассматриваемом примере: сила, с которой брошена монета; форма монеты и многие другие). Теория вероятностей не ставит перед собой задачу учитывать эти факторы в расчетах.

Наиболее очевидным разрывом цепочки последовательных рассуждений в КМ является «редукция» или «коллапс» волновой функции (ВФ). В ряде работ необходимость понятия редукции ВФ подвергается сомнению. Согласно [4, с.351], *«проекционное правило фон Неймана следует рассматривать как чисто математическое и ему не следует придавать никакого физического смысла»*. В [5, с.294]: *«при проведении тщательного различия между процедурой приготовления и процедурой измерения проективный постулат не нужен»*.

Даже в теории вероятности нельзя трактовать наблюдаемые исходы в терминах вероятностей или случайных событий. ***Из вероятности невозможно вывести наблюдаемый исход.*** Исходы добавляются только в качестве предпосылок. В случае редукции ВФ происходит именно это – от вероятности пытаются перейти к наблюдаемому исходу.

Проблема в том, что *наблюдаемые исходы* (нельзя произносить *случайные события*) могут быть учтены только в качестве исходных предпосылок, то есть формальная система, в которой строили рассуждения в начале эксперимента, не будет совпадать с формальной системой в конце эксперимента. Остается либо пренебречь строгостью, добавляя снова и снова новые порции информации, либо дробить описание эксперимента на множество независимых участков, где математические модели и формальные системы не изменяются.

На данный момент математика не может предложить формальную систему, в рамках которой можно описать одновременно начало и конец

эксперимента в указанных условиях. Сюда попадают все эксперименты КМ, где предсказать результаты измерения теоретически невозможно.

Необходимость менять формальную систему во время рассуждений будем называть нелинейностью. Этот вид нелинейности не позволяет строить непрерывные цепочки рассуждений (привлекать информацию извне в математике запрещено). ***Подобные задачи будут называться междисциплинарными, а отсутствующая в начале рассуждений информация – операциональным содержанием,*** имеющим лишь косвенное отношение к математике. Рассмотрим задачу, в которой менять формальную систему приходится на каждом шаге.

Проблема авторства символов. Пусть несколько математиков решают совместно математическую задачу. Результатом будет некоторая цепочка символов. Принадлежность символа выражается через уникальный индекс каждого математика. Требуется определить автора каждого символа, выяснив, кто из математиков несет ответственность за его появление. Тогда:

(1) Не существует формальных правил, следуя которым математики могут одновременно получить цепочку символов и значения индексов.

Если (1) верно, то индексы необходимо постулировать, а при любом добавлении (изменении) символа потребуются расширять (изменять) совокупность исходных постулатов на протяжении всего рассуждения. Другими словами, нельзя все значения индексов задать с самого начала.

Эти соображения открывают особый вид междисциплинарных задач, когда формальные правила зависят от значений указанных индексов, например, «нельзя использовать подряд более 20 символов одного автора» и т.д. Достигнуть строгости в указанных условиях не представляет возможным, так как аксиомы, предпосылки и постулаты не заданы с самого начала, а могут меняться во время рассуждения. Эта не обычная математическая задача приводит к мысли:

(2) Необходимо разделить (1) на две отдельные задачи: доказательство теоремы и измерение значений индексов.

Любое такое разделение делает решение задачи невозможным, обе задачи решаются только одновременно, после чего их уже можно разделить. Рассмотрим (1) как постановку задачи для реального физического эксперимента по правилам экспериментальной физики. Для фиксации результатов работы математиков используем контроль версий («измерительный прибор»). В каждый момент времени мы будем знать автора каждого символа этого доказательства.

Принцип относительности математики. Истинность (1) вытекает из стремления сделать математику предельно абстрактной дисциплиной. Приведем тезис Маршала Стоуна [6, с.344]: *«Математика \не имеет ни одной обязательной связи с физическим миром, помимо той смутной и несколько загадочной, что неявно содержится в утверждении о том, что процесс мышления происходит в мозгу».*

Именно эта оставшаяся последняя связь с реальностью и является целью измерения в нашем эксперименте. Математик просто вынужден выразить свои идеи каким-либо подручным образом, чтобы передать их другим математикам. Будут ли это символы, начерченные на песке, высказанные вслух или введенные с помощью компьютера – их физические характеристики не передают математического содержания, но вполне достаточны для вычисления их создателя.

С точки зрения экспериментальной физики у любого символа всегда один и только один создатель. Если эксперимент проводить несколько раз, то, естественно, индексы могут различаться, даже если доказательства окажутся идентичными. Математик сам выступает той единственной связью с реальностью, от которой нельзя избавиться, но которую можно проигнорировать после окончания всех построений.

Этот физический факт задает своего рода некую *«систему координат»*, поскольку мы всегда можем потребовать информацию об авторстве, не спрашивая разрешения у математиков. Вопрос лишь в правильном измерении указанной величины.

Утрата абстрактности и непредсказуемость сознания. В формулировке (2) подразумевается независимость доказательства теоремы

от измерения каких-либо физических свойств. Мы всегда можем рассматривать абстракцию независимо от любого физического содержания. Но из этого не следует, что (1) можно разбить на две независимые задачи и каждую из них решать отдельно.

Можем ли мы провести все необходимые измерения за год до доказательства математиками теоремы? Не сможем, поскольку тогда еще нечего будет измерять. Зададим другой вопрос: можем ли мы провести измерения через год после окончания доказательства? Тоже не можем, так как данные утеряны. Измерения нужно проводить именно в тот момент, когда математики занимаются доказательством теоремы.

Требуется, чтобы все измерения проводились во время доказательства, и каждый символ связывался с сопутствующей физической информацией. Нарушение этого правила делает вычисление индекса невозможным. Другими словами, стремление к абстрактности не даёт измерить величину, соответствующую каждому символу.

Раздельное рассмотрение не подразумевает, что один из процессов можно остановить или даже перенести на другое время без корректировки другого связанного с ним процесса. Соблюдение строгости одновременно с сохранением абстрактности возможно только после окончания эксперимента, когда измерения закончены, и выводы завершены.

Часто теоретики и практики рассуждают во время выполнения эксперимента и даже до его начала, но в указанных условиях строгости одновременно с сохранением абстрактности можно только по его окончании, когда никакие логические построения не будут выполняться ни в каком виде. Так, если мы в цепочке рассуждений на разных участках привлекаем разные математические модели для описания явления (например, для волны или для частицы), то *формальное построение не может быть одновременно и строгим, и абстрактным.*

Попробуем вычислить авторство символов, выполняя некие формальные правила. Например, подписывать их своим уникальным индексом, либо использовать символы только из своего подмножества.

Тогда без всяких измерений мы получаем требуемый результат – каждый символ отдельного математика связан с нужным индексом.

Однако во всех таких случаях неявно привлекаются физические соображения. Во-первых, мы не можем включить такие правила в формальную систему – правила различаются от математика к математику. Во-вторых, задача (1) должна рассматриваться как постановка физического эксперимента, то есть возникает вопрос о фальсификации. Вдруг математик по ошибке подписался индексом другого математика, либо использовал символ не из своего подмножества? Выявляются подобные ошибки всё тем же способом – протоколированием всех действий математиков. Тем самым, указанные правила неявно используют физические соображения, хотя маскируются под формальные процедуры.

Отличие между формальными системами. Усложним эксперимент: пусть каждый математик доказывает разные теоремы, для разных формальных систем. Разместив построения по разным файлам и предоставив доступ к каждому файлу только одному математику, можно обеспечить, что каждый математик вносит изменения только в один файл.

Если мы знаем, кто автор символов, то известно, какой системе принадлежит цепочка символов. Верно обратное – если известна принадлежность символов к формальной системе (определенному файлу), то известно, кто автор символов, а это, как было доказано, не может быть выяснено без привлечения физических соображений. Следовательно, принадлежность построений к определенной формальной системе зависит от неких внешних физических факторов.

(3) Проблема авторства символов эквивалентна задаче выбора формальной системы.

Возвращаясь назад по цепочке построений, мы приходим к набору аксиом и исходных посылок, по которым отличаем одну формальную систему от другой. Поэтому физические соображения сводятся к выбору перечня аксиом и предпосылок, то есть задаче, лежащей вне математики.

У этого «объяснения» два существенных недостатка. Во-первых, это не снимает проблемы выполнения измерений каждый раз, когда мы

задаемся вопросом о принадлежности некоторой цепочки символов к определенной формальной системе. Во-вторых, нет никакой причины, по которой оговоренное измерение должно давать всегда один и тот же результат, поскольку математики не проводят различия между принадлежностью символа к формальной системе или принадлежностью символа к цепочке последовательных построений.

Результат измерения может до определенного момента времени иметь одно значение, а в последующие моменты времени другое. Тем самым, *мы приходим к логике, в которой правила рассуждений меняются во время рассуждения*. Цепочка построений одна, но правила в разные моменты времени существенно отличаются.

Дополнительная характеристика для каждого символа вводится, чтобы различать построение в одной формальной системе от построений в другой формальной системе. Такой характеристикой является принадлежность символа определенному файлу. Только, выделив все символы в одном файле, можно выяснить, какие аксиомы формулируются этими символами. Иначе нет возможности определить принадлежность символов, а значит и аксиом, к формальной системе.

Нельзя для одной задачи (принадлежность символа формальной системе) требовать решения в любых математических построениях, а вторую задачу (проблему авторства символов) считать не относящейся к математике. Нельзя абстрагироваться от того, чего мы не знаем, раздельное рассмотрение и независимое рассмотрение – не одно и то же.

Между строгостью и абстрактностью: «абстрактнее» любой абстракции. Попытка дать определение «системе координат» приводит к непреодолимым трудностям – определение выходит за рамки формальных систем и даже аксиоматического подхода.

Продемонстрируем это простым экспериментом – математик сидит в отдельной комнате и занимается всем, чем он захочет – доказательством теорем, изобретением новых формальных систем и т.д. Какие бы рассуждения он не строил, какие бы абстракции не придумывал, все эти абстракции не могут выйти за рамки его системы координат.

(4) Ни один математик не может выйти за рамки своей системы координат, никогда и ни при каких обстоятельствах.

Понятие «системы координат» стоит выше в абстрактной иерархии, чем любые абстракции, которые можно задать при помощи формальных систем, то есть вся математика является относительной. Требование же всегда и везде стремится к строгости и одновременно к абстрактности не сочетается с теорией и практикой.

По-видимому, это одна из главных причин, из-за которой «общепринятый» подход в философии науки был отвергнут [2, с.34]. Согласно ему «научная теория должна быть аксиоматизирована на языке математической логики...», что превращало бы теоретическую физику в математическую физику [2, с 40]. На сегодня общепринятый подход отвергнут, как непригодный для анализа научных теорий, но ни одна из предложенных альтернатив не получила широкого признания.

Квантовая механика: на грани здравого смысла. Логические проблемы КМ ставят сложные вопросы. Эксперимент с отложенным выбором показывает недостаточность простой корпускулярно-волновой интерпретации [7, с.61]: «Как только свет оказался в интерферометре, мы не можем говорить о нем ни как о волне, ни как о частице. Не получается также соединить два описания в некий странный гибрид”.

Еще важнее, что в одном эксперименте, в одно время, у разных наблюдателей должны быть разные математические описания. Это наиболее очевидно в парадоксе друга Вигнера [8], который показал, что для экспериментатора и его друга должны быть разные описания.

Менский [9] пришел ко вполне определенному выводу, что сознание следует явным образом учитывать при анализе квантового измерения: «Если сознание наблюдателя исключено из описания измерения, то суперпозиция, существовавшая перед измерением, не исчезает в результате действия прибора». Это не подразумевает какое-либо влияние сознания на эксперимент.

В случае, когда результат предсказать невозможно, этот момент осознания разрывает непрерывную цепочку теоретических рассуждений

на участок до измерения и участок после измерения. Следовательно, весь учёт сознания в КМ сводится к явному указанию того момента, где в рассуждениях происходит переход.

Осознание момента перехода помогает решить еще одну сложную субъективную проблему – наблюдатель сам должен учитывать, как он проводит границу между квантовым миром и классическим: *«Мы все равно должны будем разделить мир на две области — квантовую и классическую с различными законами в разных областях»* [5, с.257].

Сознание наблюдателя не требует какого-либо иного упоминания. Это решение принципиально отличается от рассмотренных ранее вариантов, которые предусматривают некоторое математическое описание в рамках единственной формальной системы. Однако у нас разные формальные системы с разными математическими описаниями. Даже не зная результата измерения, необходимо уточнять, идет речь о рассуждениях до измерения или после, а также принадлежат ли эти рассуждения Вигнеру или его другу.

Такая замена происходит для всего физического явления, даже если оно простирается на значительное расстояние. В такой ситуации может возникнуть ложное впечатление обмена информацией между разными частями явления со скоростью, превышающей скорость света. При количественном анализе подобных экспериментов с отложенным выбором, как парадокс Эйнштейна-Подольского-Розена, нет необходимости использовать понятие редукции и вводить нелокальное взаимодействие между удаленными приборами. *«Ясно, что для наблюдения корреляции необходим обычный классический канал связи между детекторами»* [1, с.987]. Наблюдатель может узнать о корреляции измерений, только если сравнит их [7, с.185].

Парадокс Белла (фотоотсчеты в двух удаленных детекторах) указывает на то, что *«использование термина квантовая нелокальность, подразумевает некую таинственную, весьма специфическую взаимосвязь удаленных приборов, подобную телепатии...»* [1, с. 985].

Правильным подходом к различным «неклассическим» эффектам и «квантовым парадоксам» представляется *концепция неколмогоровости КМ* [1, с.986]. Когда амплитуда волны получается комплекснозначной, но продолжает интерпретироваться как вероятность. Вполне естественно, что комплексная вероятность приводит к отсутствию совместных распределений и априорных значений в случае некоммутирующих наблюдаемых.

Иногда совместные распределения существуют, но отрицательны: *«эффект антигруппировки фотонов, проявляющийся в уменьшении флуктуации фототока ниже уровня, соответствующего обычному фотонному шуму. Этот уровень называют стандартным квантовым пределом»* [1, с.985]. Все примеры показывают одно и то же – математическое описание до измерения отличается от описания после измерения. Теорема Белла лишь фиксирует факт различия двух описаний.

Отрицательная или комплексная амплитуда волны неприменима к неотрицательному распределению вероятности. *«Естественно поэтому принять, что приписывание частице априорно существующих координат и импульсов теряет смысл»* [1, с.980].

Подход Липкина и Клышко не требует отменять локальность. Он также объединяет различные воззрения на КМ: *«двум подходам к ВФ — ортодоксальному и ансамблевому — соответствуют различные экспериментальные процедуры – подготовительная и измерительная»* [1, с.1010]. Это устраняет их несовместимость. Оба подхода имеют операциональное обоснование — каждый свое.

Противоречия тензорного анализа сетей Крона. С именем известного американского учёного Габриэля Крона и его тензорной методологией в теории цепей связаны беспрецедентные дискуссии в теоретической электротехнике [10,11]. Центральным пунктом всегда была проблема используемого метода рассуждений. Б. Хоффман описывает свое первое знакомство со статьей Крона: *«К моему удивлению я обнаружил, что не понимаю статью.»* [10, с.7].

Возможно, что причина непонимания Крона в использовании им операционального смысла совместно с формальными преобразованиями. Центральной идеей Крона является преобразование систем координат: *«нахождение формальной процедуры, позволяющей получить уравнение поведения системы на всех возможных типах структур при условии, что это уравнение известно для одной структуры»* [10, с.17]. Эта формулировка может поставить в тупик любого инженера.

Представьте себе, что все узлы электрической цепи закорочены или цепь разрублена так, что разъединились все ее контуры. Теперь предлагается рассчитать полученные цепи и обратным преобразованием получить токи и напряжения в исходной цепи. Очевидно, что Крон ставит один символ в соответствие совершенно разным физическим процессам на разных этапах своего рассуждения.

Также мы не просто берём формальную систему со всеми доказанными теоремами и возможными следствиями и заменяем её другой, тоже полностью изученной формальной системой. Не законченные рассуждения прерываются посередине и продолжают уже по другим правилам. Например, в КМ не выводятся все возможные следствия из ВФ, которых бесконечно много.

«Проблема перехода, игнорируемая теорией, может иметь важное значение. ... переход, возможно, является причиной коллапса ВФ, или, по крайней мере, глубоко связан с ним. ... нигде в стандартном рассмотрении даже не упоминается о коллапсе» [7, с.239]. Нет ни одного случая применения уравнения Шредингера к процессу, связанному с коллапсом ВФ.

«Таким образом, проблема коллапса ВФ фактически не рассматривается КМ. ... Теперь мы спросим, что же уравнение Шредингера в действительности описывает. Мы обнаружим удивительный факт: согласно уравнению Шредингера, измерения никогда не происходят»[7, с.239].

Метод Крона также схож с использованием метода «затравочной классической модели» [2, с.132]. Берется «затравочная» модель из

классического раздела, после чего вводятся определенные процедуры преобразования классического образа системы в квантовомеханический.

«В КМ эта процедура используется при постановке задачи (поищите, откуда берется гамильтониан той или иной квантовомеханической задачи, и вы найдете лежащую в ее основании “затравочную” классическую модель).» [2, с.133].

Это похоже на преобразование систем координат у Крона. Мы строим модель в классическом мире, спускаемся в квантовый мир, потом опять поднимаемся в мир классической физики. Все эти переходы связаны с совершенно разными математическими моделями, меняются так же и процедуры измерения вместе с состоянием системы.

Выводы: **1.** Обоснована необходимость включения «нетеоретических частей» (операционального смысла) в «умеренный» операциональный подход [1, с. 977]. Использование операционального смысла рассматривается как разрыв непрерывной цепочки теоретических построений. **2.** Вместо противоречивого объединения несовместимых между собой понятий предложено разбивать логические построения на отдельные фрагменты, в которых модели и правила не изменяются. **3.** Показано, что математика является частным случаем междисциплинарных задач, а не наоборот, что междисциплинарные задачи всего лишь упрощенный частный случай применения математики. **4.** Эквивалентность «проблемы авторства символов» выбору формальной системы уточняет границы математики и подводит к новой «относительной» математике. **5.** Показано, что абстрактность и строгость могут сосуществовать только при соблюдении определенных условий, но в теории и на практике эти условия часто нарушаются.

Список литературы

1. Клышко Д.Н. Основные понятия квантовой физики с операциональной точки зрения // УФН.– 1998.– Т. 168.– №9.– С. 975–1015.
2. Липкин А.И. Основы современного естествознания.– М.: Вузовская книга, 2001. – 301 с.

3. Клышко Д.Н., Липкин А.И. О "коллапсе волновой функции", "квантовой теории измерений" и "непонимаемости" квантовой механики" // Исследовано в России: электронный журнал.–2000.–Вып.53.–С. 736–785.
4. Pascazio S., Namiki M. Fundamental Problems in Quantum Theory // Ann. New York Acad. Sci. / Eds D.M.Greenberger, A.Zelinger.– New York: The New York Acad. Sci., 1995.– Vol. 755.– P. 335.
5. Садбери А. Квантовая механика и физика элементарных частиц.– М.: Мир, 1989.– 481с. [Sudbery A. Quantum Mechanics and the Particles of Nature.– Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1986].
6. Клайн М. Математика. Утрата определенности.– М.: Мир, 1984.–446 с.
7. Гринштейн Дж., Зайонц А. Квантовый вызов: Современные исследования оснований квантовой механики / Пер. с англ.: Учебное пособие.– Долгопрудный: Издательский Дом «Интеллект», 2008. — 400 с.
8. Wigner E.P. Remarks on the mind-body question / L.G. Good, editor // The Scientist Speculates.– London: Heinemann, 1961.– P. 284–302.
9. Менский М.Б. Человек и квантовый мир (странности квантового мира и тайна сознания).– 320 с. <http://fiz.1september.ru/2006/22/16.htm>
10. Крон Г. Тензорный анализ сетей.– М.: Сов. радио, 1978. – 720 с.
11. Березуев Р.И. Инвариант мощности электрической цепи и геометрия Крона // Схемно-топологические модели активных электрических цепей: синтез, анализ, диагностика: Тр. Международ. конф. «Континуальные алгебраические логики, исчисления и нейроинформатика в науке и технике». – Ульяновск: УлГТУ, 2004. – Т. 4.– С. 11–16.

Березуев Роман Иванович – инженер-программист
Тел.: +38(098)209-5239, e-mail: berezuev@ukr.net,
WEB-Homepage: <http://relativemathematics.blogspot.com>

КРИТИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ К РАБОТАМ ГАБРИЭЛЯ КРОНА

И. В. Ерохов

«Между тем, эти «научные работы» Крона представляют, по существу, рекламу фирмы, «шефом» и, вероятно, акционером которой является Крон».

(д.т.н., проф. Берендеев А.В., [1])

Критика отдельных положений работ Г. Крона появилась в советской печати намного раньше выхода в свет русского перевода книги: «Применение тензорного анализа в электротехнике». Несмотря на трудности послевоенного времени, ученые имели возможность следить за новыми научными публикациями, выходящими за рубежом. Советский профессор имел право каждый год покупать интересующие его книги на сумму в 200\$. Для этого он должен был вступить в общественную организацию, которую назовем условно «клубом профессоров».

Конечно, был обязательным достаточно большой ежегодный членский взнос – эквивалентный долларовой сумме будущей покупки. Но это давало ему возможность приобретать с помощью работников посольств необходимые для работы научные книги. Технические подробности процесса мне неизвестны, но я видел в личной библиотеке проф. Э.В.Зеляха иностранные книги, которые были получены по описанному выше «каналу». Они были куплены по списку, который мой Учитель составлял собственноручно.

Итак, первые критические заметки вышли в журнале «Электричество» в 1950 году [1]. Оригинальный текст заметки легко найти в интернет, где по адресу <http://www.booksite.ru/elektr/> расположен архив номеров журнала. Д.т.н., проф. А.В. Берендеев (ЛЭТИ) написал резко отрицательный отзыв о формулах «тензорного исчисления в концепции, принятой Кроном». Главный упрек автору тензорного анализа состоял в том, что он только формально обозначает пространства токов и

напряжений, не исследуя их свойств. Метрика этих пространств остается неизвестной, а поэтому тензорный анализ проводить нет возможности. Остается только объявлять переходы из одного пространства в другое с помощью матрицы, которую Крон назвал тензором преобразования.

В теории электрических цепей существуют матрицы соответствий (инциденций), например, ветвь-контур или ветвь-узел. С помощью этих матриц записываются законы Кирхгофа:

$$[B] \cdot \bar{U}^b = \bar{0}, \quad [A] \cdot \bar{I}^b = \bar{0}, \quad (1)$$

где $[B]$, $[A]$ – матрицы контурных и узловых инциденций; \bar{U}^b , \bar{I}^b – векторы-столбцы напряжений и токов ветвей.

Естественно, что известны и другие матричные уравнения с участием матриц инциденций, например,

$$[B]^t \cdot \bar{I}^k = \bar{I}^b, \quad [A]^t \cdot \bar{\varphi} = \bar{U}^b, \quad (2)$$

где \bar{I}^k , $\bar{\varphi}$ – векторы-столбцы контурных токов и потенциалов узлов.

По сути, транспонированные матрицы инциденций выступают здесь в роли тензоров (2), представленных матрицами [2]. С помощью этих уравнений осуществляется переход в пространство токов или напряжений ветвей, размерность которых больше пространств контурных токов или потенциалов узлов.

Нового в этом переходе из пространства в пространство нет. «Этим обстоятельством воспользовался Крон, так что его метод, по существу, является применением не тензорного, а именно матричного исчисления к электротехнике, которое было известно задолго до Крона» [1].

Отечественные последователи Г. Крона, до сих пор, используют тензорную символику при теоретических выкладках, а в иллюстрациях пользуются матричной алгеброй, например, [3]. Разобрав пример, читатель остается в недоумении и задается вопросом: зачем здесь приведена сложная тензорная символика, если для вычислений достаточно матриц?

На заметку [1] откликнулся д.т.н., проф. Грузов Л.Н. (ВНИТОЭ), оригинал отзыва можно найти в журнале «Электричество» за 1951 год [4]. Он поддержал профессора Берендеева: «Таким образом, следует сделать заключение, что для всех задач, рассмотренных Кроном, и **вообще для подавляющего большинства задач современной электротехники, достаточно применения матричной алгебры**».

Критический разбор теории Крона продолжил к.т.н., доц. Максимович Н.Г. (в последствие д.т.н., проф., ректор ЛвГУ). В журнале «Электричество» за 1952 год опубликована его статья: «К теории преобразования схем Г. Крона» [5]. Автор статьи не согласен с принципом инвариантности мощности преобразованных схем:

$$[\bar{e}]^t \cdot \bar{i}_e = [\bar{E}^*]^t \cdot \bar{I}_E^*, \quad (3)$$

где \bar{e} , \bar{E}^* – векторы ЭДС данной и преобразованной схемы;
 \bar{i}_e , \bar{I}_E^* – векторы токов через источники.

Действительно, преобразуется структура исходной схемы и, если параметры элементов остаются неизменными, то изменяются значения напряжений и токов ветвей преобразованной схемы. Обязательное равенство мощностей (3) вызывает сомнение, однако Крон возводит его в ранг принципа:

«Это соотношение определяет, по Крону, основную физическую связь, существующую между данной и преобразованной схемами» [5]. Делается вывод, что «теория преобразования Г. Крона базируется на ложном, неправильном выводе».

В следующем номере журнала д.т.н., проф. Грузов Л.Н. замечает, что равенство мощностей можно использовать как ограничение для класса преобразуемых схем [6]. В современных обозначениях равенство (7) из статьи [5] будет иметь вид:

$$\bar{E}_k = [B] \cdot \bar{e}_b, \quad (4)$$

что иллюстрирует получение вектора контурных ЭДС из вектора ЭДС ветвей. Конечно, в системе, составленной по второму закону Кирхгофа

$$\bar{e}_b = [B] \cdot i\bar{r}, \quad (5)$$

используется вектор источников, расположенных в ветвях. А в системе уравнений, составленных по методу контурных токов

$$\bar{E}_k = [B] \cdot [R_0] [B]^t \bar{I}_k, \quad (6)$$

где $[R_0]$ – диагональная матрица сопротивлений ветвей.

Естественно, что в выражении (6) используется вектор источников, расположенных в контурах. Формулы (5) и (6) описывают одну и ту же схему, поэтому равенство (3) под названием инвариант мощности будет выполняться. Таким образом, замечание проф. Грузова Л.Н. следует считать справедливым. Однако отметим, что все формулы, использованные для доказательства справедливости равенства (3) автором заметки [6], взяты из статьи [5]. Не понятно, почему были оставлены без внимания рис.1 и рис.2 их статьи [5], где показано расположение источников ЭДС в ветвях и в контурах, а также расписан порядок формирования вектора \bar{E}_k и приведена матрица уравнения (6).

Автор настоящей статьи знаком с монографиями Г. Крона [7], [8], но ему не удалось прочитать книгу, которая первой переведена на русский язык [9]. Могу сказать, что читать книги [7], [8] трудно из-за обилия ошибок и неточностей, а также большого числа оригинальных терминов и определений. Ограничимся только двумя примерами из множества примеров, трудных для понимания.

Начнем с того, что Крон вводит исходные понятия, которые должны были стать фундаментом его собственной теории электрических путей: а) примитивная узловая цепь (режим холостого хода ветви); б) примитивная контурная цепь (режим короткого замыкания ветви).

Первое понятие представляет собой множество отдельных ветвей схемы, узлы которых обладают потенциалами. Второе понятие соответствует совокупности ветвей, каждая из которых замкнута сама на себя и характеризуется током. Не все ветви включают в себе источник электрической энергии, поэтому некоторые потенциалы и токи будут

равны нулю. Автора монографии это не смущает, и он намеривается соединять примитивные цепи в любую электрическую цепь вместе с переменными, которые их характеризуют.

Примитивной узловой цепи в какой-то мере соответствует понятие ветви электрической цепи, поэтому легко представить объединение ветвей в схему с помощью матрицы узловых инциденций. Однако с другой примитивной цепью поступить аналогично не представляется возможным, так как матрица контурных инциденций связывает в электрическую цепь ветви, а не «примитивные контурные цепи».

Рассмотрим рис.1, взятый из книги [7], стр.136 на котором показано соединение двух примитивных контурных цепей.

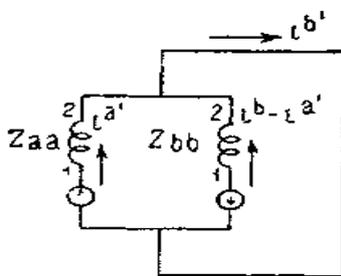


Рис. 4.4. Новые токи в катушках.

Рис. 1. Соединение двух примитивных контурных цепей.

Заметим, что тип соединения примитивных контурных цепей, рис.1, (последовательное, параллельное) установить не представляется возможным. Как видим, Крон изображает ветви примитивных цепей катушками индуктивности. Вероятно, такая привычка сформировалась во время работы над моделированием электрических машин. Попробуем угадать, какому реальному объекту может соответствовать модель, представленная на рис.1.

Предположим, что катушки Z_{aa} , Z_{bb} являются секциями обмотки якоря машины постоянного тока, тогда источники ЭДС, изображенные на рис.1, представляют напряжения, наведенные в катушках во время вращения ротора машины в магнитном поле. В момент, когда щетки перекрывают две соседние ламели коллектора, секции обмотки

замыкаются друг на друга. На рис.1 не обозначен внешний источник электрической энергии. Такое возможно как этап расчета токов по методу суперпозиции, на следующем этапе будут закорочены источники катушек. Именно это показано на рис.4.4 из монографии [7].

И вот на этом специфическом примере электрической цепи Крон вводит собственные понятия «старых» и «новых» токов. Если для описанного момента коммутации «новые» токи можно объяснить действием источников в секциях обмоток, то почему продолжает действовать «старый» ток i^b , а «старый» ток i^a исчезает? Мне кажется, что это не должно быть понятным ни одному вменяемому специалисту в области электротехники. Однако Крон считает, что введенное понятие примитивной (разомкнутой, замкнутой) цепи дает ему право рассматривать рис.4.4, не утруждая себя физической интерпретацией.

Второй пример связан с центральным понятием метода преобразования электрических цепей. Связь между «старыми» и «новыми» токами электрической цепи, рис.16.10 в монографии [7], устанавливается с помощью системы уравнений

$$\begin{aligned} i^a &= i^{a'} \\ i^b &= -i^{a'} + i^{p'} + i^{q'} + i^{r'} \\ i^c &= i^{b'} - i^{q'} \\ i^d &= -i^{b'} \\ i^f &= i^{a'} + i^{b'} + i^{p'} \end{aligned} ,$$

из системы следует матрица тензора прямого перехода:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Тензор обратного перехода получается из другой системы уравнений [7], мы приводим только ее матрицу:

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Однако, если тензор обратного перехода получить путем преобразования матрицы (7), то выражение будет отличным от (8):

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Спрашивается, куда исчезла двойка из матрицы (8)? Впору вспомнить игру Чичикова с Ноздревым в шашки, которую замечательно описал Н.В. Гоголь.

Существует глубокая вера, что иностранный автор просто не может ошибаться или утверждать ложное положение. У меня есть один знакомый по электронной переписке, который уехал работать в Испанию. Специалист IT-технологий, интересующийся разными новациями в других областях знания. Я ему послал статью, в которой раскрыта эта ошибка Крона, но он посчитал ее простой опечаткой. Ему особо и напрягаться не пришлось. Достаточно было взять обратную матрицу от матрицы (8) и получить тензор прямого преобразования:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

После сравнения матрицы (10) с матрицей (7) становится ясно, что они различаются только знаком элемента 21. Вот он мне и отписал, что во втором уравнении исходной системы надо знак перед новым током $i^{a/}$ изменить с минуса на плюс. Произошла досадная опечатка!

Нет, уважаемые господа, это не опечатка! Пример взят из второго издания книги [7]. Между изданиями прошли годы, макет книги делали специалисты и за основу был принят текст первого издания. Если бы это

была единственная «опечатка», ... однако, ошибка допущена в примере основного понятия метода Крона, в выражении тензора прямого преобразования.

Заканчиваю статью цитатой из заметки профессора Берендеева [1]:

«В тридцатых годах в американской печати появился ряд статей и книг Г. Крона, содержащих попытку приложения тензорного исчисления к прикладной электротехнике. На лиц, недостаточно знакомых с тензорным аппаратом математики и вместе с тем предрасположенных к низкопоклонству перед американскими сенсациями, статьи Крона произвели незаслуженное впечатление».

Список литературы

1. Берендеев А.В. О работах Крона по применению тензорного исчисления в электротехнике // Электричество.– 1950.– №12.– С.78–79.
2. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров. – М.: Наука, 1965. – 778 с.
3. Петров А.Е. Тензорный метод двойственных сетей. – М.: ООО Центр информационных технологий в природопользовании, 2007. – 496 с.
4. Грузов Л.Н. К статье А.В. Берендеева «О работах Крона» // Электричество.– 1951.– №3.– С. 83.
5. Максимович Н.Г. К теории преобразования схем Г. Крона // Электричество.– 1952.– №11.– С. 56–57.
6. Грузов Л.Н. К статье Н.Г. Максимовича «О теории преобразования схем Г. Крона» // Электричество.– 1952.– №12.– С. 82.
7. Крон Г. Тензорный анализ сетей. –М.: Сов.Радио, 1978. –720 с.
8. Крон Г. Исследование сложных систем по частям (диакоптика). – М.: Наука, 1972. – 544 с.
9. Крон Г. Применение тензорного анализа в электротехнике. М.: Госэнергоиздат, 1955. – 276 с.

Ерохов Игорь Васильевич – профессор, кандидат технических наук, Запорожье (Украина). E-mail: yerokhov@bigmir.net.

ДИСКУССИИ

*Статья В.С.Молодцова «Преобразование N-звезды проводимостей
в эквивалентный полный N-угольник»*

(Известия вузов. Электромеханика.– 2016.– №1.– С. 12–18)

Молодцов Виктор Семенович – доктор технических наук, профессор.

E-mail: moltv45@rambler.ru

К ПРЕОБРАЗОВАНИЮ N–ЗВЕЗДЫ ПРОВОДИМОСТЕЙ В ЭКВИВАЛЕНТНЫЙ ПОЛНЫЙ N–УГОЛЬНИК

И. В. Ерохов

Обсуждать статью В.С.Молодцова «Преобразование N–звезды проводимостей в эквивалентный полный N–угольник» трудно, так как текст содержит много нестандартных терминов, а математические иллюстрации отличаются неточностью и ошибками в индексации. В вузовском курсе теории цепей термину звезда (треугольник) соответствует трехфазная нагрузка или такой же источник электрической энергии. Они могут быть соединены одним из двух способов – либо звездой, либо треугольником. Это очень важно в практической электротехнике, так как перечисленные выше способы соединения предполагают разные номиналы напряжений. Особо отметим, что эти схемы рассматриваются изолированно друг от друга, т.е. без наложения одной на другую.

Особенности соединений звездой и треугольником: 1. Части нагрузки (обмотки генератора) имеют общий узел, тогда такое соединение называется звездой. Части нагрузки (обмотки генератора) соединены

последовательно и образуют контур, который в данном случае называют треугольником. 2. Не будем спорить о терминах, так как имеются многофазные системы напряжений с числом фаз больше трех, и при желании в графе, представляющем, например, пятифазную нагрузку, можно увидеть любые фигуры.

В статье матричное уравнение (2*), расположенное ниже, записано достаточно небрежно. Матричная индексация используется только для одного элемента, что затрудняет понимание. Только из последующего абзаца можно предположить, что речь идет об электрической цепи, которая имеет «полный» граф – каждый узел соединен с каждым узлом.

$$\begin{pmatrix} +Y_{11} & -Y_2 & \dots & -Y_N \\ -Y_2 & +Y_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -Y_N & 0 & \dots & +Y_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{\Delta 1} \\ U_{\Delta 2} \\ \dots \\ U_{\Delta N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ J_2 \\ \dots \\ J_N \end{pmatrix} \quad (2^*)$$

Уверенность в этом выводе дает приведенное здесь же равенство, из которого следует, что диагональный элемент матрицы равен сумме величин по строке или столбцу.

Такому требованию соответствует граф измерительного моста Уинстона, что позволяет нам использовать эту цепь в виде примера:

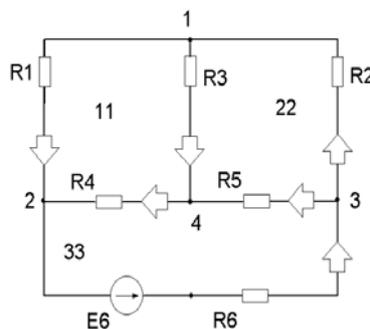


Рис.1. Схема измерительного моста.

При желании в схеме рис.1 можно увидеть звезду, треугольники и даже тетраэдр. Так, например, ветви 3,4,5 можно рассматривать как звезду, а ветви 1,2,6 – как треугольник.

Граф электрической цепи рис.1 имеет четыре узла, взаимосвязи между которыми легко проследить по структурной матрице:

$$\begin{bmatrix} \{1, 2, 3\} & \{1\} & \{2\} & \{3\} \\ \{1\} & \{1, 4, 6\} & \{6\} & \{4\} \\ \{2\} & \{6\} & \{2, 5, 6\} & \{5\} \\ \{3\} & \{4\} & \{5\} & \{3, 4, 5\} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

В диагонали (1) расположены узловые множества, а недиагональные элементы занимают смежные ветви соответствующих узлов.

Запишем систему уравнений, составленную методом узловых потенциалов:

$$\begin{bmatrix} (g_1 + g_2 + g_3) & -g_1 & -g_2 & -g_3 \\ -g_1 & (g_1 + g_4 + g_6) & -g_6 & -g_4 \\ -g_2 & -g_6 & (g_2 + g_5 + g_6) & -g_5 \\ -g_3 & -g_4 & -g_5 & (g_3 + g_4 + g_5) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -J_6 \\ J_6 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Из матричного уравнения (2) можно сделать вывод, что диагональный элемент матрицы равен сумме проводимостей недиагональных элементов, как по строке, так и по столбцу. Результат соответствует тому, что утверждается в статье:

$$Y_{ii} = \sum_{j=1}^N Y_{ji}$$

Заметим, что даже такое простое равенство нуждается в уточнении:

$$Y_{ii} = \sum_{i=2}^N Y_{1i} = \sum_{j=2}^N Y_{j1}$$

Система уравнений с подобной матрицей является неопределенной, содержит линейно зависимые уравнения. Решение можно найти только после упрощения матрицы, вычеркнув четвертый столбец и четвертую строку. Потенциал четвертого узла считается известным и равным нулю.

Прежде чем рассматривать методы преобразования, стоит обратить внимание на запись уравнений. Начнем с матричного уравнения (2*). Вероятно, оно должно было бы выглядеть следующим образом:

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & -Y_{12} & \dots & -Y_{1N} \\ -Y_{21} & Y_{22} & \dots & -Y_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -Y_{N1} & -Y_{N2} & \dots & Y_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{\Delta 1} \\ U_{\Delta 2} \\ \dots \\ U_{\Delta N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \dots \\ J_N \end{bmatrix}. \quad (3)$$

В оригинале матрица (2*) содержит нули, что нарушает равенство (приведенному в статье), которое устанавливает баланс величин между диагональным элементом и другими элементами, расположенными в строке или столбце.

Автор статьи понимает, что матрицу уравнения (2*) надо упростить, если мы хотим найти значение хотя бы одного из напряжений – $U_{\Delta 1}$. Узел 1 он рассчитывает сделать общим, т.е. центром звезды. Напряжение любого узла (потенциал узла) будет определяться относительно узла 1.

Приведем небольшую цитату из статьи, которая должна показать необходимость этого преобразования:

Для нахождения выражения для эквивалентного полного N -угольника проводимостей удалим в системе (2) узел с индексом «1». Для этого из первого уравнения системы (2) найдем напряжение $U_{\Delta 1}$ и подставим его в остальные уравнения системы. В результате соответствующих преобразований получим следующую систему уравнений эквивалентной сети:

Непонятно, как можно из первого уравнения системы (2*) найти напряжение только одного узла. Допустим, что автор может это сделать, однако следующее после цитаты математическое выражение противоречит тексту:

$$\begin{bmatrix} Y_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Y_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & Y_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -Y_{X1} & Y_{11}^{-1} & Y_{1X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{\Delta 2} \\ U_{\Delta 3} \\ \dots \\ U_{\Delta N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_2 \\ J_3 \\ \dots \\ J_N \end{bmatrix}, \quad (3^*)$$

где Y_{X1} и Y_{1X} соответственно первый столбец и первая строка матрицы Y в системе (2) без матричного элемента Y_{11} .

Вероятно, запись уравнения (3*) будет непонятна любому специалисту, знакомому с матричным исчислением. Особый интерес представляет вычитаемое в квадратных скобках и роль индекса x . Мало того, по всем канонам надо сначала провести операцию умножения, а затем – операцию вычитания.

Оказывается, что находить значение напряжения первого узла необязательно. Мало того, уравнение (2*) здесь не нужно, его матрица не используется. Исходной для описанного преобразования является матрица элементов изолированной звезды:

$$\begin{bmatrix} Y_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Y_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & Y_N \end{bmatrix}, \quad (4)$$

в которой отсутствует элемент 11. Можно предположить, что удаление элемента 11 следует проводить в матрице (2*). Для этого надо проделать первый шаг прямого хода метода Гаусса, который предназначен для сворачивания системы уравнений до единственного равенства. В процессе осуществления первого шага мы получаем выражения, с помощью которых корректируем величины всех элементов матрицы за исключением первой строки и первого столбца.

Однако автору почему-то не нужны недиагональные элементы исходной матрицы (2*), а поэтому он записывает уравнение (3*), где загадочное вычитаемое должно генерировать выражения для коррекции величин всех элементов матрицы. Вместо объяснения (3*) автор ограничивается намеком на «соответствующие преобразования». Результат коррекции представлен в (4*):

$$\begin{bmatrix} \left(Y_2 - \frac{Y_2 Y_2}{Y_{11}} \right) & -\frac{Y_2 Y_3}{Y_{11}} & \dots & -\frac{Y_2 Y_N}{Y_{11}} \\ -\frac{Y_3 Y_2}{Y_{11}} & \left(Y_3 - \frac{Y_3 Y_3}{Y_{11}} \right) & \dots & -\frac{Y_3 Y_N}{Y_{11}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{Y_N Y_2}{Y_{11}} & -\frac{Y_N Y_3}{Y_{11}} & \dots & \left(Y_N - \frac{Y_N Y_N}{Y_{11}} \right) \end{bmatrix}. \quad (4*)$$

При использовании стандартных матричных индексов:

$$\begin{bmatrix} \left(Y_{22} - Y_{21} \frac{Y_{12}}{Y_{11}} \right) & \left(-Y_{21} \frac{Y_{13}}{Y_{11}} \right) & \dots & \left(-Y_{21} \frac{Y_{1N}}{Y_{11}} \right) \\ \left(-Y_{31} \frac{Y_{12}}{Y_{11}} \right) & \left(Y_{33} - Y_{31} \frac{Y_{13}}{Y_{11}} \right) & \dots & \left(-Y_{31} \frac{Y_{1N}}{Y_{11}} \right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left(-Y_{M1} \frac{Y_{12}}{Y_{11}} \right) & \left(-Y_{M1} \frac{Y_{13}}{Y_{11}} \right) & \dots & \left(Y_{MN} - Y_{M1} \frac{Y_{1N}}{Y_{11}} \right) \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Ниже матрицы (4*) приводятся свойства исходной матрицы. Читателю остается только недоумевать о том, что правильные пункты 1,2,3 получены из выкладок, содержащих существенные ошибки.

В статье изображен эквивалентный многоугольник, рис.1*, параметры его ветвей находятся так, как нас «в школе учили». Например, параметр Y_{02} ветви многоугольника, которая находится между ветвями звезды 1,2, находим как произведение проводимостей этих ветвей, поделенное на собственную проводимость узла 1 звезды:

$$Y_{02} = \frac{Y_1 \cdot Y_2}{Y_{11}},$$

Формулы для вычисления всех параметров ветвей многоугольника представляются с помощью двух треугольных матриц (6*), (7*).

В завершение, так называемого, матрично-вычислительного метода позвольте не согласиться с равенствами (5*). Просуммируем элементы матрицы (5):

$$Y_{22} - Y_{21} \frac{Y_{12}}{Y_{11}} - Y_{21} \frac{Y_{13}}{Y_{11}} - \dots - Y_{21} \frac{Y_{1N}}{Y_{11}} = Y_{22} - \frac{Y_{21}}{Y_{11}} (Y_{12} + Y_{13} + \dots + Y_{1N}) = Y_{22} - \frac{Y_{21}}{Y_{11}} Y_{22} \neq 0$$

Вывод. Рассматривать, так называемый, аналитический метод не имеет смысла, т.к. в результате его реализации получаются те же самые треугольные матрицы (13*), (14*). По тексту этого раздела видно, что автор чувствует себя более уверенно, когда оперирует с уравнениями и физическими понятиями. По нашему мнению, нет необходимости использовать матричные понятия и операции, если есть возможность решить задачу в более простом математическом языке. В противном случае будут получаться всевозможные казусы и рождаться нелепые неологизмы, которые только запутывают изложение вполне разумной мысли.

Ерохов Игорь Васильевич – профессор, кандидат технических наук, Запорожье (Украина). E-mail: yerokhov@bigmir.net.

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ МНОГОЛУЧЕВОЙ ЗВЕЗДЫ ПРОВОДИМОСТЕЙ В ЭКВИВАЛЕНТНЫЙ ПОЛНЫЙ МНОГОУГОЛЬНИК

С. А. Курганов

В обсуждаемой статье [0] поставлена следующая задача.

«Задача данной статьи – теоретическое обоснование единственности преобразования N-звезды проводимостей в эквивалентный полный N-угольник проводимостей. Решение такой задачи, как будет показано ниже, снимает вопросы о неполноте решения, о непредсказуемости использования результатов, полученных с помощью полного N-угольника проводимостей» [0, с.12].

«Термин полный n-угольник, используемый в статье, отличается от принятого определения многоугольника в [1]. Полный n-угольник включает все связи между n-узлами электрической сети» [0, с.12].

В данной изложении для удобства и краткости нумерация источников [1–12] сохранена такой же, как в обсуждаемой статье, которой присвоен номер 0.

«Постановка задачи эквивалентирования была изложена, например, в [2–8]. В основе решения задачи эквивалентирования в этих работах лежат интуитивные предпосылки, не имеющие достаточного теоретического обоснования, а именно:

1. Названия статей включают слова «полный электрический многоугольник». На самом деле рассматриваются ветви многоугольника, последовательно связывающие узлы электрической сети, то есть вместо полного n-угольника, включающего $N(N-1)/2$ ветвей, рассматриваются N ветвей, равных числу узлов.

2. Не учитывается комплексный характер проводимостей и сопротивлений ветвей электрической сети.

3. Преобразование схем сетей не учитывает условия эквивалентности, то есть соблюдения равенства узловых токов и напряжений в исходных и эквивалентных сетях» [0, с.12].

Постановка задачи. Задача эквивалентирования, о которой пишет автор обсуждаемой статьи, включает прямую задачу преобразования звезды в многоугольник и обратную задачу преобразования многоугольника в звезду.

Основные замечания к обсуждаемой статье:

1. Автор решает только прямую задачу, и поэтому ссылки на источники [3–7] являются неуместными, поскольку в них не рассматривается решение прямой задачи.

2. Автор ошибочно считает, что в цитируемой им литературе речь идет о преобразовании звезды в многополюсник, содержащий « N ветвей, равных числу узлов» [0, с.12]. При этом утверждается о существовании несуществующего преобразования (смешиваются особенности прямого и обратного преобразования многолучевой звезды и многоугольника).

В указанных автором источниках, а также в источниках [13–15], рассматривается полный многоугольник, содержащий $n(n-1)/2$ ветвей. «При этом под полным n -угольником мы будем понимать фигуру, получаемую в результате попарного соединения всех n вершин между собой...» [2, с. 114].

Таким образом, автор решает хорошо известную задачу преобразования n -лучевой звезды проводимостей в эквивалентный полный n -угольник. Формула для такого преобразования была предложена Розеном в 1924 году в виде [13]

$$Y_{ij} = Y_i Y_j / \sum_{j=1}^n Y_j; \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad i \neq j, \quad (1)$$

где Y_{ij} – искомая проводимость многоугольника, включенная между узлами i и j ; Y_i, Y_j – проводимости лучей с номерами i, j ; нумерация узлов многоугольника совпадает с нумерацией лучей звезды.

Доказательство формулы (1). В обсуждаемой статье приведены подробно два способа ее доказательства. Первый способ, названный автором матрично-вычислительным методом, основан на известной

операции исключения напряжения центрального узла звезды из системы узловых уравнений.

Этот способ используется в [9] для исключения из схемы произвольного числа узлов. При этом формула (1) получается в [9], как частный случай общей формулы. Исключение центрального узла для решения этой задачи используется и в [14, с. 154] на основе особенной матрицы проводимостей.

Во втором способе, так называемом аналитическом методе [0], для доказательства используется равенство узловых токов в схемах звезды и искомого многоугольника. На основе этого равенства формула (1) выведена также в [2, с. 115] и учебнике [15, с. 41].

Таким образом, доказательство формулы (1) выполнено в обсуждаемой статье с помощью приемов, известных в литературе.

Единственность преобразования звезды в полный многоугольник. Несмотря на постановку такой задачи, в тексте обсуждаемой статьи этот вопрос не рассматривается. Заключение о единственности преобразования звезды в полный многоугольник приведено в [8], где формула (1) выводится путем обращения матрицы сопротивлений исходной звезды. По отсутствию нулей в обратной матрице делается вывод о единственности преобразования звезды в полный многоугольник.

Учет комплексного характера сопротивлений и проводимостей. Этот вопрос также, несмотря на упоминание при постановке задачи, в тексте статьи не рассматривается. В то же время вывод формулы (1) в [2,8,9,14,15] выполняется для комплексных проводимостей Y и сопротивлений Z .

Учет условия эквивалентности – равенства узловых токов и напряжений. В этом плане доказательства автора обсуждаемой статьи ничем не отличаются от доказательств в [8,9,14,15], поскольку он использует те же методы. При этом алгебраическая операция исключения переменной из системы уравнений не изменяет решение для оставшихся

переменных. Поэтому при заданных узловых токах соответствующие узловые напряжения звезды и многоугольника совпадают.

Доказательство формулы (1), отличающееся от рассмотренных методов [0,2,8,9,14,15], приведено в [16]. Предложенный там способ основан на схемных определителях и не требует построения уравнений электрической цепи.

Вывод. В обсуждаемой статье приведены два способа доказательства известной формулы преобразования многолучевой звезды в полный многоугольник. При этом используются известные алгебраические методы – исключение переменной из системы уравнений и попарное приравнивание соответствующих узловых токов двух схем при заданных узловых напряжениях. Статья представляет методический интерес благодаря приведенному подробному решению задачи.

Список литературы

0. Молодцов В.С. Преобразование n -звезды проводимостей в эквивалентный полный n -угольник // Известия вузов. Электромеханика. 2016.– №1.– С. 12–18

«1. Савин А.П. Математика от «А» до «Я». Краткий Энциклопедический словарь. М.: Педагогика-Пресс. Современная педагогика, 2006.– 512 с.

2. Калантаров П.Л. Теория переменных токов. М.-Л.: Госэнергоиздат, 1940.– 411 с.

3. Новиков А.Г. Преобразование электрического многоугольника в эквивалентную звезду // Электричество.– 1946.– №10.– С. 59–61.

4. Горев А.А., Костенко М.В. Приведение сложных сетей к простейшим эквивалентным схемам // Электричество.– 1948.– №3.– С.40–43.

5. Щедрин Н.Н. Упрощение электрических систем при моделировании.– М.-Л.: Энергия, 1966.– 159 с.

6. Филаретов В.В. Топологические формулы для преобразования полного электрического многоугольника в эквивалентную звезду // *Электричество*.– 1995.– №11.– С. 50–55.

7. Филаретов В.В. Топологический синтез оптимальных формул для преобразования полного электрического многоугольника в эквивалентную звезду // *Электричество*.– 1996.– №4.– С. 63–70.

8. Витязь О.А. Матричный метод преобразования полного электрического многоугольника и многолучевой звезды // *Электроника и связь. Тематический выпуск «Проблемы электроники»*.– 2008.– Ч. 1.– С. 132–136.

9. Мельников Н. А. Матричный метод анализа электрических цепей. М.: Энергия, 1972.– 231 с.

10. Молодцов В. С, Молодцов М. В. Эквивалентирование сложных электрических сетей энергосистем // *Изв. вузов. Электромеханика*.– 2014.– №6.– С. 61–66.

11. Молодцов В. С. Эквивалентирование распределительных электрических сетей энергосистем // *Изв. вузов. Электромеханика*.– 2015.– №4. С. 72–76.

12. Бессонов Л . А. Теоретические основы электротехники. М.: Высшая школа, 1967.– 776 с.» [0, с.17]

13. Rozen A. A new network theorem // *Journal of the Institution of Electrical Engineers (London)*.– 1924.– Vol. 62.– P. 916–918.

14. Максимович Н.Г. Линейные электрические цепи и их преобразования.– М.-Л.: Госэнергоиздат, 1961.– 264 с

15. Основы теории цепей: учебник для вузов / Г.В.Зевеке, П.А.Ионкин, А.В.Нетушил, С.В.Страхов.–М.: Энергоатомиздат, 1989.– 528 с.

16. Курганов С. А. Схемно-алгебраическое доказательство формулы преобразования n -лучевой звезды в полный n -угольник // *Настоящий выпуск*.– С. 48–55.

ИЗ ИСТОРИИ ОТКРЫТИЙ

МЕТОД ГАУССА И РЕШЕНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ

И. В. Ерохов

Дана интерпретация методов Гаусса и Крамера на основе аппарата цепных ветвящихся дробей. На примерах показано решение систем линейных алгебраических уравнений.

Interpretation of Gauss's and Kramer's methods on the basis of the branched chained fractions is given. On examples the decision of systems of the linear algebraical equations is shown.

Метод решения системы алгебраических уравнений, названный в честь выдающегося ученого Карла Гаусса, является одним из древнейших. Он принадлежит к группе прямых методов решения, которые позволяют получать точные значения переменных. К этой же группе принадлежит и метод Крамера. Реализация этих методов встречается с определенными трудностями из-за выполнения большого количества элементарных операций. Их число оценивается величиной n^3 для метода Гаусса и n^4 для метода Крамера, где n – размер квадратной матрицы.

На первом этапе метода Гаусса (прямой ход) производят последовательное исключение переменных. На втором этапе (обратный ход) определяют (в обратном порядке) их численные значения. Существует достаточное количество модификаций метода, но достичь значительного уменьшения числа элементарных операций не удастся.

Ниже на простейших примерах рассмотрены этапы решения системы алгебраических уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_{13} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = a_{23} \end{cases} \quad (1)$$

После цикла исключения переменной x_1 получим [1]:

$$a_{22}^{(1)}x_2 = a_{23}^{(1)}, \quad (2)$$

где $a_{22}^{(1)} = a_{22} - a_{21}b_{12}$; $b_{12} = \frac{a_{12}}{a_{11}}$; $a_{23}^{(1)} = a_{23} - a_{21}b_{13}$; $b_{13} = \frac{a_{13}}{a_{11}}$.

После очевидных подстановок решение уравнения (2):

$$x_2 = \frac{a_{23} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{13}}{a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12}} \quad (3)$$

Выражение (3) легко преобразовать к виду, который соответствует формуле Крамера:

$$x_2 = \frac{a_{23}a_{11} - a_{21}a_{13}}{a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \quad (4)$$

Другой способ преобразования выражения (3) позволяет нам получить решение в виде ветвящейся цепной дроби:

$$x_2 = \frac{a_{23}}{a_{22} - \frac{a_{21}}{\frac{a_{11}}{a_{12}}}} - \frac{a_{13}}{\frac{a_{22}}{a_{21}} - a_{12}} \quad (5)$$

Цепную дробь (5) из выражения (4) получают по алгоритму, предложенному в монографии [2].

Добавим третью строку в систему уравнений (1):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = a_{14} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = a_{24} \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = a_{34} \end{cases} \quad (6)$$

После первого цикла метода Гаусса система (6) упрощается, как показано ниже:

$$\begin{cases} a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 = a_{24}^{(1)} \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 = a_{34}^{(1)} \end{cases}, \quad (7)$$

$$\text{где } a_{22}^{(1)} = a_{22} - a_{21} \frac{a_{12}}{a_{11}}; \quad a_{23}^{(1)} = a_{23} - a_{21} \frac{a_{13}}{a_{11}}; \quad a_{24}^{(1)} = a_{24} - a_{14} \frac{a_{21}}{a_{11}};$$

$$a_{32}^{(1)} = a_{32} - a_{31} \frac{a_{12}}{a_{11}}; \quad a_{33}^{(1)} = a_{33} - a_{31} \frac{a_{13}}{a_{11}}; \quad a_{34}^{(1)} = a_{34} - a_{14} \frac{a_{31}}{a_{11}}.$$

После второго цикла метода Гаусса система (7) упрощается до одного уравнения:

$$a_{33}^{(2)}x_3 = a_{34}^{(2)}, \quad (8)$$

$$\text{где } a_{33}^{(2)} = a_{33}^{(1)} - a_{32}^{(1)} \frac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}; \quad a_{34}^{(2)} = a_{34}^{(1)} - a_{32}^{(1)} \frac{a_{24}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}.$$

Не будем превращать решение (8) в численную форму, подставляя значения коэффициентов, а проведем указанные здесь подстановки:

$$x_3 = \frac{a_{34}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} = \frac{a_{34}^{(1)} - \frac{a_{32}^{(1)} a_{24}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}}{a_{33}^{(1)} - \frac{a_{32}^{(1)} a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}}. \quad (9)$$

С помощью коэффициентов предыдущего этапа исключения переменных продолжим изменения вида решения (9). Выражение получается громоздким, поэтому вместо коэффициентов системы уравнений (6) будем использовать только их матричные индексы.

Отметим, что выражение (10) похоже на решение (3) системы уравнений (1) и может рассматриваться как структура решения системы уравнений (6):

$$x_3 = \frac{34 - \frac{31}{11} - \frac{32 - \frac{31}{11}}{22 - \frac{21}{11}}}{33 - \frac{31}{13} - \frac{32 - \frac{31}{11}}{22 - \frac{21}{11}} - \frac{24 - \frac{21}{11}}{23 - \frac{21}{11}}}, \quad (10)$$

На каждом этаже, как числителя, так и знаменателя выражения (10), находятся разности определенных произведений коэффициентов:

$$33 - \frac{31}{13} = \frac{a_{33} \cdot a_{11} - a_{31} \cdot a_{13}}{a_{11}} = \frac{1}{a_{11}} \Delta [a]_{2:2},$$

где $\Delta [a]_{2:2}$ – детерминант матрицы системы уравнений (6), из которой удалены вторая строка и второй столбец.

Таким образом, выражение (10) может быть записано более компактно с помощью определителей:

$$x_3 = \frac{\Delta [a']_{2:2} - \frac{\Delta [a]_{2:3}}{\Delta [a]_{3:3}}}{\Delta [a]_{2:2} - \frac{\Delta [a]_{2:3}}{\Delta [a]_{3:3}} - \frac{\Delta [a']_{3:2}}{\Delta [a]_{3:2}}}, \quad (11)$$

где $\Delta [a]_{2:2}$ – определитель матрицы системы уравнений (6), у которой вычеркнуты вторая строка и второй столбец; $\Delta [a']_{2:2}$ – определитель той же матрицы, у которой третий столбец заменен правой частью системы уравнений (6).

Проверим структуру решения (10), (11) на простом примере:

$$\begin{cases} 2x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 5 \\ 1x_1 + 2x_2 + 1x_3 = 5, \\ 1x_1 + 1x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases} \quad (12)$$

Запишем матрицу системы уравнений и правую часть так, чтобы было легко составить формулу Крамера:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Индексация строк и столбцов обычная – с помощью цифр натурального ряда чисел. Подставим численные значения коэффициентов системы уравнений (12) в выражение (11):

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} - \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{7 - \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{1}}{3 - \frac{1}{3} \cdot 1} = 2.$$

Полученный результат легко проверить, вычислив два определителя формулы Крамера вручную, либо на программе Excel. Отметим, что выражения (10), (11) являются особой формой записи ветвящейся цепной дроби, которую назовем гауссовой.

Выражение (10) можно использовать для определения численных значений двух остальных неизвестных системы уравнений (6). Покажем это на примере определения численного значения второй неизвестной x_2 . Для этого поменяем местами вторую и третью строки матрицы системы уравнений (6), а затем – второй и третий столбец. Получим следующую

матрицу и вектор правых частей (6*а), после чего подставим в нее численные значения коэффициентов (6*б):

$$\text{а) } \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{34} \\ a_{24} \end{bmatrix}; \quad \text{б) } \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}. \quad (6^*)$$

Численные значения, подставленные в матрицу (6*а), получают в (6*б) обычные матричные индексы, используя которые переносим числа в выражение (10) и находим величину второй неизвестной – $x_2 = 1$. Промежуточные вычисления здесь элементарны.

Внесем некоторые изменения в выражения (8) и (9). При прямом ходе метода коэффициенты уравнений постоянно корректировались, и результат фиксировался в численной форме. Однако можно поступать иначе и на всех этапах использовать только коэффициенты исходной системы уравнений (6). В этом случае промежуточные значения переменных надо рассматривать как некоторые приближения к точному значению. Итак, первое приближение (8*):

$$x_3^{(1)} = \frac{a_{34}}{a_{33}}; \quad (8^*)$$

второе приближение (9*):

$$x_3^{(2)} = \frac{a_{34} - \frac{a_{32}}{a_{22}}}{a_{33} - \frac{a_{32}}{a_{22}}}. \quad (9^*)$$

Третье приближение неизвестной (10). В нашем случае оно совпадает с точным значением, хотя при размерах матрицы системы уравнений, превышающих число три, ряд приближений (8*), (9*) будет значительно длиннее. Таким образом, получаем метод решения, в котором число переменных не уменьшается, а последовательно увеличивается [3].

Покажем этот метод на нашем примере. Начинаем решение с преобразованного уравнения (8):

$$a_{33}x_3^{(1)} = a_{34} \Rightarrow x_3^{(1)} = \frac{a_{34}}{a_{33}}.$$

Введем в рассмотрение еще одну переменную (преобразованное уравнение (7)):

$$\begin{cases} a_{22}x_2^{(2)} + a_{23}x_3^{(2)} = a_{24} \\ a_{32}x_2^{(2)} + a_{33}x_3^{(2)} = a_{34} \end{cases}. \quad (7^*)$$

Запишем формулу Крамера для той же переменной:

$$x_3^{(2)} = \frac{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{32} & a_{34} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}. \quad (13)$$

Из формулы (13) легко получить второе приближение третьей переменной (9*), но преобразуем определители формулы (13) как выше:

$$x_3^{(2)} = \frac{a_{34} - \frac{a_{32}}{\frac{a_{22}}{a_{23}}}}{\frac{a_{22}}{a_{23}}}$$

Обратим внимание на то, что второе приближение переменной получается из первого приближения после «гауссовой» коррекции коэффициентов. На уровне матричных индексов коэффициентов (6):

$$x_3^{(2)} = \frac{34 - \frac{32}{\frac{22}{24}}}{\frac{22}{23}}. \quad (14)$$

Из выражения (14) видно, что индексы коэффициентов первого приближения используются порознь в выражении корректирующего слагаемого. Их размещают на первом и последнем месте корректирующей «цепочки» числителя (знаменателя). Остальные места цепочки заполняются индексом добавленной переменной. На следующем этапе увеличения числа переменных системы уравнений (7*) каждый коэффициент выражения (14) корректируется аналогичным образом (10).

Поставлен эксперимент, который должен был убедить в практической ценности нового математического объекта [2]. Была взята система из двухсот уравнений с коэффициентами в интервале от 1 до 1000. Соотношение определителей формулы Крамера раскрывалось с помощью программы и для каждой приближающей дроби находились значения погрешности. Оказалось, что раскрывать цепную дробь дальше 9–11 этажей не имеет смысла, так как точность результата превышала заданную – 0.01% (хотя полная дробь имеет 399 этажей).

Вывод. Модификация метода Гаусса позволяет получать последовательные приближения решений в виде особой формы ветвящихся цепных дробей (10), (11). Каждое решение является приближающей дробью, а ряд приближений – последовательностью приближающих дробей. Значения приближающих дробей сходятся к точному решению системы алгебраических уравнений при условии, что оно существует. Разность значений соседних приближающихся дробей является оценкой погрешности, и в идеале ее значение стремится к нулю. Процесс получения приближающих дробей останавливается при достижении погрешности, допустимой для конкретного расчета, то есть полная ветвящаяся цепная дробь заменяется приближающей дробью.

Список литературы

1. Демидович Б.П. Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 1966. – 664 с.
2. Скоробогатько В.Я. Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 312 с.
3. Ерохов И.В. Алгоритм решения линейной системы уравнений, размерность которой последовательно увеличивается // Автоматизация проектирования в электронике.– Киев:Техника, 1981, вып. 24. – С. 23–30.

Ерохов Игорь Васильевич – профессор, кандидат технических наук, г.Запорожье, Украина. E-mail: yerokhov@bigmir.net.

КЛАССИКИ ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ

РЫБИН АЛЕКСАНДР ИВАНОВИЧ

(12.04.1948–27.01.2016)



Закончил с отличием электроакустический факультет Киевского политехнического института (КПИ) в 1972 г., воспитанник кафедры теоретических основ радиотехники (ТОР), ученик профессора Я.К. Трохименко. Профессор (2005), доктор технических наук (2002). Тема диссертации – «Повышение точности анализа электрических цепей обобщенным методом модификаций»). Автор метода модификаций для численно-символьного анализа цепей со слабыми сигналами, метода лучей и зон проводимостей для решения обратной задачи импедансной томографии и

модифицированного метода припасовывания для анализа линейных параметрических цепей.

Александр Иванович работал на кафедре ТОР с 1972 по 2005г., кандидатскую диссертацию защитил в 1982 г. на тему «Анализ слабосигнальных электронных цепей с учетом разброса и изменения параметров методом взаимных производных».

Один из основателей специальности (теперь специализации на РТФ) «Медицинские радиоэлектронные устройства». Декан радиотехнического факультета с 2004г., заведующий кафедрой радиоприема и обработки сигналов в 2005–2015гг. (с 2015г. – научный руководитель кафедры).

А.И.Рыбин был заместителем главного редактора журнала «Изв. вузов. Радиоэлектроника», главным редактором журнала «Вестник НТУУ «КПИ». Радиотехника. Радиоаппаратостроение», членом диссертационного совета Д26.002.14 и экспертного совета ВАК Украины. Автор более 300 научных публикаций (в том числе 15 книг). Лауреат Государственной премии Украины в области науки и техники (2012г.). Лауреат премии Национального технического университета Украины (НТУУ) «КПИ» за лучшее учебное пособие (2000г.).

Александр Иванович принимал участие в создании Энциклопедического учебного справочника «Радиотехника». Преподаватель самого широкого профиля, глубоких теоретических знаний, с органическим чувством нового. Человек высокой интеллигентности, широкого круга интересов, любитель истории, литературы, лингвистики. Владел английским, польским и чешским языками. Приняв эстафету от Ярослава Карповича Трохименко, создал широкий круг учеников. Подготовил 7 кандидатов технических наук.

Профессор А.И.Рыбин являлся инициатором и непосредственным исполнителем подготовки в соответствии с современными требованиями учебных циклов по дисциплинам: "Основы теории цепей", "Сигналы и процессы в радиотехнике", "Системы отображения", "Интроскопия

биообъектов", "Методы компьютерной томографии", "Методы цифровой обработки изображений". Дисциплины направлены на широкое применение современной вычислительной математики и использования ЭВМ. Область научных интересов: теория цепей, современные методы цифровой обработки сигналов, томография, реставрация, распознавания образов. Играл ведущую роль в формировании современного научного и педагогического потенциала кафедры радиоприема и обработки сигналов, как за счет модернизации базовых дисциплин, так и за счет введения новых.

Подключив медицинскую тематику, А.И.Рыбин осуществлял научно-исследовательские работы на кафедре, в том числе по государственной целевой программе «Новые биотехнологии, диагностика и методы лечения наиболее распространенных заболеваний». Основные труды: «Решение задач моделирования обращением матриц методом взаимных производных» (1978г.), «Решение задач теории цепей на ЭВМ» (1990г.), «Analyza slozitych obvodu diaoptickymi metodami» (Брно, Чехия, 1991г.), «Проектирование фильтров на переключаемых конденсаторах» (Достал Т., Рибін О.І., Трохименко Я.К. Проектування фільтрів з ємностями, що перемикаються. Навч. посібник.– Київ: ІСДО, 1993.– 280 с.), «Энергообеспечение электронной аппаратуры» (1994г.), «Биомедицинские сигналы и их обработка» (1997г.), «Системы отображения информации в медицине» (1999г.), «Микроскопические и флуоресцентные методы в медицине» (2000г.), «Биомедицинские сигналы (генезис, обработка, мониторинг» (2001г.), «Основы теории цепей» (ч.1 – 2004г., ч.2 – 2006г.), «Регистрация, обработка и контроль биомедицинских сигналов» (2011г.).

Александр Иванович участвовал в 10-ти завершённых хоздоговорных и госбюджетных работах (как исполнитель, ответственный исполнитель, научный руководитель).

Н. И. Ястребов

Ястребов Николай Игоревич – ученик проф. Я.К.Трохименко; автор программы символично-численного анализа электронных цепей РАСТОР, реализующей метод α -деревьев; старший преподаватель кафедры «Теоретические основы радиотехники» НТУУ «КПИ». E-mail: preptor@mail.ru

НАУЧНЫЕ ШКОЛЫ

К 125-ЛЕТИЮ ПЕРВОЙ В РОССИИ КАФЕДРЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ³

В. В. Панкин, Е. Б. Соловьева

Описаны история создания и направления работы кафедры теоретических основ электротехники в Санкт-Петербургском государственном электротехническом университете «ЛЭТИ», которые тесно связаны с развитием электротехники в России.

The history of the creation and development of the theoretical electrical engineering department in St. Petersburg Electrotechnical University "LETI", which is closely linked with the development of electrical engineering in Russia, is described.



Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет –
ЛЭТИ им. В.И.Ленина

³ Выполнено в рамках НИР № 2700 базовой части государственного задания в сфере научной деятельности по заданию № 2014/187.

Учебный план Технического училища Почтово-телеграфного ведомства с момента его открытия в 1886 году включал курсы физики, химии и математики. Основателем физической школы будущего Санкт-Петербургского электротехнического университета «ЛЭТИ» по праву признан О.Д.Хвольсон, автор классического курса физики, изданного в России, Франции и Германии.

Два тома из пяти этого труда посвящены электротехнике. Первый профессор по кафедре химии А.А.Кракау с 1886 года впервые в России читал курс электрохимии, позднее издал первый в России учебник по теоретической электрохимии. На Первом всероссийском электротехническом съезде А.А.Кракау был официальным представителем Электротехнического института (ЭТИ) вместе с П.Д.Войнаровским. После такого начала образование кафедры электротехники было вопросом недолгого времени.

1891г. – 1920г. Становление курса электротехники. Профессоры кафедры: И.И.Боргман, М.А.Шателен, П.Д.Войнаровский, А.А.Петровский, А.А.Кузнецов. Впервые курс электротехники появляется в учебном плане электротехнического института (ЭТИ) в 1891 году, когда вводится четырехлетний срок обучения (решение принято на заседании Государственного совета Российской империи). Собственно, Г.К.Мерчинг (1860–1916) с 1888 года в рамках курса физики уже преподавал электротехнику и телеграфию, продолжая, таким образом, традиции Почтово-телеграфного ведомства.

Целью нового учебного плана было не только дать более полное образование по телеграфной специальности, но также сообщить будущим техникам и инженерам обстоятельные сведения из области применения сильных токов. Г.К.Мерчинг организовал в ЭТИ первый электротехнический кабинет. По результатам конкурса (1891) новый курс начинает читать профессор М.А.Шателен (1866–1957). Курс носил энциклопедический характер. Он включал вопросы теоретической электротехники, электрических измерений, электрических машин и был тесно связан с научными вопросами телефонии и телеграфии. Уже через

два года стало ясно, что объединение в одном курсе столь разнообразных вопросов сильно затрудняет преподавание.

В 1893 году курс был реорганизован, а именно, выделены: теоретическая электротехника, для преподавания которой приглашен профессор университета И.И.Боргман (1849–1914); практическая электротехника, читаемая М.А.Шателеном; электрические измерения и телефония, преподаваемые профессором П.Д.Войнаровским (1866–1913).

С 1893 по 1896 год первый профессор первой в России кафедры электротехники М.А.Шателен превращает небольшой электротехнический кабинет в крупную электротехническую лабораторию с отделениями электротехнических измерений и электромагнитного поля. Он же составил ряд учебных пособий по общей электротехнике, переменным токам, электрическим измерениям.

Богатое по тому времени оборудование лаборатории было получено еще в 1894 году по завещанию П.Н.Яблочкова, известного, в частности, как создателя «русского света» в Париже, который был не только выдающимся электротехником, но и успешным предпринимателем. В качестве учебника используется «Курс электричества» Э.Жерара (1856–1916), переведенный на русский язык М.А.Шателеном [1].

Профессор физики Э.Жерар основал в 1883 г. Электротехнический институт Монтефиори при университете в Льеже (Бельгия). Он же стал директором этого учебного заведения – одного из первых в мире мест, где давали высшее электротехническое образование. В институт принимали только дипломированных инженеров. Курс был рассчитан на два года. Институт в Льеже с отличием окончил П.Д.Войнаровский в 1893 году. Он же перевел в 1898 году на русский язык другой учебник Э.Жерара «Электрические измерения» [2]. Электротехнические лаборатории института Монтефиори стали образцом при формировании лабораторий кафедры электрических измерений и кафедры электротехники ЭТИ.



И. И. Боргман



М. А. Шателен



П. Д. Войнаровский

С 1898 года в учебный план института включены самостоятельные курсы: «Теория электричества и магнетизма», «Теория переменных токов». Систематическое изложение основных вопросов теории переменных токов было сделано впервые в 1897–1899 годах, когда профессор П.Д.Войнаровский написал и издал «Теоретический и практический курс электротехники». Позднее, с 1906 по 1912 год П.Д.Войнаровский исполнял должность выборного ректора ЭТИ.

В развитии теоретической электротехники большую роль сыграл выдающийся российский ученый И. И. Боргман, работавший в институте и на кафедре с 1893 по 1914 год. Написанный им для Санкт-петербургского университета фундаментальный двухтомный курс «Основания учения об электрических и магнитных явлениях» включал разделы, посвященные электростатике, постоянному току, магнетизму, электромагнетизму и электродинамике. Книга являлась основным учебником и для студентов ЭТИ. Научное содержание книги И.И.Боргмана было значительно выше практической электротехники того времени, отмечал в своих воспоминаниях М.А.Шателен.

Следует напомнить о невозможном в последующее время авторитете ученых-электротехников. И.И.Боргман, первый заведующий кафедрой,

статский генерал, не изображен на знаменитой картине И.Е.Репина «Заседание Государственного Совета ...» просто потому, что его не было в тот день на заседании. Прямым свидетельством высокой оценки педагогической успешности стало приглашение И.И.Боргмана к преподаванию физики и электротехники в разные годы трем наследникам российского престола: Николаю, Георгию и Михаилу Александровичам, а также другим членам императорской фамилии.

И.И.Боргман возглавлял петербургскую научную школу; среди его учеников всемирно известные выпускники и преподаватели ЭТИ: изобретатель радио А.С.Попов, изобретатель телевидения Б.Л.Розинг, осуществивший первую в мире телевизионную передачу, М.М.Глаголев, В.К.Лебединский, В.Ф.Миткевич, Л.В.Мысовский, Д.А.Рожанский, Д.В.Скобельцын – будущий директор Санкт-Петербургского Политехнического института.

В.Ф.Миткевич преподавал электротехнику на кафедре (1895–1899), будущий первый лауреат Ленинской премии среди физиков и электротехников (1927), академик АН СССР с 1929 года, один из разработчиков плана ГОЭЛРО. В рассматриваемый период им написаны «Курс переменных токов», «Магнетизм и электричество». При разработке плана электрификации он активно сотрудничал с уполномоченным ГОЭЛРО по Петрограду и Северной области профессором М.А.Шателеном, впоследствии награжденным тремя орденами Ленина, медалью «За оборону Ленинграда».

Кафедрой И.И.Боргмана, получившей название «Теория электричества и магнетизма», с 1914 по 1921 год руководил ученик и сподвижник А.С.Попова – профессор А.А.Петровский (1873–1942), учебник которого «Электромагнитные колебания и волны» издан в 1917г.

Анализ учебных планов кафедры конца XIX – начала XX века показывает какую, в сущности, малую роль играли в те времена собственно электротехнические дисциплины. Действительно, для получения диплома инженер-электрик должен был уметь не только спроектировать электростанцию, но и построить здание для этой станции,

рассчитать и построить электрическую сеть и даже освещение отдельных зданий. Тем не менее, глубокое рассмотрение электромагнитных явлений в книгах И.И.Боргмана, П.Д.Войнаровского, М.А.Шателена, В.Ф.Миткевича способствовали развитию теоретических вопросов в прикладной электротехнике.

Результаты не заставили себя ждать. Первые тридцать лет практической и научно-исследовательской работы кафедры характеризуют ее как наследницу Почтово-телеграфного ведомства. В 1895 году преподавателем кафедры «телеграфным инженером» П.Д.Войнаровским составлен проект междугородной телефонной линии между Санкт-Петербургом и Москвой.

В рамках проекта создан макет линии связи в виде «значительных размеров ящика», содержащего «длинную линию». После демонстрации на кафедре проекта и действующего макета в присутствии брата императора, будущего наследника–цесаревича – Великого князя Михаила Александровича работа получила Высочайшее одобрение.

Воздушная телефонная линия вдоль железнодорожного пути, самая протяженная в Европе, была сдана в эксплуатацию 30 декабря 1898 года. Для внутригородской телефонной связи, профессор кафедры с 1898, впоследствии заведующий, П.Д.Войнаровский рекомендовал использовать исключительно кабельные сети [3]. В 1901 году он подготовил расчеты температурного режима работы проводов и кабелей, в 1903 составил атлас чертежей и рисунков, отражающих различные способы укладки кабелей, в 1912 впервые изложил теорию электрического кабеля [4].

В музее артиллерии, инженерных войск и войск связи долгое время экспонировалась радиостанция, изготовленная под руководством А.А.Кузнецова в 1919 для Красной армии в электротехнической лаборатории бывшего Электротехнического института императора Александра III. Профессор по кафедре электротехники А.А.Кузнецов (1875–1919гг.) преподавал в ЭТИ с 1898 по 1918 год, заведовал электротехнической лабораторией с 1914 по 1919 год. Он принимал деятельное участие в оборудовании первой в России высоковольтной

лаборатории под руководством П.Д.Войнаровского, организовывал фотометрическую лабораторию совместно М.А.Шателеном.

А.А.Кузнецов построил в мастерской института прибор для измерения частоты переменных токов и прибор для измерения разности фаз (фазометр). С 1910 до 1948 год в одной из аудиторий первого корпуса института работала значительных размеров одна из первых в России газоразрядная лампа. Работа проводилась в рамках исследований электрических колебаний и разрядов в газах, начатых еще первым заведующим кафедрой И.И.Боргманом.

Проводились работы по уменьшению сопротивления углей при увеличении температуры, что было важным для инженерных работ в области прожекторостроения. Профессор И.И.Боргман создал также конденсатор оригинальной конструкции, отмеченный наградой на Всемирной электротехнической выставке в Париже.

1920г. – начало 40-х годов. Заведующие кафедрой: С. И. Покровский, П. А. Щуркевич. После смерти И.И.Боргмана с 1914 года в преподавании курса «Теоретическая электротехника», наряду с профессором А.А.Петровским, участвует ученик И.И.Боргмана профессор (с 1921 года) С.И.Покровский (1872–1939). Он возглавлял кафедру с 1921 по 1939 год.

С именем С.И.Покровского, проработавшего в институте 39 лет, связано дальнейшее плодотворное развитие теоретической электротехники. Содержание курса все больше приближалось к потребностям инженерных электротехнических дисциплин. Лекции по курсу «Электричество и магнетизм», читавшиеся С.И.Покровским, дважды издавались литографским способом. В 1931 году, а затем в 1935 году под тем же названием лекции изданы в виде учебника.

Профессором С.И.Покровским при участии доцентов Д.В.Афанасьева и К.И.Крылова создана учебная лаборатория. Содержание части лабораторных работ отражало физические основы электротехники, другие лабораторные работы явились базой для создания лаборатории

электромагнитного поля. Учениками С.И.Покровского составлен и издан задачник по курсу «Электричество и магнетизм».

С 1924 года С.И.Покровский работал по заданиям возглавляемой профессором ЭТИ И.Г.Фрейдзоном секции связи научно-технического комитета РККФ (Рабоче-Крестьянского Красного Флота) в области телеграфирования и пеленгации. С.И.Покровский исследовал возможность обнаружения надводных объектов в ночное время по сравнению интенсивностей излучения в инфракрасном диапазоне от двух соседних или случайно выбранных секторов.

Прибор спроектировали раньше, чем появился первый работоспособный отечественный радиолокатор. Эта работа получила продолжение на кафедре в 1970–80-е годы, но уже в другом диапазоне частот – для связи с подводными лодками в подводном положении.

До середины 1920 годов в институте развивались два направления: связь (телефония и телеграфия) и электрохимия. Затем усиливается энергетическое направление. К 1930 году ЛЭТИ становится не только основным учебным центром по электроэнергетике, но и мощным научно-исследовательским центром по всем разделам. В середине 1930 годов в институте открываются новые специальности: радиотехника, приборостроение, автоматика.

Развитие курса «Теория переменных токов» связано с именем профессора (с 1918) П.А.Щуркевича (1873–1942гг.), работавшего в институте с 1902 по 1942 год и руководившего кафедрой Теории переменных токов ЭТИ–ЛЭТИ (1918–1942гг). Он опубликовал ряд учебников и пособий. Учебное пособие «Переменные электрические токи и теория круговых диаграмм» [5] включало весь курс теории переменных токов и являлось основным учебным пособием для студентов.

В 1933 году издан и в 1940 году переиздан учебник П.А.Щуркевича «Теория переменных токов» в двух томах с атласом круговых диаграмм [6]. Под его руководством создана лаборатория и написано руководство по переменным токам, содержащая 12 лабораторных работ по однофазным и 17 работ по трехфазным переменным токам [7]. Профессор

П.А.Щуркевич эвакуирован из блокадного Ленинграда по льду Ладожского озера весной 1942 года. По воспоминаниям сотрудников, умер в поезде 8 марта, тело вынесено в Рязани на платформу. Место захоронения неизвестно.

Послевоенные годы – 1959г. Заведующие кафедрой: Л.Р.Нейман, К.И.Крылов, А.В.Берендеев, С.И.Куренев. В 1944 году для заведования кафедрой «Теоретическая электротехника», в которую объединились кафедры «Теория переменного тока» и «Теория электричества и магнетизма», приглашен заведующий кафедрой ТОЭ Ленинградского Политехнического Института, профессор Л.Р.Нейман (1902–1975гг.). Под его руководством восстановлены, модернизированы и поставлены новые работы в лабораториях переменного тока, физических основ электротехники и электромагнитного поля. Ряд полезных идей, внесенных профессором Л.Р.Нейманом (академик АН СССР с 1970), обогатил содержание курса ТОЭ нашего института.

В 1945 году после ухода Л.Р.Неймана кафедра «Теоретическая электротехника» разделилась, образовав кафедры: «Физические основы электротехники», которую возглавил К.И.Крылов (1907–1992), и «Теория электромагнитных цепей» во главе с А.В.Берендеевым.

На кафедре «Физические основы электротехники» получил развитие курс теории электромагнитного поля (ТЭМП). Специализация института породила необходимость исследования электрических и магнитных полей в присутствии диэлектриков или магнетиков. Значительное развитие получили вопросы квазистационарных и волновых полей.

На электрофизическом факультете был поставлен курс электродинамики, по которому написан и издан конспект лекций. Получила развитие лаборатория ТЭМП. Выполнены научные работы по исследованию и моделированию электромагнитных полей в проводящих средах. Проводилась работа по электромагнитным методам измерения толщины плавающих льдов, включая горные ледники Кавказа и льды Антарктиды. Эта работа продолжалась до конца 1970 годов на кафедре и далее в институте Арктики и Антарктики.

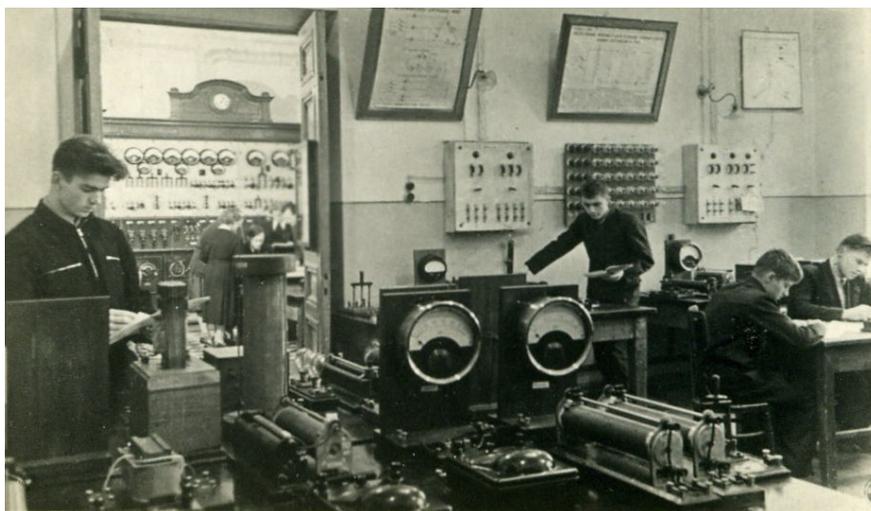
Курс теории электрических цепей развивался на кафедре «Теория электромагнитных цепей», возглавляемой профессором А.В.Берендеевым (1902–1955гг.), окончившим институт и работавшим в нем с 1922 по 1955 год. В 1934–1935 годах велась работа по исследованию и созданию методов расчета электрических цепей с переменными параметрами.

Основные выводы, полученные в результате теоретических разработок, нашли свое отражение в известном фундаментальном учебнике по курсу переменных токов, написанном профессором П.А.Щуркевичем при ближайшем участии А.В.Берендеева [6]. Под руководством А.В.Берендеева учебный курс «Теория переменных токов» преобразован в курс «Теория электромагнитных цепей» (ТЭМЦ).

В новом курсе получили развитие методы расчета переходных процессов в линейных электрических цепях, а также исследование нелинейных элементов и цепей. Поставлены оригинальные лабораторные работы, отражающие новые разделы курса. Изданы пособия к лабораторным работам и сборник задач по разделу ТЭМЦ.

Для более глубокого понимания ТОЭ и повышения квалификации преподавателей профессором А.В.Берендеевым был организован научно-методический семинар по теории электромагнитного поля. Этот семинар создал почву для последующего объединения кафедр «Физические основы электротехники» и «Теория электромагнитных цепей».

К изучению электрических цепей с переменными параметрами А.В.Берендеев возвращается в послевоенные годы. Известным завершением этих работ явилась докторская диссертация «Применение тензорного исчисления в прикладной электротехнике» (предельно лаконичная, объемом 20–25 листов). Глубокое знание тензорного исчисления позволило А.В.Берендееву внести ясность в идеи «тензорного исчисления Г.Крона» и показать, что методы тензорного исчисления применимы к задачам электротехники.



Учебная лаборатория электрических цепей

После смерти заведующего кафедрой «Теория электромагнитных цепей» А.В.Берендеева временно исполняющим обязанности заведующего (по совместительству) в декабре 1955 года назначен доцент С.И.Куренев (1901–1972гг.). В это время С.И.Куренев служил в рядах Вооруженных Сил и преподавал в Военно-морской академии. Он окончил ЛЭТИ в 1931 году, защитил кандидатскую диссертацию в 1936 году, преподавал на кафедре ТЭМЦ до января 1942 года.

Его служба в кадрах Военно-морских сил с 1942, кроме преподавания в Академии, была связана с размагничиванием кораблей. К решению этой проблемы во время войны были привлечены и другие сотрудники кафедры. В послевоенное время параллельно с основной работой в Академии С.И.Куренев преподавал на кафедре ТЭМЦ.

С.И.Куренев, сохраняя сложившиеся традиции преподавательского состава, осуществил в 1956 году важный шаг – объединил кафедры «Теория электромагнитных цепей» и «Физические основы электротехники» в кафедру «Теоретические основы электротехники». В 1956 году С.И.Куренев защитил докторскую диссертацию, а в 1957 году его утвердили в звании профессора.

Судя по воспоминаниям, кроме высоких профессиональных качеств, его отличали большое внимание к людям. В должности заведующего кафедрой С.И.Куренев находился до конца 1959 года, когда его сменил

П.Н.Матханов. Выйдя в это же время в отставку в звании капитана I ранга, С.И.Куренев перешел полностью на работу в ЛЭТИ и до октября 1972 был профессором кафедры ТОЭ.

1959 г. – настоящее время. Заведующие кафедрой: П.Н.Матханов, Ю.А.Бычков, Е.Б.Соловьева. В 1959–1984 кафедрой заведовал профессор П.Н.Матханов [8], который полностью переработал курс теории электрических цепей с учетом достижений в электро-, радио- и вычислительной технике, в теории управления и фактически создал современную электротехническую школу в СПбГЭТУ. П.Н.Матхановым написаны три уникальных учебника, в которых заложены основы переработанного курса теории электрических цепей [9]–[11].

С 1984 года по 2008 год кафедру ТОЭ возглавлял профессор Ю.А.Бычков, при котором методически завершилось новое прочтение курса теории цепей, сочетающее физичность, доступность и высокий математический уровень; произошло четкое деление дисциплины на вводный и фундаментальные разделы, на классические и современные приложения [12]–[14].

С 2008 года кафедрой руководит профессор Е.Б.Соловьева, при которой завершено создание многофункционального учебно-лабораторного комплекса, где объединены методы реального исследования электрических цепей в классической лаборатории с современными методами компьютерного моделирования, анализа, расчета и синтеза аналоговых и дискретных, линейных и нелинейных цепей.

Список литературы

1. Жерар Э. Курс электричества / Перевод М.А.Шателена. Под ред. А. И. Садовского: В 2-х т. – СПб: Изд. Ф. В Щепанского, 1893–1894.
2. Жерар Э. Электрические измерения. Перевел и дополнил П.Д. Войнаровский, инженер-электрик. – СПб: Изд. Ф.В.Щепанского, 1898.– XI.– 406 с.
3. Войнаровский П.Д. Элементарная теория телефонной передачи. – СПб, 1901.– 16 с.

4. Войнаровский П.Д. Теория электрического кабеля.– СПб,1912.– 200 с.
5. Щуркевич П.А. Переменные электрические токи и теория круговых диаграмм. Ч.1. Однофазный ток. – Л.: Кубуч, 1931.– 363 с.
6. Щуркевич П.А. Теория переменных токов.– Л.:Судпромгиз,1941.– 652 с.
7. Щуркевич П.А. Переменный ток. Пособие к лабораторным занятиям. – Л.: КУБУЧ, 1928.– 181 с.
8. Выдающиеся выпускники и деятели Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета «ЛЭТИ» им. В.И.Ульянова (Ленина). 1886–2006: биографический справочник / под ред. Д.В.Пузанкова. – СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2006. – 350 с.
9. Матханов П.Н. Основы анализа электрических цепей. Линейные цепи. – Л.: Высшая школа, 1990.
10. Матханов П.Н. Основы анализа электрических цепей. Нелинейные цепи. – Л., 1977.
11. Данилов Л.В., Матханов П.Н., Филиппов Е.С. Теория нелинейных электрических цепей. – Л., 1990.
12. Основы теоретической электротехники / Ю.А.Бычков, В.М.Золотницкий, Э.П.Чернышев, А.Н.Белянин.– СПб: Издательство «Лань», 2009.– 592 с.
13. Сборник задач по основам теоретической электротехники / Под ред. Ю.А.Бычкова, В.М.Золотницкого, Э.П.Чернышева, А.Н.Белянина, Е.Б.Соловьевой. – СПб.: Издательство «Лань», 2011.– 400с.
14. Справочник по основам теоретической электротехники: Учебное пособие / Под ред. Ю.А.Бычкова, В.М.Золотницкого, Е.Б.Соловьевой, Э.П.Чернышева. – СПб.: Издательство «Лань», 2012.– 368 с.

Панкин Валерий Васильевич – доцент кафедры ТОЭ,
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет
(СПбГЭТУ). Адрес: 197376, Россия, г. Санкт-Петербург, ул. Проф.Попова, д. 5,
кафедра ТОЭ. Тел.: (812) 346–17–96. E-mail: valeriy.pankin@mail.ru

Соловьева Елена Борисовна – д.т.н., профессор, зав. кафедрой ТОЭ
СПбГЭТУ. Тел.: (812) 346–17–96. E-mail: selenab@hotmail.ru

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Анализ и преобразования электронных цепей</i>		
Горшков К.С., Курганов С.А., Филаретов В.В.	Формирование безызбыточных выражений схемных функций для дискретно-аналоговых цепей с переключаемыми конденсаторами	3
Абдулатиф М., Саддави Х., Курганов С.А.	Нахождение символьных выражений для постоянных интегрирования при анализе электрических цепей классическим методом	18
Недорезов М.В., Филаретов В.В.	Алгебраический анализ зеркально-нулловых схем на основе выделения аномальных элементов	34
Курганов С.А.	Схемно-алгебраическое доказательство формулы преобразования n -лучевой звезды в эквивалентный полный n -угольник	48
Канов Л.Н., Костюков В.В.	Применение метода схемных коэффициентов к анализу переходных процессов в симметричных трехфазных цепях	56
<i>Моделирование и диагностика электроэнергетических цепей и систем</i>		
Гришкевич А.А.	Моделирование надежности элементов электроэнергетической системы при помощи графического процессора	63
Кадырова Г.Р.	Исследование мер качества моделей для оценивания состояния технического объекта	72
Канов Л.Н. Солодкий А.В.	Применение схемного моделирования для анализа и оптимизации электропривода переменного тока	85
Горшков К.С., Курганов С.А., Филаретов В.В.	Диагностика линейных электрических цепей на основе косвенной компенсации подсхем с неизвестными параметрами	93
<i>Алгоритмы синтеза графов</i>		
Филаретов В.В.	Алгоритмы перечисления неизоморфных корневых деревьев на основе лексикографического упорядочения	109
Свирщёва Э.А.	Симметрии и построение неизоморфных корневых деревьев	125
Недорезов М.В., Недорезов П.В., Филаретов В.В.	Алгоритм и программа генерации неизоморфных корневых деревьев на основе векторов начальных вершин	150
Недорезов П.В., Филаретов В.В.	Применение двоичных кодов для генерации неизоморфных корневых деревьев	164

<i>Теория электромагнитного поля</i>		
Федоров В.В., Портной М.С.	Аналогия законов электромагнитных и гравитационных полей	176
Меньшов Е.Н.	Некоторые замечания о магнитных линиях	184
<i>Из опыта работы</i>		
Чикин В.В., Тимиргазин Р.Ф.	Математическая модель срабатывания жидкометаллического предохранителя	188
Догодин Н.Б.	Особенности обеспечения гигиенических требований к базовым станциям сетей Wi-Fi в закрытых помещениях	195
<i>В порядке обсуждения</i>		
Березуев Р.И.	Об утрате определенности в математике, механике и электротехнике: дисциплина обсуждений	204
Ерохов И.В.	Критические замечания к работам Габриэля Крона	217
<i>Дискуссии</i>		
Ерохов И.В.	К преобразованию n -звезды проводимостей в эквивалентный полный n -угольник	225
Курганов С.А.	О преобразовании многолучевой звезды проводимостей в эквивалентный полный многоугольник	231
<i>Из истории открытий</i>		
Ерохов И.В.	Метод Гаусса и решение систем уравнений с помощью цепных дробей	236
<i>Классики теории цепей</i>		
Ястребов Н.И.	Рыбин Александр Иванович	244
<i>Научные школы</i>		
Панкин В.В., Соловьева Е.Б.	К 130-летию Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета –ЛЭТИ им. В.И. Ленина	247

TABLE OF CONTENTS

<i>Analysis and transformations of electronic networks</i>		
Gorshkov K.S., Kurganov S.A., Filaretov V.V.	Cancellation-free Symbolic Analysis of Switched-Capacitor Circuits	3
Abdulatiff M., Saddavi H., Kurganov S.A.	Finding of symbolic expressions for constants of integration at the analysis of electric circuits by means of the classical method	18
Nedorezov M.V., Filaretov V.V.	Algebraical analysis of mirror-nullor circuits by means of pathological element extraction	34
Kurganov S.A.	A circuit-algebraic proof of the formula of transformation of a n-beam star in an equivalent full n-polygon	48
Kanov L.N. KOSTJUKOV V.V.	Application of the method of circuit factors to the analysis of transients in symmetric three-phase circuits	56
<i>Analysis and diagnosis of electric power circuits and systems</i>		
Grischkevich A.A.	Simulation of reliability elements of an power system by means of the graphics processor	63
Kadyrova G.R.	Research of measures of models quality for the state estimation of technical object	72
Kanov L.N. Solodkiy A.V.	Application of circuit modelling for the analysis and optimization of the electric drive with alternating current	85
Gorshkov K.S., Kurganov S.A., Filaretov V.V.	Diagnostics of linear electric circuits by means of the indirect compensation of subschemes with unknown parameters	93
<i>Synthesis algorithms of graphs</i>		
Filaretov V.V.	Algorithms of generation for non-isomorphic rooted trees on the basis of lexicographic ordering	109
Svirshyova Je.A.	Symmetry and construction of non-isomorphic rooted trees	125
Nedorezov M.V., Nedorezov P.V., Filaretov V.V.	Algorithm and the program of generation non-isomorphic rooted trees on the basis of vectors of initial vertexes	150

Nedorezov P.V., Filaretov V.V.	Application of binary codes for generation non-isomorphic rooted trees	164
<i>Electromagnetic field theory</i>		
Fedorov V.V., Portnoy M.S.	The analogy of the laws of electromagnetic and gravitational fields	176
Menshov E.N.	Some comments about the magnetic lines	184
<i>From experience</i>		
Chikin V.V., Timirgazin R.F.	A mathematical model for liquid-metal fuse in case of the short circuit	188
Dogadin N.B.	Approximate calculation of hygienic protective zone boundaries in locations of base stations of the Wi-Fi networks in the closed premises	195
<i>In order to discuss</i>		
Berezuiev R.I.	About loss of definiteness in the mathematician, the mechanic and the electrical engineering: discipline of discussions	204
Erochov I.V.	Critical remarks to Gabriel Kron's works	217
<i>Discussions</i>		
Erochov I.V.	To transformation of a n-star of admittances in an equivalent full n-polygon	225
Kurganov S.A.	About transformation of a multibeam star of admittances in an equivalent full polygon	231
<i>From the history of discovery</i>		
Erochov I.V.	The method by Gauss's and the decision of systems of the equations by means of chain fractions	236
<i>Classics of network theory</i>		
Yastrebov N.I.	Rybin Alexander Ivanovich	244
<i>Scientific schools</i>		
Pankin V.V., Solovyeva E.B.	Devoted to 125-th anniversary of the first department of electrical engineering in Russia	247

Synthesis, analysis and diagnosis of electronic networks : The international scientific transactions.– Issue 13 / under edition V.V. Filaretov. – Ulyanovsk: Ulyanovsk state technical university, 2016. – 264 p.

This collection of scientific works continues a series of specialized collections published in Ulyanovsk State Technical University during international conferences: «Continual algebraic logic calculus and neuralmathematics in science and technics», «Conference on logic, computer science, sociology of science» and «Volgin's Readings».

In this volume discusses the theoretical questions and practical application of the modern theory of electrical and electronic networks. Including: structural synthesis, synthesis of analog and digital filters, topological analysis, decomposition and transformation of electronic circuits presented nullor and mirror pathological elements.

Recommended for specialists in the field of electronic circuitry analog and mixed discrete electronic circuits, undergraduates and graduate students of corresponding specialties.

Научное издание

**СИНТЕЗ, АНАЛИЗ И ДИАГНОСТИКА
ЭЛЕКТРОННЫХ ЦЕПЕЙ**

Международный сборник научных трудов
Выпуск 13

Под редакцией В. В. Филаретова

Компьютерная верстка В. В. Филаретов

Технический редактор Е. Б. Полякова

ЛР № 020640 от 22.10.97.

Подписано в печать 08.12.2016. Формат 60×84/16.
Усл. печ. л. 15,35. Тираж 100 экз. Заказ 1100.

Ульяновский государственный технический университет
432027, Ульяновск, Северный Венец, 32

ИПК «Венец» УЛГТУ. 432027, Ульяновск, Северный Венец, 32