

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«УЛЬЯНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

С.А. Курганов, В.В. Филаретов

**АНАЛИЗ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ
С НУЛЛОВЫМИ И ЗЕРКАЛЬНЫМИ
АНОМАЛЬНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ**

Ульяновск
УлГТУ
2015

УДК 621.372.061

ББК 31.27.01

К 93

Рецензенты:

кафедра радиофизики и электроники Ульяновского государственного университета
(зав. кафедрой – доктор физико-математических наук, профессор Н. Т. Гурин);
доктор технических наук, профессор В. А. Сергеев.

Научный редактор доктор технических наук В. В. Филаретов.

УДК 621.372.061

Курганов, С.А.

Анализ электрических цепей с нуллорными и зеркальными аномальными элементами / С. А. Курганов, В. В. Филаретов. – Ульяновск : УлГТУ, 2015. – 224 с.

Схемный подход в отличие от матричного или графового подхода не требует промежуточных математических моделей и не связан с образованием избыточных взаимно уничтожающихся слагаемых. В книге расширены возможности схемно-алгебраического метода символьного анализа электрических цепей с нуллорными аномальными элементами. Для этого в традиционный набор линейных идеальных элементов включены три элемента на базе зеркальных и нуллорных аномальных элементов, которые используются в моделях токовых конвейеров. Предложены формулы выделения новых элементов и преобразования схем с ними, в том числе преобразования, облегчающие нахождение многократных суммарных и разностных алгебраических дополнений, требуемых для расчета чувствительности, погрешности и допусков электрических цепей.

Рассмотрены предложенные авторами символьные диакоптические методы для анализа сложных электрических цепей: методы схемных миноров, схемно-алгебраической редукции и нуллорных схем. Методы предусматривают формирование как предельно компактных выражений, так и выражений без алгебраической избыточности. Выражения могут быть едиными или последовательными (иерархическими), что многократно увеличивает предельную размерность анализируемых схем. Снимаются существующие ограничения на число внешних узлов подсхем при символьном анализе. В книге приводятся сведения о разработанных компьютерных программах.

Для специалистов в области теоретической электротехники, энергетики и радиотехники, магистрантов и аспирантов соответствующих направлений и специальностей.

ISBN 978-5-9795-1436-9

© Курганов С. А., Филаретов В. В., 2015
© Оформление. УлГТУ, 2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

Список условных сокращений, обозначений и понятий.....	6
ВВЕДЕНИЕ	8
1. СХЕМНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ С НУЛЛОРНЫМИ АНОМАЛЬНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ.....	14
1.1. Идеальный схемный элемент нуллор.....	14
1.2. Схемно-алгебраические формулы для схемных функций.....	16
1.3. Формулы выделения параметров элементов.....	18
1.4. Вырождение схемы.....	21
1.5. Алгоритм разложения схемных определителей.....	26
1.6. Правила оптимального выбора выделяемых элементов.....	28
1.7. Схемно-алгебраические формулы токовых конвейеров.....	29
1.8. Сравнение методов анализа цепей с токовыми конвейерами на основе схемных и матричных определителей.....	33
1.9. Выводы.....	41
2. СХЕМНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ С ЗЕРКАЛЬНЫМИ АНОМАЛЬНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ.....	43
2.1. Нуллорные и зеркальные аномальные элементы.....	43
2.2. Формулы выделения зеркальных элементов.....	45
2.3. Структурные вырождения схем с зеркальными элементами.....	47
2.4. Примеры анализа цепей с зеркальными элементами.....	49
2.5. Анализ электрического фильтра	54
2.6. Сравнение матричных определителей фильтра.....	57
2.7. Взаимосвязь определителей схемы с зеркальными элементами и соответствующей схемы с нуллорами.....	59
2.8. Плавающие зеркальные элементы.....	60
2.9. Построение нуллорно-зеркальных схем замещения токовых конвейеров.....	63
2.10. Выводы.....	67
3. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЦЕПЕЙ С АНОМАЛЬНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ.....	68
3.1. Подключение, стягивание и удаление элементов, параллельных и последовательных с нуллорными элементами.	69
3.2. Преобразование путем переключения нуллорных элементов.....	72
3.3. Стягивание и подключение нуллора.....	75

3.4. Переключение-преобразование зеркальных и нуллорных элементов.....	77
3.5. Стягивание и добавление зеркальных и нуллорных элементов.....	87
3.6. Выводы.....	89
4. РАЗЛОЖЕНИЕ МНОГОКРАТНЫХ СУММАРНЫХ И РАЗНОСТНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДОПОЛНЕНИЙ МЕТОДОМ СХЕМНЫХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ.....	90
4.1. О противоречии матричных определителей.....	90
4.2. Топологическое раскрытие матричного определителя.....	92
4.3. Многократные суммарные алгебраические дополнения (МСАД) и их основные свойства.....	94
4.4. Нахождение МСАД на основе стягивания нуллов.....	101
4.5. Нахождение МСАД на основе стягивания аномальных зеркальных элементов.....	103
4.6. Выводы.....	109
5. ОБОБЩЕННЫЕ БЕЗЫЗЫТОЧНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СИМВОЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ	110
5.1. Формулы относительной чувствительности.....	110
5.2. Обобщенные формулы относительной чувствительности.....	113
5.3. Формулы чувствительности второго порядка.....	115
5.4. Частные формулы для относительной чувствительности.....	118
5.5. Формулы для чувствительности схем с топологическими особенностями.....	118
5.6. Символьный анализ чувствительности фильтра.....	121
5.7. Анализ чувствительности схем с зеркальными аномальными элементами.....	123
5.8. Построение функции чувствительности схемы с токовым конвейером на основе ЗЭН и нуллатора.....	126
5.9. Формулы чувствительности по параметру кратных элементов.....	131
5.10. Выводы.....	139
6. ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД СХЕМНЫХ МИНОРОВ.....	140
6.1. Метод схемных миноров.....	140
6.2. Обобщение метода схемных миноров для подсхем с конечными управляющими связями.....	141
6.3. Анализ несимметричного синхронного генератора с нагрузкой.....	142

6.4. Обобщение метода схемных миноров для подсхем с нуллорными связями.....	145
6.5. Объединение двух четырехполюсных подсхем с внешними полюсами.....	148
6.6. Применение подсхем с нуллорно-зеркальными связями.....	150
6.7. Независимые схемные миноры.....	153
6.8. Выводы.....	162
7. МЕТОД НУЛЛОРНЫХ СХЕМ ДЛЯ АНАЛИЗА ЦЕПЕЙ С АВТОНОМНЫМИ ПОДСХЕМАМИ.....	163
7.1. О методе нуллорных схем.....	163
7.2. Нуллорные схемы автономных подсхем.....	164
7.3. Перечисление базисных нуллорных схем.....	167
7.4. Объединение подсхем на основе нуллорных схем.....	169
7.5. Анализ несимметричного синхронного генератора с нагрузкой	171
7.6. Матричные нуллорные схемы автономных подсхем.....	174
7.7. Анализ синхронного генератора с нагрузкой на основе матричных нуллорных схем.....	183
7.8. Анализ электрических цепей с зеркальными элементами методом нуллорных схем	185
7.9. Выводы.....	188
8. МЕТОД СХЕМНО-АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ РЕДУКЦИИ ДЛЯ ЦЕПЕЙ С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ ПОДСХЕМАМИ.....	189
8.1. О методе схемно-алгебраической редукции	189
8.2. Обобщение режимов холостого хода и короткого замыкания с помощью нуллоров.....	190
8.3. Алгоритм иерархической схемно-алгебраической редукции....	195
8.4. Анализ схемы синхронного генератора с длинной линией и трехфазной нагрузкой.....	196
8.5. Коррекция режима электроэнергетических систем методом САР	200
8.6. Примеры коррекции режима ЭЭС.....	202
8.7. Выводы.....	207
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	208
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ.....	211
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	212

СПИСОК УСЛОВНЫХ СОКРАЩЕНИЙ, ОБОЗНАЧЕНИЙ И ПОНЯТИЙ

ГН	генератор напряжения
ГНУИ	генератор неудаляемого управляемого источника
ГТ	генератор тока
ДВ	двоичный вектор подсхемы
ЗАЭ	зеркальный аномальный элемент напряжения или тока
ЗИЭ	зеркальный идеальный элемент
ЗЭН	зеркальный аномальный элемент напряжения
ЗЭТ	зеркальный аномальный элемент тока
ИНУН	источник напряжения, управляемый напряжением
ИНУТ	источник напряжения, управляемый током
ИТУН	источник тока, управляемый напряжением
ИТУТ	источник тока, управляемый током
ЛЭС	линейная электрическая схема
МСАД	многократное суммарное алгебраическое дополнение
МСО	метод схемных определителей
НИ	независимый источник
НУИ	неудаляемый управляемый источник
ОУ	операционный усилитель
ПН	приемник напряжения
ПТ	приемник тока
ПНУИ	приемник неудаляемого управляемого источника
САФ	схемно-алгебраическая формула
СМ	схемный минор – определитель подсхемы
ССФ	символьная схемная (системная) функция
УИ	управляемый источник
ВОССИ	токовый конвейер с балансным выходом
IBOCCSI	токовый конвейер с балансным выходом и инвертирующим выходом напряжения
DCCII	двойной дифференциальный конвейер тока
DDCC	дифференциальный конвейер тока с тремя входами напряжения и балансным выходом
CCII+, CCII–	токовые конвейеры второго поколения с положительным и отрицательным коэффициентами передачи тока
ICCII+, ICCII–	токовые конвейеры с положительным и отрицательным коэффициентами передачи тока и отрицательным коэффициентом напряжения

DVCC	токовый конвейер с дифференциальным входом по напряжению, одним входом и двумя выходами по току
FDCCII	полный дифференциальный конвейер тока
Базисные нуллорные схемы	совокупность нуллорных схем, составляющих САФ подсхемы
Выделение элемента	вынесение его параметра из схемного определителя с соответствующим изменением схемы
Вырожденная схема	определитель схемы равен нулю
Зеркальный элемент	ЗЭН или ЗЭТ
Нуллорно-зеркальная связь	связь подсхем посредством пар ЗЭН–норатор и ЗЭТ–нуллатор
Кратность мультиветви	число ветвей, входящих в мультиветвь
Мультиветвь	параллельное соединение нескольких двухполюсных проводимостей
Нейтрализация	удаление или стягивание элемента
Нуллатор	аномальный элемент с нулевым напряжением и током
Норатор	аномальный элемент, напряжение и ток которого определяются подключенной к нему цепью
Нуллор	идеальный усилитель-преобразователь тока или напряжения, содержащий нуллатор и норатор
Нуллорная связь	связь подсхем посредством норатора и нуллатора
Нуллорная схема	топологическая характеристика подсхемы – соединение нуллаторов и нораторов на ее полюсах
Нуллорный элемент	нуллатор или норатор
Плавающий зеркальный элемент	ЗЭН или ЗЭТ без заземления полюса
Разложение схемного определителя	нахождение алгебраического выражения путем рекурсивного выделения элементов и подсхем
Схемный определитель	основная алгебраическая характеристика линейной электрической цепи

ВВЕДЕНИЕ

Взаимное обогащение теории электрических цепей и математики.

Основоположники теории цепей нередко предвосхищали развитие соответствующих ветвей математики. Например, так было с понятиями «матрица» и «дерево», использованными Г.Р. Кирхгофом для анализа электрических цепей [16] в 1847 году, то есть задолго до введения этих понятий в матричной алгебре и теории графов.

Взаимосвязь теории цепей и матричной алгебры проявляется в схемном отображении матрицы схемой, содержащей проводимости, соответствующие диагональным элементам матрицы, и источники тока, управляемые напряжением, которые отображают элементы матрицы, расположенные вне главной диагонали [58]. С помощью этого отображения электрической схемой может быть представлена система уравнений произвольной физической природы [11, 85].

Электрическая схема в отличие от матрицы является топологическим объектом, для которого центральным является соединение элементов, определяющее структурные свойства. Нумерация элементов схемы не подлежит значительному изменению, как это происходит в матрице после удаления строк и столбцов. Повысить эффективность матричного разложения позволяют топологические алгоритмы, не использующие номера строк и столбцов при нахождении знаков алгебраических дополнений [61, 64].

Метод выделения параметров. Особое место в теории электрических цепей занимает метод выделения параметров. Для символьного анализа цепей, составленных из двухполюсников, этот метод был предложен В. Фойнером, учеником Г. Кирхгофа, в 1902 году [81, 82]. Другая важная веха – 1945 год, когда Х. Боде предложил использовать формулы выделения параметров для анализа чувствительности [3]. Избыточность матриц узловых проводимостей и контурных

сопротивлений при анализе чувствительности устранил С. Хуанг, воспользовавшись результатами В. Фойснера [92].

Избыточность матрицы электрических цепей приводит к образованию многочисленных взаимно уничтожающихся слагаемых в выражениях матричных определителей. Подобная специфика матриц электрических цепей была оставлена без внимания специалистами в области математики, хотя эта особенность присуща не только матрицам электрических цепей, но и, например, строительных конструкций, то есть практически всем моделям с сосредоточенными параметрами.

Ю.П. Гаямичев предложил первым формулу для выделения в матрице узловых проводимостей параметра источника тока, управляемого напряжением [9]. Спустя 13 лет аналогичная формула была предложена Г. Алдерсоном и П.М. Лином [66, 71, 96]. В работах [94, 95] выполнено обобщение матричных формул выделения на сопротивления и нерегулярные для узлового базиса управляемые источники.

Формулы выделения параметров, многократно встречающихся в матрице, основаны на многократных суммарных алгебраических дополнениях (МСАД), хотя само это понятие в зарубежной литературе до недавнего времени [94] практически не использовалось. Аппарат МСАД был разработан В.П. Сигорским еще в 1960 году также для решения задач анализа электрических цепей [47, 48, 50, 51], но до сих пор не является традиционным разделом матричного анализа, и развивать эту ветвь матричного анализа приходится специалистам по теории цепей.

О методе схемных определителей. С середины 50-х годов прошлого века теория электрических цепей обогащалась и развивалась во многом благодаря методам математики – теории графов, матричной и тензорной алгебре и т. д. Эта тенденция проявляется и в настоящее время, но теории электрических цепей, следуя давней традиции, есть чем поделиться с матричной алгеброй.

В настоящее время теории матричных и схемных определителей развиваются параллельно, причем классическая матричная алгебра

обогащается топологическими понятиями и алгоритмами. Этому способствует прямая аналогия между электрической схемой с источниками тока, управляемыми напряжением, и ее матрицей [58, 60], решением системы линейных алгебраических уравнений и анализом схемы [11, 85], а также разработка эффективного метода символьного анализа электрических цепей – метода схемных определителей [53–57, 59, 60].

Схемно-алгебраическое направление теории электрических цепей, основанное на схемных определителях, предоставляет физическую основу для разложения матричных определителей [61, 64]. При этом разложение определителя матрицы, опирающееся на порядковую нумерацию строк и столбцов [5, 98, 101, 119], получает новые и неожиданные топологические решения.

Особая роль теории цепей проявилась в интерпретации и визуализации матричной алгебры, а также создании нового материального инструментария. Так, по аналогии с идеальным элементом схемы – нуллором [78] – был введен аномальный элемент матрицы («неудаляемый элемент матрицы») [61], соответствующий бесконечно большому значению параметра.

Образующая нуллор пара аномальных элементов – норатор и нуллатор – соответствует сложению строк или столбцов с базисными строкой или столбцом или между собой. В случае суммарных алгебраических дополнений норатор и нуллатор не соединены с базисным узлом схемы.

Только спустя 35 лет (!) была предложена схемная реализация для вычитания строк или столбцов матрицы в виде новой пары аномальных элементов – зеркального элемента тока и зеркального элемента напряжения [75, 110, 112]. Это сделало возможным схемно-алгебраическое разложение многократных суммарных и разностных алгебраических дополнений [64].

Аномальные нуллорные и зеркальные элементы. Безусловно, открытие аномальных элементов [75, 78, 112, 113] стоит в ряду важнейших достижений теории электрических цепей. Впечатляет один только неполный список работ, посвященных применению нуллора [93]. В последние годы отмечается всплеск по активности публикаций в области зеркальных аномальных элементов, хотя еще не прошло полутора десятилетий с момента их введения в 1999 году [75].

Аномальные нуллорные и зеркальные элементы нашли широкое применение при моделировании, синтезе и анализе электрических цепей. Особенно часто аномальные элементы применяются для моделирования электронных элементов – операционных усилителей, токовых конвейеров, преобразователей импедансов и электрических фильтров и генераторов [102–105, 111, 114].

Нуллор – нуллорный идеальный элемент – это идеальный усилитель с бесконечным коэффициентом передачи напряжения или тока – является базовым элементом схемно-алгебраического анализа, поскольку он позволяет получить схему числителя формируемой схемной функции или отклика, а в методах анализа цепей по частям – схемные миноры – определители подсхем, которые являются составными частями диакоптических формул. Схемно-алгебраический анализ позволяет формировать компактные выражения схемных функций и откликов без избыточных взаимно уничтожающихся слагаемых, характерных для матричных методов анализа.

Зеркальный идеальный элемент – это идеальный элемент на базе нуллора, инверсного повторителя тока (ИПТ) и инверсного повторителя напряжения (ИПТ). Норатор соединяется последовательно с ИПТ, а нуллатор – с ИПН, образуя зеркальный аномальный элемент напряжения или зеркальный аномальный элемент тока соответственно. В зарубежной литературе чаще используется термин «зеркало» (mirror), чем термин «повторитель» («follower»), говорят «зеркало тока» и «зеркало напряжения».

Символьный анализ схем с зеркальными аномальными элементами нельзя считать достаточно проработанным вопросом ввиду новизны зеркальных элементов. Несмотря на широкое распространение аномальных элементов, специалисты по электронике недостаточно хорошо знакомы с основами анализа электрических цепей даже с нуллорными аномальными элементами.

В недавних работах [118, 121] приводятся ошибочные эквивалентные преобразования схем с аномальными элементами. Например, имеются ошибки в соединениях аномальных элементов с независимыми источниками. Параллельное соединение нуллора и источника напряжения заменяется источником напряжения, в то же время такое соединение является вырожденным – определитель схемы равен нулю. Отклик такой цепи не может быть найден однозначно.

В этой связи целью настоящей работы является, с одной стороны, краткое изложение основ анализа цепей с аномальными элементами, а, с другой – обобщение последних достижений символьного анализа электрических цепей на основе аномальных нуллорных и зеркальных элементов. Монография основана на оригинальных разработках, полученных авторами за последние годы.

В первой главе изложены основы схемно-алгебраического анализа цепей. Приведены схемно-алгебраические выражения схемных функций, формулы выделения элементов, условия вырождения схемы и алгоритм формирования символьных выражений схемных функций.

Во второй главе изложены основы символьного анализа цепей с зеркальными аномальными элементами – предложены формулы выделения зеркальных элементов, контуров из зеркальных и нуллорных элементов.

В третьей главе представлены основные преобразования схем с нуллорными и зеркальными аномальными элементами. Эти преобразования могут быть использованы для порождения схем,

эквивалентных исходной схеме, как по схемным функциям, так и по символльному выражению определителя.

В четвертой главе нуллорные и зеркальные элементы применены в теории матричных определителей для нахождения многократных суммарных и разностных алгебраических дополнений, что позволяет избежать избыточных взаимно уничтожающихся слагаемых, характерных для матричных методов раскрытия определителей. Предложенные методы могут применяться в линейных разделах различных отраслей науки и техники.

В пятой главе предложены обобщенные формулы для относительной чувствительности схемных функций цепей на основе МСАД. Для их разложения применяется метод схемных определителей, позволяющий получить компактные символные выражения.

В шестой главе метод схемных миноров, предназначенный для анализа цепей по частям, обобщен на подсхемы с управляющими связями между ними. Это позволяет наиболее рационально делить схемы на части – с учетом правил оптимального формирования символьных выражений. Подраздел «Независимые схемные миноры» из этой главы, в котором предложено раскрывать только часть схемных миноров, а остальные получать с помощью тождеств Якоби, подготовлен *Е.Р. Бодряковым*.

В седьмой главе метод нуллорных схем обобщен на автономные подсхемы, что уменьшает трудоемкость анализа электроэнергетических схем, содержащих многочисленные независимые источники.

Восьмая глава посвящена методу схемно-алгебраической редукции, который обобщен с помощью нуллоров на схемы, содержащие многополюсники с цепными параметрами, например, передающие длинные линии.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 15-07-05847.

1. СХЕМНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ С НУЛЛОВЫМИ АНОМАЛЬНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Схемно-алгебраический анализ состоит в получении символьных схемных функций (ССФ) и откликов электрических цепей методом схемных определителей (МСО) [55]. Исходные схемно-алгебраические выражения ССФ и откликов представляются при этом в виде отношения определителей схем числителя и знаменателя. Схема знаменателя получается при нулевых независимых источниках, а схема числителя – путем подключения нулловых элементов, которые играют центральную роль, и в схемно-алгебраических методах анализа по частям позволяют получить составляющие части диакоптических формул – схемные миноры. Схемно-алгебраические выражения преобразуются в искомые символьные формулы путем рекурсивного выделения параметров элементов из схемных определителей и миноров.

1.1. ИДЕАЛЬНЫЙ СХЕМНЫЙ ЭЛЕМЕНТ НУЛЛОВ

Для получения схемы числителя ССФ необходимо поместить в исходную схему идеальный схемный элемент – направленный взвешенный нуллор (неудаляемый управляемый источник – НУИ), который состоит из норатора и нуллатора (генератора и приемника НУИ) [55]. Этот элемент был введен в теорию цепей Б. Теллегеном в 1954 году как управляемый источник (УИ), параметр которого – коэффициент передачи напряжения, тока или передаточная проводимость и сопротивление – стремится к бесконечности [113] (рис. 1.1.1). При этом входное (на нуллаторе) – напряжение и ток становятся равными нулю, а напряжение на нораторе и ток через него определяются схемой, к которой подключен этот элемент.

Традиционные ненаправленные нуллоры широко применяются для матричного анализа, синтеза, диагностики электрических цепей [93].

Однако до недавнего времени направленные нуллоры использовались сравнительно редко. Понятие направленного нумерованного нуллора для топологического анализа электрических цепей введено Я. Брауном в 1966 году [76]. Ориентированный нуллор позволяет, используя метод выделения элементов, сформировать определитель схемы и его алгебраические дополнения без построения уравнений. Формально параметру нуллора можно присвоить значение, равное единице.

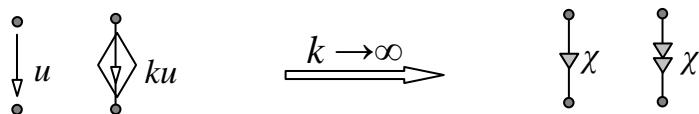


Рис. 1.1.1. Преобразование управляемого источника в направленный взвешенный нуллор при бесконечном параметре k (χ – параметр нуллора)

В 2001 году В. В. Филаретовым обобщается нуллор Я. Брауна путем введения понятия направленного взвешенного нуллора, названного неудаляемым управляемым источником [56]. НУИ в отличие от направленного нуллора Я. Брауна имеет параметр, который может принимать любое конечное значение, например, равное параметру выделяемого УИ или единице. В последнем случае взвешенный нуллор – НУИ становится направленным нуллором Я. Брауна. Взвешенный нуллор можно оставлять в схеме, чтобы отложить занесение его параметра в формулу схемного определителя. Это необходимо, например, для разработки более эффективных алгоритмов разложения определителей на основе выделения параметров УИ [2].

Многополюсный нуллор. Представляет интерес понятие обобщенного управляемого нуллатора – преобразователя, выполняющего функции вычитания, перемножения и сложения входных сигналов [117]. Применяется в сочетании с норатором для моделирования нелинейного источника тока, управляемого напряжением, передаточная проводимость которого зависит от одного из входных напряжений.

Применение нуллора для нахождения схемных функций и откликов. Норатор помещается в исходную схему вместо независимого источника, а нуллатор – вместо искомого отклика. Это позволяет свести нахождение выражения числителя к разложению определителя так называемой «схемы числителя». Возможность нахождения как числителя, так и знаменателя ССФ в виде определителя некоторой схемы является основным аргументом в пользу названия «метод схемных определителей». В отличие от метода Г. Крамера – метода матричных определителей – метод схемных определителей использует свой собственный схемно-алгебраический аппарат и не нуждается в каком-либо другом математическом аппарате.

1.2. СХЕМНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СХЕМНЫХ ФУНКЦИЙ

Отношение значения реакции электрической схемы к заданному значению воздействия, выраженное через параметры элементов схемы, называется символьной схемной функцией (ССФ). ССФ имеют широкий спектр применений, в частности, они используются для нахождения символьных выражений откликов.

В методе схемных определителей ССФ формируются без составления уравнений цепи – непосредственно по схеме на основе формулы

$$H = \frac{N}{D}, \quad (1.2.1)$$

где N, D – определители схем, отображающих числитель и знаменатель (кратко – определители схем числителя и знаменателя) соответственно.

Сущность метода схемных определителей (МСО) заключается в получении ССФ, исходя из определителей схем числителя и знаменателя, которые находятся путем последовательного выделения элементов. При этом выражение (1.2.1) представляется в виде схемно-алгебраической формулы, различные типы которой приведены в табл. 1.2.1 [76].

Таблица 1.2.1

Схемно-алгебраические формулы для схемных функций

№	Исходная схема	САФ
1	Коэффициент передачи по напряжению	$K_{EU} = \underline{U}/\underline{E} = \frac{\underline{U}}{\underline{E}}$
2	Передаточная проводимость	$Y_{EI} = \underline{I}/\underline{E} = \frac{\underline{I}}{\underline{E}}$
3	Передаточное сопротивление	$Z_{JU} = \underline{U}/\underline{J} = \frac{\underline{U}}{\underline{J}}$
4	Коэффициент передачи по току	$B_{JI} = \underline{I}/\underline{J} = \frac{\underline{I}}{\underline{J}}$
5	Входное сопротивление	$Z_{BX} = \underline{U}_{BX} / \underline{J} = \frac{\underline{U}_{BX}}{\underline{J}}$
6	Входная проводимость	$Y_{BX} = \underline{I}_{BX} / \underline{E} = \frac{\underline{I}_{BX}}{\underline{E}}$

Как видно, построение схемы знаменателя выполняется на основе исходной схемы путем замыкания источника ЭДС E и размыкания источника тока J , в зависимости от того, какой из них оставляется в схеме. При нахождении напряжения ветвь отклика – приемник напряжения – размыкается, а при нахождении тока ветвь отклика – приемник тока – заменяется идеальным проводником (стягивается).

Для построения схемы числителя нуллор включается в исходную схему следующим образом: нуллатор заменяет приемник напряжения или тока, сохраняя их направление, а норатор подсоединяется взамен источника ЭДС E или тока J и ориентируется противоположно их направлениям. Следует обратить внимание на то, что числители всех передаточных функций для заданного источника и приемника одинаковы. Эти передаточные функции различаются только знаменателями.

1.3. ФОРМУЛЫ ВЫДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ЭЛЕМЕНТОВ

Топологические формулы Фойснера. Используемые в МСО схемно-алгебраические преобразования основаны на формулах выделения параметров, которые предложил В. Фойснер [81, 82]. Базовые формулы В. Фойснера позволяют свести разложение определителя исходной схемы к разложению определителей более простых производных схем, в которых отсутствует выделяемая ветвь z или y

$$\Delta = z\Delta^z + \Delta_z, \quad (1.3.1) \qquad \Delta = y\Delta_y + \Delta^y, \quad (1.3.2)$$

где Δ – определитель схемы, нижний или верхний индексы при символе Δ указывают на стягивание или удаление выделяемой ветви соответственно. Стягивание ветви равносильно ее замене идеальным проводником.

Сущностью МСО является преобразование схемных или схемно-алгебраических формул в алгебраические формулы, пригодные для вычислений. Проиллюстрируем формулы (1.3.1) и (1.3.2) в схемно-алгебраическом виде [59]

$$\left| \begin{array}{c} z \\ \parallel \\ \text{---} \end{array} \right| = z \left| \begin{array}{c} \parallel \\ \text{---} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \bullet \\ \parallel \\ \text{---} \end{array} \right|, \quad (1.3.3)$$

$$\left| \begin{array}{c} y \\ \parallel \\ \text{---} \end{array} \right| = y \left| \begin{array}{c} \parallel \\ \text{---} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \bullet \\ \parallel \\ \text{---} \end{array} \right|, \quad (1.3.4)$$

где парами вертикальных линий обозначены схемные определители.

Другие две формулы В. Фойснера требуют представления схемы в виде двух подсхем, имеющих один или два общих узла [81]

$$\Delta = \Delta_1 \cdot \Delta_2, \quad (1.3.5)$$

$$\Delta = \Delta_1 \cdot \Delta_2(a,b) + \Delta_1(a,b) \cdot \Delta_2, \quad (1.3.6)$$

где Δ_1 и Δ_2 – определители первой и второй подсхем, из которых состоит схема; $\Delta_1(a,b)$ и $\Delta_2(a,b)$ – определители схем, образованных соответственно из первой и второй подсхем в результате объединения общих узлов.

Формулы (1.3.5) и (1.3.6) наглядно представляются в виде схемно-алгебраических выражений соответственно [59]

$$\left| \begin{array}{c} 1 \\ \parallel \\ 2 \\ a \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} 1 \\ \parallel \\ a \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{c} 2 \\ \parallel \\ a \end{array} \right|, \quad (1.3.7)$$

$$\left| \begin{array}{c} 1 \\ \parallel \\ a \\ b \\ 2 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} 1 \\ \parallel \\ a \\ b \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{c} 2 \\ \parallel \\ b \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} 1 \\ \parallel \\ b \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{c} 2 \\ \parallel \\ a \\ b \end{array} \right|. \quad (1.3.8)$$

Формулы выделения параметров управляемых источников.

В практических схемах обычно используются четыре типа управляемых источников (УИ): 1) источник напряжения, управляемый напряжением (ИНУН); 2) источник тока, управляемый током (ИТУТ); 3) источник напряжения, управляемый током (ИНУТ); 4) источник тока, управляемый напряжением (ИТУН).

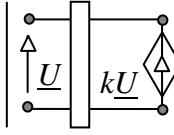
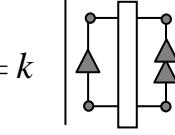
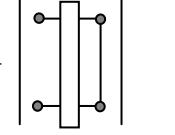
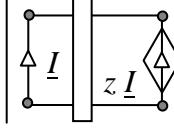
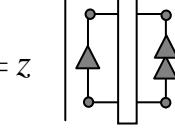
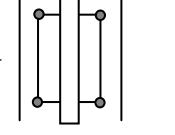
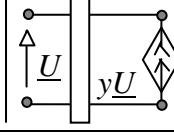
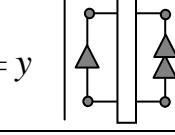
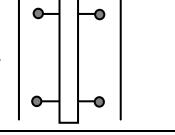
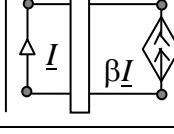
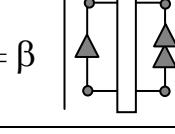
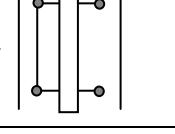
В 1977 году Р. Хашемян [90] предложил формулу выделения параметра произвольного УИ на основе направленного нумерованного нуллора. В соответствии с этой формулой определитель схемы

$$\Delta = \chi \Delta(\text{УИ} \Rightarrow \text{нуллор}) + \Delta(\chi=0), \quad (1.3.9)$$

где χ – параметр УИ; $\Delta(\text{УИ} \Rightarrow \text{нуллор})$ – определитель исходной схемы, в которой УИ заменен на нуллор, причем генератор УИ – на норатор, а приемник УИ – на нуллатор; $\Delta(\chi=0)$ – определитель исходной схемы, в которой нейтрализован УИ.

Схемно-алгебраические выражения, иллюстрирующие формулу (1.3.9) для различных типов УИ, приводятся в табл. 1.3.1.

Таблица 1.3.1
Формулы выделения параметров управляемых источников

№	Тип УИ	Схемно-алгебраическое выражение
1	ИНУН	 = k  + 
2	ИНУТ	 = z  + 
3	ИТУН	 = y  + 
4	ИТУТ	 = β  + 

Хашемян использовал предложенную формулу для одновременного разложения схемного определителя по параметрам всех n УИ, что требует перебора 2^n слагаемых и не обеспечивает формирование оптимальных по вычислительной сложности выражений. Это послужило веской причиной того, что формула Р. Хашемяна не была востребована специалистами, и что до конца 20-го века продолжилось преимущественное развитие матричных и графовых методов символьного анализа электрических цепей.

Только через 20 лет [54] было предложено рекурсивное использование формулы (1.3.9). Это позволило ей стать пятой формулой метода схемных определителей [42].

1.4. ВЫРОЖДЕНИЕ СХЕМЫ

Понятие вырожденной схемы – схемы с нулевым определителем – является ключевым для метода схемных определителей, поскольку выявление и отбрасывание нулевых слагаемых (алгебраических дополнений) определителя на ранних этапах выделения параметров сокращает многократно число операций по формированию искомого символьного выражения.

Вырождение элементов при их замыкании и размыкании.

Вырождение источника напряжения (при замыкании его узлов) и источника тока (при размыкании) в традиционном курсе ТОЭ известно давно, но трактуется как запрет на замыкание источника напряжения и на размыкание источника тока. На этот вопрос нужно смотреть шире: замыкать источники напряжения и размыкать источники тока можно – в результате таких преобразований получается вырожденная схема, определитель которой равен нулю (строки 3 и 5 в табл. 1.4.1).

Вырождение приемников напряжения и тока вообще не затрагивалось до развития МСО. Однако вырождение приемников можно обосновать с помощью вырождения источников. Действительно, ток, протекающий через замкнутый накоротко приемник тока, и напряжение на разомкнутом приемнике напряжения имеют неопределенные значения (неопределенность вида 0/0). Убедиться в этом можно, подсоединив последовательно с приемником тока I и параллельно с приемником напряжения U , соответственно, источник ЭДС $E = 0$ и источник тока $J = 0$.

Особые свойства норатора и нуллатора проявляются в том, что они вырождаются в каждом из двух случаев: 1) при объединении узлов; 2) при

размыкании. Таким образом, норатор ведет себя одновременно и как генератор напряжения, и как генератор тока. Нуллатор обладает свойствами как приемника напряжения, так и приемника тока.

Нейтрализация – исключение элементов из схемы выполняется либо их стягиванием (заменой идеальным проводником), либо их удалением из схемы. В отличие от удаления стягивание элемента выполняется двумя операциями: 1) удалением элемента из схемы; 2) объединением соответствующих узлов. Для исключения элемента из схемы его нужно либо замкнуть, либо разомкнуть. Норатор и нуллатор нельзя ни замыкать, ни размыкать (строки 7 и 8 в табл. 1.4.1).

Таблица 1.4.1

Условия вырождения схемы и нейтрализации элементов при замыкании и размыкании ветвей

№	Элемент схемы	Замыкание	Размыкание
1	у-ветвь	Нейтрализация	Выделение у
2	z-ветвь	Выделение z	Нейтрализация
3	Генератор <u>E</u>	Вырождение	Нейтрализация
4	Приемник <u>I</u>	Вырождение	Нейтрализация
5	Генератор <u>J</u>	Нейтрализация	Вырождение
6	Приемник <u>U</u>	Нейтрализация	Вырождение
7	Норатор	Вырождение	Вырождение
8	Нуллатор	Вырождение	Вырождение

Формулы выделения сопротивлений и проводимостей, предложенные Фойснером, характеризуются двумя состояниями элемента: 1) элемент находится в активном состоянии, и его параметр заносится в формулу определителя; 2) элемент нейтрализован, и его параметр не учитывается в формуле. Как видно из строк 1 и 2 в табл.1.4.1, замыкание и размыкание z- и у-ветвей не может привести к вырождению схемы. Это вытекает из того, что z-ветвь можно представить в виде последовательного соединения генератора напряжения и приемника тока, а у-ветвь – в виде параллельного соединения генератора тока и приемника напряжения.

К частным случаям схемных определителей относятся не только замкнутые и разомкнутые элементы в табл. 1.4.1, но параллельные и последовательные соединения элементов, приведенные в табл. 1.4.2.

Таблица 1.4.2

Следствия параллельного и последовательного соединения элементов схемы

Элемент схемы	Соединение элемента			
	параллельное		последовательное	
	с ГН или норатором	с ПТ или нуллатором	с ГТ или норатором	с ПН или нуллатором
Проводимость (у-ветвь)	Удаление		Стягивание–выделение	
Сопротивление (z-ветвь)	Удаление–выделение		Стягивание	
Генератор напряжения (ГН)	Вырождение	НУИ	Стягивание	–
Приемник тока (ПТ)	НУИ	Вырождение	–	Стягивание
Генератор тока (ГТ)	Удаление	–	Вырождение	НУИ
Приемник напряжения (ПН)	–	Удаление	НУИ	Вырождение
Норатор	Вырождение	–	Вырождение	–
Нуллатор	–	Вырождение	–	Вырождение

В дополнение к табл. 1.4.2 следует отметить, что параллельное соединение норатора и независимого источника тока, а также последовательное соединение норатора и независимого источника ЭДС эквивалентно норатору.

Теорема об условиях вырождения схемы. Условие невырожденности схемы – условие отличия от нуля ее определителя – является достаточным условием существования и единственности решения задачи анализа ЛЭС [97, 99]. Схемы, содержащие УИ и нуллоры, могут быть вырожденными, несмотря на выполнение свойства связности.

Общий критерий вырождения формулируется следующим образом.

Теорема. Произвольная ЛЭС является вырожденной при выполнении хотя бы одного из трех топологических условий: 1) схема несвязна; 2) в схеме имеется хотя бы один контур, образованный исключительно генераторами напряжения и нораторами или исключительно приемниками тока и нуллаторами; 3) схема содержит сечение, включающее только генераторы тока и нораторы или только приемники напряжения и нуллаторы.

Схема не считается несвязной, если имеет с некоторой своей подсхемой только управляющие связи (обусловленные идеальными трансформаторами, взаимоиндуктивностями, УИ, НУИ, и т. д.). Перед анализом такой схемы ее следует преобразовать к связной схеме путем объединения в один узел нескольких произвольных узлов, взятых по одному из каждой подсхемы, имеющей с другими подсхемами только управляющие связи. Такое топологическое преобразование является эквивалентным, то есть не изменяет определитель и не влияет на результат решения задачи анализа. Например, если подсхемы связаны только управляющими связями, как показано на рис. 1.4.1 (слева), то следует соединить их в одном узле, как показано на рис. 1.4.1 (справа).

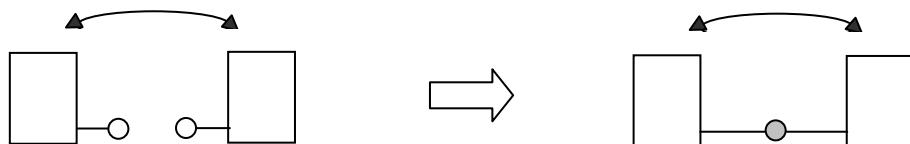


Рис. 1.4.1. Подсхемы с управляющими связями

Частные случаи второго и третьего пунктов теоремы для контуров и сечений, образованных одним элементом (генератором напряжения, приемником тока, источником тока и приемником напряжения), иллюстрируются рис. 1.4.2.

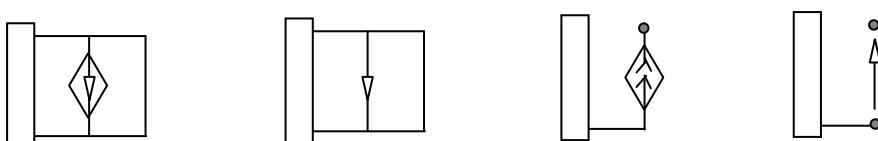


Рис. 1.4.2. Вырождение схемы в результате замыкания и размыкания элементов

Частные случаи второго и третьего пунктов теоремы для контуров и сечений, образованных одним элементом (норатором или нуллатором) иллюстрируются рис. 1.4.3.



Рис. 1.4.3. Вырождение схемы в результате размыкания (а) и замыкания (б) норатора или нуллатора

Случаи вырождения на рис. 1.4.3 обобщаются следствием теоремы о вырождении схемы, образованной исключительно нуллорами.

Следствие 1. В невырожденной схеме с нуллорами все нораторы должны образовывать дерево схемы, а нуллаторы входить в его дополнение, и наоборот [99].

Более общие случаи контуров и сечений, вырождающих схему, приводятся на рис. 1.4.4 – 1.4.5.

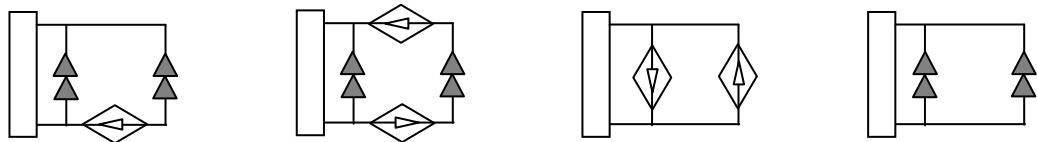


Рис. 1.4.4. Вырожденные схемы с контуром из генераторов напряжения и нораторов



Рис. 1.4.5. Вырожденные схемы с контуром из приемников тока и нуллаторов

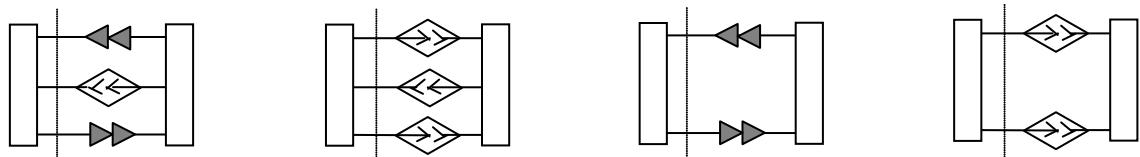


Рис. 1.4.6. Вырожденные схемы с сечением из генераторов тока и нораторов

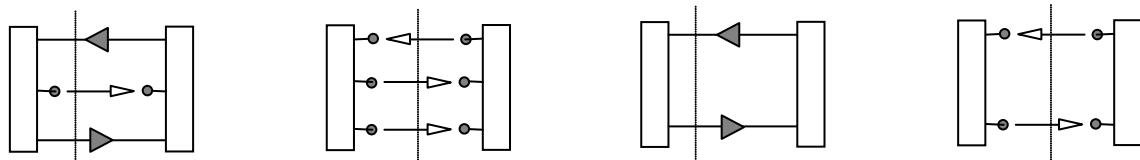


Рис. 1.4.7. Вырожденные схемы с сечением из приемников напряжения и нуллаторов

О неэквивалентности вырожденных схем. Схемы с контурами из независимых источников напряжения и нораторов (нуллаторов), и дуальные схемы с сечениями из независимых источников тока и нуллаторов (нораторов) являются вырожденными, поскольку определитель схемы – знаменатель отклика цепи – находится при

нулевых параметрах независимых источников [55]. В таких схемах образуются контуры или сечения из нораторов (рис. 1.4.4 и 1.4.6) или нуллаторов (рис. 1.4.5 и 1.4.7). Частными случаями вырождения являются (табл. 1.4.2): 1) параллельное соединение независимого источника ЭДС и норатора; 2) последовательное соединение источника тока и норатора. При этом образуются вырожденные коротко замкнутые (рис. 1.4.3,б) или разомкнутые (рис. 1.4.3,а) нораторы.

Вырожденные схемы не могут быть эквивалентными, поскольку их отклики не определены. Поэтому ошибочны эквивалентные преобразования параллельного соединения источника ЭДС и норатора в источник ЭДС (упомянутое во введении) [118, 121], а последовательного соединения источника тока и норатора – в источник тока [118]. По этой же причине неэквивалентны преобразования короткозамкнутого нуллатора в идеальный проводник [118], последовательного соединения нуллатора с независимым источником тока в разомкнутую ветвь [121].

1.5. АЛГОРИТМ РАЗЛОЖЕНИЯ СХЕМНЫХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Нахождение определителей схем с нуллорами опирается на следующие простые правила [59]: 1) изменение ориентации у норатора или у нуллатора влечет изменение знака определителя этой схемы; 2) взаимная замена номеров у двух нораторов или у двух нуллаторов также вызывает изменение знака определителя; 3) параллельное соединение одноименных и одинаково направленных (по отношению к общему узлу) норатора и нуллатора эквивалентно короткозамкнутой ветви; 4) последовательное встречное соединение одноименных норатора и нуллатора эквивалентно разомкнутой ветви.

Правила 3 – 4 иллюстрирует рис. 1.5.1.



Рис. 1.5.1. Образование короткозамкнутых и разомкнутых ветвей

В результате рекурсивного применения формул выделения параметров двухполюсных элементов и УИ (1.3.1), (1.3.2), (1.3.9) получается символьное выражение определителя схемы или ноль – в случае вырожденной схемы.

Алгоритм разложения схемных определителей предусматривает рекурсивное выполнение операций в такой последовательности шагов для исходной схемы и производных от нее схем: 1) образование короткозамкнутых и разомкнутых ветвей в соответствии с правилами 3, 4 и рис.1.5.1; 2) сведение параллельных проводимостей и последовательных сопротивлений к одному эквивалентному элементу; 3) проверка вырожденности схемы с использованием теоремы и ее следствия; 4) применение формул (1.3.1), (1.3.2) и (1.3.9) по отношению к элементам, удаление или стягивание которых приводит к вырожденным схемам (частные случаи этих формул); 5) применение формулы деления по одному узлу (1.3.5); 6) применение формулы (1.3.6) деления по двум узлам по отношению к подсхемам, одна из которых является вырожденной или становится вырожденной при объединении внешних узлов; 7) применение формулы (1.3.6) в общем случае, предпочтение отдается варианту, при котором подсхемы содержат примерно одинаковое число элементов и узлов; 8) использование формул выделения (1.3.1), (1.3.2) или (1.3.9) в общем случае; предпочтение отдается тому элементу, нейтрализация которого приводит к нейтрализации или преобразованию в нуллер наибольшего числа элементов.

При делении на подсхемы в пунктах 5 – 7 не допускается размещение одноименных генератора и приемника в различных подсхемах.

В результате работы алгоритма формируется свернутое выражение схемного определителя или обнаруживается вырожденность схемы.

1.6. ПРАВИЛА ОПТИМАЛЬНОГО ВЫБОРА ВЫДЕЛЯЕМЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Для сокращения объема проводимых выкладок и формирования оптимальных по вычислительной сложности выражений ССФ используются правила выбора мультиветвей (параллельно соединенных у-ветвей), параметры которых подлежат выделению в первую очередь. В частности, для этого среди мультиветвей схемы, состоящей из двухполюсных элементов, выбирается та, которая имеет наибольший показатель участия. Предлагаются следующие правила выбора выделяемых элементов и подсхем [28, 57].

Правило «минимума». В схеме рассматриваются узлы и сечения, которым инцидентно минимальное количество мультиветвей. Принимается, что наибольшим показателем участия обладает та из них, которая смежна наименьшему числу мультиветвей.

Правила показателей участия и кратности. Первое правило заключается в первоочередном выделении мультиветвей, имеющих наибольшие показатели участия. Второе правило требует, чтобы среди претендентов в первую очередь выделялась та мультиветвь, которая имеет наибольшую кратность, то есть количество образующих ее ветвей.

Правило половинного деления. Наряду с правилами показателей участия и кратности необходимо учитывать третье правило, которое называется правилом половинного деления. Оно означает, что получение оптимального выражения достигается выделением по возможности более сложных подсхем и минимизацией разности между числом ветвей в выбранных подсхемах.

1.7. СХЕМНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ТОКОВЫХ КОНВЕЙЕРОВ

Схемно-алгебраическая формула элемента или подсхемы электрической цепи (САФ) – это выражение определителя произвольной схемы с этим элементом, в котором выделены все его параметры [27]. Применение САФ позволяет сократить число операций по формированию символьных выражений.

Сформируем САФ конвейера ICCII+ на рис.1.7.1,а [25]. Подключим его схему замещения к произвольному многополюснику и запишем определитель полученной схемы

$$\Delta = \left| \begin{array}{c} \text{ICCCI+} \\ \text{x z} \\ \text{y} \\ \text{---} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} \text{x} & \xrightarrow{\quad L_x \quad} & \text{y} & \xrightarrow{\quad U_y \quad} & \text{z} \\ \text{---} & \downarrow -1 \cdot U_y & \text{---} & \downarrow & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{array} \right| . \quad (1.7.1)$$

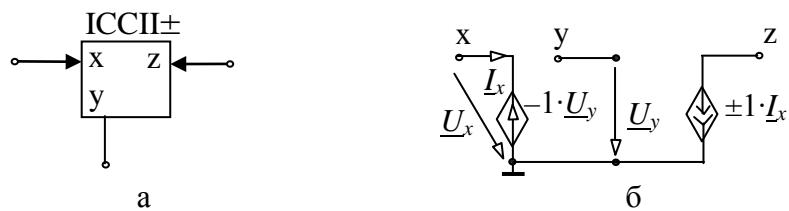


Рис. 1.7.1. Токовый конвейер ICCP \pm : условное изображение (а) и схема на УИ (б) – знаки «+» и «-» в параметре ИТУТ для ICCP+ и ICCP– соответственно

Выделим в (1.7.1) инвертор напряжения по формуле (1.3.9), получим

$$\Delta = (-1) \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 3} \\ \text{Diagram 4} \end{array} \right] . \quad (1.7.2)$$

В каждом из схемных миноров (1.7.2) выделим повторитель тока по той же формуле (1.3.9), получим окончательную САФ для рассматриваемого токового конвейера ICCII+ (обозначение полюсов в том же порядке, что и в (1.7.2))

$$\Delta = \left| \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \text{Diagram 3} \\ \text{Diagram 4} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \text{Diagram 5} \\ \text{Diagram 6} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \text{Diagram 7} \\ \text{Diagram 8} \end{array} \right| . \quad (1.7.3)$$

Для получения САФ токового конвейера ICCII– достаточно в (1.7.3) поменять знаки «плюс» на «минус» перед первым и третьим схемными минорами. Объединенная САФ для токовых конвейеров ICCII+ и ICCII– имеет вид

$$\Delta = \pm \left| \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \text{Diagram 3} \\ \text{Diagram 4} \end{array} \right| \pm \left| \begin{array}{c} \text{Diagram 5} \\ \text{Diagram 6} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \text{Diagram 7} \\ \text{Diagram 8} \end{array} \right| , \quad (1.7.4)$$

где в первом и третьем слагаемом верхний знак – плюс – соответствует конвейеру ICCII+, а нижний – минус – ICCII–.

САФ для конвейеров CCPI± (рис. 1.7.2) получается путем умножения на (-1) первого и второго слагаемого в формуле (1.7.4). В результате определитель схемы с данным конвейером имеет вид

$$\Delta = \mp \left| \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \end{array} \right| - \left| \begin{array}{c} \text{Diagram 3} \\ \text{Diagram 4} \end{array} \right| \pm \left| \begin{array}{c} \text{Diagram 5} \\ \text{Diagram 6} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \text{Diagram 7} \\ \text{Diagram 8} \end{array} \right| , \quad (1.7.5)$$

где знаки перед слагаемыми 1 и 3 определяются аналогично формуле (1.7.4).

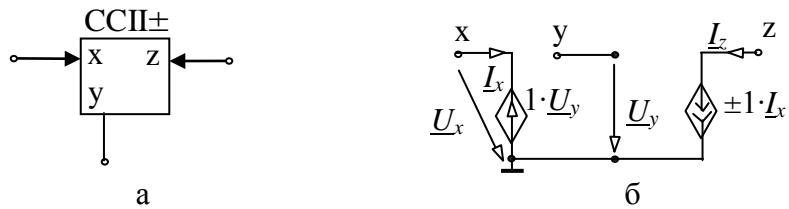


Рис. 1.7.2. Токовый конвейер CCPI±: условное изображение (а) и схема на УИ (б): в параметре ИТУТ для CCPI+ и CCPI– выставляются знаки «+» и «–» соответственно свертывания пар схемных миноров по тождествам с фиксированным норатором [29]:

$$\left| \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \text{Diagram 3} \\ \text{Diagram 4} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \text{Diagram 5} \\ \text{Diagram 6} \end{array} \right| = 0;$$

$$\left| \begin{array}{c} \text{Diagram 7} \\ \text{Diagram 8} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \text{Diagram 9} \\ \text{Diagram 10} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \text{Diagram 11} \\ \text{Diagram 12} \end{array} \right| = 0, \quad (1.7.6)$$

первое из которых содержит первый и третий, а второе – второй и четвертый схемный минор из (1.7.5). В результате выражение (1.7.5) для конвейера ССII \pm можно записать следующим образом:

$$\Delta = \mp \left| \begin{array}{c} \text{Diagram 1: A horizontal conveyor belt with two arrows pointing right. The first arrow has a dot at its tail and an arrowhead at its head. The second arrow has an arrowhead at its tail and a dot at its head. They are connected by a vertical line to a rectangular block.} \end{array} \right| - \left| \begin{array}{c} \text{Diagram 2: A horizontal conveyor belt with two arrows pointing right. The first arrow has a dot at its tail and an arrowhead at its head. The second arrow has an arrowhead at its tail and a dot at its head. They are connected by a vertical line to a rectangular block. A feedback loop goes from the output of the block back to the input of the conveyor belt.} \end{array} \right|, \quad (1.7.7)$$

где, как и в формулах (1.7.4) и (1.7.5), верхний и нижний знаки соответствуют ССII+ и ССII-.

Для конвейера ССII- может быть получена еще более компактная формула. Для этого запишем тождество с фиксированным нуллатором

$$\left| \begin{array}{c} \text{Diagram 1: A horizontal conveyor belt with two arrows pointing right. The first arrow has a dot at its tail and an arrowhead at its head. The second arrow has an arrowhead at its tail and a dot at its head. They are connected by a vertical line to a rectangular block.} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \text{Diagram 2: A horizontal conveyor belt with two arrows pointing right. The first arrow has a dot at its tail and an arrowhead at its head. The second arrow has an arrowhead at its tail and a dot at its head. They are connected by a vertical line to a rectangular block. A feedback loop goes from the output of the block back to the input of the conveyor belt.} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \text{Diagram 3: A horizontal conveyor belt with two arrows pointing right. The first arrow has a dot at its tail and an arrowhead at its head. The second arrow has an arrowhead at its tail and a dot at its head. They are connected by a vertical line to a rectangular block. A feedback loop goes from the output of the block back to the input of the conveyor belt. The feedback loop is oriented such that it adds to the original signal.} \end{array} \right| = 0. \quad (1.7.8)$$

Выражение (1.7.8) со знаками, соответствующими конвейеру ССII-, повторяют первые два слагаемых из (1.7.7). В результате определитель равен третьему слагаемому из (1.7.8), направление нуллатора в котором взято противоположным:

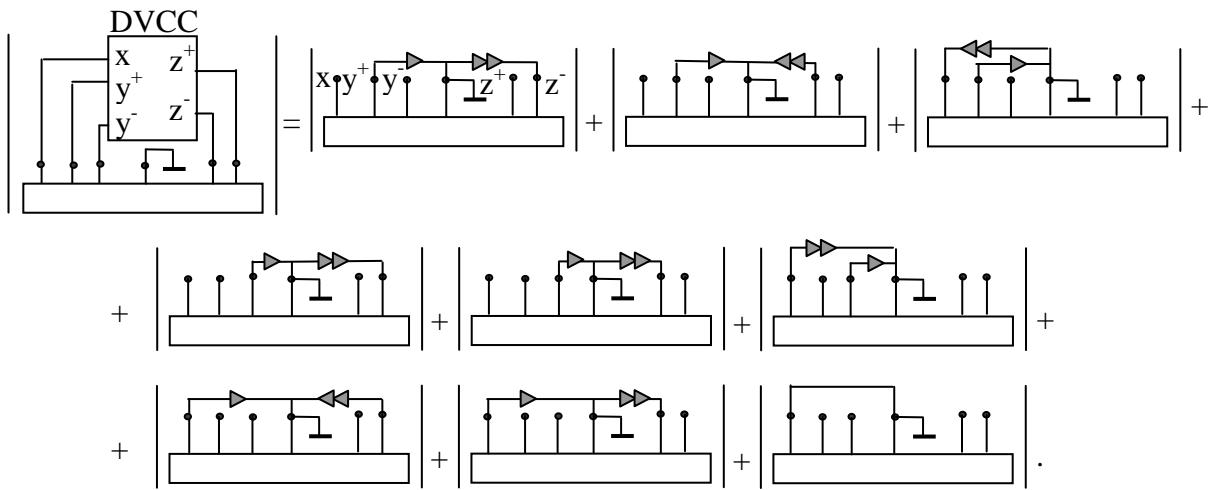
$$\Delta = \left| \begin{array}{c} \text{Diagram 4: A horizontal conveyor belt with two arrows pointing right. The first arrow has an arrowhead at its tail and a dot at its head. The second arrow has a dot at its tail and an arrowhead at its head. They are connected by a vertical line to a rectangular block.} \end{array} \right|. \quad (1.7.9)$$

Формула (1.7.9) содержит один определитель, следовательно, схема в этой формуле является схемой замещения конвейера ССII-. Эта схема может быть получена проще – непосредственно на основе нуллора. При этом равенство токов $I_z = -I_x$ обеспечивается путем подключения между полюсами z и x норатора, а равенство напряжений $U_x = U_y$ – подключением нуллатора между соответствующими полюсами.

Однако направление норатора и нуллатора в этом случае выбирается произвольно, и полученная таким образом нуллорная схема замещения не позволяет найти знак определителя. Знак определителя безреактивной схемы необходим для оценки ее устойчивости – положительный или отрицательный знак говорит об устойчивости или неустойчивости схемы.

Действительное направление аномальных элементов находится, как было показано выше, с помощью МСО по схеме с УИ на рис. 1.7.2,б.

Широкое распространение в схемотехнике нашел токовый конвейер DVCC второго поколения с пятью полюсами. Этот конвейер содержит дифференциальный вход по напряжению, взвешенный токовый выход и вход с независимым током, он позволяет моделировать любой конвейер первого и второго поколения. Приведем его САФ без вывода [25]:



Последняя формула может быть записана более кратко на основе тождеств с фиксированным нуллатором, аналогичных (1.7.8):

$$\Delta = \left| \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \end{array} \right|. \quad (1.7.10)$$

Следует отметить, что САФ (1.7.10) для конвейера DVCC, как и САФ для ССII+ и ИССII+, не может быть свернута до одного определителя и, следовательно, не может быть получена его нуллорная схема замещения. Предложенная в [73] схема замещения ССII+, в которой обычный норатор (минус-типа по [73]) заменен на норатор плюс-типа, инвертирующего ток в отличие от обычного норатора (минус-типа [73]), не является, по сути, нуллорной. Для двухполюсного норатора плюс-типа в модели ССII+ не выполняется закон Кирхгофа для токов. Норатор плюс-типа – это трехполюсник и фактически зеркальный аномальный элемент тока (ЗЭТ).

Зеркальные элементы для моделирования конвейеров тока рассматриваются в разделе 2.

1.8. СРАВНЕНИЕ МЕТОДОВ АНАЛИЗА ЦЕПЕЙ С ТОКОВЫМИ КОНВЕЙЕРАМИ НА ОСНОВЕ СХЕМНЫХ И МАТРИЧНЫХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Метод схемных определителей (МСО) позволяет проводить символьный анализ цепей с произвольными линейными элементами. Это обеспечивается формулами выделения параметров различных элементов – сопротивлений (1.3.1), проводимостей (1.3.2) и управляемых источников (1.3.9), а также правилами преобразования и выделения нуллов. Для сравнения МСО с матричным методом рассмотрим анализ цепей с токовыми конвейерами, которые являются в настоящее время базовыми элементами аналоговых фильтров.

Построение передаточных функций цепей с токовыми конвейерами методом схемных определителей. МСО предполагает формирование передаточной функции в виде отношения рациональных функций числителя и знаменателя, которые получаются путем разложения определителей соответствующих схем. Схема числителя формируется из исходной схемы путем замены источника воздействия и приемника отклика норатором и нуллатором соответственно. Схема знаменателя находится путем обнуления параметра независимого источника. Символьные выражения определителей схем числителя и знаменателя получаются рекурсивным выделением параметров элементов.

Предварительно от исходной схемы токового конвейера необходимо перейти к схеме замещения на УИ. Например, для токового конвейера ИССП \pm (рис. 1.7.1,а) [105] схема замещения на основе УИ представлена на рис. 1.7.1,б.

Можно исключить этап перехода от принципиальной (исходной) схемы к схеме замещения на УИ и проводить схемно-алгебраический анализ непосредственно по принципиальной (исходной) схеме цепи, как на рис. 1.8.1,а. Такой анализ осуществляется с помощью схемно-алгебраических формул (САФ) многополюсников [27]. САФ получаются путем выделения всех элементов схемы замещения конвейера, подключенного к произвольному многополюснику. Применение САФ позволяет сократить число операций.

Анализ фильтра нижних частот (рис. 1.8.1,а) с помощью САФ выделения токового конвейера. Искомый коэффициент передачи напряжения записывается в виде отношения определителей схем числителя и знаменателя

$$K = \underline{U}_y / \underline{U}_{in} = N/D = \left| \begin{array}{c} \text{ICCI} + \\ R_1 \rightarrow x \\ \downarrow 1 \\ \downarrow 1 \\ pC_1 \\ pC_2 \end{array} \right| / \left| \begin{array}{c} \text{ICCI} + \\ R_1 \rightarrow x \\ \downarrow 1 \\ \downarrow 1 \\ pC_1 \\ pC_2 \end{array} \right|, \quad (1.8.1)$$

где схема числителя получается из схемы на рис. 1.8.1,а путем замены независимого источника напряжения и приемника напряжения норатором и нуллатором соответственно, а схема знаменателя – из той же схемы на рис. 1.8.1,а путем нейтрализации источника и приемника напряжения.

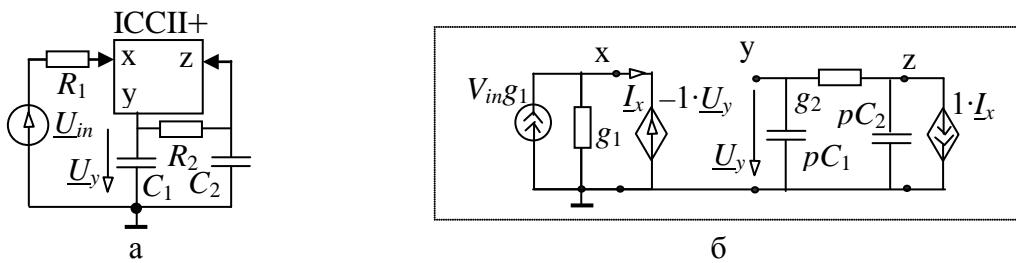


Рис. 1.8.1. Исходная схема (а) и схема замещения (б) фильтра нижних частот на токовом конвейере ICCII+

В определителе схемы числителя (1.8.1) нейтрализуем сопротивление R_1 , подключенное последовательно норатору, удалим проводимость pC_1 , параллельную нуллатору. Выделим конвейер ICCII+ с помощью САФ (1.7.4). Из четырех схемных миноров (СМ) в САФ (1.7.4) ненулевым будет

только один – третий, поскольку в первом, втором и четвертом схемных минорах образуются контуры из нуллаторов или нораторов. После стягивания сопротивления R_2 и удаления проводимости pC_2 по аналогии с R_1 и pC_1 , взаимной замены номеров у нуллаторов и выделения двух контуров из норатора и нуллатора оказывается, что числитель имеет следующий вид:

$$N = \left| \begin{array}{c} \text{ICCI} + \\ \boxed{x \ z} \\ y \\ \hline \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} x \\ \downarrow 1 \\ \downarrow 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c} y \\ \downarrow 1 \\ \downarrow 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c} z \\ \downarrow 2 \\ \downarrow 1 \\ \hline \end{array} \right| = -1. \quad (1.8.2)$$

В знаменателе (1.8.2) выполним разложение полинома по степеням оператора p . Для этого используем алгоритм первоочередного выделения реактивных элементов [31], в соответствии с которым схемно-алгебраическое выражение знаменателя представляется в следующем виде

$$D = p^2 C_1 C_2 \left| \begin{array}{c} R_1 \\ \text{ICCI} + \\ x \ z \\ y \\ R_2 \\ \hline \end{array} \right| + p \left(C_1 \left| \begin{array}{c} R_1 \\ \text{ICCI} + \\ x \ z \\ y \\ R_2 \\ \hline \end{array} \right| + C_2 \left| \begin{array}{c} R_1 \\ \text{ICCI} + \\ x \ z \\ y \\ R_2 \\ \hline \end{array} \right| \right) + \left| \begin{array}{c} R_1 \\ \text{ICCI} + \\ x \ z \\ y \\ R_2 \\ \hline \end{array} \right|. \quad (1.8.3)$$

Выделим конвейер в каждом из слагаемых в (1.8.3) с помощью САФ (1.7.4). В первом, втором и третьем слагаемых будет только один ненулевой схемный минор из САФ (1.7.4) – с номером 4, остальные три равны нулю, поскольку в них образуются контуры из нораторов или нуллаторов. В четвертом слагаемом – также один ненулевой СМ – первый. Второй, третий четвертый СМ равны нулю, поскольку содержат разомкнутый норатор, нуллатор и несвязную схему соответственно.

С учетом указанных фактов получается следующее выражение знаменателя

$$D = p^2 C_1 C_2 \left| \begin{array}{c} \text{Diagram 1: } R_1 \text{ and } R_2 \text{ in series, } \\ \text{with } x \text{ at top, } y \text{ at middle, } z \text{ at bottom.} \end{array} \right| + p \left(C_1 \left| \begin{array}{c} \text{Diagram 2: } R_1 \text{ and } R_2 \text{ in series, } \\ \text{with } x \text{ at top, } y \text{ at middle, } z \text{ at bottom.} \end{array} \right| + C_2 \left| \begin{array}{c} \text{Diagram 3: } R_1 \text{ and } R_2 \text{ in series, } \\ \text{with } x \text{ at top, } y \text{ at middle, } z \text{ at bottom.} \end{array} \right| \right) + \\ + \left| \begin{array}{c} \text{Diagram 4: } R_1 \text{ and } R_2 \text{ in series, } \\ \text{with } x \text{ at top, } y \text{ at middle, } z \text{ at bottom, } \\ \text{and } R_2 \text{ connected to ground through a switch.} \end{array} \right|. \quad (1.8.4)$$

Символьные выражения первого, второго и третьего схемных миноров в (1.8.4) находятся как определители схемы, разделенной на две части по одному узлу в соответствии с формулой (1.3.5). Причем в первом СМ этими частями являются контуры из сопротивлений R_1 и R_2 , а во втором и третьем СМ – контур и разомкнутое сопротивление. Схема четвертого СМ приводится к разомкнутому сопротивлению путем нейтрализации сопротивления R_2 , соединенного последовательно с нуллатором, и замены проводником параллельного соединения норатора и нуллатора. После выполнения указанных операций получаем символьное выражение знаменателя

$$D = p^2 C_1 C_2 R_1 R_2 + p(C_1 R_1 + C_2 R_1) + 1. \quad (1.8.5)$$

После подстановки (1.8.2) и (1.8.5) в (1.8.1) получаем исковую передаточную функцию

$$K = -1/[p^2 C_1 C_2 R_1 R_2 + p(C_1 R_1 + C_2 R_1) + 1]. \quad (1.8.6)$$

Матричный анализ схем с токовыми конвейерами. Матричный анализ выполняется с помощью обобщенного узлового базиса, который позволяет учитывать нерегулярные для метода узловых напряжений (МУН) повторители тока и напряжения. Обобщенная матрица параметров

формируется путем сложения столбцов матрицы узловых проводимостей, полученной без указанных УИ, и элементов матриц нерегулярных элементов. При сложении столбцов число искомых узловых напряжений уменьшается на единицу, при этом в систему вводится управляемый ток повторителя тока, и размерность формируемой матрицы остается такой же, как и в классическом МУН.

В [49] даны правила учета в обобщенной узловой матрице параметров источника тока, управляемого током (ИТУТ), и источника напряжения, управляемого напряжением (ИНУН). Можно использовать эти правила для формирования искомой матрицы схемы с конвейером, который содержит эти УИ. Однако число операций по формированию этой матрицы можно сократить, если вывести специальные правила.

Правила учета параметров токового конвейера в обобщенной узловой матрице. Порядок построения обобщенной узловой матрицы следующий. Во-первых, для схемы без токового конвейера, который удаляется из схемы, формируется матрица узловых проводимостей по стандартному алгоритму. Во-вторых, поскольку к полюсу x токового конвейера подключен инвертор напряжения полюса y , то напряжение полюса x равно напряжению полюса y с противоположным знаком. Поэтому из столбца, соответствующего узлу y , вычитается столбец x (рис. 1.8.2), а столбец x удаляется из матрицы. При этом число искомых узловых напряжений схемы уменьшается на единицу.

	$y-x$	z	x'
y			
z			± 1
x			1

Рис. 1.8.2. Иллюстрация правил учета параметров токового конвейера ICCII \pm ; перед единицей используется знак, совпадающий со знаком в обозначении типа конвейера

В-третьих, взамен напряжения полюса x в векторе неизвестных добавляется ток этого полюса \underline{I}_x (подчеркиванием обозначено его операторное изображение), который является управляемым для

повторителя тока, подключенного к полюсу z . Этому току соответствует столбец x' , в ячейки $z-x'$ и $x-x'$ которого добавляются единицы (рис. 1.8.2).

Правила построения узловой матрицы для цепей с другим типом токовых конвейеров могут быть получены аналогично. Так, для конвейера ССП \pm (рис. 1.7.4) первый столбец матрицы на рис. 1.8.2 получается не вычитанием исходных столбцов y и x , а их сложением, поскольку у этого конвейера отсутствует инверсия напряжения [52]. Таким образом, первый столбец на рис. 1.8.2 должен быть обозначен как $y+x$. Все остальные правила остаются без изменения.

Узловой анализ фильтра нижних частот на токовом конвейере ИССП+ по схеме замещения на УИ. Исходная схема фильтра [105] дана на рис. 1.8.1,а, а схема замещения с УИ – на рис. 1.8.1,б, где $g_1=1/R_1$ и $g_2=1/R_2$. Требуется найти выражение напряжения полюса y .

Формирование уравнений выполняем в соответствии с изложенными выше правилами. Сначала, используя любой известный алгоритм, построим матрицу узловых проводимостей для схемы на рис. 1.8.1,б без УИ. Полученная матрица параметров имеет вид

	y	z	x
y	g_2+pC_1	$-g_2$	
z	$-g_2$	g_2+pC_2	
x			g_1

.

В соответствии с рис. 1.8.2 вычтем почленно из столбца y столбец x , последний столбец обнулим. В результате получим

	y	z	x
y	g_2+pC_1	$-g_2$	
z	$-g_2$	g_2+pC_2	
x	$-g_1$		

.
(1.8.7)

Прибавим почленно к столбцу x в (1.8.7) столбец x' из рис. 1.8.2, все элементы которого с учетом типа конвейера имеют знак плюс. Полученная матрица является искомой обобщенной узловой матрицей

параметров. Умножив ее на вектор неизвестных, который содержит напряжения узлов y и z , а также ток полюса x , получим левую часть системы уравнений по обобщенному узловому методу. Правая часть – вектор узловых токов – формируется стандартным способом. Таким образом, система обобщенных узловых уравнений имеет вид

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline pC_1 + g_2 & -g_2 & 0 \\ \hline -g_2 & pC_2 + g_2 & 1 \\ \hline -g_1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \underline{U}_y \\ \hline \underline{U}_z \\ \hline I_x \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \underline{U}_{in} g_1 \\ \hline \end{array}. \quad (1.8.8)$$

Полученная система уравнений содержит 3 уравнения, как и система, сформированная в [105] на основе зеркальных аномальных элементов (ЗАЭ). Число ненулевых элементов в (1.8.8) на единицу больше, чем в [105], то есть практически столько же. Решение уравнений для искомого напряжения полюса y имеет вид

$$\begin{aligned} \underline{U}_y &= -\frac{g_1 g_2}{C_1 C_2 p^2 + g_2 C_1 p + g_2 C_2 p + g_1 g_2 + g_2^2 - g_1^2} = \\ &= -\frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2 p^2 + R_1 (C_1 + C_2) p + 1} \underline{U}_{in}. \end{aligned} \quad (1.8.9)$$

Это выражение совпадает с формулой (1.8.6), полученной по МСО. Однако при получении (1.8.9) матричными методами – как здесь на основе схемы замещения на УИ, так и в [105] по схеме замещения с ЗАЭ – требуется дополнительный алгоритм для исключения пар одинаковых слагаемых с противоположными знаками (в (1.8.9) – это пара g_2^2 и $-g_1^2$) и группировки полиномов относительно степеней оператора p .

Узловой анализ фильтра на двух токовых конвейерах ICCII+ и ICCII– по схеме замещения на УИ. Исходная схема фильтра дана на рис. 1.8.3,а. Требуется найти символьные выражения для напряжений полюсов x и z конвейера ICCII– [105].

Схема замещения с управляемыми источниками приведена на рис. 1.8.3,б, где обозначения полюсов конвейеров ICCII+ и ICCII– отличаются индексами «+» и «–» соответственно. Полюс x^+ соединен с общим полюсом, поскольку напряжение полюса y^+ равно нулю и, следовательно, напряжение УИ полюса x^+ также равно нулю. Параметры элементов схемы замещения: $g_a = 1/(R_1 + R_{x-})$; $C_a = C_{y-} + C_{z+} + C_1$; $C_b = C_{z-} + C_2$; $g_b = 1/(R_2 + R_{x+})$, где R_{x-} , R_{x+} – входные последовательные сопротивления полюсов x^- и x^+ соответственно; C_{z-} , C_{z+} , C_{y-} – входные емкости соответствующих полюсов.

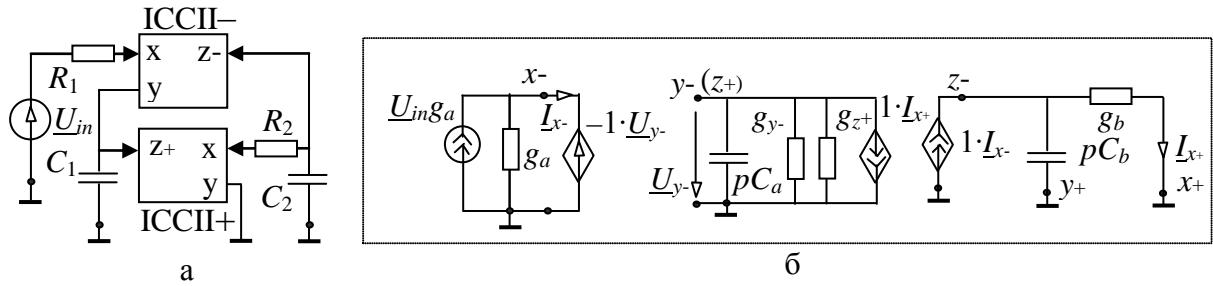


Рис. 1.8.3. Исходная схема (а) и схема замещения (б) фильтра на двух токовых конвейерах ICCII+ и ICCII–

Сформируем для схемы на рис. 1.8.3,б обобщенные узловые уравнения аналогично уравнениям (1.8.8). При этом конвейеры учитываются по правилам на рис. 1.8.2 последовательно – сначала ICCII–, затем CCII+. В результате, уравнения получаются в виде

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline pC_a + g_{y-} + g_{z+} & g_b & 0 & \begin{array}{|c|} \hline U_{y-} \\ \hline \end{array} \\ \hline 0 & pC_b + g_b + g_{z-} & -1 & \begin{array}{|c|} \hline U_{z-} \\ \hline \end{array} \\ \hline -g_a & 0 & 1 & \begin{array}{|c|} \hline I_{x-} \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline U_{in} g_a \\ \hline \end{array}. \quad (1.8.10)$$

Определитель системы уравнений – знаменатель выражений искомых напряжений – получается после разложения матрицы параметров (1.8.10) и группировки слагаемых относительно степеней оператора p в виде

$$D = p^2 C_a C_b + p[C_a(g_b + g_{z-}) + C_b(g_{y-} + g_{z+})] + (g_{y-} + g_{z+})(g_b + g_{z-}) + g_a g_b. \quad (1.8.11)$$

С учетом последнего выражения формулы для искомых напряжений полюсов y и z конвейера ICCP– имеют вид соответственно

$$U_{y-} = -g_a g_b U_{in}/D; \quad U_{z-} = (pC_a + g_{y-} + g_{z+})g_a U_{in}/D. \quad (1.8.12)$$

Выражения (1.8.12) тождественны соответствующим выражениям, сформированным по МУН с помощью ЗАЭ [105]. Система (1.8.10), полученная для схемы фильтра на двух конвейерах с использованием УИ, содержит столько же уравнений, сколько содержит соответствующая система уравнений, сформированная в [105] на основе ЗАЭ. При этом число ненулевых элементов в матрицах обеих систем совпадает.

Таким образом, матричные узловые методы анализа схем с токовыми конвейерами на основе схем замещения как с УИ, так и с ЗАЭ позволяют формировать уравнения одной размерности и с приблизительно одинаковым числом ненулевых элементов. При этом эти методы в отличие от МСО требуют трудоемких алгоритмов по исключению избыточных пар одинаковых слагаемых с противоположными знаками.

Следует отметить, что предлагаемый для анализа цепей с токовыми конвейерами ориентированный беспетлевой граф [52] требует преобразования ИТУТ в ИТУН путем добавления в управляющую ветвь дополнительной проводимости, что усложняет схему. Как было показано в настоящем подразделе, МСО работает непосредственно с повторителями и инверторами напряжения и тока, входящими в схемы замещения конвейеров.

1.9. ВЫВОДЫ

Схемно-алгебраический анализ электрических цепей основан на понятии схемного определителя. Исходное схемно-алгебраическое выражение (САВ) для схемной функции представляется в виде отношения определителей схем числителя и знаменателя. Схема знаменателя получается путем присвоения параметру независимого источника

нулевого значения, а числитель – подключением к входу и выходу схемы норатора и нуллатора.

Символьное выражение схемной функции формируется путем рекурсивного выделения параметров элементов из схем числителя и знаменателя. При этом соблюдаются правила оптимального выбора выделемых элементов и условия вырождения схем.

Схемно-алгебраический анализ позволяет получить компактные выражения схемных функций, не содержащих избыточных взаимно уничтожающихся слагаемых. В отличие от матричного анализа схемно-алгебраический анализ не требует трудоемких операций развертывания и сортировки символьных выражений для исключения избыточных слагаемых. Не нужна при этом и операция свертки символьных операций.

Эти свойства МСО характерны и для анализа схем с произвольными токовыми конвейерами. МСО позволяет формировать схемные функции непосредственно по исходной схеме токового конвейера на основе схемно-алгебраических формул для определителей схем с токовыми конвейерами.

2. СХЕМНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ С ЗЕРКАЛЬНЫМИ АНОМАЛЬНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Предлагается метод безызбыточного топологического анализа электрических цепей со всеми известными аномальными элементами: двумя нуллорными (нуллатор и норатор) и двумя зеркальными (зеркало напряжения и зеркало тока). Определитель схемы с зеркальным элементом представляется как сумма определителей двух модификаций исходной схемы. Установлено, что существование контуров с четным числом зеркальных элементов приводит к вырождению, а контур с нечетным числом этих элементов – к удвоению определителя схемы.

2.1. НУЛЛОРНЫЕ И ЗЕРКАЛЬНЫЕ АНОМАЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Символьные схемные функции электрических цепей с аномальными нуллорными и зеркальными элементами широко применяются при анализе и синтезе аналоговых фильтров и генераторов с токовыми конвейерами и операционными усилителями [105,104,108,109]. Аномальные элементы учитываются в модифицированном методе узловых напряжений путем сложения или вычитания строк и столбцов исходной матрицы проводимости [105,104,106]. Определитель матрицы проводимости содержит многочисленные взаимно уничтожающиеся слагаемые, поскольку каждая незаземленная проводимость входит в узловую матрицу 4 раза – по две с положительным и отрицательным знаком, что делает трудоемким переход к выражениям в окончательном виде.

На избыточность матриц электрических цепей обратил внимание Кирхгоф, который предложил топологический метод анализа, использующий непосредственно схему замещения [16]. Для анализа активных электрических цепей разработан метод выделения параметров

на основе схемных определителей, который позволяет получать символьные функции без избыточных слагаемых и в компактной форме [55]. При этом используются не обычные [121], а направленные и нумерованные нуллорные элементы (рис. 2.1.1,а и 2.1.1,б).

Зеркальные аномальные элементы напряжения и тока – ЗЭН и ЗЭТ (рис. 2.1.1,в и 2.1.1,г слева) – могут быть представлены схемами замещения с нуллорными элементами и единичными сопротивлениями (рис. 2.1.1,в и 2.1.1,г справа) [63].

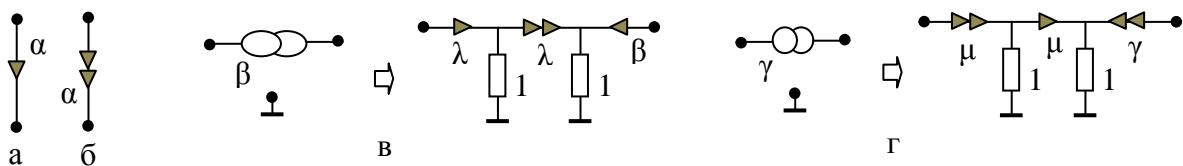


Рис. 2.1.1. Направленные нумерованные нуллатор (а), норатор (б), ЗЭН (в) и ЗЭТ (г)

Норатор и нуллатор образуют нуллорный идеальный элемент – нуллор, а соединение ЗЭН и ЗЭТ (объединение пары их узлов) – зеркальный идеальный элемент, соответствующий токовому конвейеру ICCP+ [105, рис.6,f]. Эквивалентная схема токового конвейера состоит из двух повторителей («зеркал»): повторителя тока и инверсного повторителя напряжения (чему мы обязаны происхождением термина «зеркальный»). Гибридные зеркальные идеальные элементы, образованные парами: ЗЭН+норатор или нуллатор+ЗЭТ, также широко используются в моделях электронных компонентов [109,104].

Методики анализа на основе схемных определителей [63,87] не предусматривают выделение зеркальных элементов в случаях, отличных от последовательного и параллельного соединения элементов. До сих пор не исследованы вопросы образования специфических взаимно уничтожающихся слагаемых, порожденных структурными особенностями схем с зеркальными аномальными элементами. Целью главы является получение безызбыточных формул выделения параметров для схем, содержащих как нуллорные, так и зеркальные аномальные элементы.

2.2. ФОРМУЛЫ ВЫДЕЛЕНИЯ ЗЕРКАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Искомые схемно-алгебраические формулы выделения ЗЭН и ЗЭТ получаются на основе нуллорных схем замещения (рис. 2.1.1,в и 2.1.1,г – справа), подключаемых к произвольной подсхеме. Определитель такой схемы, например, для ЗЭН после выделения одной из проводимостей по формуле Фойснера [81] приобретает следующий вид:

$$D = \left| \begin{array}{c} \text{Diagram 1: A horizontal bar with two nodes at the ends. Below it, two parallel vertical branches labeled 1 and 2 are connected to the bar. Arrows indicate flow from left to right through each branch.} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} \text{Diagram 2: Similar to Diagram 1, but the second branch (labeled 2) has its arrow pointing left.} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \text{Diagram 3: Similar to Diagram 1, but the first branch (labeled 1) has its arrow pointing left.} \end{array} \right|. \quad (2.2.1)$$

Искомая формула выделения ЗЭН получается из (2.2.1) в результате: удаления проводимости, параллельной норатору; взаимной замены номеров у двух нуллаторов; изменения направления нуллатора; удаления двух последовательных соединений одноименных норатора и нуллатора; стягивания проводимости, последовательной с нуллатором [81]. Аналогично выводится формула выделения ЗЭТ. Обе формулы представлены ниже

$$\left| \begin{array}{c} \text{Diagram 1: A horizontal bar with two nodes at the ends. Between them is a loop containing two ovals (nullators).} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} \text{Diagram 2: Similar to Diagram 1, but the loop contains one oval (nullator) and one circle (norator).} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \text{Diagram 3: Similar to Diagram 1, but the loop contains one circle (norator) and one oval (nullator).} \end{array} \right|, \quad (2.2.2)$$

где в каждом слагаемом – схемном миноре – нуллатор или норатор имеет тот же номер, что и ЗЭН или ЗЭТ соответственно.

Формула (2.2.2) по структуре соответствует схемно-алгебраическому тождеству [29], отображающему нахождение незаземленного отклика в виде разности двух узловых напряжений

$$\left| \begin{array}{c} \text{Diagram 1: A horizontal bar with two nodes at the ends. Between them is a loop containing one oval (nullator) and one circle (norator). An arrow points from the norator to the right node.} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} \text{Diagram 2: Similar to Diagram 1, but the arrow points from the norator to the left node.} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \text{Diagram 3: Similar to Diagram 1, but the arrow points from the nullator to the right node.} \end{array} \right|. \quad (2.2.4)$$

Множества слагаемых числителей узловых напряжений в (2.2.4) образуют пересечение. При вычитании (за счет различного направления нуллаторов по отношению к базисному узлу) происходит взаимное уничтожение общих слагаемых рассматриваемых определителей.

В формуле (2.2.2) нуллаторы имеют одно направление, поэтому одинаковые по модулю слагаемые не уничтожаются взаимно, а удваиваются. В силу дуальности формула (2.2.3) также не содержит взаимно уничтожающихся слагаемых.

Частные случаи выделения зеркальных элементов. Частные формулы из табл. 2.2.1 доказываются с помощью общих формул (2.2.2) или (2.2.3) и позволяют ускорить анализ схем с зеркальными элементами.

Таблица 2.2.1. Частные формулы упрощения схемных определителей с ЗЭН и ЗЭТ

Схемно-алгебраические формулы	
1	
2	
3	
4	
5	

Более полный набор частных вариантов параллельного и последовательного соединения элементов приведен в табл. 2.2.2 и 2.2.3.

Следует отметить, что приведенное в [121] эквивалентное преобразование последовательного соединения нуллатора и ЗЭН в ЗЭН является ошибочным. Это соединение является вырожденным (табл. 2.2.3), а вырожденная схема, как отмечалось в пп. 1.4, не может иметь эквивалентных схем, тем более с ненулевым определителем. По этой же причине последовательное соединение норатора и ЗЭТ неэквивалентно ЗЭТ [121].

Таблица 2.2.2. Следствия параллельного соединения элементов схемы

Элемент схемы	Для ЗЭТ и ЗЭН – параллельное соединение входной или выходной стороны					
	ГН	Норатор	ПТ	Нуллатор	ЗЭТ	ЗЭН
Проводимость	Удаление					
Сопротивление	Удаление-выделение					
ГН	$\Delta=0$		Нуллор			
ПТ	Нуллор		$\Delta=0$			
ГТ	Удаление					
ПН				Удаление		
Норатор	$\Delta=0$			Проводник		
Нуллатор		Проводник		$\Delta=0$		
ЗЭТ		Удвоение			$\Delta=0$	
ЗЭН				Удвоение		$\Delta=0$

Таблица 2.2.3. Следствия последовательного соединения элементов схемы

Элемент схемы	Последовательное соединение двух элементов					
	ГТ	Нора-тор	ПН	Нулла-тор	ЗЭТ	ЗЭН
Проводимость	Стягивание-выделение			Выделение-стягивание	Выделение-стягивание	
Сопротивление	Стягивание			стягивание	стягивание	
ГН	Стягивание			стягивание		
ПТ		Стягивание			стягивание	
ГТ	$\Delta=0$		Нуллор		$\Delta=0$	нуллор
ПН	Нуллор		$\Delta=0$		нуллор	$\Delta=0$
Норатор	$\Delta=0$				$\Delta=0$	Удаление
Нуллатор			$\Delta=0$		Удаление	$\Delta=0$
ЗЭТ		$\Delta=0$			$\Delta=0$	Удаление
ЗЭН				$\Delta=0$	Удаление	$\Delta=0$

2.3. СТРУКТУРНЫЕ ВЫРОЖДЕНИЯ СХЕМ С ЗЕРКАЛЬНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Находим определитель схемы, содержащей ЗЭН-контур, по формуле

$$(2.2.2) \quad D = \left| \begin{array}{c} \text{Diagram of a directed graph with nodes } a_1, a_2, \dots, a_v \text{ and edges connecting them.} \\ \text{The graph has a rectangular border. Edges connect } a_1 \text{ to } a_2, a_2 \text{ to } a_3, \dots, a_{v-1} \text{ to } a_v. \\ \text{There are also edges from each node } a_i \text{ to its immediate neighbors } a_{i+1} \text{ and } a_{i-1}. \\ \text{A horizontal bar is at the bottom of the diagram.} \end{array} \right| =$$

$$= \left| \begin{array}{ccccccccc} \text{---} & & & & & & & & \\ \bullet & \triangle \alpha_1 & \bullet & \triangle \alpha_2 & \bullet & \triangle \alpha_3 & \cdots & \bullet & \triangle \alpha_{v-1} \alpha_v \triangle \\ \end{array} \right| + \left| \begin{array}{ccccccccc} \text{---} & & & & & & & & \\ \bullet & \triangle \alpha_v & \bullet & \triangle \alpha_1 & \bullet & \triangle \alpha_2 & \cdots & \bullet & \triangle \alpha_{v-2} \alpha_{v-1} \triangle \\ \end{array} \right|. \quad (2.3.1)$$

В правой части (2.3.1) остаются только два ненулевых слагаемых, поскольку ЗЭН имеют попарно общие полюсы и пара соседних ЗЭН приводит к параллельному соединению нуллаторов.

Схемные миноры в (2.3.1) равны по модулю, поскольку их схемы различаются только номерами нуллаторов. При нечетном и четном числе v элементов в контуре они имеют одинаковые и противоположные знаки соответственно, так как число перестановок номеров нуллаторов на единицу меньше числа v . В результате при нечетном числе v определитель схемы (2.3.1) равен удвоенному выражению первого или второго схемного минора, а при четном v определитель (2.3.1) равен нулю. Отсюда, при $v = 2k + 1$

$$D = \left| \begin{array}{ccccccccc} \text{---} & & & & & & & & \\ \bullet & \alpha_1 & \circlearrowleft & \alpha_2 & \circlearrowleft & \cdots & \alpha_{v-1} & \circlearrowleft & \alpha_v \\ \text{---} & & & & & & & & \\ \end{array} \right| = 2 \left| \begin{array}{ccccccccc} \text{---} & & & & & & & & \\ \bullet & \triangle \alpha_1 & \bullet & \triangle \alpha_2 & \bullet & \triangle \alpha_3 & \cdots & \bullet & \triangle \alpha_{v-1} \triangle \\ \end{array} \right|. \quad (2.3.2)$$

ЗЭТ-контуры учитываются по аналогичной формуле

$$D = \left| \begin{array}{ccccccccc} \text{---} & & & & & & & & \\ \bullet & \beta_1 & \circlearrowleft & \beta_2 & \circlearrowleft & \cdots & \beta_{v-1} & \circlearrowleft & \beta_v \\ \text{---} & & & & & & & & \\ \end{array} \right| = 2 \left| \begin{array}{ccccccccc} \text{---} & & & & & & & & \\ \bullet & \triangle \beta_1 & \bullet & \triangle \beta_2 & \bullet & \triangle \beta_3 & \cdots & \bullet & \triangle \beta_{v-1} \triangle \\ \end{array} \right|. \quad (2.3.3)$$

При $v = 2k$, где $k = 0, 1, 2, \dots$, определитель $D = 0$ как для ЗЭН-, так и для ЗЭТ-контуров.

Обсуждаемые свойства ЗЭН- или ЗЭТ-контуров не нарушаются при наличии в них произвольного числа нуллаторов или нораторов соответственно. Формулы (2.3.2) и (2.3.3) необходимо использовать для исключения взаимно уничтожающихся (при четных контурах) и непосредственного выделения удвоенных (при нечетных контурах) слагаемых.

2.4. ПРИМЕРЫ АНАЛИЗА ЦЕПЕЙ С ЗЕРКАЛЬНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Анализ схемы фильтра нижних частот с токовым конвейером [63]. Принципиальная схема фильтра приведена на рис. 2.4.1,а [105]. Соответствующие схемы числителя и знаменателя для нахождения передаточной функции по напряжению представлены на рис. 2.4.1,б и рис. 2.4.1,в.

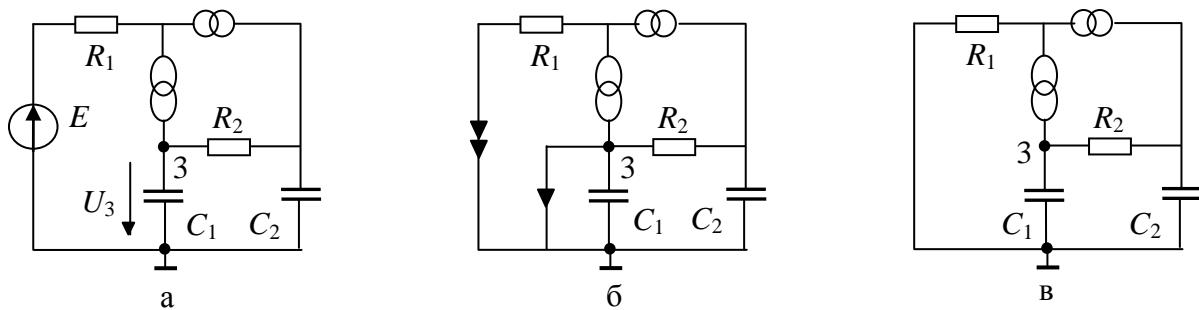
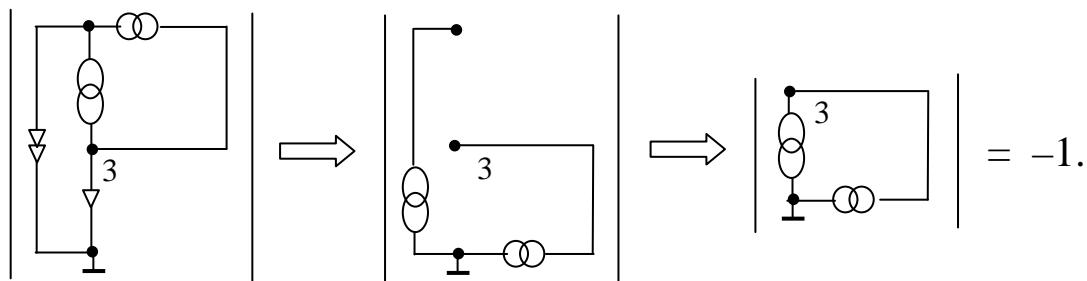


Рис. 2.4.1. Схемы замещения фильтра нижних частот: исходная (а), схема числителя (б) и знаменателя (в)

Определитель схемы числителя упрощается в результате стягивания сопротивления, соединенного последовательно с норатором, и удаления проводимости, параллельной нулатору. Затем стягивается сопротивление, удаление которого приводит к вырожденной схеме – последовательному соединению ЗЭН и нуллатора. Это приводит к параллельному соединению нуллатора и проводимости, которая удаляется.

В результате получается схема, содержащая нуллор и ЗИЭ, определитель которой раскрывается выделением нуллора по формуле [63], как показано ниже:



Таким образом, для искомого числителя получается следующее схемно-алгебраическое выражение:

$$N_3 = \left| \begin{array}{c} \text{Diagram of the circuit with resistors } R_1 \text{ and } R_2, \text{ capacitors } C_1 \text{ and } C_2, \text{ and voltage source } E. \\ \text{Terminal pair 3 is highlighted.} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} \text{Diagram of the circuit with resistor } R_2, \text{ capacitor } C_2, \text{ and voltage source } E. \\ \text{Terminal pair 3 is highlighted.} \end{array} \right| = -1$$

Разложение определителя схемы знаменателя целесообразно начать с сопротивления R_1 , при удалении которого образуется последовательное соединение ЗАЭ, а при стягивании происходит заземление ЗАЭ. При удалении R_1 упрощается последовательное соединение ЗАЭ, а при стягивании R_1 схема сводится к петле из согласно ориентированных ЗЭН и ЗЭТ. Отсюда получается следующее схемно-алгебраическое выражение:

$$\begin{aligned} D &= R_1 \left| \begin{array}{c} \text{Diagram of the circuit with resistors } R_2, \text{ capacitors } C_1 \text{ and } C_2, \text{ and voltage source } E. \\ \text{Terminal pair 3 is highlighted.} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \text{Diagram of the circuit with resistor } R_2, \text{ capacitors } C_1 \text{ and } C_2, \text{ and voltage source } E. \\ \text{Terminal pair 3 is highlighted.} \end{array} \right| = \\ &= R_1 \left| \begin{array}{c} \text{Diagram of the circuit with resistor } R_2, \text{ capacitors } C_1 \text{ and } C_2, \text{ and voltage source } E. \\ \text{Terminal pair 3 is highlighted.} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \text{Diagram of the circuit with voltage source } E. \\ \text{Terminal pair 3 is highlighted.} \end{array} \right| = R_1[R_2(p^2C_1C_2+p(C_1+C_2))]+1. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$U_3/E = N_3/E = -\frac{1}{R_1[R_2(p^2C_1C_2+p(C_1+C_2))]+1},$$

что совпадает с результатом [105] и тождественно формулам (1.8.6) и (1.8.9), полученным с помощью схем замещения на основе УИ.

Анализ совмещенного неинвертирующего фильтра (полосового и нижних частот) на токовых конвейерах [63]. На рис. 2.4.2,а показана совмещенная схема замещения полосового фильтра и фильтра нижних частот на ЗАЭ [105]. Соответствующая схема знаменателя для

нахождения передаточной функции по напряжению представлена на рис. 2.4.2,б. Схема числителя для нахождения напряжения U_4 показана на рис. 2.4.2,в. Схемы числителей для нахождения U_3 и U_6 не показаны, поскольку получаются аналогично: источник напряжения замещается норатором противоположной ориентации, а приемник искомого напряжения – нуллатором согласной ориентации.

В схеме на рис. 2.4.2,б стягивается проводимость g_a , как соединенная последовательно с норатором, и удаляется проводимость Y_1 , параллельная нуллатору. В полученной схеме выполняется выделение нуллора, замещающего источник и отклик напряжения (на схеме заштрихован). ЗИЭ, содержащиеся в схеме рис. 2.4.2, пронумерованы порядковыми номерами (жирным шрифтом), причем ЗАЭ, относящиеся к одному ЗИЭ, имеют одинаковые номера.

При выделении нуллора его норатор, стягиваясь, заземляет норатор первого ЗИЭ, а нуллатор, стягиваясь, заземляет ЗЭН первого ЗИЭ. После объединения узлов 3 и 4 оказывается, что теперь норатор и ЗЭН, образующие первый ЗИЭ изменили способ соединения – оно стало согласным. Поэтому отрицательный знак определителя следует заменить на положительный.

В преобразованной схеме последовательно удаляется проводимость Y_2 и стягивается проводимость g_b , что обусловлено подсоединением к ним норатора. При этом оказываются соединенными параллельно заземленный ЗЭН, эквивалентный нуллатору, и норатор. Такое соединение эквивалентно идеальному проводнику.

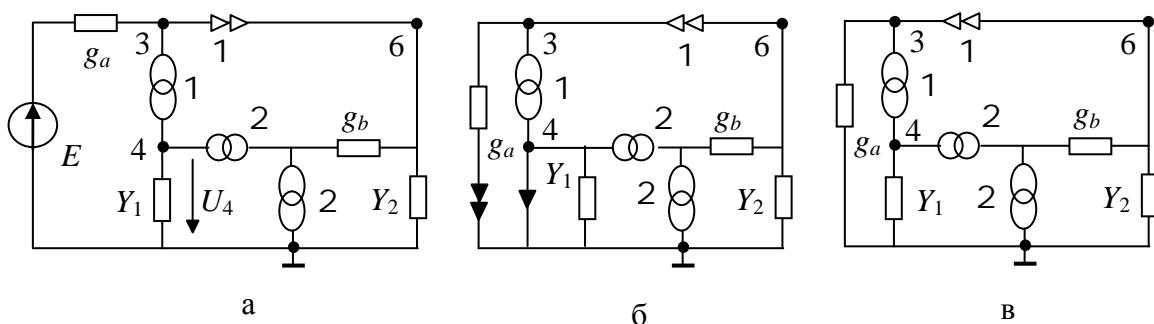


Рис. 2.4.2. Схема совмещенного (полосового и нижних частот) фильтра на токовых конвейерах: исходная схема (а); схема числителя (б) и схема знаменателя (в)

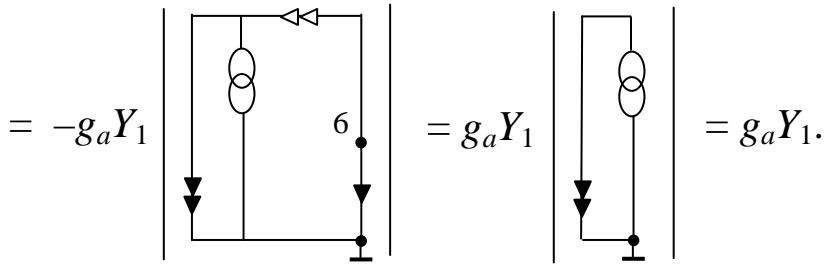
Однако эти аномальные элементы относятся к различным идеальным элементам и направлены к узлу, поэтому определитель схемы изменит знак. Схема, к которой свелось разложение определителя, содержит один ЗИЭ с согласным включением параллельно соединенных ЗАЭ. Определитель такой схемы равен единице.

Схемно-алгебраическое выражение, соответствующее приведенным выше рассуждениям, имеет вид:

$$\begin{aligned}
 N_4 &= g_a \left| \begin{array}{c} \text{Diagram of the original circuit with loops 1, 2, 3, 4 and node 1} \end{array} \right| = g_a \left| \begin{array}{c} \text{Diagram of the circuit after simplification with loops 1, 2, 3, 4 and node 1} \end{array} \right| = \\
 &= g_a g_b \left| \begin{array}{c} \text{Diagram of the circuit with loops 1, 2, 3, 4 and node 1} \end{array} \right| = -g_a g_b \left| \begin{array}{c} \text{Diagram of the circuit with loops 1, 2, 3, 4 and node 1} \end{array} \right| = -g_a g_b.
 \end{aligned}$$

В результате аналогичных рассуждений получаются числители передаточных функций для U_3/E и U_6/E :

$$\begin{aligned}
 N_3 &= g_a \left| \begin{array}{c} \text{Diagram of the circuit with loops 1, 2, 3, 4 and node 1} \\ Y_1 \text{ is connected between nodes 4 and ground} \end{array} \right| = g_a \left| \begin{array}{c} \text{Diagram of the circuit with loops 1, 2, 3, 4 and node 1} \\ Y_1 \text{ is connected between nodes 4 and ground} \end{array} \right| = \\
 &= g_a g_b \left| \begin{array}{c} \text{Diagram of the circuit with loops 1, 2, 3, 4 and node 1} \\ Y_1 \text{ is connected between nodes 4 and ground} \end{array} \right| = -g_a g_b \left| \begin{array}{c} \text{Diagram of the circuit with loops 1, 2, 3, 4 and node 1} \\ Y_1 \text{ is connected between nodes 4 and ground} \end{array} \right| = g_a g_b. \\
 N_6 &= g_a \left| \begin{array}{c} \text{Diagram of the circuit with loops 1, 2, 3, 4 and node 1} \\ Y_1 \text{ is connected between nodes 4 and ground} \end{array} \right| = g_a Y_1 \left| \begin{array}{c} \text{Diagram of the circuit with loops 1, 2, 3, 4 and node 1} \\ Y_1 \text{ is connected between nodes 4 and ground} \end{array} \right| =
 \end{aligned}$$

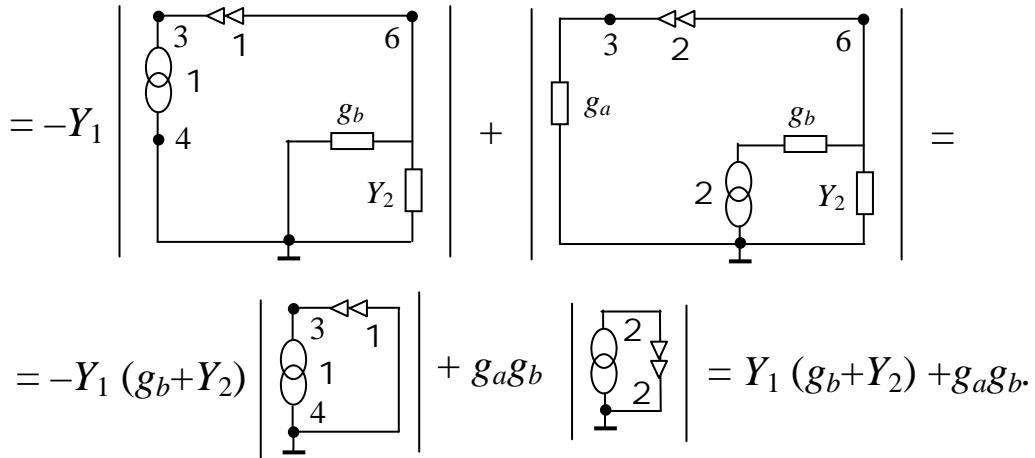


Разложение определителя схемы знаменателя целесообразно начать с проводимости Y_1 , при стягивании которой происходит заземление ЗАЭ, а при удалении образуется последовательное соединение ЗАЭ. После стягивания Y_1 можно удалить проводимость g_a , как параллельную ЗАЭ, а параллельное встречно ориентированное соединение ЗЭН и ЗЭТ с номером 2 заменяется идеальным проводником. При этом знак перед схемным определителем изменяется на противоположный. После стягивания параллельного соединения проводимостей g_b и Y_2 образуется параллельное соединение заземленного ЗЭН и норатора, ориентированного от базисного узла, поэтому отрицательный знак перед определителем заменяется на положительный.

При удалении Y_1 соединяются последовательно ЗЭН и ЗЭТ с разными номерами, но эти ЗАЭ соединены встречно, поэтому знак перед определителем не изменяется. После стягивания проводимостей g_a и g_b , а также удаления проводимости Y_2 образуется параллельное соединение заземленного ЗЭН и норатора, ориентированного к базисному узлу, поэтому знак перед определителем не изменяется.

Отсюда получается следующее схемно-алгебраическое выражение:

$$D = Y_1 \left| \begin{array}{c} \text{Diagram showing a circuit with nodes 1, 2, 3, 4, 5, 6. A vertical branch between nodes 1 and 2 contains a conductance } g_a. \text{ A horizontal branch between nodes 3 and 4 contains a conductance } g_b. \text{ A vertical branch between nodes 5 and 6 contains a conductance } Y_2. \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \text{Diagram showing a circuit with nodes 1, 2, 3, 4, 5, 6. A vertical branch between nodes 1 and 2 contains a conductance } g_a. \text{ A horizontal branch between nodes 3 and 4 contains a conductance } g_b. \text{ A vertical branch between nodes 5 and 6 contains a conductance } Y_2. \end{array} \right| =$$



Таким образом, например,

$$U_3/E = N_3/E = \frac{g_a g_b}{Y_1 (g_b + Y_2) + g_a g_b}.$$

После подстановки выражений N_4 и N_6 и D в формулы вида $U/E=N/D$ получаются выражения, соответствующие результатам [105].

2.5. АНАЛИЗ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ФИЛЬТРА

Схема фильтра нижних частот с зеркальными и нуллорными аномальными элементами показана на рис. 2.5.1,а [104].

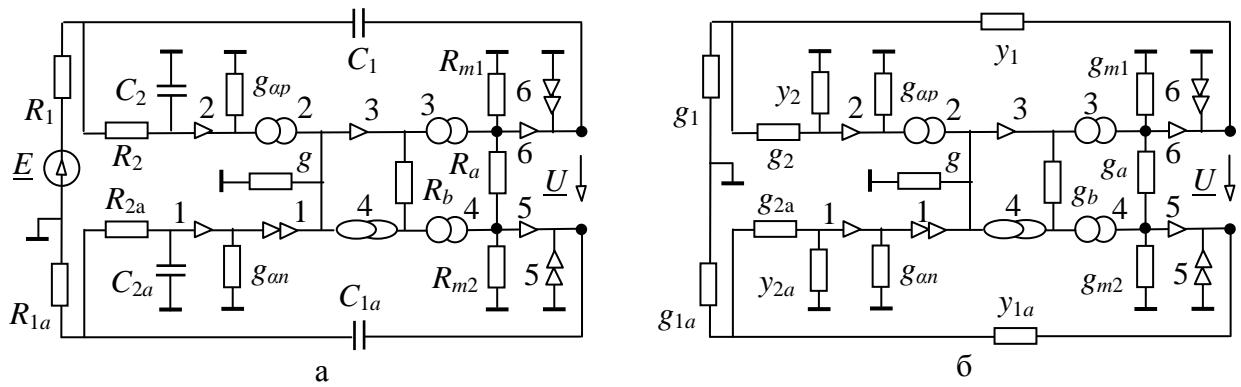


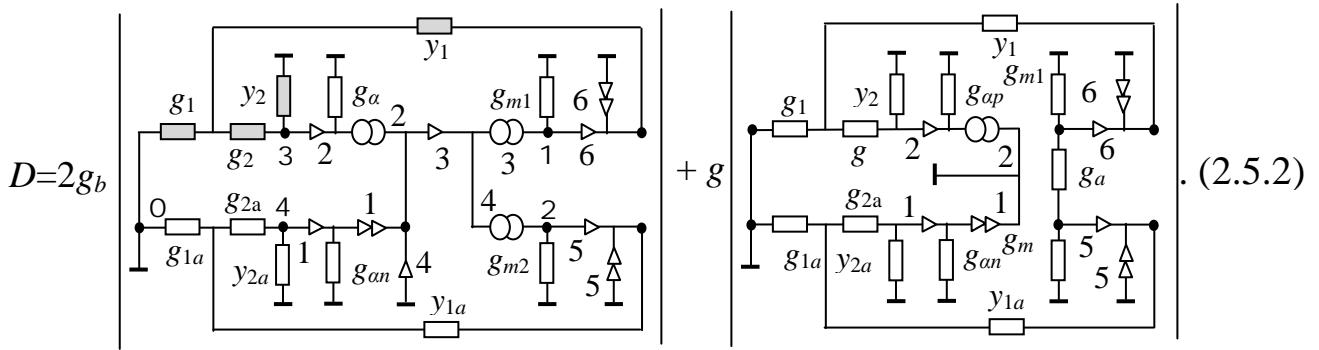
Рис. 2.5.1. Схема фильтра нижних частот на базе аномальных элементов 1–6 (а); схема для нахождения знаменателя коэффициента передачи напряжения (б)

В схеме на рис. 2.5.1,б для нахождения знаменателя ($E=U=0$) все резисторы заданы проводимостями (первая буква g), а емкостные

проводимости имеют вид: $y_1=pC_1$, $y_{1a}=pC_{1a}$, $y_2=pC_2$, $y_{2a}=pC_{2a}$ (p – комплексная частота). Требуется найти комплексный коэффициент передачи напряжения

$$K=\underline{U}/\underline{E} = N/D. \quad (2.5.1)$$

При стягивании g_b в схеме знаменателя проводимость g_a может быть удалена, как входящая в четный ЗЭТ-контур. Образованный нечетный ЗЭН-контур выделяется по формуле (2.3.2). При этом проводимость g оказывается параллельной введенному нуллатору. После удаления g_b выделяется проводимость g , при удалении которой образуется вырождающее схему сечение из ЗЭТ и норатора. Образованные последовательные соединения ЗЭТ-нуллатор и ЗЭН–ЗЭТ удаляются в соответствии с формулами из строк 3 и 4 в табл. 2.2.1. Таким образом,



В первом определителе формулы (2.5.2) выделяются одновременно проводимости g_{m1} и g_{m2} . Определитель схемы будет равен нулю как при одновременном стягивании проводимостей g_{m1} и g_{m2} (образуется четный контур из ЗЭТ), так и при удалении этих проводимостей (размыкается нуллатор 3). Ненулевые слагаемые образуются: 1) при удалении g_{m1} и стягивании g_{m2} ; 2) при удалении g_{m2} и стягивании g_{m1} .

Во втором определителе формулы (2.5.2) заземленный ЗЭТ с номером 2 замещается норатором (строка 5 в табл. 2.2.1). Удаляются проводимости g_{ap} и g_{an} , параллельные нораторам с номерами 2 и 1, а также два последовательных соединения норатора и нуллатора с номерами 1 (с изменением знака на противоположный) и 2. В результате формула (2.5.2) преобразуется к следующему виду:

$$D = 2 g_b \left[g_{m1} \left| \begin{array}{c} \text{---} \\ \bullet_1 \bullet_2 \end{array} \right| + g_{m2} \left| \begin{array}{c} \text{---} \\ 1 \bullet \bullet_2 \end{array} \right| \right] - g$$

где прямоугольником обозначена схема в первом определителе формулы (2.5.2) без проводимостей g_{m1} и g_{m2} .

В первом определителе формулы (2.5.2) выделяем подсхему из проводимостей g_1, y_1, g_2, y_2 (с заливкой) путем деления схемы по двум узлам 3 и 0 [55]. Ненулевой параметр второй подсхемы, получаемый при объединении узлов 3 и 0, равен $y_{1a}g_{2a}g_{ap}$. Второй определитель из формулы (2.5.2) раскрывается подобно первому определителю – выделяется подсхема из проводимостей $g_{1a}, y_{1a}, g_{2a}, y_{2a}$. Ненулевой параметр второй подсхемы, получаемый при объединении узлов 4 и 0, равен $y_1g_2g_{ap}$.

Третий определитель в (2.5.3) раскрывается делением схемы на две подсхемы по трем узлам: 5, 6 и 0 [55]. При этом первой подсхемой считается трехполюсник III, а вторая подсхема состоит из двухполюсников I и II. Определители двухполюсников I и II уже найдены при раскрытии первого и второго определителей из формулы (2.5.3). Единственный ненулевой параметр трехполюсника III является его определителем и равен $g_a(g_{m1}+g_{m2})+g_{m1}g_{m2}$.

Таким образом,

$$D=2g_b\{g_{m1}y_{1a}g_{2a}g_{ap}[(g_1+y_1)(g_2+y_2)+g_2y_2]+g_{m2}y_1g_2g_{ap}[(g_{1a}+y_{1a})(g_{2a}+y_{2a})+g_{2a}y_{2a}]\}-g[(g_{1a}+y_{1a})(g_{2a}+y_{2a})+g_{2a}y_{2a}][(g_1+y_1)(g_2+y_2)+g_2y_2][g_a(g_{m1}+g_{m2})+g_{m1}g_{m2}].(2.5.4)$$

Схема для нахождения числителя N коэффициента передачи напряжения (2.5.1) получается из схемы на рис. 2.5.1,а путем замены источника ЭДС E и приемника напряжения U норатором и нуллатором соответственно [55]. Из полученной схемы символьное выражение

числителя находится аналогично знаменателю на основе формулы выделения нечетного контура из ЗЭН. Отсюда

$$N = -2g_1g_2g_bg_{ap}[(g_{1a}+y_{1a})(g_{2a}+y_{2a})+g_{2a}y_{2a}](g_{m1}+g_{m2}). \quad (2.5.5)$$

Как видно, выражения (2.5.4) и (2.5.5) получены в оптимальной форме – требуют минимального числа операций при отсутствии взаимно уничтожающихся слагаемых. Эти выражения совпадают с выражениями, полученными с помощью программы символьного анализа электронных схем CirSym [87], разработанной В.В. Филаретовым, в которой реализованы формулы (2.2.2), (2.2.3), (2.3.2) и (2.3.3). В системе Maple-17 [12] эквивалентное безызбыточное и компактно свернутое выражение получается из матричного определителя путем трудоемкого развертывания, приведения подобных членов и разложения на множители с помощью операции *simplify('size')*.

2.6. СРАВНЕНИЕ МАТРИЧНЫХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ ФИЛЬТРА

Матрица узловых проводимостей для схемы фильтра на рис. 2.5.1,а имеет 9-й порядок, в которой ненулевые элементы принимают следующие значения [104]:

$$\begin{aligned} y_{11} &= 1; y_{21} = -g_1; y_{22} = g_1 + g_2 + p^*c_1; y_{23} = -g_2; y_{25} = -p^*c_1; y_{32} = -g_2; y_{33} = g_2 + p^*c_2; \\ y_{43} &= -g_{ap}; y_{44} = g; y_{48} = g_a; y_{54} = -2^*g_b; y_{55} = g_a + g_{m1}; y_{59} = -g_a; y_{66} = 1; y_{76} = -g_{1a}; \\ y_{77} &= g_{1a} + g_{2a} + p^*c_{1a}; y_{78} = -g_{2a}; y_{79} = -p^*c_{1a}; y_{87} = -g_{2a}; y_{88} = g_{2a} + p^*c_{2a}; y_{94} = 2^*g_b; \\ y_{95} &= -g_a; y_{99} = g_a + g_{m2}. \end{aligned} \quad (2.6.1)$$

Определитель матрицы Y , полученный в системе Maple, имеет вид

$$\begin{aligned} D_{maple} = & (((y_{78}*y_{23}*(y_{55}*y_{99}-y_{59}*y_{95})*y_{44}-y_{48}*y_{79}*(y_{54}*y_{95}- \\ & -y_{55}*y_{94})*y_{23}+y_{25}*y_{43}*y_{78}*(y_{54}*y_{99}-y_{59}*y_{94}))*y_{87}- \\ & -y_{88}*(y_{23}*(y_{55}*y_{99}-y_{59}*y_{95})*y_{44}+y_{43}*y_{25}*(y_{54}*y_{99}- \\ & -y_{59}*y_{94}))*y_{77})*y_{32}+y_{22}*y_{33}*((-y_{78}*(y_{55}*y_{99}-y_{59}*y_{95})*y_{44}+ \\ & +y_{79}*y_{48}*(y_{54}*y_{95}-y_{55}*y_{94}))*y_{87}+y_{44}*y_{77}*y_{88}*(y_{55}*y_{99}- \\ & -y_{59}*y_{95}))) * y_{11} * y_{66}. \end{aligned} \quad (2.6.2)$$

При подстановке значений узловых проводимостей из (2.6.1) в (2.6.2) появляются многочисленные избыточные взаимно уничтожающиеся слагаемые. В первое подмножество входят слагаемые, порождаемые избыточностью матрицы и содержащие квадраты проводимостей (их 170). Второе подмножество состоит из слагаемых, содержащих параметр g_b (их 48, они содержат нечетный ЗЭН-контур). Третья группа состоит из слагаемых, содержащих как параметр g_b , так и параметр g_a (их 56, они содержат нечетный ЗЭН- и четный ЗЭТ-контур).

Определитель схемы на рис. 2.5.1, сгруппированный относительно степеней комплексной частоты. Для параметрического синтеза электрических цепей требуется полиномиальное представление символьных схемных функций. Для нахождения полиномиальных коэффициентов используется рекурсивный алгоритм их раздельного формирования на основе исходной схемы, который генерирует компактное выражение, минуя трудоемкую развертку и свертку выражения, которая используется в математических компьютерных системах [12]. Полиномиальный определитель, полученный с помощью программы CirSym, представляется в следующей форме:

$$D_{cirsym} = p * p * p * p * A_4 + p * p * p * A_3 + p * p * A_2 + p * A_1 + A_0, \quad (2.6.3)$$

$$\text{где } A_4 = -C_1 * C_2 * C_{1a} * C_{2a} * t; \quad t = g_a * (g_{m2} + g_{m1}) + g_{m1} * g_{m2};$$

$$A_3 = 2 * g_b * (g_{m1} * g_{an} * g_{2a} * C_{1a} * C_2 * C_1 + g_{ap} * g_2 * C_1 * g_{m2} * C_{2a} * C_{1a}) - \\ - t * (C_1 * (g_2 * C_{1a} * C_{2a} + C_2 * (C_{1a} * g_{2a} + C_{2a} * (g_{2a} + g_{1a}))) + C_{1a} * C_{2a} * C_2 * (g_2 + g_1));$$

$$A_2 = 2 * g_b * (g_{m1} * g_{an} * g_{2a} * C_{1a} * (C_2 * (g_2 + g_1) + g_2 * C_1) + g_{ap} * g_2 * C_1 * g_{m2} * (C_{1a} * g_{2a} + \\ + C_{2a} * (g_{2a} + g_{1a}))) - t * (C_1 * (g_2 * (C_{1a} * g_{2a} + C_{2a} * (g_{2a} + g_{1a}))) + C_2 * g_{2a} * g_{1a}) + \\ + C_{1a} * (g_{2a} * C_2 * (g_2 + g_1) + C_{2a} * g_2 * g_1) + C_2 * (g_2 + g_1) * C_{2a} * (g_{2a} + g_{1a}));$$

$$A_1 = 2 * g_b * (g_{m1} * g_{an} * g_{2a} * C_{1a} * g_2 * g_1 + g_{ap} * g_2 * C_1 * g_{m2} * g_{2a} * g_{1a}) - t * (C_1 * g_2 * g_{2a} * g_{1a} + \\ + C_{1a} * g_{2a} * g_2 * g_1 + C_2 * (g_2 + g_1) * g_{2a} * g_{1a} + g_2 * g_1 * C_{2a} * (g_{2a} + g_{1a}));$$

$$A_0 = -t * g_2 * g_1 * g_{2a} * g_{1a}.$$

Формула (2.6.3) содержит 96 умножений и 37 сложений (вычитаний), а выражение, полученное системой Maple из формулы (2.6.2) в результате исключения 117 пар взаимно уничтожающихся слагаемых, требует 104 и 43 соответствующих операций. Таким образом, метод схемных определителей (программа CirSym) предпочтительней также и при формировании полиномиальных выражений.

2.7. ВЗАИМОСВЯЗЬ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ СХЕМЫ С ЗЕРКАЛЬНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ И СООТВЕТСТВУЮЩЕЙ СХЕМЫ С НУЛЛОРАМИ

Нуллорная схема получается из схемы с зеркальным элементами путем замены ЗЭН и ЗЕТ на нуллатор и норатор соответственно.

Утверждение. Определитель схемы с зеркальными элементами содержит все слагаемые (без учета знака) определителя соответствующей нуллорной схемы.

Доказательство этого утверждения для определителя схемы с ЗЭН (порождающей схемы) вытекает из формулы

$$\left| \begin{array}{c} \bullet \rightarrow \bullet \\ \bullet \end{array} \right| = 2 \left| \begin{array}{c} \bullet \rightarrow \bullet \\ \bullet \end{array} \right| - \left| \begin{array}{c} \bullet \rightarrow \bullet \\ \bullet \end{array} \right|, \quad (2.7.1)$$

полученной из выражения (2.2.2) с учетом (2.2.4).

В правой части (2.7.1) содержится два схемных минора, второй из них является определителем соответствующей нуллорной схемы. Выражение (2.7.1) обуславливает 4 варианта соотношения между слагаемыми этих миноров: 1) все слагаемые определителя нуллорной схемы имеют знак, противоположный знаку слагаемых порождающей схемы с ЗЭН; 2) знаки слагаемых определителя нуллорной схемы частично совпадают со знаками слагаемых порождающей схемы; 3) определитель нуллорной схемы (второе слагаемое в (2.7.1)) равен нулю, поэтому определитель схемы с ЗЭН содержит только слагаемые, специфические для схем с зеркальными элементами, что возможно при наличии в схеме нечетного

ЗЭН-контура; 4) если заземлен левый полюс, то определитель схемы с ЗЭН эквивалентен определителю нуллорной схемы; при заземлении правого полюса (частный случай варианта 1) определитель с ЗЭН эквивалентен определителю нуллорной схемы, взятому с отрицательным знаком.

Таким образом, утверждение для схемы с ЗЭН доказано. Для схемы с ЗЭТ или с ЗЭТ и ЗЭН доказательство утверждения выполняется аналогично.

Для иллюстрации утверждения (вариант 1) приведем сформированный с помощью программы CirSym определитель нуллорной схемы, соответствующей зеркальной схеме на рис. 2.5.1,б:

$$D = g*((gm1+ga)*(y2*(g2+g1+y1)+(g1+y1)*g2)*gm2*(y2a*(g2a+g1a+y1a)+(g1a+y1a)*g2a)+ga*gm1*(y2*(g2+g1+y1)+(g1+y1)*g2)*(y2a*(g2a+g1a+y1a)+(g1a+y1a)*g2a)). \quad (2.7.2)$$

Выражение (2.7.2) является безызбыточным и содержит 75 слагаемых, причем они совпадают по модулю (знаки противоположны) с 75-ю слагаемыми для определителя (2.5.4) исходной схемы фильтра с зеркальными элементами. Остальные 20 парных слагаемых из 95-ти в (2.5.4) являются специфическими для схемы с зеркальными элементами.

Для схемы на рис. 2.5.1,а наблюдается вариант 3 – отсутствие нуллорных слагаемых, если $g=0$. Примером варианта 2, когда в определителе схемы с зеркальными элементами содержится часть слагаемых нуллорной схемы с собственными, а остальная часть с противоположными знаками, является схема фильтра с токовым конвейером ССП+ [106].

2.8. ПЛАВАЮЩИЕ ЗЕРКАЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Более широкие возможности для моделирования цепей предоставляют плавающие – незаземленные – зеркальные элементы

(рис. 2.8.1) [121]. Для плавающего ЗЭН уравнения имеют вид: $\underline{U}_{13} = -\underline{U}_{23}$ и $I_1 = I_2$, для ЗЭТ: $I_1 = I_2 = I_3 / 2$; напряжения \underline{U}_{13} и \underline{U}_{23} могут принимать значения, которые определяются всей схемой.

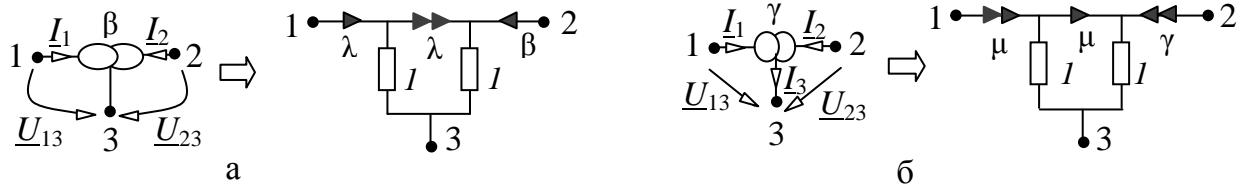


Рис. 2.8.1. Плавающие зеркальные аномальные элементы и их схемы замещения на основе направленных нумерованных нуллов: ЗЭН (а) и ЗЭТ (б)

Формулы выделения плавающих ЗЭН и ЗЭТ получаются по аналогии с формулами (2.2.2) и (2.2.3) для соответствующих заземленных аномальных элементов и имеют вид

$$\left| \begin{array}{c} \text{[Diagram of a floating ZEN or ZET]} \\ \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} \text{[Diagram of a ZEN or ZET with one terminal grounded]} \\ \bullet \leftarrow \bullet \bullet \bullet \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \text{[Diagram of a ZEN or ZET with one terminal grounded]} \\ \bullet \bullet \rightarrow \bullet \bullet \end{array} \right|; \quad (2.8.1) \quad \left| \begin{array}{c} \text{[Diagram of a floating ZEN or ZET]} \\ \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} \text{[Diagram of a ZEN or ZET with one terminal grounded]} \\ \bullet \leftarrow \bullet \bullet \bullet \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \text{[Diagram of a ZEN or ZET with one terminal grounded]} \\ \bullet \bullet \rightarrow \bullet \bullet \end{array} \right|. \quad (2.8.2)$$

Плавающие зеркальные элементы позволяют получить аномальные функциональные подсхемы, которые помещены в табл. 2.8.1. Следует отметить, что в подсхемах введен в отличие от [121] дополнительный полюс – общий полюс для двух ЗЭН или ЗЭТ. Этот полюс предназначен для подключения парных аномальных элементов для получения невырожденной схемы. Например, определитель произвольной схемы с трехполюсным размножителем тока (строка 3 в табл. 2.8.1) без полюса 4 равен нулю, поскольку после выделения ЗЭТ по формуле (2.2.2) все полученные миноры оказываются вырожденными – содержат сечения из нораторов:

$$\left| \begin{array}{c} \text{[Diagram of a complex functional sub-circuit with three poles]} \\ \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} \text{[Diagram of a ZEN or ZET with one terminal grounded]} \\ \bullet \leftarrow \bullet \bullet \bullet \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \text{[Diagram of a ZEN or ZET with one terminal grounded]} \\ \bullet \bullet \rightarrow \bullet \bullet \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \text{[Diagram of a ZEN or ZET with one terminal grounded]} \\ \bullet \leftarrow \bullet \bullet \bullet \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \text{[Diagram of a ZEN or ZET with one terminal grounded]} \\ \bullet \bullet \rightarrow \bullet \bullet \end{array} \right|. \quad (2.8.3)$$

Исключить вырождение схемы в (2.8.3) можно путем введения полюса n , как это сделано в строке 3 из табл. 2.8.1. После этого

аномальный трехполюсный распределитель может использоваться для передачи входного тока с помощью подключения к полюсу n двух нуллаторов (рис. 2.8.2). Определитель схемы на рис. 2.8.2 равен 2, а коэффициент передачи тока $\underline{I}_2/\underline{I}_1 = \underline{I}_3/\underline{I}_1 = -1$. Может оказаться достаточным подключение одного нуллатора, если после этого суммарное число нуллаторов и ЗЭН равно суммарному числу нораторов и ЗЭТ.

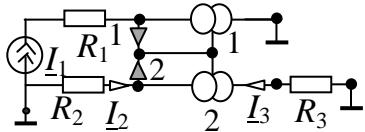


Рис. 2.8.2. Подключение нуллаторов к аномальному трехполюсному распределителю тока для исключения вырождения схемы

Таблица 2.8.1. Зеркальные аномальные подсхемы и их уравнения

№	Наименование подсхемы	Графическое изображение	Уравнения
1	Дифференциальный преобразователь напряжения		$\underline{U}_1 - \underline{U}_2 = \underline{U}_3;$ $\underline{I}_1 = \underline{I}_2 = \underline{I}_3.$
2	Дифференциальный конвейер напряжения		$\underline{U}_3 - \underline{U}_4 = \underline{U}_1 - \underline{U}_2;$ $\underline{I}_1 = \underline{I}_2 = \underline{I}_3 = \underline{I}_4.$
3	Трехполюсный распределитель тока		$\underline{I}_2 = \underline{I}_3 = -\underline{I}_1.$
4	Четырехполюсный распределитель тока		$\underline{I}_2 = \underline{I}_3 = -\underline{I}_1 = -\underline{I}_4.$
5	Эквивалент нуллатора		$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 = 0;$ $\underline{U}_1 = \underline{U}_2.$

№	Наименование подсхемы	Графическое изображение	Уравнения
6	Эквивалент зеркала напряжения		$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 = 0;$ $\underline{U}_1 = -\underline{U}_2.$
7	Эквивалент норатора		$\underline{I}_1 = -\underline{I}_2.$
8	Эквивалент зеркала тока		$\underline{I}_1 = \underline{I}_2.$

2.9. ПОСТРОЕНИЕ НУЛЛОРНО-ЗЕРКАЛЬНЫХ СХЕМ ЗАМЕЩЕНИЯ ТОКОВЫХ КОНВЕЙЕРОВ

Нуллорные элементы, как было показано в разделе 1, имеют ограниченные возможности при моделировании электронных элементов. Так, с помощью нуллорных элементов нельзя построить схемы замещения токовых конвейеров, которые содержат инверторы тока или напряжения. Инверторы могут быть реализованы с помощью зеркальных аномальных элементов (ЗАЭ), схемы замещения которых содержат, кроме нуллорных элементов, резисторы. На основе ЗАЭ формируются зеркальные аномальные подсхемы (табл. 2.8.1). Используя их, построим в табл. 2.9.1 схемы наиболее распространенных конвейеров тока. Схемы в строках 1–3 и 6 из табл. 2.9.1 являются равновесными – содержат пары взаимно дополняющих элементов, а схемы в строках 4 и 5 – неравновесными – содержат неравное число групп элементов ЗЭН+нуллатор и ЗЭТ+норатор.

Таблица 2.9.1. Конвейеры тока (строки 1–3) или их подсхемы (строки 4–10)

№	Условное изображение конвейера	Уравнения	Схема замещения
1	2	3	4
1		$\underline{I}_z = \underline{I}_x;$ $\underline{U}_x = \underline{U}_y.$	
2		$\underline{I}_z = \underline{I}_x;$ $\underline{U}_x = -\underline{U}_y.$	
3		$\underline{I}_z = -\underline{I}_x;$ $\underline{U}_x = -\underline{U}_y.$	
4		$\underline{I}_y = 0;$ $\underline{U}_x = \underline{U}_y;$ $\underline{I}_{z+} = \underline{I}_x;$ $\underline{I}_{z-} = -\underline{I}_x.$	
5		$\underline{I}_y = 0;$ $\underline{U}_x = -\underline{U}_y;$ $\underline{I}_{z+} = \underline{I}_x;$ $\underline{I}_{z-} = -\underline{I}_x.$	
6		$\underline{I}_{y+} = 0;$ $\underline{I}_{y-} = 0;$ $\underline{U}_x = \underline{U}_{y+} - \underline{U}_{y-};$ $\underline{I}_{z+} = \underline{I}_x;$ $\underline{I}_{z-} = -\underline{I}_x.$	

Окончание табл. 2.9.1

№	Условное изображение конвейера	Уравнения	Схема замещения
1	2	3	4
7		$\underline{I}_{y1} = 0; \underline{I}_{y2} = 0; \underline{I}_{y3} = 0;$ $\underline{U}_x = \underline{U}_{y1} - \underline{U}_{y2} + \underline{U}_{y3};$ $\underline{I}_{z+} = \underline{I}_x;$ $\underline{I}_{z-} = -\underline{I}_x.$	
8		$\underline{I}_{y1} = 0; \underline{I}_{y2} = 0; \underline{I}_{y3} = 0; \underline{I}_{y4} = 0;$ $\underline{U}_{x+} = \underline{U}_{y1} - \underline{U}_{y2} + \underline{U}_{y3};$ $\underline{U}_{x-} = -\underline{U}_{y1} + \underline{U}_{y2} + \underline{U}_{y3};$ $\underline{I}_{z+} = \underline{I}_x;$ $\underline{I}_{z-} = -\underline{I}_x.$	
9		$\begin{bmatrix} \underline{U}_{x1} \\ \underline{U}_{x2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_{y1} \\ \underline{U}_{y2} \end{bmatrix};$ $\begin{bmatrix} \underline{I}_{z1} \\ \underline{I}_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_{x1} \\ \underline{I}_{x2} \end{bmatrix}.$	
10		$\begin{bmatrix} \underline{U}_{x1} \\ \underline{U}_{x2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_{y1} \\ \underline{U}_{y2} \end{bmatrix};$ $\begin{bmatrix} \underline{I}_{z1} \\ \underline{I}_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_{x1} \\ \underline{I}_{x2} \end{bmatrix}.$	

Построить нуллорно-зеркальную схему замещения конвейера можно двояким образом – непосредственной реализацией уравнений с помощью зеркальных и нуллорных элементов и путем преобразования САФ этих элементов вида (1.7.3)–(1.7.5) из суммы схемных миноров в

эквивалентный определитель, содержащий одну схему. Эта схема и будет искомой схемой замещения. Для преобразования используются операции с нуллорами и формулы выделения зеркальных элементов из п. 2.2. При этом, как уже отмечалось, знак определителя может быть определен только на основе схем замещения с УИ – путем преобразования САФ.

Рассмотрим непосредственную реализацию уравнений конвейеров с помощью аномальных элементов. Уравнения для конвейера ССП+ имеют вид: $\underline{I}_z = \underline{I}_x$; $\underline{U}_x = \underline{U}_y$, для их реализации между полюсами z и x следует подключить ЗЭТ, а между полюсами y и x – нуллатор. Полученная схема замещения представлена в строке 1 табл. 2.9.1. Схемы конвейеров ICCP+ и ICCP– (строки 2 и 3 в табл. 2.9.1) содержат ЗЭН, поскольку они выполняют инверсную передачу напряжения от полюса y к полюсу x .

Токовый конвейер с балансным выходом BOCCP в строке 4 из табл. 2.9.1 содержит по сравнению с конвейером ССП+ в строке 1 трехполюсный распределитель тока из строки 3 табл. 2.8.1. В приведенной схеме в отличие от [121] введен полюс n для подсоединения нуллатора или ЗЭН по аналогии с табл. 2.8.1. Полюс n требуется также в схеме инверсного токового конвейера с балансным выходом IBOCCP, приведенной в строке 5 табл. 2.9.1.

В схемах дифференциального токового конвейера с балансным выходом DVCC (строка 6 в табл. 2.9.1), дифференциального конвейера тока с тремя входами напряжения и балансным выходом DDCC [121] (строке 7 табл. 2.9.1) и полного дифференциального конвейера тока FDCCP введены два полюса n_1 и n_2 для подсоединения аномальных элементов. Причем в схемах DVCC и DDCC к полюсу n_1 подсоединяется норатор, а к n_2 – нуллатор. В схеме FDCCP (строка 8 табл. 2.9.1) к обоим полюсам подключаются нораторы.

Двойные дифференциальные конвейеры DCCP (схема в строках 9 и 10 из табл. 2.9.1) [115] характеризуются различными матрицами второго порядка K и L передачи тока и напряжения. Их уравнения конвейера имеют вид

$$\begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{x2} \end{bmatrix} = L \begin{bmatrix} u_{y1} \\ u_{y2} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} i_{z1} \\ i_{z2} \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} i_{x1} \\ i_{x2} \end{bmatrix}. \quad (2.9.1)$$

В строках 9 и 10 показаны схемы двух вариантов двойных конвейеров, там же приведены соответствующие матрицы K и L .

2.10. ВЫВОДЫ

Предложены схемно-алгебраические формулы для выделения зеркальных элементов и контуров из четного и нечетного числа этих элементов, позволяющие получать компактные безызбыточные символьные выражения схемных функций.

Установлено, что определитель схемы с зеркальными элементами содержит все слагаемые (без учета знаков) определителя соответствующей нуллорной схемы и дополнительные слагаемые, специфические для схем с зеркальными элементами.

Показано, что матричный определитель схемы с зеркальными элементами содержит не только многочисленные взаимно уничтожающиеся слагаемые с квадратами незаземленных проводимостей, но и слагаемые с проводимостями, образующими четные контуры с зеркальными элементами, что ставит под сомнение целесообразность использования модифицированного метода узловых напряжений для символьного анализа электрических цепей.

Предложены схемы замещения токовых конвейеров с зеркальными и нуллорными элементами, содержащие дополнительные полюсы, подсоединение к которым аномальных элементов исключает вырождение плавающих зеркальных элементов и позволяет использовать эти схемы для схемно-алгебраического анализа электрических цепей с конвейерами.

3. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЦЕПЕЙ С АНОМАЛЬНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Одним из эффективных методов синтеза электрических цепей является их эквивалентное преобразование – получение модификаций схем, эквивалентных некоторой исходной (порождающей) схеме [72,77, 88,89,120,123]. Порождающая схема является результатом изобретения или применения других методов синтеза цепей. В результате применения эквивалентных преобразований очень часто улучшаются характеристики и параметры новых схем по сравнению с порождающей схемой. Поэтому эквивалентные преобразования электрических цепей широко применяются на заключительных этапах проектирования и оптимизации аналоговых активных схем, таких как фильтры, генераторы, усилители, различные преобразователи [77].

Эквивалентность схем обусловлена тем, что системы уравнений Кирхгофа, описывающие такие схемы, являются идентичными. Получение новых и конкурентоспособных схемных решений требует, чтобы при порождении (перечислении) схем во избежание потери полезного решения, обеспечивалась полнота перебора [123].

В классе схем, составленных из пассивных двухполюсников, получение схем, эквивалентных некоторой порождающей схеме, ограничено, поскольку в общем случае не существует двух неизоморфных схем, имеющих одинаковые символные схемные функции [86]. В то же время взаимное изменение положения активных элементов может привести к порождению большого числа схем, что важно для структурного синтеза и оптимизации структуры [88,89,123]. Большие возможности для этого представляют аномальные элементы. Различные варианты их спаривания: норатор–нуллатор, норатор–ЗЭН, нуллатор–ЗЭТ, ЗЭН–ЗЭТ позволяют получить множество схем замещения, обладающих одинаковыми схемными характеристиками.

3.1. ПОДКЛЮЧЕНИЕ, СТЯГИВАНИЕ И УДАЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ, ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ И ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ С НУЛЛОВЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Эквивалентные схемы можно получить, используя особые свойства нулловых элементов. Так, передаточная функция цепи не изменяется при подключении или удалении сопротивления Z , параллельного норатору и нуллатору (строки 1 и 2 в табл. 3.1.1). Можно подключить также сопротивление Z последовательно с норатором и нуллатором или стянуть его (строки 3 и 4 в табл. 3.1.1). Аналогичные операции подключения, удаления и стягивания можно выполнить с проводимостью Y (строки 5–8 в табл. 3.1.1). В общем случае не нарушает эквивалентность схемы введение (или удаление) ненулевого сопротивления или проводимости в качестве хорды для дерева из нораторов или нораторов.

Преобразование параллельных и последовательных соединений генераторов и приемников приведено в табл. 3.1.2. Так, параллельно норатору можно подключить генератор тока и удалить его (строка 1), а параллельно нуллатору – приемник напряжения (строка 2). Последовательно с норатором подключается генератор напряжения, а с нуллатором – приемник тока (строки 3 и 4). Параллельное соединение генератора напряжения и приемника тока различных УИ эквивалентно преобразуется в параллельное соединение норатора и нуллатора (строка 5), такое же соединение можно получить и при параллельном соединении генератора напряжения и нуллатора (строка 6), а также при аналогичном соединении приемника тока и норатора (строка 7).

Возможна операция добавления (удаления) параллельно генератору напряжения генератора тока. Дуальная операция – добавление генератора напряжения последовательно с генератором тока. Изложенные эквивалентные преобразования следуют из эквивалентности соответствующих схемных определителей [31].

Таблица 3.1.1. Эквивалентные преобразования схем с нуллорными элементами, последовательными или параллельными резистору

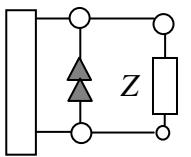
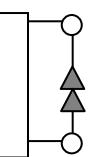
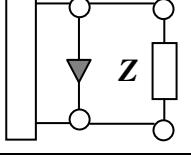
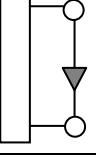
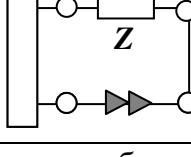
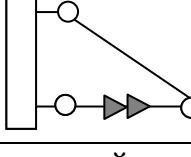
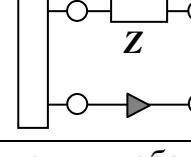
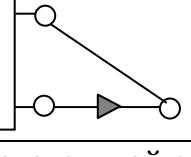
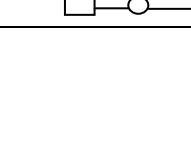
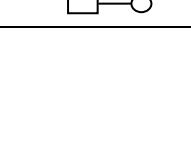
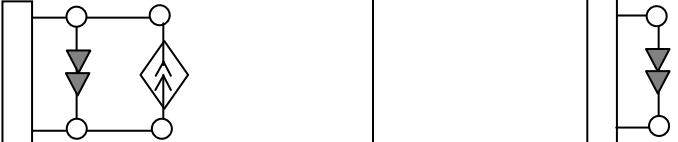
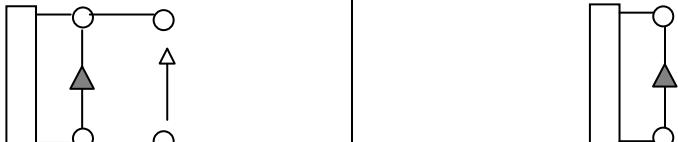
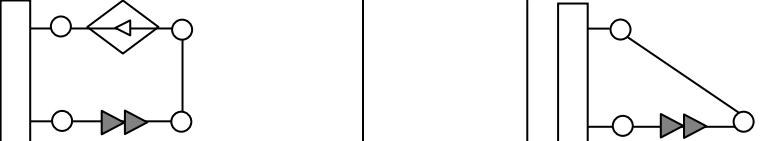
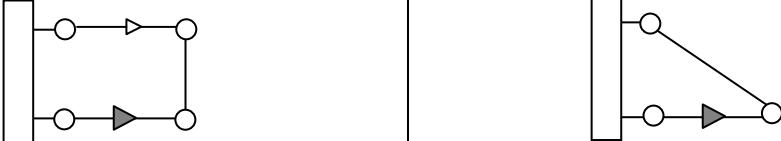
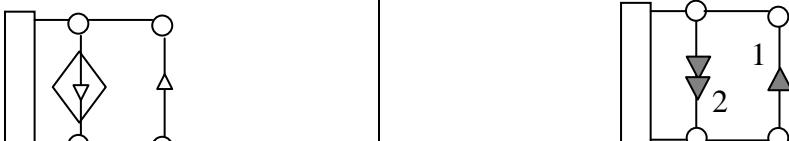
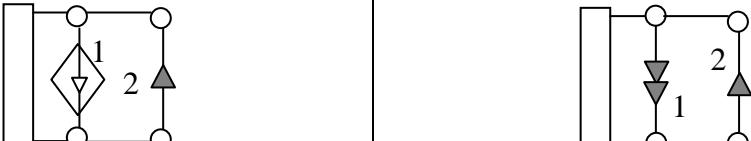
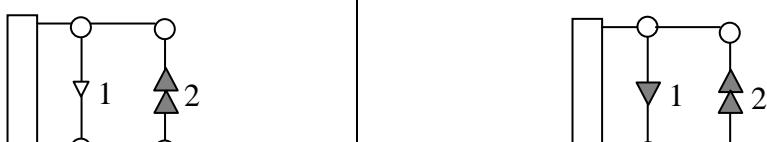
№	Наименование преобразования	
	Пара взаимно эквивалентных схем	
1	Удаление или добавление z -ветви, параллельной норатору	 
2	Удаление или добавление z -ветви, параллельной нуллатору	 
3	Стягивание или добавление z -ветви, последовательной с норатором	 
4	Стягивание или добавление z -ветви, последовательной с нуллатором	 
5	Стягивание или добавление y -ветви, последовательной с норатором	 
6	Стягивание или добавление y -ветви, последовательной с нуллатором	 
7	Удаление или добавление y -ветви, параллельной норатору	 
8	Удаление или добавление y -ветви, параллельно нуллатору	 

Таблица 3.1.2. Эквивалентные преобразования схем с нуллорными элементами, последовательными и параллельными генератору и приемнику напряжения и тока

№	Наименование преобразования	
	Пара взаимно эквивалентных схем	
1	Удаление или подключение генератора тока параллельно норатору	
2	Удаление или подключение приемника напряжения, параллельного нуллатору	
3	Стягивание или подключение генератора напряжения, последовательного норатору	
4	Стягивание или подключение приемника тока последовательно с нуллатором	
5	Преобразование параллельного соединения генератора напряжения УИ-1 и приемника тока УИ-2 в параллельное соединение норатора и нуллатора	
6	Преобразование параллельного соединения генератора напряжения УИ-1 и нуллатора 2 в параллельное соединение норатора и нуллатора	
7	Преобразование параллельного соединения приемника тока УИ-1 и норатора	

3.2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПУТЕМ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ НУЛЛОРНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Схемы с нуллорными элементами можно преобразовать в другие эквивалентные схемы, используя преобразования деревьев из нуллаторов или нораторов [39]. Преобразование деревьев из нуллорных элементов, направление и нумерация которых обязательны в МСО, аналогично преобразованию соответствующих путей [32] и показано на рис. 3.2.1,а и рис. 3.2.1,б соответственно. При переключении нуллатора или норатора с одного полюса на другой их направление не изменяется. При этом знак определителя, как можно убедиться путем подключения нораторов, остается прежним.

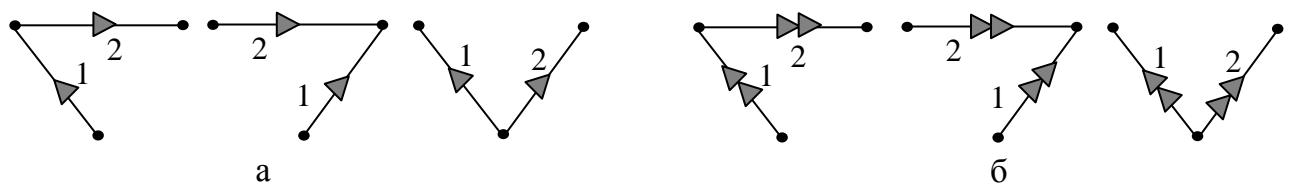


Рис. 3.2.1. Эквивалентное преобразование нуллаторных (а) и нораторных (б) деревьев путем переключения элементов

С помощью операции переключения нуллорных элементов выполнены эквивалентные преобразования на рис. 3.2.2. Соответствующие преобразования на основе ненаправленных элементов имеются в [103].

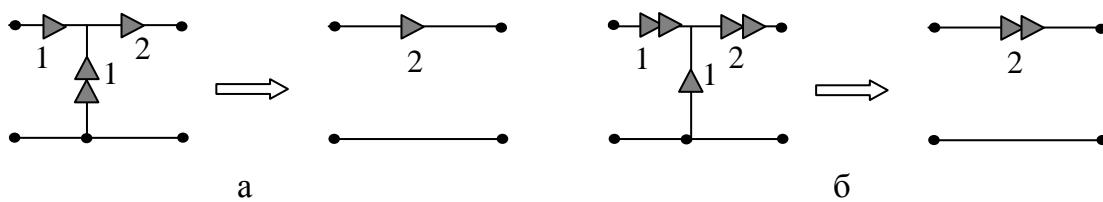


Рис. 3.2.2. Эквивалентные схемы, полученные переключением нуллатора (а) и норатора (б)

Нуллаторные и нораторные деревья используются для порождения эквивалентных схем с различной структурой и одинаковым числом элементов. Для этого можно использовать следующий алгоритм [40].

А. Активные элементы в структурной или принципиальной схеме устройства заменяются на соответствующие группы (обычно пары) аномальных элементов, и строится соответствующая схема с аномальными элементами.

Б. В полученной нуллорной схеме аномальные элементы можно объединить в группы, соответствующие активным элементам, разными способами, используя комбинаторные методы. Это приводит к переключению выводов активных элементов в исходной схеме, то есть порождению новых схем.

В. В каждой из полученных схем могут быть выделены подсхемы из аномальных элементов одного вида, имеющих общие узлы (и образующие дерево). Такие подсхемы можно преобразовать в другие деревья, и затем провести объединение аномальных элементов, аналогичное п. **Б**.

При восстановлении активных элементов из групп аномальных элементов необходимо учитывать особенности моделей этих активных элементов. Например, если в модели активного элемента идеальные элементы соединены между собой определенным образом, то при новом объединении необходимо обеспечивать такое же соединение.

Генерация нораторных и нуллаторных деревьев в п. **В** может быть выполнена с помощью алгоритмов, предложенных в [40].

Пример операции переключения нуллаторов для получения эквивалентной схемы фильтра. Исходная схема универсального фильтра дана на рис. 3.2.3,а. Эквивалентная схема с повышенным запасом устойчивости – на рис. 3.2.3,б получена на основе теории обратной связи [24]. С учетом, что идеальный операционный усилитель (ОУ) является нуллором, причем на входе схемы включается нуллатор, а на выходе – норатор, схему на рис. 3.2.3,б можно получить с помощью операции переключения нуллатора. Неинвертирующий полюс нуллатора ОУ-1

необходимо переключить с общего полюса на инвертирующий полюс ОУ-2, а неинвертирующий полюс нуллатора ОУ-2 – с общего зажима схемы на инвертирующий полюс ОУ-4.

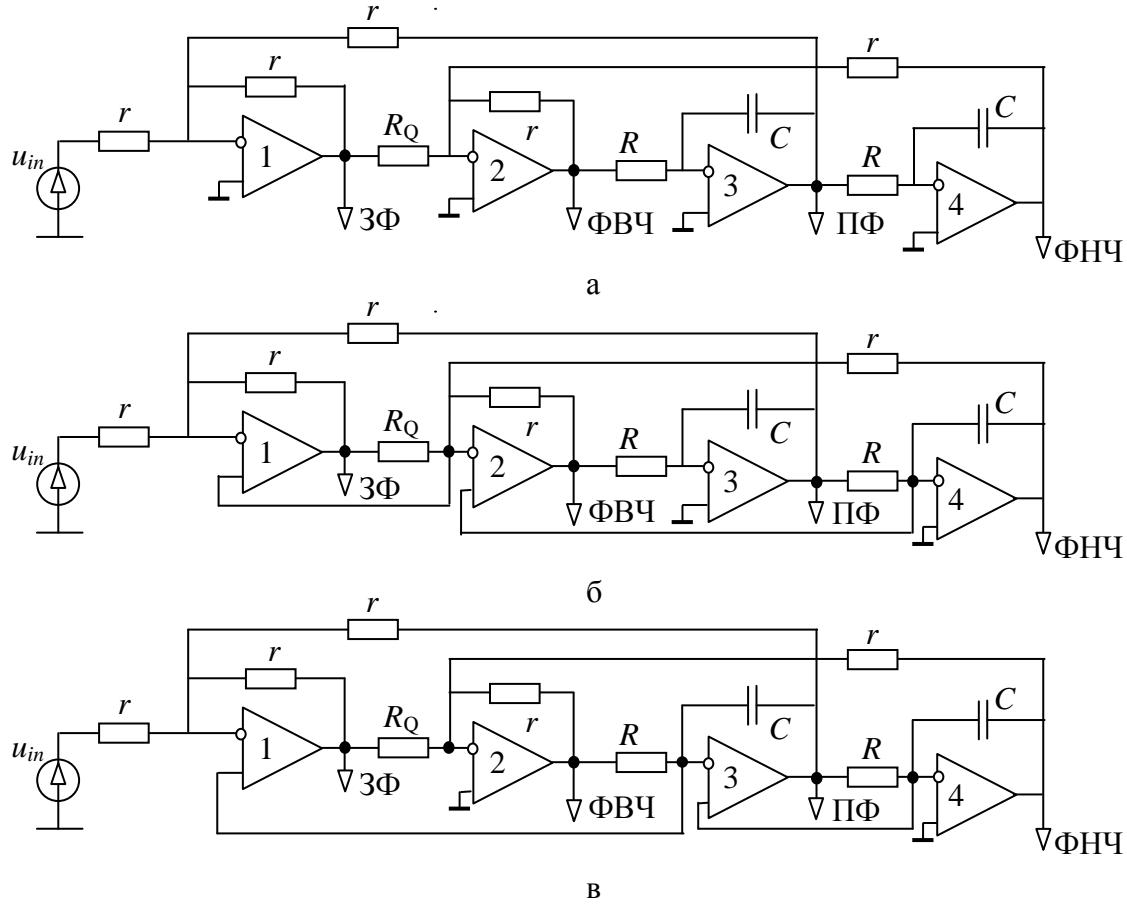


Рис. 3.2.3. Переключение нуллаторов: исходная схема фильтра (а); эквивалентные схемы после переключения нуллаторов – ОУ-1 и ОУ-2 (б); ОУ-1 и ОУ-3 (в)

Наряду с эквивалентной схемой на рис. 3.2.3,б можно получить и другие схемы. Так, переключая в исходной схеме на рис. 3.2.3,а полюса нуллаторов ОУ-1 и ОУ-3 с общего зажима схемы на инвертирующие входы ОУ-3 и ОУ-4 соответственно, получим схему на рис. 3.2.3,в. Свойства полученной схемы необходимо исследовать на схеме замещения цепи, учитывая паразитные параметры ОУ. Для реализации выбирается схема, наиболее полно удовлетворяющая техническому заданию.

3.3. СТЯГИВАНИЕ И ПОДКЛЮЧЕНИЕ НУЛЛОРА

Выделение или стягивание нуллора является одной из операций рекурсивного раскрытия схемных определителей числителя и знаменателя искомого отклика при анализе цепей с нуллорными элементами [56]. Эта операция может быть использована и для получения эквивалентных схем, причем как путем стягивания нуллора, так и введения в схему дополнительного нуллора.

Операция стягивания нуллора с общим узлом у нуллатора и норатора. Операция применяется, если в схеме есть узел, к которому подключены только нораторы и нуллаторы (рис. 3.3.1,а). При стягивании нуллора с номером n все нуллаторы и нораторы переключаются с одного полюса стягиваемого нуллатора и норатора соответственно на его другой полюс (рис. 3.3.1,б и 3.3.1,в). Оставшееся последовательное соединение норатора и нуллатора с номером n удаляется, поскольку эквивалентно разрыву (рис. 3.3.1,г). Если их направление различно относительно общего полюса, то для обеспечения эквивалентности преобразования направление одного произвольного нуллорного элемента меняется на противоположное.

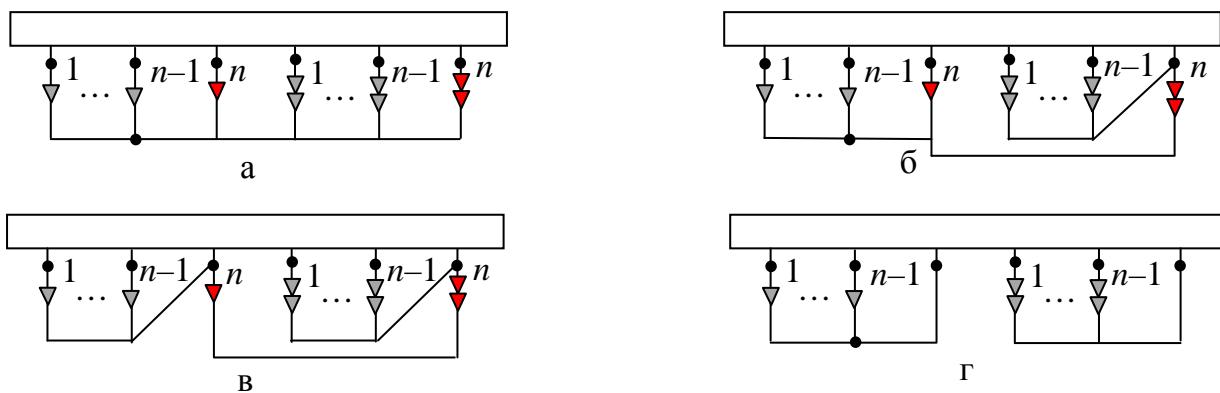


Рис. 3.3.1. Стягивание нуллора n : исходная схема (а); переключение нораторов (б) и нуллаторов (в); после удаления элементов стягиваемого нуллора (г)

Операция подключения дополнительного нуллора. Если в схеме имеются нораторное и нуллаторное деревья, то могут быть получены

нетривиальные эквивалентные схемы путем введения в нее последовательного соединения элементов дополнительного нуллора между произвольными узлами этих деревьев и последующего переключения полюсов нораторов и нуллаторов (рис. 3.3.2). Это преобразование позволяет получить схему с общим полюсом для нуллорных элементов (рис. 3.3.2,в).

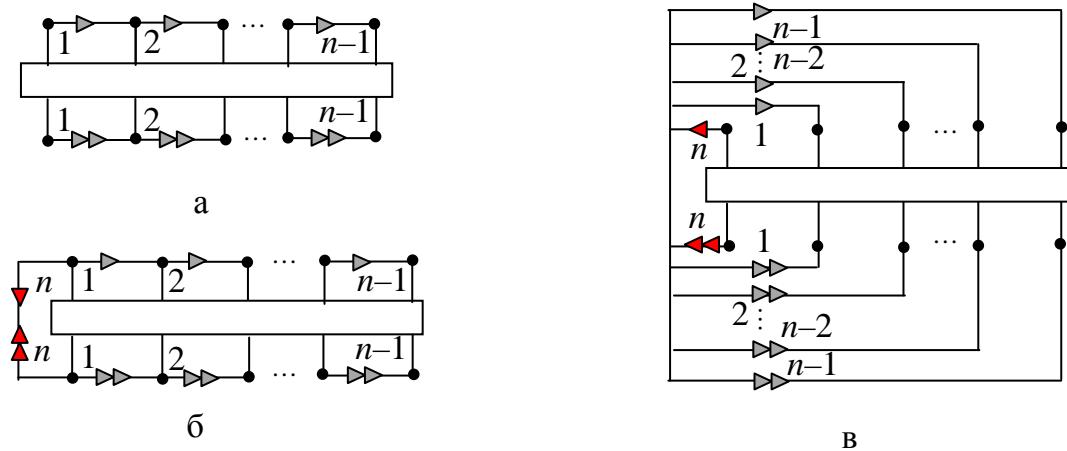


Рис. 3.3.2. Подключение нуллора: исходная схема с нуллаторным и нораторным деревом (а); схема с последовательным соединением норатора и нуллатора (б); после переключения полюсов нораторов и нуллаторов (в)

Пример получения эквивалентной схемы путем добавления нуллора. Исходная схема дана на рис. 3.3.3,а [112]. Требуется построить эквивалентную схему с общим полюсом для нуллорных элементов.

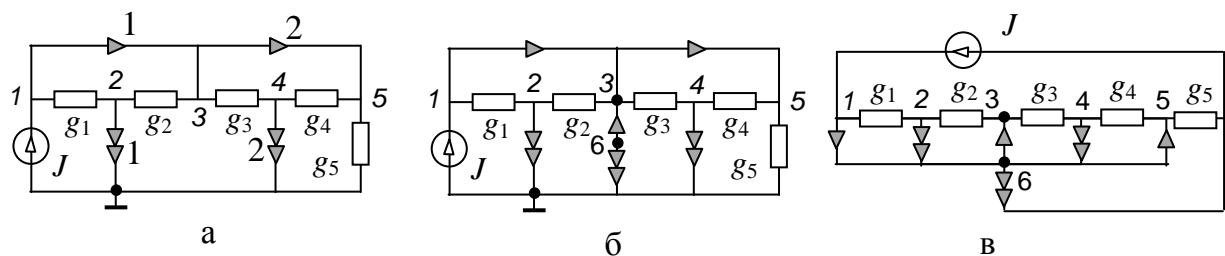


Рис. 3.3.3. Построение схемы с общим полюсом для нуллорных элементов: исходная схема (а); подключение дополнительного нуллора (б); переключение полюсов нораторов и нуллаторов к узлу 6 (в)

Вводим в схему между узлами нуллаторного и нораторного дерева 3 и 0 последовательное соединение дополнительного норатора и нуллатора

(рис. 3.3.3,б). Переключаем все нораторы и нуллаторы исходной схемы на полюс 6, общий для вновь введенных норатора и нуллатора. Полученная на рис. 3.3.3,в схема изоморфна схеме в [112, рис. 3,f].

Стягивание нуллора при двух опорных узлах. Для получения эквивалентных схем может использоваться более общая операция стягивания нуллора, когда стягиваемые нуллатор и норатор не имеют общего узла [56]. При этом операция выполняется в два этапа. На первом этапе все приемники и нуллаторы с опорного узла стягиваемого нуллатора переключаются на его другой полюс, а все генераторы и нораторы с опорного узла стягиваемого норатора – на его другой полюс. На втором этапе опорные узлы норатора и нуллатора объединяются.

Получение эквивалентной схемы для случая, при котором стягиваемые норатор и нуллатор соединены с проводимостями и одноименными нуллорными элементами, проиллюстрировано на рис. 3.3.4. При этом проводимости g_1 и g_2 преобразуются в ИТУН с одноименными параметрами.

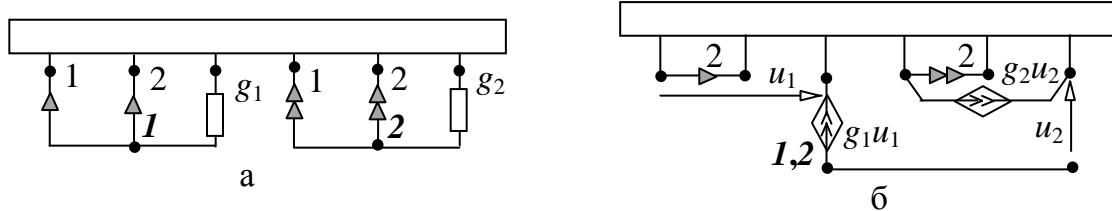


Рис. 3.3.4. Стягивание нуллора с двумя опорными полюсами **1** и **2**: исходная схема (а); эквивалентная схема без нуллора с номером 1 (б)

Схемы на рис. 3.3.4,а и 3.3.4,б эквивалентны, поскольку их определители, как можно убедиться путем выделения параметров проводимостей и УИ, совпадают.

3.4. ПЕРЕКЛЮЧЕНИЕ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЗЕРКАЛЬНЫХ И НУЛЛОРНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

При синтезе электронных схем используются модели идеальных активных элементов на основе аномальных зеркальных элементов –

зеркального элемента напряжения (ЗЭН) и зеркального элемента тока (ЗЭТ) [111]. Зеркальные аномальные элементы ЗЭН и ЗЭТ, в отличие от соответствующих им нуллорных элементов (нуллатора и норатора), являются трехполюсниками [120, 105].

Ток через незаземленные выводы ЗЭН равен 0, а напряжения на незаземленных выводах ЗЭН равны по величине и противоположны по знаку. Токи через незаземленные выводы ЗЭТ равны по величине, но противоположны по знаку (направлению), а напряжение на ЗЭТ может быть любым и не зависит от тока через него:

$$\begin{cases} I_1 = -I_2; \\ U_1 - U_2 = \text{любое}. \end{cases} \quad (3.4.1)$$

Широкое использование нуллорных и зеркальных элементов при проектировании электронных цепей обусловлено, прежде всего, тем, что пары аномальных элементов лежат в основе моделей распространенных на практике типов активных элементов, как простых – транзисторов различных типов, так и более сложных – операционных усилителей и токовых конверторов [77, 89, 100, 104, 105, 111, 122]. Это позволяет получать схемы замещения для широкого класса схем на основе аномальных элементов.

Для преобразования схем с зеркальными элементами используются смешанные нуллорно-зеркальные деревья. В [39] приведены триады ненаправленных ЗЭН-нуллаторных и ЗЭТ-нораторных деревьев на трех узлах. Для использования их в МСО необходимо перейти к направленным и нумерованным элементам. Направление зеркальных элементов определяется направлением и нумерацией нуллорных элементов в их схемах замещения в пп. 2.1. Нуллаторы и нораторы направлены в зеркально-нуллаторных (рис. 3.4.1,а) и зеркально-нораторных (рис. 3.4.1,б) схемах от общего узла с ЗЭН и ЗЭТ соответственно. Только при

таком направлении нуллатора и норатора определители схем в каждой триаде совпадают – схемы являются эквивалентными.

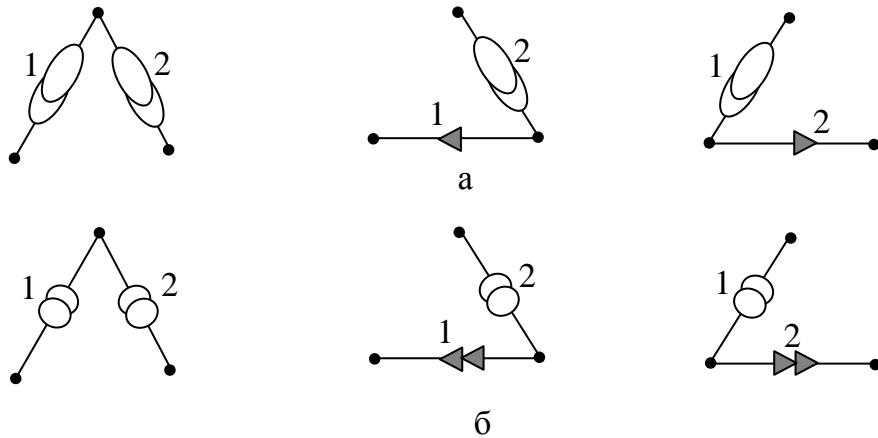


Рис. 3.4.1. Эквивалентные зеркально-нуллорные деревья с направленными и нумерованными элементами: из ЗЭН и нуллатора (а); из ЗЭТ и норатора (б)

Определители трех ЗЭН-нуллаторных схем на рис. 3.4.1,а и трех ЗЭТ-нораторных схем на рис. 3.4.1,б приводятся с помощью формулы (2.2.2) выделения ЗЭН и формулы (2.2.3) выделения ЗЭТ, а также тождеств с фиксированным норатором и нуллатором [29] к одному общему виду соответственно:

$$D_a = \begin{vmatrix} & & 2 \\ & \overline{\text{---}} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & 1 \\ \nabla_1 & & \cdot \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & & \cdot \\ & \overline{\text{---}} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & 2 \\ \nabla_1 & & \cdot \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & 1 \\ & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} \\ \nabla_2 & & 2 \end{vmatrix};$$

$$D_b = \begin{vmatrix} & & 2 \\ & \overline{\text{---}} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & 1 \\ \nabla_1 & & \cdot \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & & \cdot \\ & \overline{\text{---}} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & 2 \\ \nabla_1 & & \cdot \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & 1 \\ & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} \\ \nabla_2 & & 2 \end{vmatrix}. \quad (3.4.2)$$

Это означает, что схемы каждой триады на рис. 3.4.1,а и рис. 3.4.1,б эквивалентны. Такие преобразования можно назвать переключением-преобразованием ЗЭН и ЗЭТ, поскольку при переключении происходит их преобразование в нуллатор и норатор соответственно.

Для получения четырехузловых и n -узловых эквивалентных направленных и нумерованных, например, ЗЭН-нуллаторных деревьев

необходимо применять метод знаковых пометок [39]. При этом направление нуллатора в каждом нуллаторно-зеркальном дереве находится исходя из эквивалентности определителей схем с соответствующими деревьями. Определитель схемы с ЗЭН-деревом, содержащим n узлов, по аналогии с формулой (3.4.2) для определителя схемы с трехузловым деревом, включает n схемных миноров (СМ). Каждый СМ содержит схему с $(n-1)$ -м нуллатором, подключенным относительно общего узла ко всем узлам, кроме одного.

Нахождение ориентации нуллатора при замещении ЗЭН.

Используем дерево, показанное на рис. 3.4.2,а. Этому дереву эквивалентны два варианта дерева с нуллатором, отличающиеся его ориентацией (рис.3.4.2,б и рис.3.4.2,в). Для выяснения, какое из двух деревьев с нуллатором эквивалентно исходному дереву на рис. 3.4.2,а, состоящему только из ЗЭН, подсоединим эти деревья к зеркальным идеальным элементам М- и Т-типа и подключим к полной 8-узловой схеме.

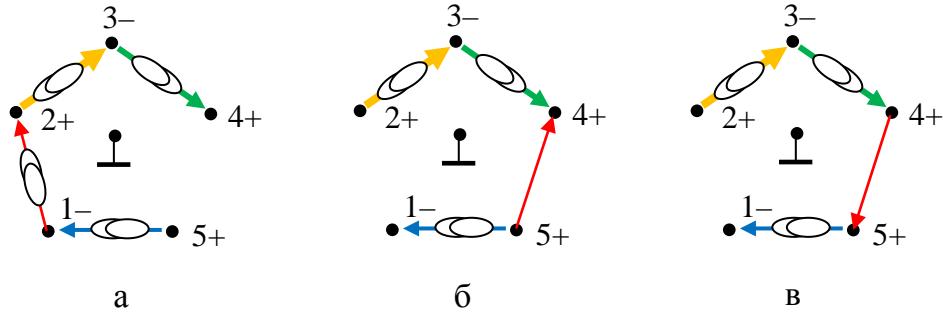


Рис. 3.4.2. Дерево, состоящее из ЗЭН (а); эквивалентные деревья: дерево, эквивалентное по модулю и знаку (б) и дерево, эквивалентное только по модулю (в)

Cir-файлы, соответствующие трем полученным схемам, содержат следующие описания активных элементов: 1) M 1 6 1 2 M 2 7 2 3 M 3 6 3 4 M 5 7 1 5; 2) T 1 6 5 4 M 2 7 2 3 M 3 6 3 4 M 5 7 5 1; 3) T 1 6 4 5 M 2 7 2 3 M 3 6 3 4 M 5 7 1 5.

Ниже приведены значения определителей указанных трех схем:

$$\text{det1} = 3.293168000000000e+06;$$

$$\text{det2} = 3.293168000000000e+06;$$

$$\text{det3} = -3.293168000000000e+06.$$

Таким образом, полностью эквивалентны схемы с деревьями, приведенными на рис. 3.4.2,а и рис. 3.4.2,б. Поэтому деревом, эквивалентным исходному дереву на рис. 3.4.2,а, следует считать дерево на рис. 3.4.2,б.

Рассмотрение «правильного» дерева на рис.3.4.2,б показывает, что стрелка нуллатора направлена в узел с пометкой «+», причем эта пометка такая же, как у узла 2 удаленного ЗЭН, к которому проходит цепочка из двух ЗЭН (четная цепочка). В то же время этот нуллатор выходит из узла 5 с пометкой «-», и эта пометка отличается от пометки другого узла 1, поскольку к нему проходит цепочка из одного ЗЭН (нечетная цепочка). Отсюда следует правило ориентации нуллоров.

Правило ориентации нуллатора, не смежного замещаемому ЗЭН.

Для получения эквивалентного дерева нуллатор, замещающий ЗЭН, необходимо направить в узел, к которому подключена цепочка из других нуллаторов и (или) четного числа ЗЭН, соединяющая замещающий нуллатор и замещаемый ЗЭН.

Это правило доказывается на рис. 3.4.3 для частного случая эквивалентности деревьев, представленных на рис. 3.4.2,а и рис. 3.4.2,б.

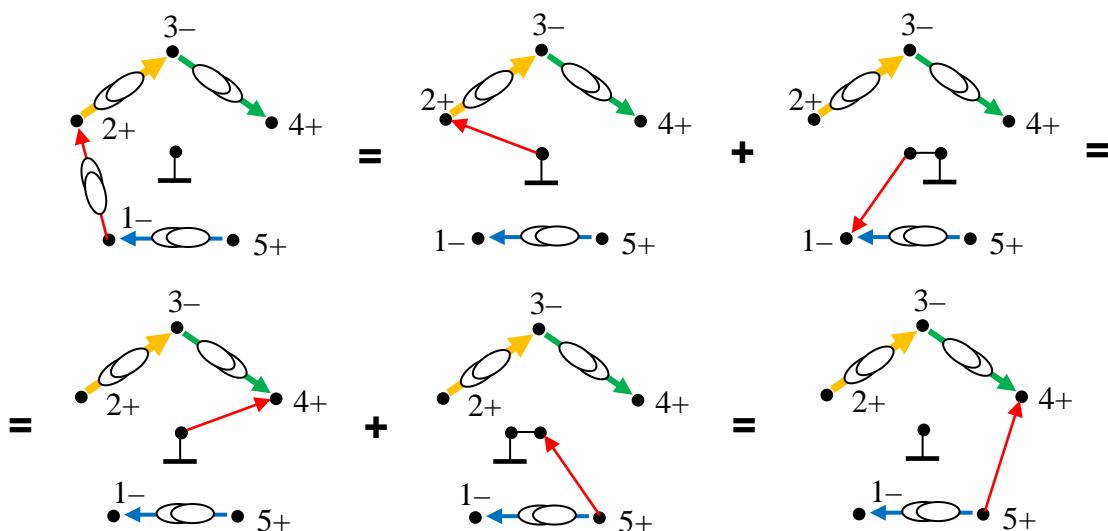


Рис. 3.4.3. Схемно-алгебраическое доказательство обобщенного правила переключения ЗЭН по четному и нечетному пути из ЗЭН
(замещения ЗЭН нуллатором)

Для того чтобы нуллатор мог заместить ЗЭН в некотором дереве, необходимо соединение этих нуллатора и ЗЭН через четное и нечетное число других ЗЭН. В исходном и конечном деревьях, изображенных на рис. 3.4.3, одна пара узлов (2 и 4) рассматриваемых нуллатора и ЗЭН соединяется через два ЗЭН, а вторая пара узлов (1 и 5) соединяется через один ЗЭН. Если в путях, соединяющих рассматриваемые нуллатор и ЗЭН, будет только четное или только нечетное число ЗЭН, то замещаемым элементом будет не новый нуллатор, а новый ЗЭН.

Эквивалентное замещение ЗЭН другим ЗЭН. Такое переключение возможно, когда узлы подключения этих ЗЭН в рассматриваемых деревьях имеют различные пометки (+1 и -1). Это означает, что пути, соединяющие эти узлы, содержат четное количество ЗЭН. Схемно-алгебраическое доказательство обобщенного правила переключения ЗЭН по нечетным путям из ЗЭН (замещения ЗЭН нуллатором) аналогично доказательству переключения ЗЭН по четному и нечетному путям из ЗЭН (рис. 3.4.3). Случай существования обоих четных путей для переключения ЗЭН невозможен, поскольку влечет равенство пометок узлов у переключаемого ЗЭН, что не допускается.

Рассмотрим дерево, показанное на рис. 3.4.4,а. На рис. 3.4.4,в показано дерево, полученное переключением занимающего среднее положение ЗЭН, по путям, каждый из которых содержит по одному (другому) ЗЭН.

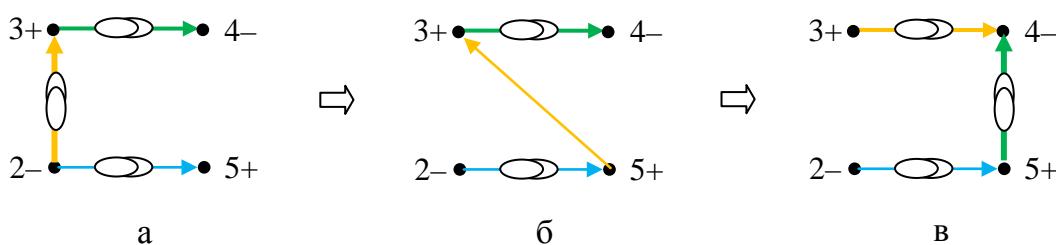


Рис. 3.4.4. Дерево, состоящее из ЗЭН (а); эквивалентные деревья:
дерево, полученное преобразованием ЗЭН в нуллатор (б),
и дерево, состоящее из ЗЭН с изменением нумерации (в)

Переключение ЗЭН через нижний ЗЭН приводит к образованию исходящего нуллатора, как показано на рис. 3.4.4,б. При этом сохраняется

эквивалентность исходному дереву по знаку определителя. Однако при переключении нуллатора, находящего в верхний ЗЭН на рис. 3.4.4,б, требуется взаимное изменение номера (цвета) у этого нуллатора и этого ЗЭН. При этом нуллатор превращается в ЗЭН, который занимает новое среднее положение (рис. 3.4.4,в).

На дереве рис. 3.4.4,б, занимающее промежуточное положение между деревьями на рис. 3.4.4,а и рис. 3.4.4,в, иллюстрируется переключение исходящего (заходящего) нуллатора через нижний (верхний) ЗЭН. Важно, что при переключении ЗЭН (замещении ЗЭН другим ЗЭН) выполнение промежуточного этапа не требуется, и можно прямо переходить от рис. 3.4.4,а к рис. 3.4.4,в, выполнив взаимную замену номеров – у переключаемого ЗЭН и у одного (любого) из оставшихся в дереве ЗЭН или нуллаторов.

Для подтверждения этого вывода, как и при замещении ЗЭН нуллатором, подсоединим эти деревья к зеркальным идеальным элементам М- и Т-типа и подключим к полной 8-узловой схеме. Cir-файлы, соответствующие трем полученным схемам, содержат следующие описания активных элементов: 1) M 1 6 3 4 M 2 7 3 2 M 3 6 5 2; 2) M 1 6 3 4 T 2 7 5 3 M 3 6 5 2; 3) M 1 6 4 5 M 2 7 3 4 M 3 6 5 2. Определители указанных трех схем одинаковы и равны $\det \text{an} = -1.712489650000000e+08$, что подтверждает схемно-алгебраический вывод на рис. 3.4.4.

Как и предполагалось, полностью эквивалентны схемы с деревьями, приведенными на рис. 3.4.4,а и рис. 3.4.4,в, что подтверждает обобщенное правило переключения ЗЭН с учетом четности цепочек из ЗЭН, соединяющих переключаемый ЗЭН на исходном дереве с замещающим ЗЭН на эквивалентном дереве.

Порождение эквивалентных по знаку деревьев, содержащих нуллаторы и ЗЭН. Эти деревья являются деревьями полного графа с четырьмя узлами, который показан на рис. 3.4.5,б. Для перечисления деревьев простых графов можно пронумеровать ребра по порядку, начиная с ребер, инцидентных вершинам с меньшим номером, как показано на рис. 3.4.5,а. Затем составить список ребер, например, 123456,

и по этому списку упорядоченно перечислить все возможные сочетания из числа ребер по $q-1$ (q – число узлов): 123, 124, 125, 126, 134, 135, 136, 145, 146, 156, 234, 235, 236, 245, 246, 256, 345, 346, 356, 456. Свойствам дерева удовлетворяют 16 сочетаний из приведенного выше списка, которые изображены на рис. 3.4.5,г.

Ребра каждого из 16 деревьев этого ненаправленного графа предварительно ориентировались на рис. 3.4.5,г по алгоритму [40] так, чтобы образовалось 16 эквивалентных по знаку ориентированных нуллаторных деревьев.

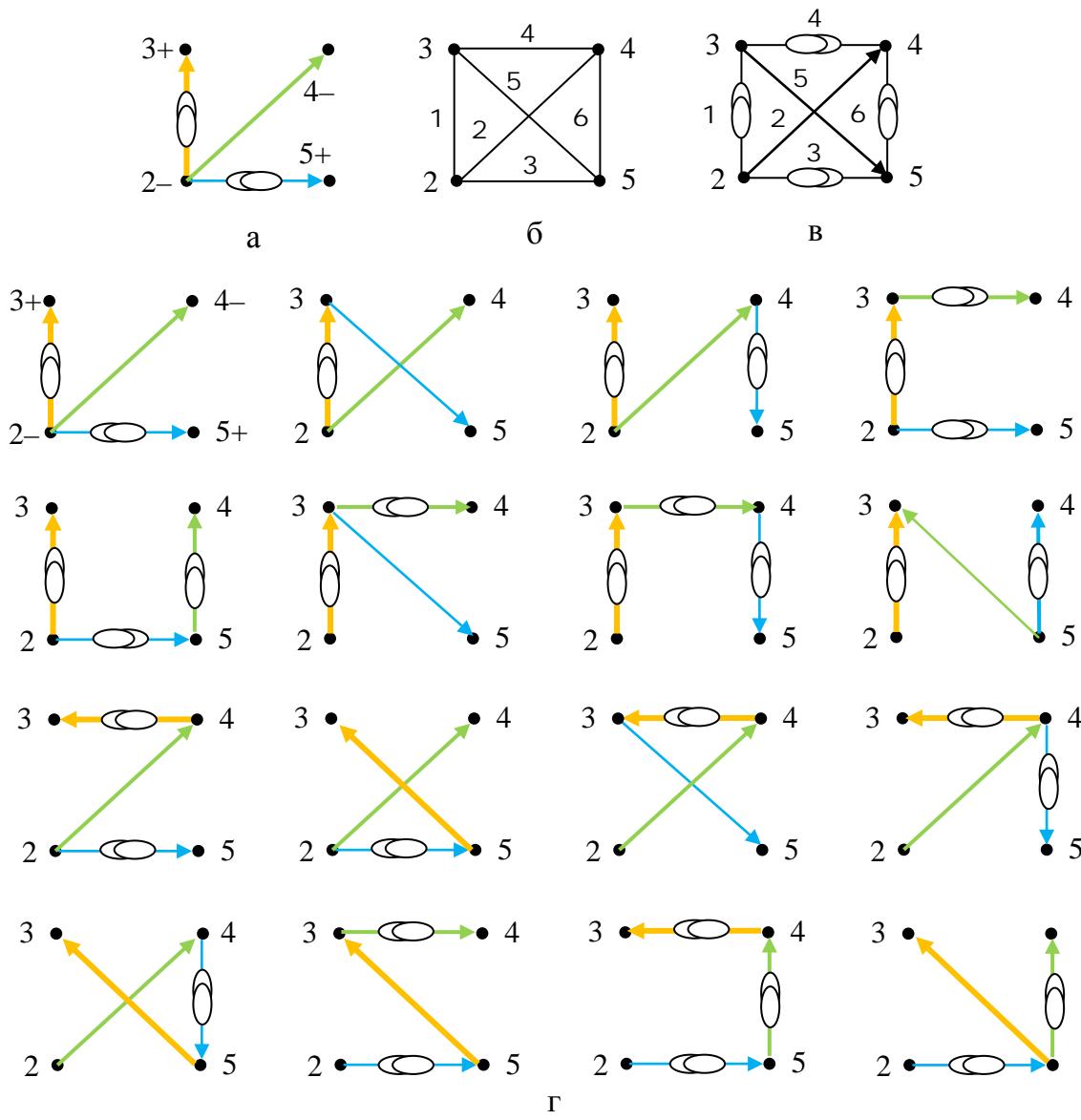


Рис. 3.4.5. Исходное дерево с нуллаторами и ЗЭН (а); полный граф с четырьмя вершинами (б); соответствующая исходному дереву полная схема с нуллаторами и ЗЭН (в); эквивалентные по знаку зеркально-нуллорные деревья (г)

Для получения гибридного дерева на первое по порядку (исходное) дерево вместо двух нуллаторов были помещены два ЗЭН. Стрелки нуллаторных дуг после замены нуллатора на ЗЭН сохранены, но не принимаются во внимание. Вершинам на первом дереве приписаны пометки, которые являются «ключом» к выбору типа ветвей во всех последующих деревьях.

Следует отметить, что каноническая (эквивалентная) ориентация дуг [40] на рис. 3.4.5,в не претерпела каких-либо изменений при заменах ЗЕН на нуллаторы, поскольку всегда получалось, что нуллатор, замещающий ЗЕН, оказывался сориентированным к удаленному ЗЕН. На основе 16 деревьев, показанных на рис. 3.4.5,г, могут быть получены 16 зеркально-нуллорных схем, эквивалентных как по модулю, так и по знаку определителя.

Пример получения эквивалентной схемы путем переключения– преобразования ЗЭН. В качестве примера рассмотрим схему универсального фильтра на основе трех ICCII+, предложенную в [122, fig. 2,b], которая является модификацией фильтра, описанного в [110]. Модель такого фильтра на основе зеркальных элементов представлена на рис. 3.4.6.

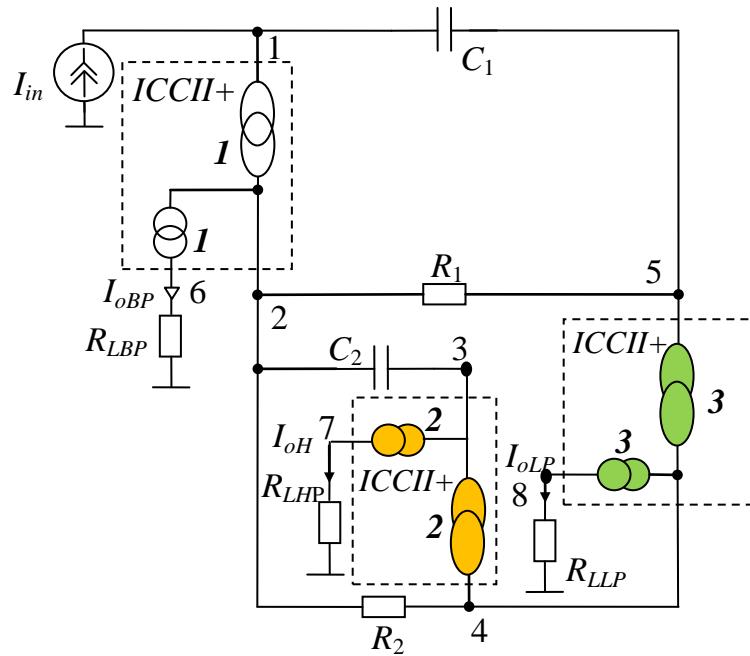


Рис. 3.4.6. Исходная схема универсального фильтра (курсивом пронумерованы ЗАЭ)

Из схемы на рис. 3.4.6. видно, что два ЗЭН образуют дерево на узлах 3, 4 и 5. Это дерево эквивалентно дереву, полученному переключением-преобразованием ЗЭН-2 с образованием нуллатора с тем же номером, как показано на рис. 3.4.7,а. Этот нуллатор и ЗЭТ с номером 2 образуют конвейер тока ССII+ (строка 1 в табл. 2.9.1).

Другое дерево, эквивалентное дереву из двух ЗЭН на рис. 3.11, можно получить переключением-преобразованием ЗЭН-3 с образованием нуллатора, как показано на рис. 3.4.7,б. Для спаривания аномальных элементов проведем взаимную замену номеров у ЗЭТ и поменяем направление у нуллатора на противоположное.

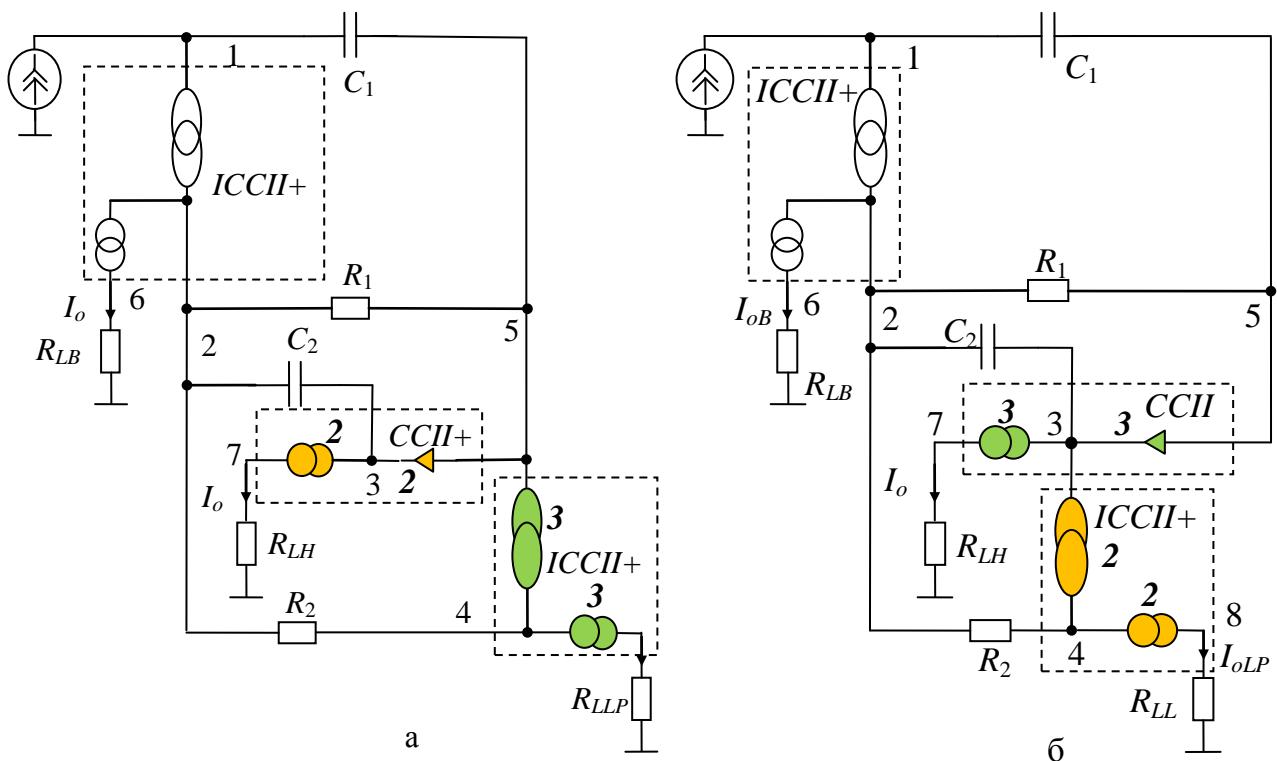


Рис. 3.4.7. Эквивалентные схемы, полученные переключением-преобразованием левого (а) и правого (б) ЗЭН на исходной схеме (рис. 3.4.6)

Итак, с помощью операций переключения-преобразования ЗЭН и спаривания аномальных элементов из порождающей схемы с тремя ICCII+ на рис. 3.4.6 получаются две эквивалентные схемы на основе двух ICCII+ и одного CCII+ (рис. 3.4.7,а и 3.4.7,б).

3.5. СТЯГИВАНИЕ И ДОБАВЛЕНИЕ ЗЕРКАЛЬНЫХ И НУЛЛОРНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

По аналогии с преобразованием стягивания и добавления нуллора в схемах с нуллорными деревьями в п.3.3 может использоваться преобразование стягивания или добавления нуллорной и зеркальной пары в схемах с зеркально-нуллорными деревьями. Это преобразование выполняется для схемы с узлом, к которому подключаются только нуллорные и зеркальные элементы. В этом случае может применяться преобразование-переключение элементов нуллорно-зеркальных деревьев на рис. 3.5.1. Такое преобразование приводит к образованию последовательного соединения ЗЭН и ЗЭТ, которое удаляется из схемы в соответствии со строкой 4 в табл. 2.2.1.

На рис. 3.5.1 показано такое преобразование для схемы, содержащей пары ЗЭН–ЗЭТ и норатор–нуллатор. При этом используется переключение-преобразование нуллатора и норатора в соответствующих зеркально-нуллорных деревьях (рис. 3.5.1,б), и удаление последовательного соединения ЗЭН и ЗЭТ (рис. 3.5.1,в). Схема на рис. 3.5.1,в получается из исходной схемы на рис. 3.5.1,а стягиванием нуллора.

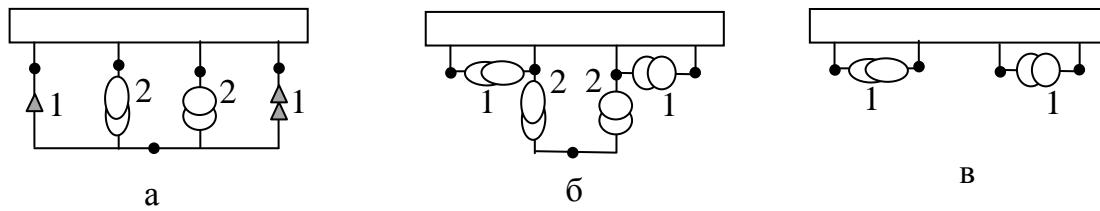


Рис. 3.5.1. Стягивание нуллора: исходная схема (а); переключение-преобразование нуллатора и норатора (б); после удаления пары ЗЭН–ЗЭТ (в)

Стягивание зеркальной пары. Стягивание пары ЗЭН–ЗЭТ может быть выполнено при условии, что ЗЭТ и ЗЭН образуют деревья и имеют общий полюс (рис. 3.5.2,а). Если к ЗЭН и ЗЭТ с номерами 1...(n-1) применить операции переключения-преобразования в соответствии с рис. 3.4.1, то образуется последовательное соединение стягиваемых ЗЭН и

ЗЭТ (рис. 3.5.2,б), которое удаляется из схемы в соответствии со строкой 4 в табл. 2.2.1 (рис. 3.5.2,в).

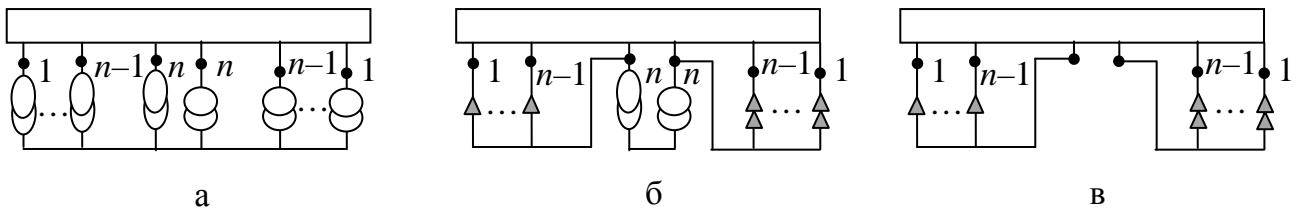


Рис. 3.5.2. Стягивание зеркальной пары: исходная схема (а); переключение-преобразование ЗЭН и ЗЭТ (б); удаление последовательного соединения ЗЕН–ЗЭТ (в)

Добавление зеркальной пары. Может быть выполнено и обратное преобразование схемы – добавление дополнительной зеркальной пары, которая преобразуется в нуллор. Для этого, как видно из рис. 3.5.1,в, в схеме изначально должна быть пара ЗЭН–ЗЭТ, к полюсам которых подключается последовательное соединение дополнительной пары ЗЭН–ЗЭТ (рис. 3.5.1,б). После этого выполняется операция переключения-преобразования ЗЭТ в норатор, а ЗЭН в нуллатор.

Рассмотрим пример преобразования цепи путем добавления зеркальной пары. В качестве исходной схемы взята схема универсального фильтра на рис. 3.4.3,а.

Включение в схему дополнительной нуллорной пары выполняется в три этапа. На первом этапе в исходной схеме на рис. 3.4.3,а между узлами 1 и 2 (выделены жирным курсивом) вводится последовательное соединение норатора и нуллатора с номером 4. На втором этапе выполняется операция преобразования-переключения ЗЭН и ЗЭТ с номерами 1. В результате в схеме появляются нуллатор и норатор с тем же номером 1.

На третьем этапе проведена взаимная замена номеров у ЗЭТ 2 и 4, чтобы смежные элементы имели одинаковые номера, поскольку они образуют соответствующие электрокомпоненты – токовые конвейеры или операционные усилители. При этом направление норатора изменено на противоположное для сохранения знака определителя (рис.3.5.3,б).

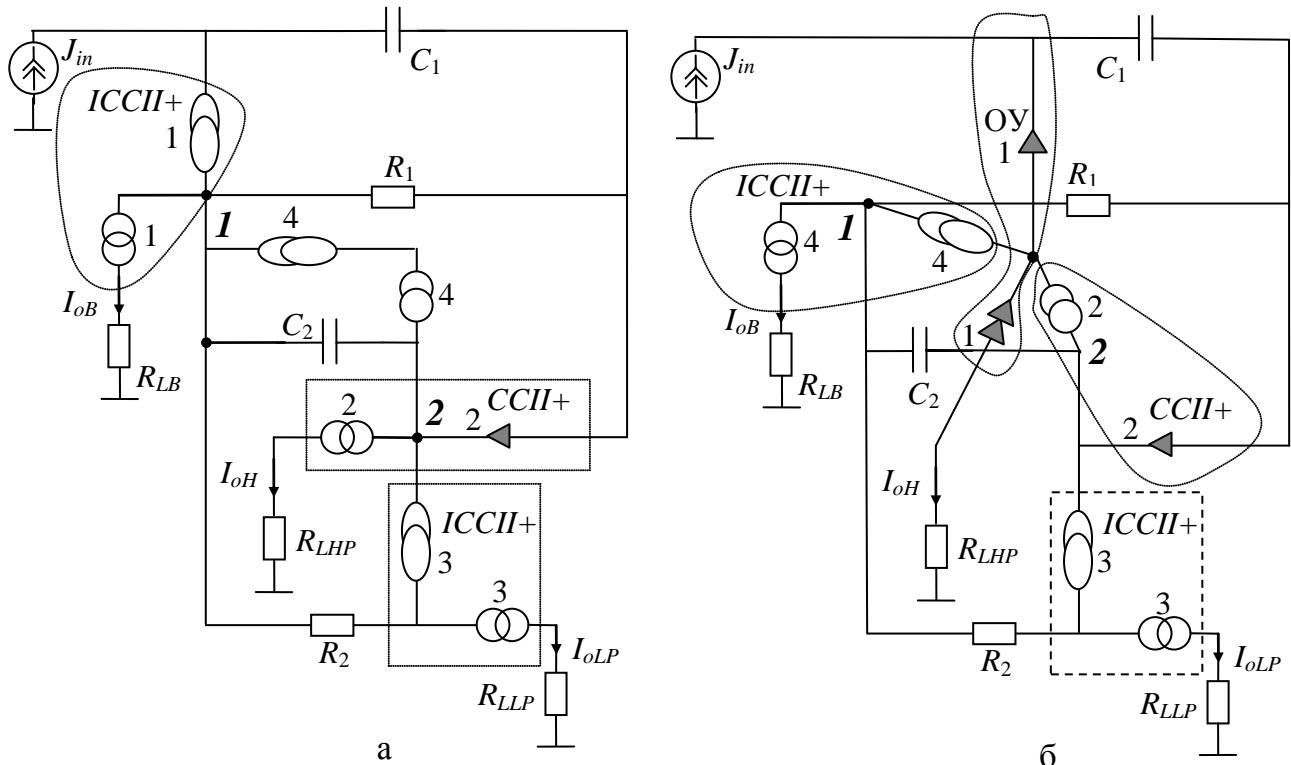


Рис. 3.5.3. Добавление в схему нуллорной пары: добавление к схеме на рис. 3.4.7, а зеркальной пары с номером 4 (а); переключение-преобразование ЗЭН-1 и ЗЭТ-2 (б)

3.6. ВЫВОДЫ

Получение эквивалентных электрических цепей на основе нуллаторных и нораторных деревьев сводится к переключению соответствующих нуллорных элементов. Синтез схем на основе зеркально-нуллорных деревьев – это преобразование-переключение зеркальных и нуллорных элементов. Эквивалентные схемы, отличные от исходной схемы, можно получить также путем добавления нуллорной или зеркальной пары элементов.

4. РАЗЛОЖЕНИЕ МНОГОКРАТНЫХ СУММАРНЫХ И РАЗНОСТНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДОПОЛНЕНИЙ МЕТОДОМ СХЕМНЫХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Рассмотрено отображение многократных суммарных и разностных алгебраических дополнений (МСАД) электронной схемой с нуллорными и зеркальными аномальными элементами. Предложено раскрывать МСАД топологически (без использования нумерации строк и столбцов матрицы) на основе выделения нуллоров и зеркальных идеальных элементов.

4.1. О ПРОТИВОРЕЧИИ ТЕОРИИ МАТРИЧНЫХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

В настоящее время теории матричных и схемных определителей развиваются параллельно, причем классическая матричная алгебра обогащается топологическими понятиями и алгоритмами [11, 58, 61, 62, 64, 85, 94, 95]. Этому способствует довольно прозрачная аналогия между электрической схемой и ее матрицей, между решением системы линейных алгебраических уравнений и анализом схемы [11, 58, 85], а также разработка эффективного метода символьного анализа электрических цепей – метода схемных определителей [37, 54–57, 59, 60, 63, 64, 83, 84, 87].

Начала теории определителей, истоки которой восходят к работе Готфрида Лейбница 1693 года [98], содержат некоторое методическое противоречие. С одной стороны, определитель матрицы в виде суммы отдельных слагаемых можно найти без использования нумерации строк и столбцов, применив для этого символьные обозначения.

С другой стороны, желая получить компактное (вложенное) выражение определителя с помощью разложения Лапласа по строке (столбцу) или нескольким строкам (столбцам), приходится использовать понятие алгебраического дополнения, которое отличается от

соответствующего минора матрицы знаком, учитывающим порядковые номера строк и столбцов [5].

Для матриц высокой размерности индуктивное построение определителя оказывается предпочтительным или единственно возможным. Разложение определителя матрицы A по некоторому элементу a_{ij} (выделение элемента a_{ij}) имеет вид

$$\Delta = (-1)^{i+j} a_{ij}\Delta_{ij} + \Delta(a_{ij}=0), \quad (4.1.1)$$

где Δ_{ij} – минор, то есть определитель матрицы, образованной из матрицы A путем вычеркивания строки i и столбца j ; $\Delta(a_{ij}=0)$ – определитель матрицы, полученной из матрицы A в результате удаления элемента a_{ij} . Формула (4.1.1) применяется к определителям Δ_{ij} и $\Delta(a_{ij}=0)$ рекурсивно до получения матриц первого порядка и вырожденных матриц.

Теорема Лапласа в ее общем или специальных случаях довольно широко используется при аналитическом решении систем линейных алгебраических уравнений [107] и формировании символьных схемных функций электрических цепей [101, 119]. При этом нахождение знака требует существенной доли в затратах времени на разложение определителей. Это связано не только и не столько с наличием дополнительных операций сложения, а с необходимостью повторной нумерации строк и столбцов в результате выделения элементов матриц.

Алгебраическое правило нахождения знака (формула (4.1.1)), возможно, обладает наглядностью при раскрытии определителей вручную. Однако в случае матриц высокой размерности, которые имеют, как правило, высокую разреженность, приходится использовать их списочное кодирование, задавая списками-множествами только ненулевые элементы. Соответствующие методики опираются на графовые (топологические) представления и широко применяются в настоящее время при численном решении систем уравнений [5]. Таким образом,

современные технологии решения систем уравнений фактически отрицают понятие матрицы как таблицы элементов.

При разложении определителя матрицы в символьном (буквенном) виде также желательно ее представление в виде топологического объекта, в котором номера строк и столбцов служат лишь для указания расположения элементов и не должны непосредственно использоваться для вычисления знаков.

4.2. ТОПОЛОГИЧЕСКОЕ РАСКРЫТИЕ МАТРИЧНОГО ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ

Пусть матрица задается списком P ее ненулевых элементов. В каждом элементе списка p_k , кроме буквенного обозначения или численного значения соответствующего элемента матрицы, содержатся его координаты – номера строки и столбца. Введем функцию совпадения $sim(i,j)$, равную 1 при $i=j$ и -1 при $i \neq j$. Тогда определитель матрицы A раскрывается рекурсивно [61]

$$\Delta = sim(i,j) a_{ij} \Delta_{ij}(i \rightarrow j) + \Delta(a_{ij}=0), \quad (4.2.1)$$

где $\Delta_{ij}(i \rightarrow j)$ – определитель матрицы, которая задана списком, образованным из списка матрицы A в результате следующих преобразований: 1) вычеркивания элементов с номерами строки i и (или) столбца j ; 2) замены номера i в списке элементов матрицы на номер j . Если $i=j$, то второе преобразование не выполняется.

Выражения определителей, полученные на основе формул (4.1.1) и (4.2.1), могут различаться только знаками при некоторых подвыражениях и полностью совпадают при раскрытии скобок. Ниже приведен пример разложения определителя матрицы третьего порядка по формуле (4.2.1).

Пример 1.

$$\begin{aligned}
\det \begin{bmatrix} a_{11} & b_{12} & c_{13} \\ d_{21} & e_{22} & f_{23} \\ g_{31} & h_{32} & i_{33} \end{bmatrix} &= sim(1,1) a \Delta_{11}(1 \rightarrow 1) + sim(1,2) b \Delta_{12}(1 \rightarrow 2) + \\
&\quad + sim(1,3) c \Delta_{13}(1 \rightarrow 3) = \\
&= a \det \begin{bmatrix} e_{22} f_{23} \\ h_{32} i_{33} \end{bmatrix} - b \det \begin{bmatrix} d_{22} f_{23} \\ g_{32} i_{33} \end{bmatrix} - c \det \begin{bmatrix} d_{23} e_{22} \\ g_{33} h_{32} \end{bmatrix} = \\
&= a (sim(2,2) e |i_{33}| + sim(2,3) f |h_{33}|) - \\
&\quad - b (sim(2,2) d |i_{33}| + sim(2,3) f |g_{33}|) - \\
&\quad - c (sim(2,3) d |h_{33}| + sim(2,2) e |g_{33}|) = \\
&= a (e i - f h) - b (d i - f g) - c (-d h + e g).
\end{aligned}$$

Как видно, в формуле (4.2.1) операция сложения номеров строки и столбца заменена операцией сравнения, которая применима не только к цифровым, но и к буквенным, знаковым и другим объектам. Список элементов в этом примере только для наглядности помещен в матрицу. Затраты на изменение пометок объектов несопоставимо меньше тех, которые требуются при порядковой нумерации строк и столбцов после выделения очередного элемента матрицы по формуле (4.1.1).

Для доказательства формулы (4.2.1) используется то обстоятельство, что матрица порядка n может быть отображена электрической схемой с n^2 источниками тока, управляемыми напряжением, которая имеет $n+1$ узлов [58]. При разложении определителя такой схемы используем метод стягивания и удаления ветвей [56]. Соответствующая формула применительно к рассматриваемому случаю будет иметь вид

$$\Delta = sim(i,j) s_{i0j0} \Delta_s + \Delta(s_{i0j0}=0), \quad (4.2.2)$$

где s_{i0j0} – параметр источника тока, направленного от узла i к узлу 0, управляемого напряжением, ориентированным от узла j к узлу 0; Δ_s – определитель схемы, полученной из первоначальной схемы в результате следующих преобразований: 1) стягивание генератора (приемника) выделяемого управляемого источника таким образом, чтобы генераторы тока (приемники напряжения), которые присоединены к узлу i (узлу j), переключились на узел 0; 2) объединение узлов i и j ; $\Delta(s_{i0j0}=0)$ – определитель схемы, образованной из первоначальной схемы путем нейтрализации выделяемого управляемого источника.

Преобразование 1 в формуле (4.2.2) соответствует вычеркиванию строки i и столбца j в матрице А, а преобразование 2 изоморфно замене номеров $i \rightarrow j$, что доказывает формулу (4.2.1) и подтверждает эквивалентность вложенных выражений определителей матрицы и отображающей ее схемы, получаемых с помощью формул (4.2.1) и (4.2.2).

4.3. МНОГОКРАТНЫЕ СУММАРНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДОПОЛНЕНИЯ И ИХ ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

Многократные суммарные алгебраические дополнения (МСАД) [9, 41, 47, 48, 50, 51] или Higher Order Summative Cofactors (HOSC) [66, 71, 94–96] представляются в виде последовательности пар номеров строк и столбцов, задающей операции над некоторой матрицей. Одиночные элементы пары a или c при символе Δ (Δ_{ac}) указывают на удаление (вычеркивание) соответствующей строки или столбца, что эквивалентно добавлению этой строки или столбца к отсутствующим в матрице базисным строке или столбцу, имеющим номер 0, то есть $\Delta_{ac}=\Delta_{(a+0)(c+0)}$.

Элемент пары, записанный в виде суммы номеров двух строк или двух столбцов $\Delta_{(a+b)(c+d)}$, означает прибавление строки a к строке b и прибавление столбца c к столбцу d .

МСАД используются при символьном и символьно-численном анализе электрических цепей узловым методом и его модификациями, предлагаются более совершенные алгоритмы алгебраического разложения [94, 95]. Прежде всего, существенно, что, опираясь на матричное выделение параметров [9, 66, 96], была преодолена избыточность матрицы узловых проводимостей, в которой каждый незаземленный элемент схемы отображается в четырех клетках.

В работах [41, 94, 95] выполнено обобщение матричных формул выделения для сопротивлений и нерегулярных для узлового базиса управляемых источников. При этом проявилась аналогия со схемно-алгебраическим методом схемных определителей [28, 31, 42, 37, 55, 59], позволяющим находить МСАД непосредственно по схеме, минуя ее представление матрицей [58, 61, 62, 64].

Метод схемных определителей более нагляден, что делает его менее утомительным и упрощает проверку решения, достаточно просто реализуется в компьютерной программе. При этом суммы индексов строк или столбцов соответствуют подсоединению пар нораторов или нуллаторов, а разности индексов строк или столбцов отображаются подсоединением аномальных зеркальных элементов – зеркального элемента тока или зеркального элемента напряжения.

Ниже перечисляются важнейшие тождества МСАД, используемые в матричном методе выделения параметров, приводятся схемно-алгебраические выражения этих тождеств и выполняются их доказательство на основе выделения нуллоров или аномальных зеркальных элементов.

При взаимной перестановке двух строк (столбцов) изменяется знак определителя.

$$\Delta_{ab,cd} = -\Delta_{cb,ad}; \quad (4.3.1)$$

$$\Delta_{ab,cd} = -\Delta_{cd,ab}. \quad (4.3.2)$$

Схемно-алгебраическое выражение тождества (4.3.1) представлено на рис. 4.3.1.

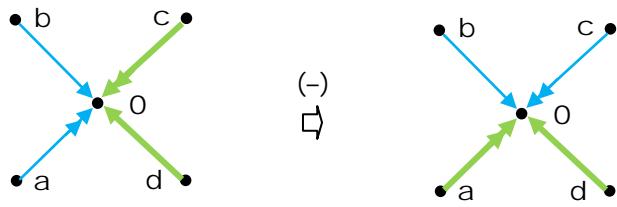


Рис. 4.3.1. Изменение знака схемного определителя при изменении нумерации нораторов

Определители правой и левой схем на рис. 4.3.1 различаются по знаку, поскольку взаимно изменяется нумерация (цвет) у двух нуллаторов (одно – нечетное – изменение нумерации). В силу дуальности из этого вытекает справедливость тождества (4.3.2). Таким образом, при взаимном изменении номеров у двух нораторов или у двух нуллаторов изменяется знак схемного определителя.

При изменении порядка сложения двух строк (столбцов) меняется знак определителя.

$$\Delta_{(a+b)(c+d)} = -\Delta_{(b+a)(c+d)}. \quad (4.3.3)$$

$$\Delta_{(a+b)(c+d)} = -\Delta_{(a+b)(d+c)}. \quad (4.3.4)$$

Схемно-алгебраическое выражение тождества (4.3.3) представлено на рис. 4.3.2.



Рис. 4.3.2. Изменение знака схемного определителя при изменении направления норатора

Определители правой и левой схем на рис. 4.3.5 различаются по знаку, поскольку изменяется направление у одного нуллатора (одно – нечетное – изменение ориентации). В силу дуальности из этого вытекает справедливость тождества (4.3.4). Таким образом, при изменении

ориентации одного норатора или нуллатора изменяется знак схемного определителя.

При изменении порядка вычитания двух строк (столбцов) не изменяется знак определителя.

$$\Delta_{(a-b)(c+d)} = \Delta_{(b-a)(c+d)}; \quad (4.3.5)$$

$$\Delta_{(a-b)(c-d)} = \Delta_{(b-a)(d-c)}. \quad (4.3.6)$$

Схемно-алгебраическое выражение тождества (4.3.5) представлено на рис. 4.3.3.

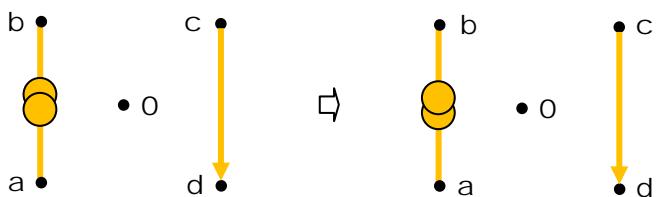


Рис. 4.3.3. Иллюстрация операции вычитания двух строк матрицы

ЗЭТ, как и ЗЭН, являются ненаправленными схемными элементами, поэтому изменение положения их полюсов не изменяет знака определителя схемы, а тождества (4.3.5) и (4.3.6) верны.

При добавлении третьей строки (столбца) к любой другой из двух сложенных строк (столбцов) знак определителя не меняется.

$$\Delta_{(a+b)(c+d),(e+a)(f+g)} = \Delta_{(a+b)(c+d),(e+b)(f+g)}. \quad (4.3.7)$$

$$\Delta_{(a+b)(c+d),(e+g)(f+c)} = \Delta_{(a+b)(c+d),(e+g)(f+d)}. \quad (4.3.8)$$

Схемно-алгебраическое выражение тождества (4.3.7) представлено на рис. 4.3.4.

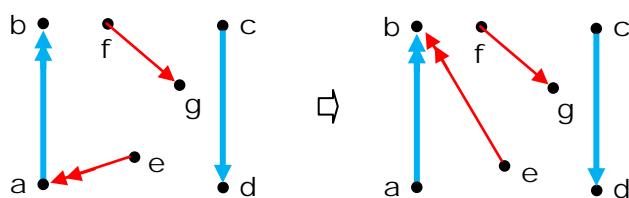


Рис. 4.3.4. Иллюстрация операции сложения двух строк матрицы

Определители схем на рис. 4.3.4 равны, поскольку эти схемы связаны эквивалентным преобразованием двух нораторных деревьев, построенных на узлах a , b и e . В силу дуальности из справедливости тождества (4.3.7) вытекает справедливость тождества (4.3.8). Оба тождества можно доказать также с помощью правила выделения нуллора. После стягивания норатора ab нораторы ea и eb занимают одинаковое положение.

Добавление строки (столбца) к самой (самому) к себе обнуляет МСАД.

$$\Delta_{(a+a)(c+d)} = 0. \quad (4.3.9)$$

$$\Delta_{(a+b)(c+c)} = 0. \quad (4.3.10)$$

Схемно-алгебраическое выражение тождества (4.3.9) представлено на рис. 4.3.5.

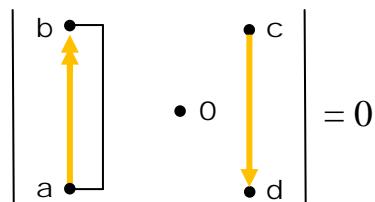


Рис. 4.3.5. Образование контура из норатора

Замыкание норатора или нуллатора приводит к вырождению схемы (равенству нулю ее определителя). Вырожденными являются все схемы, имеющие хотя бы одну нораторную или нуллаторную петлю.

Вычитание строки (столбца) из самой (самого) себя приводит к удвоению определителя с противоположным знаком.

$$\Delta_{(a-a)(c+d)} = 2\Delta_{a(c+d)}. \quad (4.3.11)$$

$$\Delta_{(a+b)(c-c)} = 2\Delta_{(a+b)c}. \quad (4.3.12)$$

Схемно-алгебраическое выражение тождества (4.3.11) представлено на рис. 4.3.3.

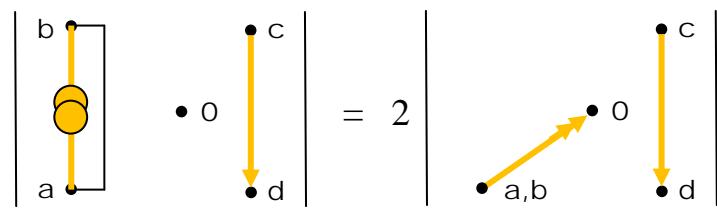


Рис. 4.3.6. Определитель схемы с контуром из ЗЭТ

В результате замещения ЗЭТ нуллорной схемой получается схема, изображенная на рис. 4.3.7 сверху.

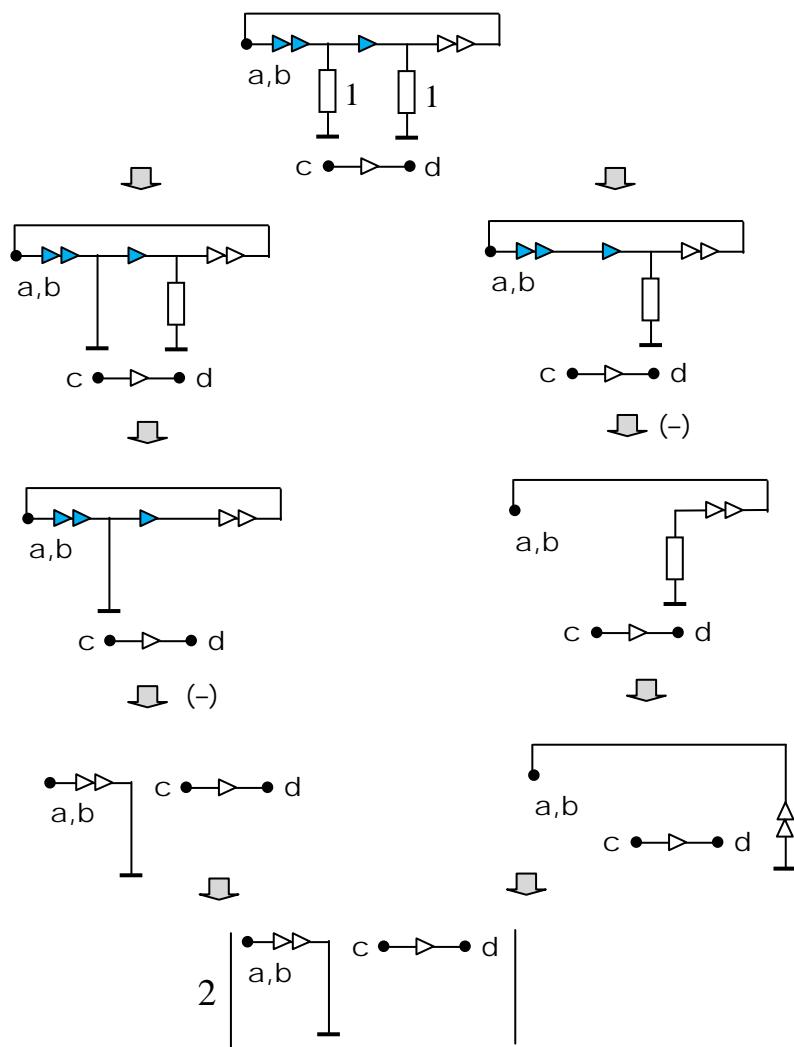


Рис. 4.3.7. Доказательство удвоения значения определителя схемы с контуром из ЗЭТ

Ниже показано разложение определителя этой схемы до схемного определителя, стоящего в правой части доказываемого тождества (4.3.11).

Таким образом, определитель схемы с ЗЭТ-петлей отличен по знаку от удвоенного определителя схемы, где ЗЭТ заменен направленным к базисному узлу норатором.

Рис. 4.3.7 иллюстрирует «настройку» нуллорной модели ЗЭН под алгебраическое тождество 4.3.11. Для этого изменено направление у правого норатора ЗЭТ. Аналогично, следует изменить направление у правого нуллатора в нуллорной модели ЗЭН. Именно такие нуллорные модели следует использовать для раскрытия матричных определителей с помощью метода схемных определителей.

МСАД, полученное последовательным попарным вычеркиванием строк и столбцов матрицы, равно единице.

$$\Delta_{11,22,\dots,nn} = 1. \quad (4.3.13)$$

Схемно-алгебраическое выражение тождества (4.3.13) представлено на рис. 4.3.8 и сводится к определителю схемы в виде единственного узла.

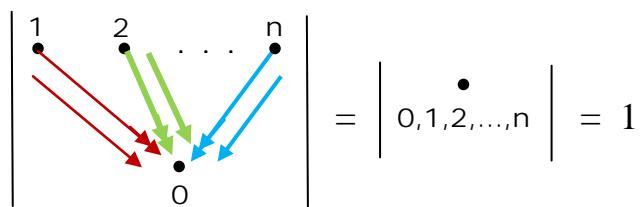


Рис. 4.3.8. Определитель схемы из параллельных соединений норатора и нуллатора

Далее схемно-алгебраическая методика доказательств алгебраических тождеств будет использована в решении различных примерах вычисления МСАД на основе их схемных отображений и метода схемных определителей.

4.4. НАХОЖДЕНИЕ МСАД НА ОСНОВЕ СТЯГИВАНИЯ НУЛЛОРОВ

Итак, МСАД $\Delta_{(a+b)(c+d)}$ некоторой электрической схемы равно определителю схемы, полученной из исходной схемы в результате присоединения к ней норатора, направленного из узла a в узел b , и нуллатора, направленного из узла c в узел d .

Исходная схема может быть пустой (не содержать элементов). В этом случае МСАД является само по себе схемой, имеющей определитель, равный 1, -1 или 0.

Пример 2. Проверить выражение [94]:

$$\Delta_{(5+0)(2+3),(6+0)(3+1),(4+0)(4+0),(1+0)(1+0),(5+2)(5+2),(6+3)(6+3)} = 1. \quad (4.4.1)$$

МСАД в (4.4.1) можно представить схемой, изображенной на рис. 4.4.1, а. После выделения нуллора, соответствующего паре $(5+0)(2+3)$, относительно узлов 2 и 5 получается схема на рис. 4.4.1, в. Промежуточная схема на рис. 4.4.1, б иллюстрирует первый этап выделения нуллора – стягивание норатора и нуллатора (перед последующим объединением узлов 2 и 5).

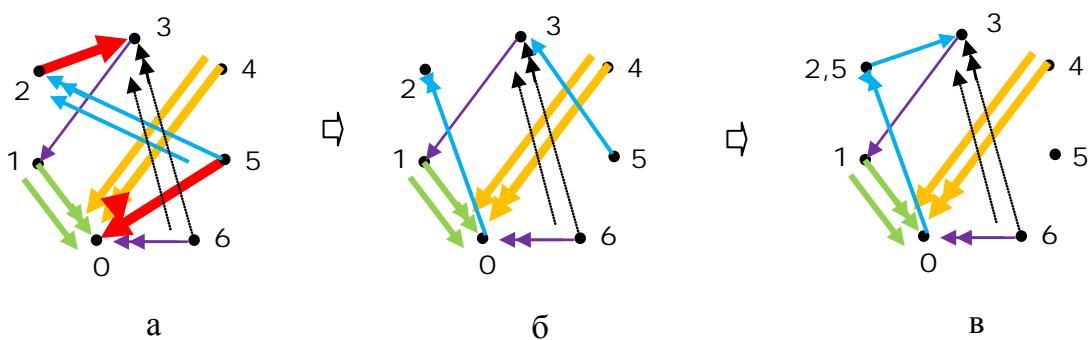


Рис. 4.4.1. Схемная иллюстрация выражения (4.4.1): исходная схема (а); схема после стягивания норатора $(5+0)$ и нуллатора $(2+3)$ (б); после объединения узлов 2 и 5

Таким образом, можно выделить все нуллоры в том же порядке, в каком следуют пары МСАД. Однако, что желательно, существенно

уменьшить объем выкладок. Для этого следует в первую очередь выделять нуллоры, норатор и нуллатор которых образуют параллельное соединение. Таких пар на схеме рис. 4.4.1,а четыре. В каждой из этих пар норатор и нуллатор направлены одинаково по отношению к инцидентным узлам, что эквивалентно идеальному проводнику. После выделения последнего, шестого нуллора получается схема-узел, определитель которой равен 1 (рис. 4.4.2), то есть выражение (4.4.1) справедливо.

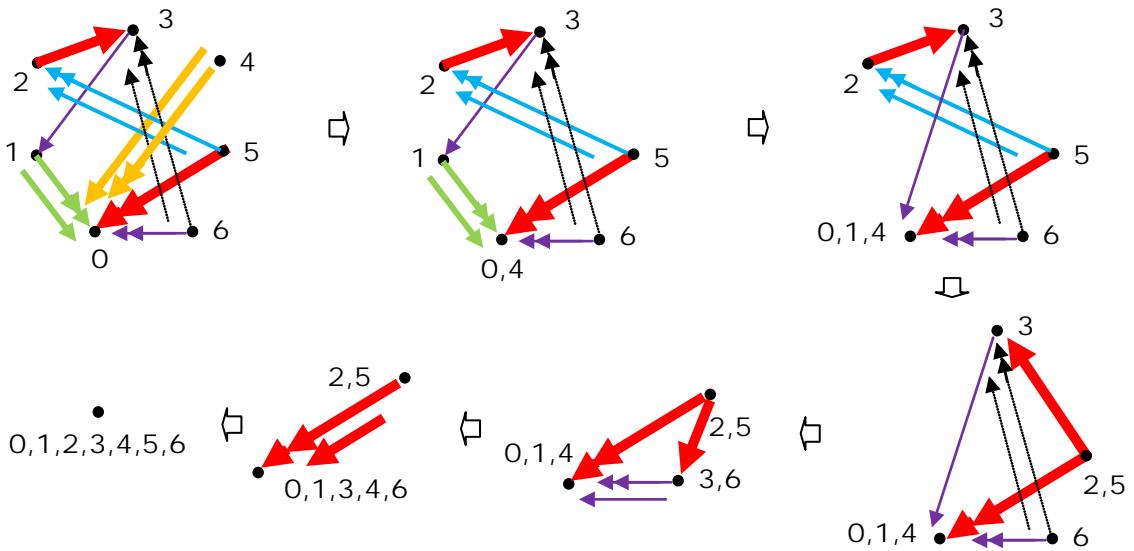


Рис. 4.4.2. Выделение нуллоров

Предложенными схемными преобразованиями можно сопоставить алгебраические манипуляции с индексами. Ниже приводится вариант такого алгебраического решения без использования порядковой нумерации строк и столбцов [61].

$$\begin{aligned}
 & \Delta_{(5+0)(2+3),(6+0)(3+1),(4+0)(4+0),(1+0)(1+0),(5+2)(5+2),(6+3)(6+3)} = \\
 & = -\Delta_{(6+0)(3+1),(4+0)(4+0),(1+0)(1+0),(0+2)(2+3),(6+3)(6+3)} = \\
 & = \Delta_{(6+0)(3+1),(4+0)(4+0),(1+0)(1+0),(2+0)(2+3),(6+3)(6+3)} = \\
 & = -\Delta_{(4+0)(4+0),(1+0)(1+0),(2+0)(2+1),(0+3)(3+1)} = \\
 & = \Delta_{(4+0)(4+0),(1+0)(1+0),(2+0)(2+1),(3+0)(3+1)} = \\
 & = \Delta_{(1+0)(1+0),(2+0)(2+1),(3+0)(3+1)} = \\
 & = \Delta_{(2+0)(2+0),(3+0)(3+0)} = \\
 & = \Delta_{(3+0)(3+0)} = 1.
 \end{aligned}$$

Как видно, операции с индексами утомительны, алгебраическое решение не является наглядным, и его проверка весьма затруднительна.

4.5. НАХОЖДЕНИЕ МСАД НА ОСНОВЕ СТЯГИВАНИЯ АНОМАЛЬНЫХ ЗЕРКАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Нораторы и нуллаторы не позволяют отобразить МСАД с разностями номеров строк или столбцов непосредственно. Для этого здесь предлагается использовать недавно предложенные зеркальные элементы тока и напряжения: зеркальный элемент тока (ЗЭТ) и зеркальный элемент напряжения (ЗЭН). Например, для раскрытия МСАД вида $\Delta_{(a-b)(c-d)}$, означающего вычитание строки a из строки b и вычитание столбца c из столбца d , между узлами a и b включается ЗЭТ, а между узлами c и d подсоединяется ЗЭН.

Пример 3. Проверить выражение [24]:

$$\Delta_{(4+0)(3+0),(2-1)(3-1),(3+2)(3+2),(4+1)(4+1)} = -1. \quad (4.5.1)$$

МСАД в (4.5.1) можно представить схемой, изображенной на рис.4.5.1,а. После выделения нуллоров, эквивалентных идеальным проводникам, которые соответствуют парам $(3+2)(3+2)$ и $(4+1)(4+1)$, получаются схемы, показанные на рис.4.5.1,б и рис. 4.5.1,в.

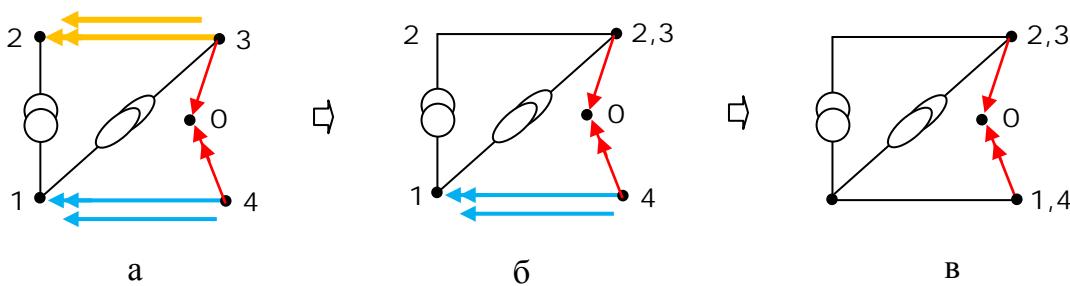


Рис. 4.5.1. Иллюстрация вычисления выражения (4.5.1): исходное выражение (а); выделение нуллоров $(3+2), (3+2)$ (б) и $(4+1), (4+1)$ (в)

В процессе выделения оставшегося на рис. 4.5.1,в (рис. 4.5.2,а) нуллора относительно узлов 2,3 и 1,4 получается последовательность схем, показанная на рис. 4.5.2,б – рис. 4.5.2,г. Рис. 4.5.2,б и рис. 4.5.2,в иллюстрируют операции стягивания нуллатора и норатора соответственно. Рис. 4.5.2,г показывает завершение этого преобразования объединением опорных узлов 2,3 и 1,4. Поскольку опорные узлы норатора и нуллатора выделяемого нуллора различные, определителю схемы на рис. 4.5.2,г следует присвоить противоположный знак.

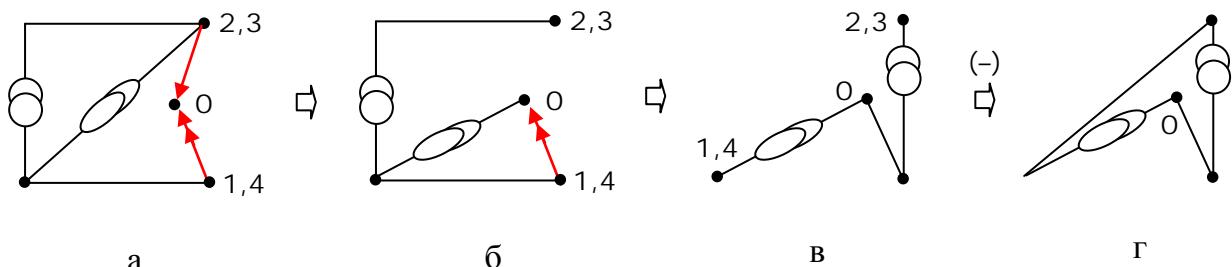


Рис. 4.5.2. Продолжение вычисления выражения (4.5.2): исходное выражение (а); стягивание нуллатора (б) и норатора (в); объединение опорных узлов 2,3 и 1,4 (г)

На рис.4.5.3 раскрывается определитель параллельного соединения ЗЭТ и ЗЭН для схемы на рис. 4.5.2,г. При этом эти аномальные зеркальные элементы замещаются нуллорными моделями.

$$-\left| \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right| = -1$$

The diagram shows a parallel connection of two ZET (Zener Diode Equivalent Transistor) models. Each model consists of a vertical diode connected in series with a resistor. The top model has its anode at node 0 and cathode at node 1,2,3,4. The bottom model has its anode at node 1,2,3,4 and cathode at node 0. Arrows indicate current flow through the resistors.

Рис. 4.5.3. Нахождение определителя схемы на рис. 4.5.2,г

Таким образом, выражение (4.5.1) справедливо. Предложенным схемным преобразованиям можно сопоставить алгебраические манипуляции с индексами. Ниже приводится вариант такого модифицированного алгебраического решения [64].

$$\begin{aligned}
& \Delta_{(4+0)(3+0),(2-1)(3-1),(3+2)(3+2),(4+1)(4+1)} = \\
& = -\Delta_{(2-1)(0-1),(3+2)(0+2),(0+1)(3+1)} = \\
& = -\Delta_{(2-1)(1+0),(3+2)(2+0),(1+0)(3+1)} = \\
& = \Delta_{(3-1)(1+0),(1+0)(3+0)} = \\
& = -\Delta_{(3-1)(1+0),(0+1)(3+0)} = \\
& = \Delta_{(0+1)(1+0)} = \\
& = -\Delta_{(0+1)(1+0)} = -1.
\end{aligned}$$

Выделение зеркальных идеальных элементов. Повысить эффективность разложения МСАД позволяет использование формул выделения трех разновидностей зеркальных идеальных элементов: 1) ЗЭТ+ЗЭН; 2) норатор+ЗЭН; 3) ЗЭТ+нуллатор.

Пример 4. Выделение элемента ЗЭТ+ЗЭН

Проверим выражение:

$$\Delta_{(2-1)(1-3),(0+2)(3+2),(3+1)(0+1)} = 1. \quad (4.5.2)$$

МСАД в (4.5.2) соответствует схеме на рис.4.5.4 слева (схема I). Производные схемы на рис. 4.5.4 иллюстрируют операции выделения ЗЭТ+ЗЭН. Схема с одним ЗЭН показывает результат стягивания ЗЭТ относительно опорного узла 2. На следующих (по стрелке) схемах показывается стягивание ЗЭН относительного опорного узла 1, стягивание всего ЗЭТ+ЗЭН и объединение опорных узлов 1 и 2. Определитель итоговой схемы приобретает знак минус, так как опорные узлы разные.

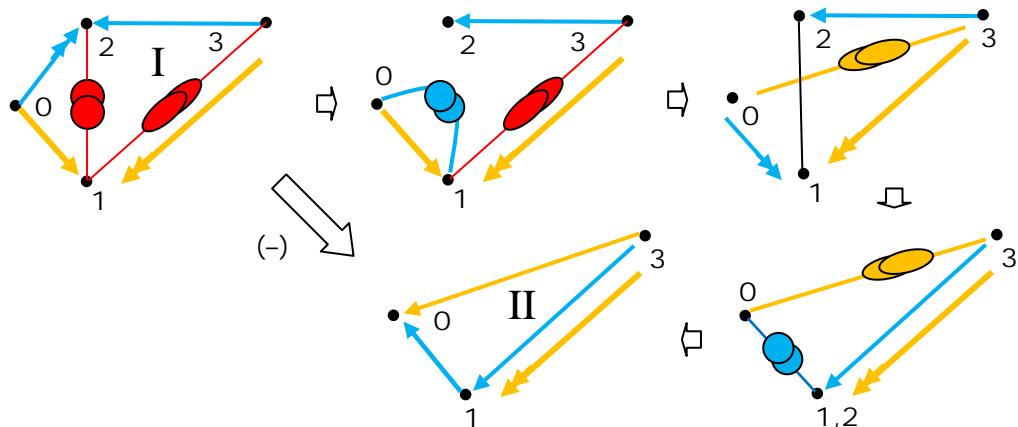


Рис. 4.5.4. Иллюстрация вычисления выражения (4.5.3)

Нижняя схема на рис. 4.5.4 за два преобразования параллельного соединения норатора и нуллатора сводится к единственному узлу, но перед этим нужно изменить нумерацию (цвет) у нораторов или нуллаторов. Определитель приобретает знак минус, и, таким образом, выражение (4.5.2) справедливо.

Решение можно проверить с помощью программы CIRSYM. Cir-файл исходной схемы имеет вид: M 2 1 1 3 N 0 2 3 2 N 3 1 0 1. Здесь символы M и N обозначают ЗЭТ+ЗЭН и нуллор соответственно. Первая пара номеров относится к узлам подключения ЗЭТ или норатора, а вторая пара узлов – к узлам подключения ЗЭН или нуллатора. Отсюда $\Delta=1$.

Cir-файл результирующей нижней схемы II на рис. 4.5.4 имеет вид: N 3 1 1 0 N 1 0 3 1. Ее определитель $\Delta=-1$. С учетом минуса, полученного при выделении ЗЭН+ЗЭТ, получаем $\Delta=1$.

Предложенным схемным преобразованиям можно сопоставить алгебраические манипуляции с индексами. Ниже приводится вариант такого алгебраического решения.

$$\begin{aligned}\Delta_{(2-1)(1-3),(0+2)(3+2),(3+1)(0+1)} &= -\Delta_{(0-1)(3+1),(3+1)(0-3)} = \\ &= -\Delta_{(1+0)(3+1),(3+1)(0-3)} = \Delta_{(3+0)(0-3)} = \Delta_{(3+0)(3+0)} = 1.\end{aligned}$$

Пример 5. Выделение элемента норатор+ЗЭН

Проверим выражение:

$$\Delta_{(0+2)(1-3),(1-2)(3+2),(3+1)(0+1)} = -1. \quad (4.5.3)$$

МСАД в (4.5.3) можно представить исходной схемой, изображенной на рис.4.5.5 слева (схема I). Производные схемы на рис.4.5.5 иллюстрируют операции выделения элемента норатор+ЗЭН. Схема со стянутым норатором 02 показывает результат стягивания относительно опорного узла 2. На следующей (по стрелке) схеме показывается стягивание ЗЭН относительного опорного узла 1 и результат стягивания всего элемента норатор+ЗЭН. Далее выполняется объединение опорных

узлов 2 и 1. Опорные узлы различные, но стягиваемый норатор 02 направлен к опорному узлу, поэтому определитель результирующей схемы сохраняет знак.

Это решение можно проверить с помощью программы CIRSYM. Cir-файл исходной схемы имеет вид: Q 0 2 1 3 T 1 2 3 2 N 3 1 0 1. Здесь символы Q и T обозначают норатор+ЗЭН и ЗЭТ+нуллатор соответственно. Первая пара номеров относится к узлам подключения норатора или ЗЭТ, а вторая пара узлов – к узлам подключения ЗЭН или нуллатора. Отсюда $\Delta = -1$.

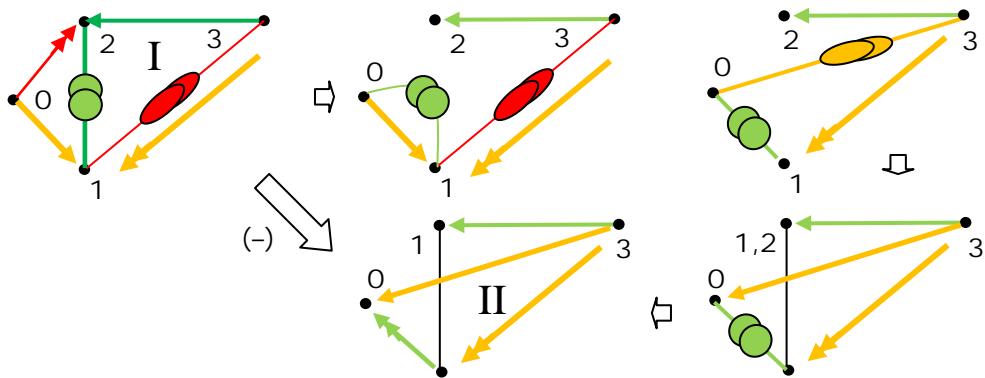


Рис. 4.5.5. Иллюстрация вычисления выражения (4.5.4)

Cir-файл результирующей нижней схемы II на рис. 4.5.5 имеет вид: N 1 0 3 1 N 3 1 3 0. Ее определитель $\Delta = -1$. С учетом плюса, полученного при выделении элемента норатор+ЗЭН, получаем $\Delta = -1$, то есть выражение (4.5.3) справедливо.

Предложенными схемными преобразованиями можно сопоставить алгебраические манипуляции с индексами

$$\begin{aligned} \Delta_{(0+2)(1-3),(1-2)(3+2),(3+1)(0+1)} &= -\Delta_{(2+0)(1-3),(1-2)(3+2),(3+1)(0+1)} = \\ &= \Delta_{(1-0)(3+1),(3+1)(0-3)} = \Delta_{(1+0)(3+1),(3+1)(0-3)} = -\Delta_{(3+0)(0-3)} = -\Delta_{(3+0)(3-0)} = -\Delta_{(3+0)(3+0)} = -1. \end{aligned}$$

В этом решении обратим внимание на то, что заземление ЗЭТ (1-0) требует его замены на норатор, направленный к базисному узлу (1+0).

Пример 6. Выделение элемента ЗЭТ+нуллатор

Проверим выражение:

$$\Delta_{(2-1)(3+2),(0+2)(3-1),(3+1)(0+1)} = -1. \quad (4.5.4)$$

МСАД в (4.5.4) можно представить исходной схемой, изображенной на рис. 4.5.6 слева (схема I). Производные схемы на рис. 4.5.6 иллюстрируют операции выделения элемента ЗЭТ+нуллатор. Схема со стянутым ЗЭТ показывает результат стягивания относительно узла 2.

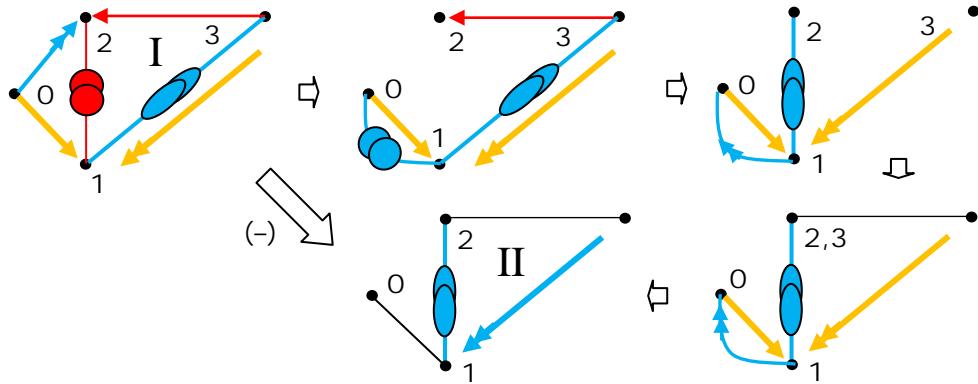


Рис. 4.5.6. Иллюстрация вычисления выражения (4.5.4)

На следующей (по стрелке) схеме выполнено стягивание нуллатора (0+2) относительного узла 3 и результат стягивания всего элемента ЗЭТ+нуллатор. Далее выполняется объединение опорных узлов 3 и 2. Опорные узлы различные, и стягиваемый нуллатор направлен от опорного узла, поэтому определитель результирующей схемы меняет знак.

Это решение можно проверить с помощью программы CIRSYM. Cir-файл исходной схемы имеет вид: T 2 1 3 2 Q 0 2 3 1 N 3 1 0 1. Очевидно, определитель последней схемы II на рис.4.5.6 равен 1. С учетом минуса, полученного при стягивании элемента ЗЭТ+нуллатор, $\Delta=-1$, то есть выражение (4.5.4) справедливо.

Предложенным схемным преобразованиям можно сопоставить алгебраические манипуляции с индексами

$$\begin{aligned} \Delta_{(2-1)(3+2),(0+2)(3-1),(3+1)(0+1)} &= -\Delta_{(0-1)(3-1),(3+1)(0+1)} = \\ &= -\Delta_{(1+0)(3-1),(3+1)(0+1)} = \Delta_{(3+0)(0+3)} = -\Delta_{(3+0)(3+0)} = -1. \end{aligned}$$

Рассмотрение примеров 4–6 показывает, в чем заключается различие операций стягивания нуллорных и зеркальных аномальных элементов.

При стягивании аномального зеркального элемента выполняется замена индекса на отрицательный номер $a \rightarrow -b$ или $c \rightarrow -d$. В результате этого происходит изменение типов других элементов, которые подсоединены к опорным узлам: норатор \rightarrow ЗЭТ, нуллатор \rightarrow ЗЭН, ЗЭТ \rightarrow норатор, ЗЭН \rightarrow нуллатор. Сохранение знака при таком преобразовании требует ориентации нуллорных элементов к опорным узлам, относительно которых осуществляется стягивание идеального зеркального элемента.

4.6. ВЫВОДЫ

Метод схемных определителей является эффективным схемно-алгебраическим инструментом для решения прикладных и теоретических задач, связанных с многократными алгебраическими дополнениями. Использование для этого операций над индексами и алгебраических тождеств [94,95] связано с рутинными выкладками, затрудняющими, в частности, визуальную проверку решения.

Топологический алгоритм, не требующий порядковой нумерации строк и столбцов, является неоптимальной реализацией схемно-алгебраического подхода. Понижению порядка многократного алгебраического дополнения – исключению одной суммарной (разностной) пары индексов – соответствует операция выделения нуллора (зеркального идеального элемента). Взаимно однозначное соответствие операций матрично-топологического и схемно-алгебраического алгоритмов служит строгим доказательством последнего.

Получившие терминологический статус лишь в 2002 году [110] зеркальные аномальные элементы – зеркальный элемент тока и зеркальный элемент напряжения – являются соответственно схемными отображениями разностей строк и разностей столбцов многократных алгебраических дополнений. Тем самым зеркальные аномальные элементы заполнили существовавший пробел в схемно-алгебраическом раскрытии разностных алгебраических дополнений.

5. ОБОБЩЕННЫЕ БЕЗЫЗБЫТОЧНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СИМВОЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Формулы для получения символьных функций относительной чувствительности обобщены на произвольные параметры с помощью многократных суммарных алгебраических дополнений (МСАД). Раскрытие МСАД методом схемных определителей обеспечивает уменьшение объема вычислений для формирования компактных выражений без избыточных взаимно уничтожающихся слагаемых. Учет топологических особенностей схем приводит к двукратному сокращению числа МСАД в выражениях чувствительности.

5.1. ФОРМУЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ

Под относительной чувствительностью [3] понимается отношение относительного изменения схемной функции F к соответствующему изменению параметра W элемента схемы [4,6,15,51,74,92]:

$$S = \frac{dF}{F} \frac{W}{dW}. \quad (5.1.1)$$

После дифференцирования формула (5.1.1) записывается в виде разности отношений (произведений) алгебраических дополнений, содержащей взаимно уничтожающиеся слагаемые. Если не предусматривается выделение рассматриваемого параметра, то требуется взятие частных производных по узловым проводимостям [74], что умножает число избыточных слагаемых. Методы присоединенной схемы и схемы в конечных приращениях [66] предназначены для нахождения чувствительности в численной форме.

Г.Боде [3] предложил формулу чувствительности для коэффициента передачи напряжения $K = \underline{U}_3/\underline{U}_1$ схемы на рис. 5.1.1 в виде отношения

произведений определителя и алгебраических дополнений матрицы контурных сопротивлений или узловых проводимостей

$$S_W^K = -W \frac{\Delta_{15}\Delta_{73}}{\Delta\Delta_{13}}, \quad (5.1.2)$$

где W – передаточное сопротивление Z источника напряжения, управляемого током (ИНУТ), или передаточная проводимость Y источника тока, управляемого напряжением (ИТУН); Δ – определитель матрицы контурных сопротивлений, для матрицы узловых проводимостей $\Delta = \Delta_{11}$; $\Delta_{11}, \Delta_{15}, \Delta_{13}, \Delta_{73}$ – алгебраические дополнения контурной или узловой матрицы.

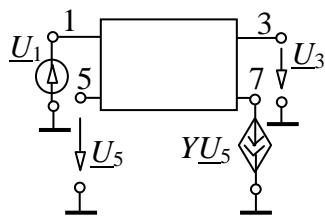


Рис. 5.1.1. Y -схема с заземленными элементами для нахождения функции чувствительности коэффициента передачи напряжения по параметру ИТУН

Формула (5.1.2) получена из (5.1.1) с помощью тождества Якоби в виде

$$\Delta_{13.75}\Delta = \Delta_{13}\Delta_{75} - \Delta_{15}\Delta_{73}. \quad (5.1.3)$$

В общем случае воздействие, отклик, генератор и приемник управляемого источника (УИ) не соединены с базисным узлом схемы (рис. 5.1.2).

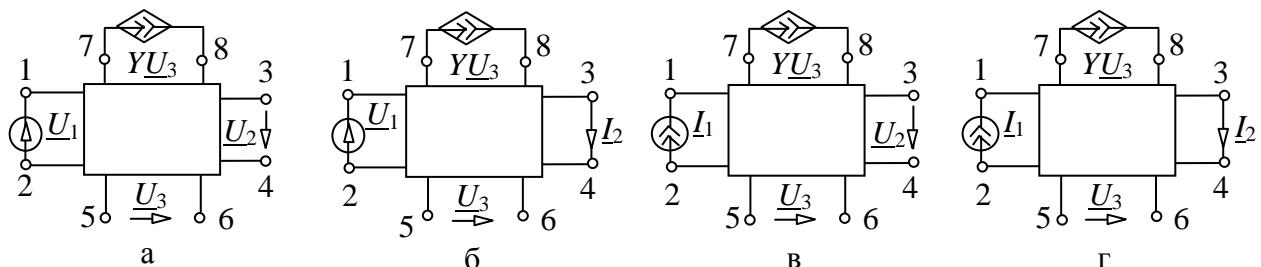


Рис. 5.1.2. Схемы для нахождения функции чувствительности по параметру ИТУН: коэффициента передачи напряжения (а); передаточной проводимости (б); передаточного сопротивления (в); коэффициента передачи тока (г)

Известно обобщение результата Боде (5.1.2) с помощью многократных суммарных алгебраических дополнений (МСАД) [51] для обратной матрицы схемы в однородном или смешанном координатном базисе [15]. Например, формула для чувствительности передаточного сопротивления по проводимости ИТУН (рис. 5.1.2,в) имеет вид [15]

$$S_Y^{Z_{\text{пер}}} = -Y \frac{Z_{(1+2)(5+6)} Z_{(7+8)(3+4)}}{Z_{(1+2)(3+4)}}, \quad (5.1.4)$$

где $Z_{(1+2)(5+6)}$, $Z_{(7+8)(3+4)}$, $Z_{(1+2)(3+4)}$ – МСАД обратной матрицы схемы. Элементы обратной матрицы приводят к избыточным взаимно сокращающимся множителям, которые могут быть исключены путем приведения формулы (5.1.4) к виду (5.1.2), если элементы обратной матрицы записать через элементы исходной матрицы.

Чувствительности других схемных функций находятся в [15] опосредованным образом – через чувствительности передаточного $S_Y^{Z_{\text{пер}}}$, входного $S_Y^{Z_{\text{вх}}}$ и выходного $S_Y^{Z_{\text{вых}}}$ сопротивлений. Так, чувствительность коэффициента передачи напряжения имеет вид [15]

$$S_Y^K = S_Y^{Z_{\text{пер}}} - S_Y^{Z_{\text{вх}}}. \quad (5.1.5)$$

Формулы вида (5.1.4) и (5.1.5) предназначены для численного расчета чувствительности [15]. При нахождении чувствительности в символьном виде недостатком разностных формул вида (5.1.5) является их повышенная трудоемкость – требуется раскрыть пять МСАД (определителей) вместо четырех по формуле (5.1.2). При этом разность выражений увеличивает число взаимно уничтожающихся слагаемых. В формуле (5.1.4) кроме трех МСАД требуется раскрыть еще определитель, поскольку $Z_{(a+c)(b+d)} = \Delta_{(a+c)(b+d)} / \Delta$. Таким образом, до сих пор не существует удовлетворительного обобщения формулы Боде (5.1.2).

5.2. ОБОБЩЕННЫЕ ФОРМУЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ

Разложение МСАД связано с образованием избыточных взаимно уничтожающихся слагаемых, обусловленных многоократным участием параметров элементов в матрице. От этого недостатка избавляет использование формул чувствительности с индексами сторон многополюсной подсхемы [4,92]. При этом сомножителями формул вида (5.1.2) являются схемные определители. Схемно-алгебраические формулы (САФ) [4] позволяют находить функции для чувствительности через определители исходной схемы и определители производных от нее схем – схемные миноры – путем рекурсивного выделения параметров [55].

В то же время достоинством формул чувствительности вида (5.1.2) является более компактная запись, не требующая изображений схем, и поэтому предпочтительная для обобщения. Такое обобщение необходимо выполнить, сохранив основное преимущество САФ – отсутствие избыточных взаимно уничтожающихся слагаемых [4]. Перенести это основное преимущество САФ на формулы чувствительности вида (5.1.2) можно, если раскрывать МСАД методом схемных определителей [64].

На рис. 5.1.2 показаны схемы для нахождения чувствительности четырех схемных функций по отношению к параметру ИТУН. Аналогичные схемы можно нарисовать для параметров других управляемых источников: ИНУТ; источника напряжения, управляемого напряжением (ИНУН), и источника тока, управляемого током (ИТУТ).

Коэффициент передачи напряжения для схемы на рис. 5.1.2,а можно записать в виде

$$K = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\Delta_{(1+2)(3+4)}}{\Delta_{(1+2)(1+2)}} = \frac{\Delta_{(1+2)(3+4)}^0 + Y\Delta_{(1+2)(3+4),(7+8)(5+6)}}{\Delta_{(1+2)(1+2)}^0 + Y\Delta_{(1+2)(1+2),(7+8)(5+6)}}, \quad (5.2.1)$$

где используется формула выделения параметра ИТУН [55], в которой первое слагаемое находится при $Y = 0$, на что указывает верхний индекс.

После подстановки выражения (5.2.1) в формулу (5.1.1) и сокращения на $\Delta_{(1+2)(1+2)}$ получается выражение для чувствительности коэффициента передачи напряжения по параметру ИТУН Y :

$$S_Y^K = \frac{Y(\Delta_{(1+2)(3+4),(7+8)(5+6)}\Delta_{(1+2)(1+2)} - \Delta_{(1+2)(3+4)}\Delta_{(1+2)(1+2),(7+8)(5+6)})}{\Delta_{(1+2)(1+2)}\Delta_{(1+2)(3+4)}}. \quad (5.2.2)$$

Числитель в формуле (5.2.2) можно свернуть в произведение алгебраических дополнений с помощью тождества Якоби (5.1.3) при использовании МСАД $\Delta_{(1+2)(1+2)}$ вместо определителя Δ . Отсюда

$$S_Y^K = -\frac{Y\Delta_{(1+2)(5+6)}\Delta_{(1+2)(1+2),(7+8)(3+4)}}{\Delta_{(1+2)(1+2)}\Delta_{(1+2)(3+4)}}. \quad (5.2.3)$$

Вывод формул для чувствительности коэффициента передачи напряжения по параметрам других управляемых источников, а также формул для чувствительности других схемных функций аналогичен. При этом формулы чувствительности для одной схемной функции внешне отличаются только множителем – параметром УИ. Если параметр произвольного УИ обозначить χ , то получится обобщенная формула чувствительности для коэффициента передачи напряжения в строке 1 из табл. 5.2.1.

Формула в строке 1 из табл. 5.2.1 справедлива и для чувствительности передаточной проводимости (рис. 5.1.2,б)

$$Y_{\text{пер}} = \underline{I}_2 / \underline{U}_1 = \Delta_{(1+2)(3+4)} / \Delta_{(1+2)(1+2)}, \quad (5.2.4)$$

которая совпадает с формулой (5.2.1). При этом схема для нахождения функции чувствительности $Y_{\text{пер}}$ на рис. 5.1.2,б отличается от схемы на рис. 5.1.2,а объединенными выходными полюсами.

Формулы для передаточного сопротивления и коэффициента передачи тока находятся по схемам на рис. 5.1.2,в и 5.1.2,г и, как формулы (5.2.1) и (5.2.4), совпадают между собой:

$$Z_{\text{пер}} = \underline{U}_2 / \underline{I}_1 = \Delta_{(1+2)(3+4)} / \Delta; \quad B = \underline{I}_2 / \underline{I}_1 = \Delta_{(1+2)(3+4)} / \Delta,$$

отличаясь знаменателем Δ . Тем же определителем отличаются формулы для чувствительностей B и $Z_{\text{пер}}$ в строках 3 и 4 от формул в строках 1 и 2 (табл. 5.2.1).

Таблица 5.2.1. Обобщенные формулы для чувствительности на основе МСАД

№	Обозначение чувствительности	Формула
1	S_x^K	$-\frac{\chi \Delta_{(1+2)(5+6)} \Delta_{(1+2)(1+2), (7+8)(3+4)}}{\Delta_{(1+2)(1+2)} \Delta_{(1+2)(3+4)}}$
2	$S_x^{Y_{\text{пер}}}$	
3	S_x^B	$-\frac{\chi \Delta_{(1+2)(5+6)} \Delta_{(7+8)(3+4)}}{\Delta \Delta_{(1+2)(3+4)}}$
4	$S_x^{Z_{\text{пер}}}$	

Знаменатель формул из табл. 5.2.1 является произведением знаменателя и числителя передаточной функции, а числитель – произведением чиселителей передаточных функций от входа к управляющей ветви и от управляемой ветви к выходу.

5.3. ФОРМУЛЫ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Более сложную структуру имеют формулы для относительной чувствительности схемных функций второго порядка, которые получаются на основе повторного дифференцирования формул для относительной чувствительности первого порядка в табл. 5.2.1. Так, абсолютная чувствительность первого порядка для передаточного сопротивления, исходя из формулы относительной чувствительности в строке 4 в табл. 5.2.1, имеет вид

$$\frac{dZ_{\text{пер}}}{dY_1} = -\frac{\Delta_{(1+2)(5+6)} \Delta_{(7+8)(3+4)}}{\Delta^2}. \quad (5.3.1)$$

Вторая производная (5.3.1) по параметру ИТУН Y_2 имеет вид

$$\begin{aligned} & [(\Delta_{(1+2)(5+6),(11+12)(9+10)} \Delta_{(7+8)(3+4)} + \\ & + \Delta_{(1+2)(5+6)} \Delta_{(7+8)(3+4),(11+12)(9+10)}) \Delta^2 - \\ & \frac{d^2 Z_{\text{пер}}}{dY_1 dY_2} = - \frac{-2 \Delta \Delta_{(11+12)(9+10)} \Delta_{(1+2)(5+6)} \Delta_{(7+8)(3+4)}}{\Delta^4}. \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

Сокращаем дробь (5.3.2) на Δ и раскрываем скобки

$$\begin{aligned} & [-\Delta_{(1+2)(5+6),(11+12)(9+10)} \Delta_{(7+8)(3+4)} \Delta - \\ & - \Delta_{(1+2)(5+6)} \Delta_{(7+8)(3+4),(11+12)(9+10)} \Delta + \\ & \frac{d^2 Z_{\text{пер}}}{dY_1 dY_2} = \frac{+2 \Delta_{(11+12)(9+10)} \Delta_{(1+2)(5+6)} \Delta_{(7+8)(3+4)}}{\Delta^3}. \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

Группируем слагаемые в числителе (5.3.3) – объединяем в одной паре скобок первое и половину третьего слагаемого. Выносим за скобку сомножитель $\Delta_{(7+8)(3+4)}$. Оставшийся в скобках двучлен преобразуем с помощью тождества Якоби (5.1.3) в одночлен. В результате получаем:

$$\begin{aligned} & [\Delta_{(7+8)(3+4)} \Delta_{(11+12)(5+6)} \Delta_{(1+2)(9+10)} - \\ & - \Delta_{(1+2)(5+6)} \Delta_{(7+8)(3+4),(11+12)(9+10)} \Delta + \\ & \frac{d^2 Z_{\text{пер}}}{dY_1 dY_2} = \frac{+ \Delta_{(11+12)(9+10)} \Delta_{(1+2)(5+6)} \Delta_{(7+8)(3+4)}}{\Delta^3}. \end{aligned} \quad (5.3.4)$$

В (5.3.4) группируем в виде двучлена второе и третье слагаемое, выносим за скобки общий множитель $\Delta_{(1+2)(5+6)}$. Оставшееся в скобках выражение преобразуем с помощью тождества Якоби (5.1.3):

$$\begin{aligned} & [\Delta_{(7+8)(3+4)} \Delta_{(11+12)(5+6)} \Delta_{(1+2)(9+10)} + \\ & + \Delta_{(1+2)(5+6)} (-\Delta_{(7+8)(3+4),(11+12)(9+10)} \Delta + \\ & \frac{d^2 Z_{\text{пер}}}{dY_1 dY_2} = \frac{+ \Delta_{(11+12)(9+10)} \Delta_{(7+8)(3+4)}}{\Delta^3} = \\ & = \frac{\Delta_{(7+8)(3+4)} \Delta_{(11+12)(5+6)} \Delta_{(1+2)(9+10)} + \Delta_{(1+2)(5+6)} \Delta_{(11+12)(3+4)} \Delta_{(7+8)(9+10)}}{\Delta^3}. \end{aligned} \quad (5.3.5)$$

На основе (5.3.5) получаем формулу для относительной чувствительности второго порядка по параметрам произвольных УИ χ_1 и χ_2 (к схеме рис. 5.1.2, в добавлены управляющая и управляемая ветви УИ χ_2 с номерами полюсов 9, 10 и 11, 12)

$$S_{\chi_1 \chi_2}^{Z_{\text{пер}}} = \chi_1 \chi_2 \frac{d^2 Z_{\text{пер}}}{Z_{\text{пер}} d\chi_1 d\chi_2} = \chi_1 \chi_2 \frac{[\Delta_{(1+2)(5+6)} \Delta_{(7+8)(9+10)} \Delta_{(11+12)(3+4)} + \Delta_{(1+2)(9+10)} \Delta_{(11+12)(5+6)} \Delta_{(7+8)(3+4)}]}{\Delta^2 \Delta_{(1+2)(3+4)}}, \quad (5.3.6)$$

Формула (5.3.6) содержит в знаменателе произведение квадрата определителя и числителя передаточной функции, а в числителе – сумму двух произведений. Первое произведение содержит числители передаточных функций от входа схемы к управляющей ветви первого УИ, от управляемой ветви первого УИ к управляющей ветви второго УИ и от управляемой ветви второго УИ к выходу схемы. Во втором произведении порядок передачи входного воздействия через УИ противоположный – сначала сигнал поступает на второй УИ, а затем на первый.

Формула чувствительности второго порядка для коэффициента передачи тока совпадает с формулой чувствительности (5.3.6) для передаточного сопротивления, как совпадают соответствующие формулы чувствительности первого порядка в строках 3 и 4 из табл. 5.2.1. Аналогично (5.3.6) выводится формула чувствительности второго порядка для коэффициента передачи напряжения

$$S_{\chi_1 \chi_2}^K = \chi_1 \chi_2 \frac{[\Delta_{(1+2)(5+6)} \Delta_{(1+2)(1+2), (7+8)(9+10)} \Delta_{(1+2)(1+2), (11+12)(3+4)} + \Delta_{(1+2)(9+10)} \Delta_{(1+2)(1+2), (11+12)(5+6)} \Delta_{(1+2)(1+2), (7+8)(3+4)}]}{\Delta_{(1+2)(1+2)}^2 \Delta_{(1+2)(3+4)}}. \quad (5.3.7)$$

Формула (5.3.7) совпадает с формулой чувствительности второго порядка для передаточной проводимости, как совпадают в строках 1 и 2 из табл. 5.2.1 соответствующие формулы чувствительности первого порядка.

5.4. ЧАСТНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ

Если в формуле из строки 1 в табл. 5.2.1 полюса 7 и 8 объединить попарно с полюсами 5 и 6, то получается формула для относительной чувствительности коэффициента передачи напряжения по двухполюсной проводимости Y [51]

$$S_Y^K = -Y \frac{\Delta_{(1+2)(5+6)} \Delta_{(1+2)(1+2), (5+6)(3+4)}}{\Delta_{(1+2)(1+2)} \Delta_{(1+2)(3+4)}}. \quad (5.4.1)$$

Если в той же формуле чувствительности положить $\chi = Y$, а узлам 2, 4, 6, 8 присвоить номер 0 (заземлить ИТУН, входную и выходную стороны схемы на рис. 5.1.2,а), то эта формула сводится к формуле (5.1.2) при $W = Y$ и $\Delta = \Delta_{11}$. Аналогично при $\chi = Z$ (для ИНУТ) формула чувствительности коэффициента передачи напряжения в строке 1 из табл. 5.2.1 сводится также к формуле (5.1.2).

Частные формулы для схемных функций по двухполюсному сопротивлению Z , включенному между узлами 5 и 7, получаются из формул для ИНУТ ($\chi = Z$) в табл. 5.2.1 путем замены индекса 8 на 6. Формулы для чувствительности входной проводимости и входного сопротивления находятся из формул для чувствительности передаточной проводимости и передаточного сопротивления из строк 2 и 4 в табл. 5.2.1 путем замены индексов 3 и 4 на 1 и 2 соответственно.

5.5. ФОРМУЛЫ ДЛЯ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ СХЕМ С ТОПОЛОГИЧЕСКИМИ ОСОБЕННОСТЯМИ

Если выходное напряжение снимается с генератора ИНУН или ИНУТ, то в формулах чувствительности K и $Z_{\text{пер}}$ по μ и Z в строках 1 и 4 из табл. 5.2.1 совпадают индексы МСАД $3 \equiv 7$ и $4 \equiv 8$. Из них следуют формулы в строках 1 и 2 из табл. 5.5.1, содержащие всего два МСАД.

Таблица 5.5.1. Формулы чувствительности для схем со съемом отклика с генератора управляемого источника и подачей воздействия на вход управляемого источника

№	Обозначение чувствительности		Формула	
	Схема	Схема		
1	S_{μ}^K 		S_z^K	$\frac{\Delta_{(1+2)(1+2),(3+4)(3+4)}}{\Delta_{(1+2)(1+2)}}$
2	$S_{\mu}^{Z_{\text{неп}}}$ 		$S_z^{Z_{\text{неп}}}$	$\frac{\Delta_{(3+4)(3+4)}}{\Delta}$
3	$S_Y^{Y_{\text{неп}}}$ 		$S_{\beta}^{Y_{\text{неп}}}$	$\frac{\Delta_{(1+2)(1+2)}^0}{\Delta_{(1+2)(1+2)}}$
4	S_Y^B 		$S_{\beta}^{B_{\text{неп}}}$	$\frac{\Delta^0}{\Delta}$
5	S_{μ}^K 		$S_{\mu}^{Y_{\text{неп}}}$	$\mu \frac{\Delta_{(1+2)(1+2),(7+8)(3+4)}}{\Delta_{(1+2)(3+4)}}$
6	S_Y^K 		$S_Y^{Y_{\text{неп}}}$	$Y \frac{\Delta_{(1+2)(1+2),(7+8)(3+4)}}{\Delta_{(1+2)(3+4)}}$
7	$S_z^{Z_{\text{неп}}}$ 		S_z^B	$Z \frac{\Delta_{(7+8)(3+4)}}{\Delta_{(1+2)(3+4)}}$
8	$S_{\beta}^{Z_{\text{неп}}}$ 		S_{β}^B	$\beta \frac{\Delta_{(7+8)(3+4)}}{\Delta_{(1+2)(3+4)}}$

При выводе этих формул учитывается тождество $\chi\Delta_{(1+2)(5+6)}=\Delta_{(1+2)(7+8)}$, где $\chi = \mu$ и $\chi = Z$ для ИНУН и ИНУТ соответственно. Здесь МСАД являются числителями передачи от входа к приемнику и генератору УИ. Они связаны параметром УИ. Аналогично получаются формулы с двумя МСАД для чувствительности передаточной проводимости $Y_{\text{пер}}$ и коэффициента передачи тока B по параметру ИТУН Y и ИТУТ β в строках 3 и 4 из табл. 5.5.1 для схем, в которых выходной переменной является ток генератора ИТУН и ИТУТ. Эти формулы следуют из формул в строках 2 и 3 табл. 5.2.1. В дуальном случае входная переменная подается непосредственно на управляемую ветвь УИ. При этом формулы с двумя МСАД (строки 5–8 в табл. 5.5.1) следуют из табл. 5.2.1 при учете эквивалентности полюсов $1\equiv 5$ и $2\equiv 6$.

При последовательном соединении независимого и управляемого генераторов напряжения и параллельного соединения генераторов тока на входе схемы из формул в табл. 5.2.1 получаются формулы с двумя МСАД, сведенные в строки 1–4 табл. 5.5.2. Из формул в табл. 5.2.1 следуют также формулы с двумя МСАД, приведенные в строках 5–8 этой же табл. 5.5.2.

Таблица 5.5.2. Формулы чувствительности для схем с генератором УИ на входе схемы или с управляемой ветвью УИ на выходе

№	Обозначение чувствительности		Формула
	Схема	Схема	
1	$S_Y^{Z_{\text{пер}}}$ 	S_Y^B 	$-Y \frac{\Delta_{(1+2)(5+6)}}{\Delta}$
2	S_μ^K 	$S_Z^{Y_{\text{пер}}}$ 	$-\mu \frac{\Delta_{(1+2)(5+6)}}{\Delta_{(1+2)(1+2)}}$
3	$S_\beta^{Z_{\text{пер}}}$ 	$S_\beta^{Y_{\text{пер}}}$ 	$-\beta \frac{\Delta_{(1+2)(5+6)}}{\Delta}$

Окончание табл. 5.5.2

№	Обозначение чувствительности		Формула
	Схема	Схема	
4	S_Z^K 		$S_Z^{Y_{nep}}$
5	S_μ^K 		S_Y^K
6	$S_\mu^{Z_{nep}}$ 		$S_Y^{Z_{nep}}$
7	$S_\beta^{Y_{nep}}$ 		$S_Z^{Y_{nep}}$
8	S_β^B 		S_Z^B

5.6. СИМВОЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ФИЛЬТРА

Требуется построить символьное выражение для чувствительности комплексного коэффициента передачи напряжения $K = \underline{U}_2 / \underline{U}_1$ по параметру ИНУН μ схемы замещения фильтра на рис. 5.6.1 [6].

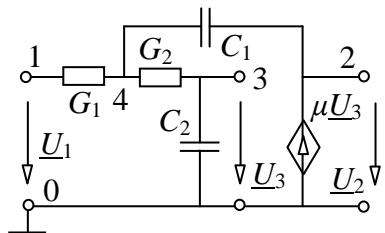


Рис. 5.6.1. Схема фильтра для нахождения функции чувствительности

Выходное напряжение снимается с генератора ИНУН, поэтому целесообразно использовать формулу из строки 1 в табл. 5.5.1, содержащую всего два определителя. С учетом нумерации полюсов схемы на рис. 5.6.1 эта формула принимает вид

$$S_{\mu}^K = \Delta_{(1+0)(1+0),(2+0)(2+0)} / \Delta_{(1+0)(1+0)} = \Delta_{11,22} / \Delta_{11}. \quad (5.6.1)$$

Для раскрытия МСАД в выражении (5.6.1) используем метод схемных определителей [8,9]. Выделим в знаменателе параметр ИНУН

$$\Delta_{11} = \mu \left| \begin{array}{c} 1 \\ \text{---} \\ | \\ G_1 \\ | \\ 0 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} 4 \\ \text{---} \\ | \\ G_2 \\ | \\ C_2 \\ | \\ 3 \\ \text{---} \\ | \\ 2 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} 1 \\ \text{---} \\ | \\ G_1 \\ | \\ 0 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} 4 \\ \text{---} \\ | \\ G_2 \\ | \\ C_1 \\ | \\ 3 \\ \text{---} \\ | \\ 2 \end{array} \right|. \quad (5.6.2)$$

Второе слагаемое в (5.6.2) совпадает с числителем (5.6.1). Для получения его выражения в полиномиальном виде, удобном для аналитического исследования, используем разложение по проводимостям конденсаторов:

$$\begin{aligned} \Delta_{11,22} &= p^2 C_1 C_2 \left| \begin{array}{c} G_1 \\ \text{---} \\ | \\ G_2 \\ | \\ 0 \end{array} \right| + p \left\{ C_1 \left| \begin{array}{c} G_1 \\ \text{---} \\ | \\ G_2 \\ | \\ 0 \end{array} \right| + C_2 \left| \begin{array}{c} G_1 \\ \text{---} \\ | \\ G_2 \\ | \\ 0 \end{array} \right| \right\} + \\ &+ \left| \begin{array}{c} G_1 \\ \text{---} \\ | \\ G_2 \\ | \\ 0 \end{array} \right| = p^2 C_1 C_2 + p[C_1 G_2 + C_2(G_1 + G_2)] + G_1 G_2. \end{aligned} \quad (5.6.3)$$

Схемы в (5.6.3) получены из схемы во втором слагаемом (5.6.2) путем замены конденсатора идеальным проводником и удаления его при выделении и обнулении его параметра соответственно. Определитель первой схемы равен единице, поскольку обе проводимости замкнуты накоротко. Во второй схеме выделяется разомкнутая проводимость G_2 , а проводимость G_1 , как и в первой схеме, образует контур, и ее определитель равен единице. В третьей схеме определитель параллельного соединения проводимостей равен их сумме, а в четвертой схеме определитель последовательного разомкнутого соединения проводимостей – произведению этих проводимостей.

Первое слагаемое из (5.6.2) имеет вид:

$$\mu \left| \begin{array}{c} G_1 \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ G_2 \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ pC_1 \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ pC_2 \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ 3 \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ 2 \end{array} \right| = -\mu pC_1 G_2. \quad (5.6.4)$$

Символьное выражение в (5.6.4) найдено с помощью следующих операций: удаления проводимости pC_2 , параллельной нуллатору; выделения проводимости G_2 , последовательной с нуллатором; удаления проводимости G_1 , параллельной нуллатору и замены определителя схемы в виде встречного параллельного соединения норатора и нуллатора значением, равным -1 .

После подстановки символьных выражений из (5.6.3) и (5.6.4) в (5.6.2) и (5.6.1) получается искомая функция чувствительности

$$S_{\mu}^K = \frac{p^2 C_1 C_2 + p[C_1 G_2 + C_2(G_1 + G_2)] + G_1 G_2}{p^2 C_1 C_2 + p[(1-\mu)C_1 G_2 + C_2(G_1 + G_2)] + G_1 G_2}. \quad (5.6.5)$$

В выражении (5.6.5) в отличие от решения [5] отсутствуют сокращающиеся множители за счет использования специальной формулы из строки 1 табл. 5.5.1, что приводит к сокращению решения вдвое. Благодаря применению для раскрытия МСАД метода схемных определителей в предложенном решении отсутствуют взаимно уничтожающиеся слагаемые, присущие традиционной матричной методике [3,6,15,51,74].

5.7. АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ СХЕМ С ЗЕРКАЛЬНЫМИ АНОМАЛЬНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Обобщенные формулы для нахождения функций относительной чувствительности в табл. 5.2.1 справедливы для произвольных линейных схем, в том числе, содержащих аномальные зеркальные элементы. Особенность анализа таких схем состоит в необходимости применять

формулы (2.2.2) и (2.2.3) для выделения ЗЭН и ЗЭТ, а также вытекающие из них формулы (2.3.2) и (2.3.3) выделения четных и нечетных контуров.

Чувствительность двойного повторителя тока. Схема повторителя тока с аномальными направленными элементами – нораторами, нуллаторами и ЗЭН представлена на рис. 5.7.1 [114]. Необходимо сформировать коэффициенты передачи тока $\beta_+ = i_{z+}/j_{in}$ и $\beta_- = i_{z-}/j_{in}$, функции чувствительности этих коэффициентов $S_{g_{z+}}^{\beta+}$ и $S_{g_{z-}}^{\beta-}$ при изменении передаточных проводимостей g_{z+} и g_{z-} соответственно.

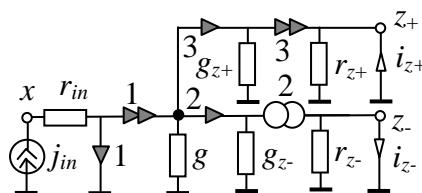


Рис. 5.7.1. Схема двойного повторителя тока на основе направленных и нумерованных зеркальных и нуллорных аномальных элементов

Коэффициенты передачи тока находятся в виде $\beta_+ = N_+/D$ и $\beta_- = N_-/D$. Знаменатель передаточных функций – определитель схемы в соответствии со строкой 4 из табл. 1.2.1 имеет вид

$$D = \left| \begin{array}{c} x \quad r_{in} \\ \downarrow 1 \quad 1 \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right| =$$

$$= 1_{r_{in}} \cdot 1_{1-1} \cdot r_{z+} \cdot r_{z-} \cdot 1_{g_{z+}} \cdot (-1)_{3-3} \cdot g \cdot 1_{g_{z-}} \cdot 1_{2-2} = -r_{z+} \cdot r_{z-} \cdot g, \quad (5.7.1)$$

где $1_{r_{in}}$, 1_{1-1} , $1_{g_{z+}}$, $1_{g_{z-}}$, $(-1)_{3-3}$, 1_{2-2} – единичные (с плюсом или минусом) множители. Индекс обозначает элемент, при выделении которого получен этот множитель. Пары номеров 1-1, 2-2, 3-3 – пары одноименных нораторов и нуллаторов. При выделении сопротивлений r_{z+} , r_{z-} и проводимости g получены множители, равные их параметрам.

Числители передаточных функций имеют вид соответственно

$$N_+ = \left| \begin{array}{c} r_{in} \\ \text{---} \\ 4 \quad 1 \\ \text{---} \\ 2 \quad 3 \\ \text{---} \\ g \quad g_{z+} \\ \text{---} \\ 3 \quad 2 \\ \text{---} \\ g_{z-} \quad r_{z-} \\ \text{---} \\ 4 \quad \Delta \\ \text{---} \end{array} \right| =$$

$$= 1_{rin} \cdot r_{z+} \cdot r_{z-} \cdot (-1)_{1-4} \cdot 1_{1-1} \cdot 1_g \cdot (-1)_{3-4} \cdot 1_{3-3} \cdot g_{z+} \cdot (-1)_{4-4} \cdot 1_{g_{z-}} \cdot 1_{2-2} = -r_{z+} \cdot r_{z-} \cdot g_{z+}. \quad (5.7.2)$$

$$N_- = \left| \begin{array}{c} r_{in} \\ \text{---} \\ 4 \quad 1 \\ \text{---} \\ 2 \quad 3 \\ \text{---} \\ g \quad g_{z+} \\ \text{---} \\ 3 \quad 2 \\ \text{---} \\ g_{z-} \quad r_{z+} \\ \text{---} \\ 4 \quad \Delta \\ \text{---} \end{array} \right| =$$

$$= 1_{rin} \cdot r_{z+} \cdot r_{z-} \cdot (-1)_{1-4} \cdot 1_{1-1} \cdot 1_g \cdot 1_{g_{z+}} \cdot (-1)_{3-3} \cdot (-1)_{4-2} \cdot (-1)_{4-4} \cdot g_{z-} \cdot (-1)_{2-2} = -r_{z+} \cdot r_{z-} \cdot g_{z-}, \quad (5.7.3)$$

где $(-1)_{1-4}$; $(-1)_{3-4}$; $(-1)_{4-2}$ – единичные (с минусом) множители, соответствующие операции взаимной замены номеров у нораторов или нуллаторов.

Таким образом, коэффициенты передачи тока двойного повторителя имеют вид

$$\beta_+ = i_{z+}/j_{in} = g_{z+}/g; \beta_- = i_z/j_{in} = g_{z-}/g. \quad (5.7.4)$$

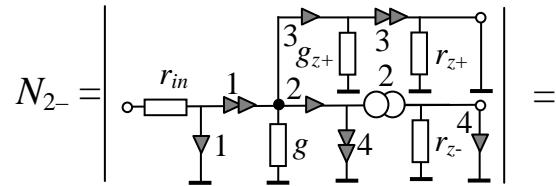
Чувствительности коэффициента передачи тока находятся по формуле в строке 3 из табл. 5.2.1, которую можно записать для чувствительности коэффициентов передачи тока к выходам z_+ и z_- в виде соответственно

$$S_{g_{z+}}^{\beta_+} = -\frac{g_{z_+} N_{1+} N_{2+}}{DN_+} \quad \text{и} \quad S_{g_{z-}}^{\beta_-} = -\frac{g_{z_-} N_{1-} N_{2-}}{DN_-}. \quad (5.7.5)$$

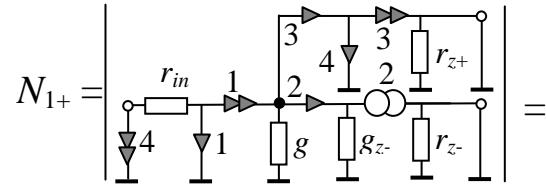
Множители в числителе (5.7.6) находятся следующим образом:

$$N_{1-} = \left| \begin{array}{c} r_{in} \\ \text{---} \\ 4 \quad 1 \\ \text{---} \\ 2 \quad 3 \\ \text{---} \\ g \quad g_{z+} \\ \text{---} \\ 3 \quad 2 \\ \text{---} \\ g_{z-} \quad r_{z-} \\ \text{---} \\ 4 \quad \Delta \\ \text{---} \end{array} \right| =$$

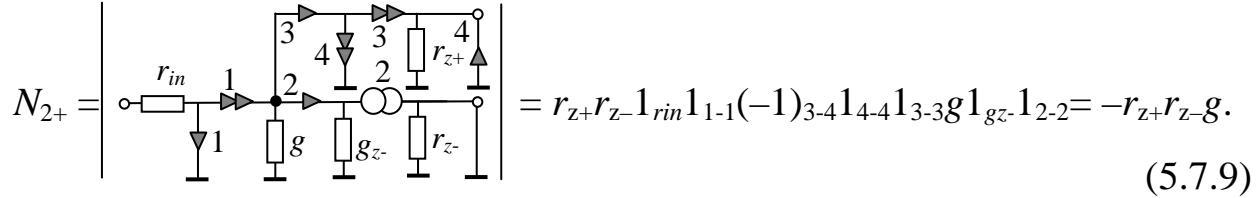
$$= r_{z+} r_{z-} (-1)_{3-3} 1_{rin} (-1)_{1-4} 1_{1-1} 1_g (-1)_{2-4} (-1)_{4-4} (-1)_{2-2} = -r_{z+} r_{z-}; \quad (5.7.6)$$



$$= r_{z+} r_{z-} 1_{rin} 1_{1-1} 1_{gz+} (-1)_{3-3} g (-1)_{2-4} (-1)_{4-4} (-1)_{2-2} = r_{z+} r_{z-} g; \quad (5.7.7)$$



$$= r_{z+} r_{z-} 1_{rin} (-1)_{1-4} 1_{1-1} 1_g (-1)_{3-4} 1_{3-3} 1_{4-4} 1_{gz-} 1_{2-2} = r_{z+} r_{z-}; \quad (5.7.8)$$



После подстановки (5.7.1)–(5.7.3) и (5.7.6)–(5.7.9) в формулу (5.7.5) и сокращения множителей получаем формулы для чувствительности коэффициентов передачи тока с входа к выходам z_+ и z_- соответственно

$$S_{g_{z+}}^{\beta_+} = -\frac{g_{z_+} N_{1+} N_{2+}}{DN_+} = -\frac{g_{z_-} r_{z+} r_{z-} g (-1) r_{z+} r_{z-}}{-r_{z+} r_{z-} g (-1) r_{z+} r_{z-} g_{z_-}} = 1;$$

$$S_{g_{z-}}^{\beta_-} = -\frac{g_{z_-} N_{1-} N_{2-}}{DN_-} = -\frac{g_{z_-} (-1) r_{z+} r_{z-} r_{z+} r_{z-} g}{-r_{z+} r_{z-} g (-1) r_{z+} r_{z-} g_{z_-}} = 1.$$

5.8. ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ СХЕМЫ С ТОКОВЫМ КОНВЕЙЕРОМ НА ОСНОВЕ ЗЭН И НУЛЛАТОРА

Требуется сформировать символьное выражение относительной чувствительности коэффициента передачи напряжения $K = \underline{U}_Z / \underline{E}$ по

проводимости Y_4 схемы с токовым конвейером ССII+ (рис. 5.8.1,а) [106].

На рис. 5.8.1,б дана ее схема замещения с зеркальным элементом тока.



Рис. 5.8.1. Схема с токовым конвейером (а) и его схема замещения на аномальных элементах – нуллаторе и ЗЭТ (б)

Расчет выполняется по формуле (5.4.1) для относительной чувствительности коэффициента передачи напряжения по двухполюсной проводимости, которая с учетом совпадения номеров некоторых узлов на рис. 5.8.1,б имеет вид

$$S_{Y_4}^K = -Y \frac{\Delta_{1(5+3)} \Delta_{11,(5+3)3}}{\Delta_{11} \Delta_{13}}. \quad (5.8.1)$$

Для получения искомого символьного выражения необходимо сформировать 4 МСАД из (5.8.1). Схемно-алгебраическое выражение для Δ_{13} получается из схемы замещения на рис. 5.8.1,б путем замены источника ЭДС норатором, а приемника напряжения нуллатором. Удалим из схемы проводимости Y_6 и Y_3 , параллельные нуллаторам, вынесем за знак определителя проводимость Y_1 , последовательную с норатором. В результате получим

$$\Delta_{13} = \left| \begin{array}{c} \text{Diagram of the circuit from Fig. 5.8.1(b) with } Y_6 \text{ and } Y_3 \text{ removed, } Y_1 \text{ moved to the left, and } Y_2 \text{ moved to the right.} \\ \text{Diagram of the circuit from Fig. 5.8.1(b) with } Y_6 \text{ and } Y_3 \text{ removed, } Y_1 \text{ moved to the left, and } Y_2 \text{ moved to the right.} \end{array} \right| = Y_1 \left| \begin{array}{c} \text{Diagram of the circuit from Fig. 5.8.1(b) with } Y_6 \text{ and } Y_3 \text{ removed, } Y_1 \text{ moved to the left, and } Y_2 \text{ moved to the right.} \\ \text{Diagram of the circuit from Fig. 5.8.1(b) with } Y_6 \text{ and } Y_3 \text{ removed, } Y_1 \text{ moved to the left, and } Y_2 \text{ moved to the right.} \end{array} \right|. \quad (5.8.2)$$

Выделим в (5.8.2) проводимость Y_4 , получим

$$\Delta_{13} = Y_1 \left(\begin{array}{c|c} \text{Diagram 1:} & \text{Diagram 2:} \\ \begin{array}{c} \text{Circuit diagram showing nodes } y, x, z, 1, 2. \text{ Resistors } Y_5, Y_4, Y_2, Y_3, \text{ and a dependent source } Y_1 \text{ are present.} \\ \text{Diagram 1 has node } 1 \text{ at the top, } 2 \text{ at the bottom, } y \text{ on the left, } x \text{ in the middle, and } z \text{ on the right.} \\ \text{Diagram 2 has node } 1 \text{ at the top, } 2 \text{ at the bottom, } y \text{ on the left, } x \text{ in the middle, and } z \text{ on the right.} \end{array} & + \\ \end{array} \right). \quad (5.8.3)$$

В первом слагаемом из формулы (5.8.3) удалим проводимость Y_2 , параллельную норатору 1, переключим полюс этого норатора с общего зажима на полюс y , заменим полученное параллельное соединение норатора и нуллатора с номером 1 идеальным проводником, удалим последовательное соединение норатора 2 и нуллатора 2, запишем определитель элементарной схемы – параллельного соединения проводимостей Y_4 и Y_5 . Во втором слагаемом (5.8.3) удалим проводимость Y_5 , образующую контур с нораторами, поменяем взаимно номера у нуллаторов с учетом изменения знака слагаемого на отрицательный, удалим последовательное соединение норатора и нуллатора с номером 2, заменим идеальным проводником параллельное встречное включение одноименных норатора и нуллатора с изменением знака на противоположный – положительный. Получим определитель такой же элементарной схемы, как и в первом слагаемом – параллельного соединения проводимостей Y_2 и Y_4 . В результате формула (5.8.3) приводится к виду

$$\Delta_{13} = Y_1(2Y_4 + Y_2 + Y_5). \quad (5.8.4)$$

Схемно-алгебраическое выражение для Δ_{11} получается из схемы замещения на рис. 5.8.1,б путем замены источника ЭДС проводником и удаления приемника искомого напряжения U_z . После удаления проводимости Y_6 , параллельной нуллатору, и выделения проводимости Y_1 получается следующее схемно-алгебраическое выражение:

$$\Delta_{11} = \left| \begin{array}{c} \text{Diagram 1: } Y_6, Y_5, Y_4 \text{ in series; } Y_1, Y_2 \text{ in parallel with } Y_3 \\ \text{Diagram 2: } Y_5, Y_4 \text{ in series; } Y_2, Y_3 \text{ in parallel with } Y_1 \\ \text{Diagram 3: } Y_5, Y_4 \text{ in series; } Y_2, Y_3 \text{ in parallel with } Y_1 \end{array} \right| = Y_1 \left| \begin{array}{c} \text{Diagram 1: } Y_5, Y_4 \text{ in series; } Y_2, Y_3 \text{ in parallel with } Y_1 \\ \text{Diagram 2: } Y_5, Y_4 \text{ in series; } Y_2, Y_3 \text{ in parallel with } Y_1 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \text{Diagram 1: } Y_5, Y_4 \text{ in series; } Y_2, Y_3 \text{ in parallel with } Y_1 \\ \text{Diagram 2: } Y_5, Y_4 \text{ in series; } Y_2, Y_3 \text{ in parallel with } Y_1 \end{array} \right|. \quad (5.8.5)$$

В первом слагаемом (5.8.5) удалим проводимость Y_2 , параллельную нуллатору, выделим ЗЭТ. Во втором слагаемом выделим проводимость Y_5 , последовательную с нуллатором, удалим проводимость Y_4 , параллельную с нуллатором, выделим ЗЭТ. В результате получим

$$\Delta_{11} = Y_1 \left(\left| \begin{array}{c} Y_5 \\ Y_4 \\ Y_3 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} Y_5 \\ Y_4 \\ Y_3 \end{array} \right| \right) + Y_5 \left(\left| \begin{array}{c} Y_2 \\ Y_3 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} Y_2 \\ Y_3 \end{array} \right| \right). \quad (5.8.6)$$

В первом схемном определителе из (5.8.6) заменим проводником параллельное соединение норатора и нуллатора, найдем определитель полученного параллельного соединения трех проводимостей Y_3 , Y_4 и Y_5 . Во втором схемном определителе выделим проводимость Y_4 , удалим проводимости Y_3 и Y_5 , определитель параллельного соединения норатора и нуллатора равен 1. В третьем схемном определителе удалим и выделим проводимости Y_2 и Y_3 , после этого остается определитель уже упомянутого параллельного соединения норатора и нуллатора. Четвертый схемный определитель раскрывается так же, как и третий определитель, результат отличается знаком и номером проводимости. Таким образом, искомый определитель имеет вид

$$\Delta_{11} = Y_1(2Y_4 + Y_3 + Y_5) + Y_5(Y_3 - Y_2). \quad (5.8.7)$$

Символьное выражение для МСАД $\Delta_{1(5+3)}$ формируется аналогично Δ_{11} и Δ_{13} :

$$\Delta_{1(5+3)} = \left| \begin{array}{c} \text{Circuit Diagram} \\ \text{with nodes } y, x, z; \text{ resistors } Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6; \text{ and a dependent source } 1 \\ \text{and a voltage-controlled voltage source } 2. \end{array} \right| = Y_1 \left(\left| \begin{array}{c} \text{Circuit Diagram} \\ \text{with nodes } y, x, z; \text{ resistors } Y_1, Y_2, Y_3; \text{ and a dependent source } 1 \\ \text{and a voltage-controlled voltage source } 2. \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \text{Circuit Diagram} \\ \text{with nodes } y, x, z; \text{ resistors } Y_1, Y_2, Y_3; \text{ and a dependent source } 1 \\ \text{and a voltage-controlled voltage source } 2. \end{array} \right| \right) = Y_1(Y_3 - Y_2). \quad (5.8.8)$$

Символьное выражение для МСАД $\Delta_{11,(5+3)3}$ формируется с учетом формулы (2.3.3) выделения нечетного контура, содержащего один ЗЭТ и норатор. В результате, получаем

$$\Delta_{11,(5+3)} = \left| \begin{array}{c} \text{Circuit Diagram} \\ \text{with nodes } y, x, z; \text{ resistors } Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6; \text{ and a dependent source } 1 \\ \text{and a voltage-controlled voltage source } 2. \end{array} \right| = 2 \left| \begin{array}{c} \text{Circuit Diagram} \\ \text{with nodes } y, x, z; \text{ resistors } Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6; \text{ and a dependent source } 1 \\ \text{and a voltage-controlled voltage source } 2. \end{array} \right| = -2(Y_1 + Y_5). \quad (5.8.9)$$

После подстановки (5.8.4), (5.8.7)–(5.8.9) в (5.8.1) и сокращения дроби на Y_1 получаем искомую функцию чувствительности

$$S_{Y_4}^K = Y_4 \frac{2(Y_3 - Y_2)(Y_1 + Y_5)}{[Y_1(2Y_4 + Y_3 + Y_5) + Y_5(Y_3 - Y_2)](2Y_4 + Y_2 + Y_5)}. \quad (5.8.10)$$

Как видно, промежуточные и окончательные выражения для числителя и знаменателя передаточной функции токового конвейера, полученные с помощью формул выделения ЗЭТ, не содержат избыточных взаимно уничтожающихся слагаемых в отличие от формул по методу узловых напряжений [37].

5.9. ФОРМУЛЫ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ПО ПАРАМЕТРУ КРАТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В электрических цепях некоторые элементы повторяются многократно – это дискретные элементы одного типономинала или интегральные элементы, выполненные по одной технологии и имеющие одинаковые параметры. Исследовать характеристики таких цепей целесообразно, используя выражения чувствительности по параметру всех одинаковых элементов, поскольку в процессе производства и эксплуатации параметры таких элементов изменяются синхронно.

Вывод формулы для чувствительности коэффициента передачи цепи по параметру кратной проводимости. К каждой стороне схемы (рис. 5.9.1,а) с номерами 1, 2, ..., k, ..., n подключена проводимость g . Стрелками указаны условно положительные направления ветвей. Требуется вывести схемно-алгебраическую формулу для относительной чувствительности S_g^K коэффициента передачи напряжения $K=U/E$ по проводимости g .

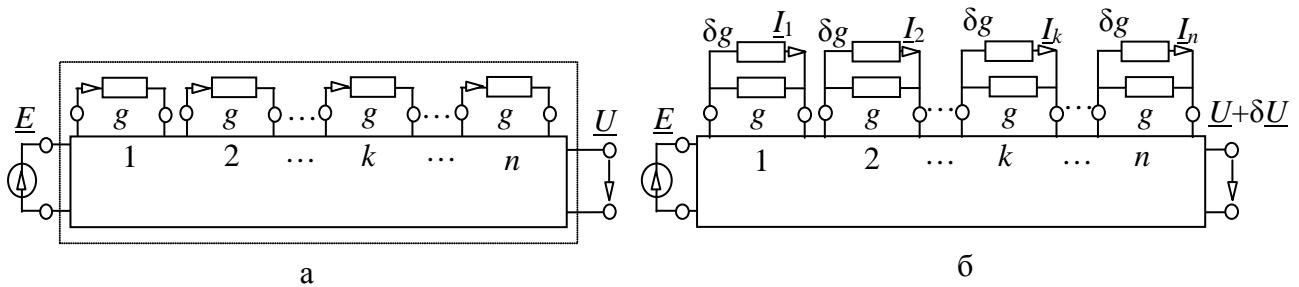
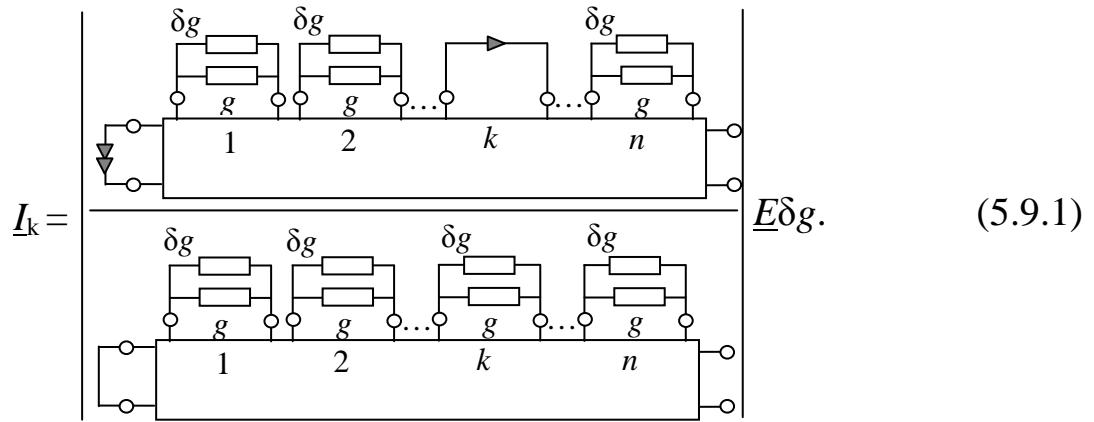


Рис. 5.9.1. Исходная схема (а) и схема после приращения проводимостей g на величину δg (б)

Пусть проводимость g получила некоторое приращение δg . При этом выходное напряжение получит, в свою очередь, приращение δU (рис. 5.9.1,б).

Ток проводимости δg , например, подключенной к стороне k , находится по формуле (строка 2 в табл. 1.2.1)



При формировании выражения (5.9.1) выделена проводимость δg , последовательная с нуллатором, и удалена проводимость g , параллельная нуллатору. Формула (5.9.1) может быть записана кратко

$$I_k = \frac{\Delta_{E \rightarrow -NR; k \rightarrow NL; \underline{U} \rightarrow 0; g \rightarrow g + \delta g}}{\Delta_{E \rightarrow 0; \underline{U} \rightarrow 0; g \rightarrow g + \delta g}} \cdot \underline{E} \delta g, \quad (5.9.2)$$

где Δ – определитель схемы, полученной из исходной схемы на рис. 5.9.1, путем выполнения схемных операций, указанных в индексах; индексы $E \rightarrow -NR$, $g \rightarrow g + \delta g$ означают, что источник ЭДС E и проводимость g заменены на нуллор и проводимость $(g + \delta g)$ соответственно, минус перед NR указывает на направление норатора, противоположное ЭДС; индекс $k \rightarrow NL$ – к стороне k подключен нуллатор; $E \rightarrow 0$, $U \rightarrow 0$ – источник ЭДС заменен идеальным проводником, приемник напряжения удален.

По теореме компенсации проводимости δg в схеме на рис. 5.9.1, б можно заменить эквивалентным образом источниками тока с параметрами, равными токам соответствующих проводимостей (рис. 5.9.2, а), так $J_k = I_k$. По теореме наложения получим из схемы на рис. 5.9.2, а схему для приращения напряжения $\delta \underline{U}$ (рис. 5.9.2, б).

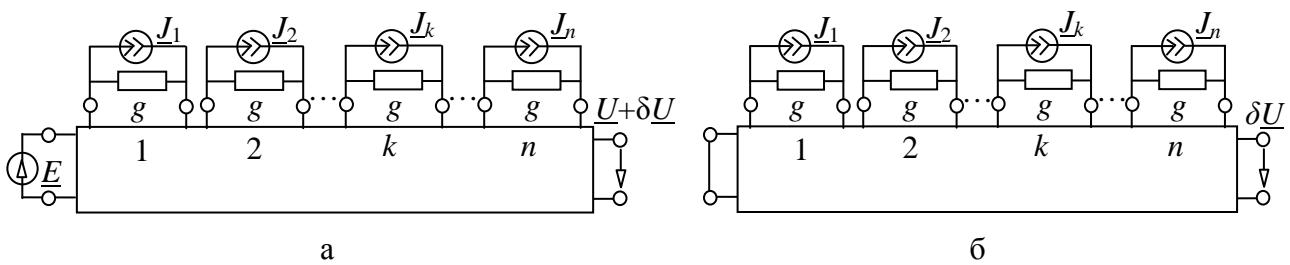


Рис. 5.9.2. Схема после замены проводимостей δg источниками тока (а); схема для приращения $\delta \underline{U}$ (б)

Величина приращения напряжения находится по методу наложения по схеме на рис. 5.9.2,б

$$\delta \underline{U} = \frac{\sum_k \Delta_{(рис.5.9.2,б при J_i \xrightarrow{i=1,n} 0; k \rightarrow -NR; \delta \underline{U} \rightarrow NL)}}{\Delta_{(рис.5.9.2,б при J_i \xrightarrow{i=1,n} 0; \delta \underline{U} = 0)}} \underline{J}_k, \quad (5.9.3)$$

где Δ – здесь и далее определитель схемы, полученной из схемы на рис. 5.9.2,б с помощью схемных операций, которые указаны в виде индексов; индексы $J_i \xrightarrow{i=1,n} 0$; $\delta U \rightarrow 0$; $\delta U \rightarrow NL$; $k \rightarrow NR$ – означают: удаление всех источников тока, удаление приемника напряжения, замену приемника напряжения нуллатором и подключение норатора к стороне k соответственно.

Формула для приращения напряжения (5.9.3) может быть записана на основе исходной схемы на рис. 5.9.1,а

$$\delta \underline{U} = \frac{\sum_{k=1}^n \Delta_{E \rightarrow 0; k \rightarrow -NR; \underline{U} \rightarrow NL}}{\Delta_{E \rightarrow 0; \underline{U} \rightarrow 0}} \underline{J}_k, \quad (5.9.4)$$

где выражения у Δ аналогичны ранее приведенным индексам.

Подставим в формулу (5.9.4) выражения для токов источников из (5.9.2), получим приращение напряжения в виде

$$\delta \underline{U} = \frac{\sum_{k=1}^n \Delta_{E \rightarrow 0; k \rightarrow -NR; \underline{U} \rightarrow NL} \cdot \Delta_{E \rightarrow NR; k \rightarrow NL; \underline{U} \rightarrow 0; g \rightarrow g + \delta g}}{\Delta_{E \rightarrow 0; \underline{U} \rightarrow 0} \cdot \Delta_{E \rightarrow 0; \underline{U} \rightarrow 0; g \rightarrow g + \delta g}} \underline{E} \delta g. \quad (5.9.5)$$

Приращение комплексного коэффициента передачи напряжения находится из (5.9.5) по формуле $\delta \underline{K} = \delta \underline{U} / \underline{E}$. Абсолютную (дифференциальную) чувствительность коэффициента K можно определить как отношение $\delta K / \delta g$ при $\delta g \rightarrow 0$. Соответствующая формула имеет вид

$$\frac{d \underline{K}}{dg} = \frac{\sum_{k=1}^n \Delta_{E \rightarrow 0; k \rightarrow -NR; \underline{U} \rightarrow NL} \cdot \Delta_{E \rightarrow NR; k \rightarrow NL; \underline{U} \rightarrow 0}}{\Delta_{E \rightarrow 0; \underline{U} \rightarrow 0}^2}. \quad (5.9.6)$$

Подставим (5.9.6) и формулу для коэффициента передачи напряжения

$$\underline{K} = \Delta_{\underline{U} \rightarrow NL; E \rightarrow NR} / \Delta_{E \rightarrow 0; \underline{U} \rightarrow 0}$$

в (5.1.1) с учетом обозначения схемной функции, в результате получим исходную формулу относительной чувствительности по многократному параметру

$$S_g^K = \frac{\sum_{k=1}^n \Delta_{E \rightarrow 0; k \rightarrow -NR; \underline{U} \rightarrow NL} \cdot \Delta_{E \rightarrow NR; k \rightarrow NL; \underline{U} \rightarrow 0}}{\Delta_{E \rightarrow 0; \underline{U} \rightarrow 0} \cdot \Delta_{\underline{U} \rightarrow NL; E \rightarrow -NR}}. \quad (5.9.7)$$

Как видно из (5.9.7), чувствительность функции по многократному параметру равна сумме чувствительностей этой функции по всем элементам с одинаковым параметром. Используя формулы для однократного параметра в табл. 5.2.1, можно записать формулы для чувствительности произвольной схемной функции по многократному параметру различных элементов. Так, формула для чувствительности коэффициента передачи напряжения по проводимости Y источника тока, управляемого током (рис. 5.9.3), имеет вид

$$S_Y^K = \frac{\sum_{k=1}^n \Delta_{E \rightarrow 0; k \rightarrow -NR; \underline{U} \rightarrow NL} \cdot \Delta_{E \rightarrow NR; k \rightarrow NL; \underline{U} \rightarrow 0}}{\Delta_{E \rightarrow 0; \underline{U} \rightarrow 0} \cdot \Delta_{\underline{U} \rightarrow NL; E \rightarrow -NR}}.$$

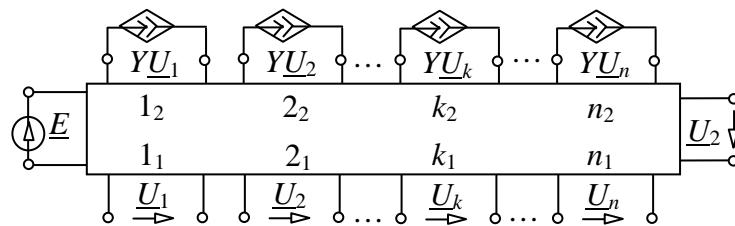


Рис. 5.9.3. Схема с n -кратным параметром ИТУН Y

Построение функции чувствительности фильтра нижних частот по кратной проводимости. Схема фильтра дана на рис. 5.9.4 [74]. Требуется найти чувствительность коэффициента передачи по емкости C_1 , которая присутствует в схеме дважды.

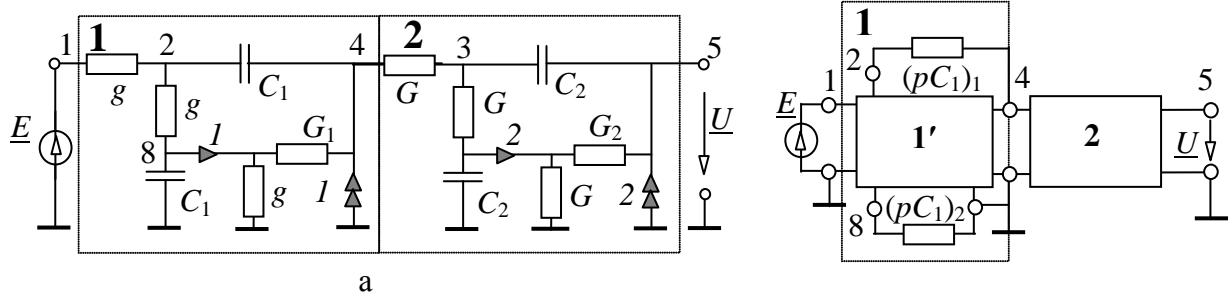


Рис. 5.9.4. Фильтр нижних частот: исходная схема (а) и схема из многополюсников, где проводимости конденсаторов C_1 помечены дополнительными индексами 1 и 2 (б)

Представим исходную схему в виде соединения двух многополюсников 1 и 2 (рис. 5.9.4, б), структуры которых идентичны, а отличаются они только параметрами элементов. Запишем формулу (5.9.7) для двукратной проводимости pC_1

$$S_{pC_1}^K = \frac{\sum_{k=1}^2 \Delta_{E \rightarrow 0; (pC_1)_k \rightarrow -NR; \underline{U} \rightarrow NL} \cdot \Delta_{E \rightarrow NR; (pC_1)_k \rightarrow NL; \underline{U} \rightarrow 0}}{\Delta_{E \rightarrow 0; \underline{U} \rightarrow 0} \cdot \Delta_{\underline{U} \rightarrow NL; E \rightarrow -NR}} = \frac{N_1 N_2 + N_3 N_4}{DN}, \quad (5.9.8)$$

где D – определитель схемы; N – числитель коэффициента передачи напряжения; N_1, N_2, N_3, N_4 – краткие обозначения алгебраических дополнений.

Схемно-алгебраическая формула для определителя схемы имеет вид

$$D = \left| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 8 \\ \vdots \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 8 \end{array} \right|_{(pC_1)_1} \left| \begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 8 \end{array} \right|_{(pC_1)_2} = \left| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 8 \\ \vdots \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 8 \end{array} \right|_{(pC_1)_1} \left| \begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 8 \end{array} \right|_{(pC_1)_2} \left| \begin{array}{c} 2 \\ \vdots \\ 8 \end{array} \right|. \quad (5.9.9)$$

Числитель коэффициента передачи напряжения имеет вид

$$N = \left| \begin{array}{c} \text{Diagram of } N \\ \text{with nodes 1, 2, 4, 5, 8, } (pC_1)_1, \text{ and } (pC_1)_2 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} \text{Diagram of } N \\ \text{with nodes 1, 2, 4, 5, 8, } (pC_1)_1, \text{ and } (pC_1)_2 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \text{Diagram of } N \\ \text{with node 2 only} \end{array} \right| . \quad (5.9.10)$$

Алгебраические дополнения из (5.9.7) имеют вид

$$N_1 = \left| \begin{array}{c} \text{Diagram of } N_1 \\ \text{with nodes 1, 2, 4, 5, 8, } (pC_1)_1, \text{ and } (pC_1)_2 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} \text{Diagram of } N_1 \\ \text{with nodes 1, 2, 4, 5, 8, } (pC_1)_1, \text{ and } (pC_1)_2 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \text{Diagram of } N_1 \\ \text{with node 2 only} \end{array} \right| . \quad (5.9.11)$$

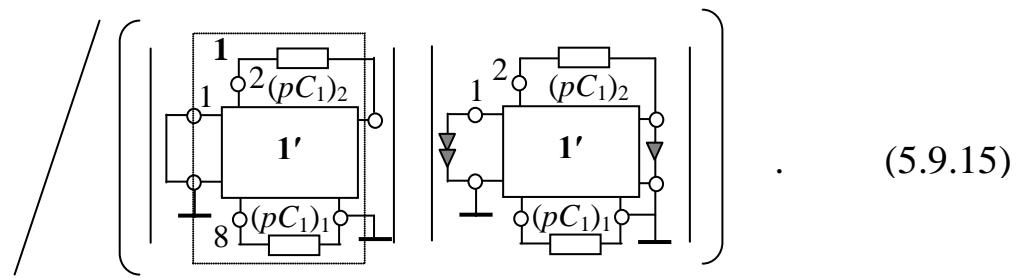
$$N_2 = \left| \begin{array}{c} \text{Diagram of } N_2 \\ \text{with nodes 1, 2, 4, 5, 8, } (pC_1)_1, \text{ and } (pC_1)_2 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} \text{Diagram of } N_2 \\ \text{with nodes 1, 2, 4, 5, 8, } (pC_1)_1, \text{ and } (pC_1)_2 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \text{Diagram of } N_2 \\ \text{with node 2 only} \end{array} \right| ; \quad (5.9.12)$$

$$N_3 = \left| \begin{array}{c} \text{Diagram of } N_3 \\ \text{with nodes 1, 2, 4, 5, 8, } (pC_1)_1, \text{ and } (pC_1)_2 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} \text{Diagram of } N_3 \\ \text{with nodes 1, 2, 4, 5, 8, } (pC_1)_1, \text{ and } (pC_1)_2 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \text{Diagram of } N_3 \\ \text{with node 2 only} \end{array} \right| ; \quad (5.9.13)$$

$$N_4 = \left| \begin{array}{c} \text{Diagram of } N_4 \\ \text{with nodes 1, 2, 4, 5, 8, } (pC_1)_1, \text{ and } (pC_1)_2 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} \text{Diagram of } N_4 \\ \text{with nodes 1, 2, 4, 5, 8, } (pC_1)_1, \text{ and } (pC_1)_2 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \text{Diagram of } N_4 \\ \text{with node 2 only} \end{array} \right| . \quad (5.9.14)$$

После подстановки алгебраических дополнений (5.9.9)–(5.9.14) в (5.9.8) и сокращения дроби получаем следующее выражение для чувствительности:

$$S_{pC_1}^K = \left(\left| \begin{array}{c} \text{Diagram of } S_{pC_1}^K \\ \text{with nodes 1, 2, 4, 5, 8, } (pC_1)_1, \text{ and } (pC_1)_2 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \text{Diagram of } S_{pC_1}^K \\ \text{with nodes 1, 2, 4, 5, 8, } (pC_1)_1, \text{ and } (pC_1)_2 \end{array} \right| \right) /$$



Нахождение сомножителей из (5.9.15):

$$\left| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 8 \\ (pC_1)_2 \\ (pC_1)_1 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} 1 \\ g \\ 2 \\ g \\ pC_1 \\ 8 \\ I \\ pC_1 \\ g \\ G_1 \\ 1 \end{array} \right| = gG_1(g+y_1)+[(g+y_1)y_1G_1-gy_1g]; \quad (5.9.16)$$

$$\left| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ (pC_1)_2 \\ (pC_1)_1 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} 1 \\ g \\ 2 \\ g \\ pC_1 \\ 8 \\ I \\ pC_1 \\ g \\ G_1 \\ 1 \end{array} \right| = g^2(g+G_1); \quad (5.9.17)$$

$$\left| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ (pC_1)_2 \\ 8 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} 1 \\ g \\ 2 \\ g \\ pC_1 \\ 8 \\ I \\ 2 \\ 2 \\ g \\ G_1 \\ 1 \end{array} \right| = g^2G_1; \quad (5.9.18)$$

$$\left| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ (pC_1)_2 \\ (pC_1)_1 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} 1 \\ g \\ 2 \\ g \\ pC_1 \\ 8 \\ I \\ 2 \\ 2 \\ g \\ G_1 \\ 2 \end{array} \right| = -(g+G_1)(2g+y_1); \quad (5.9.19)$$

$$\left| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ (pC_1)_2 \\ 8 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} 1 \\ g \\ 2 \\ g \\ pC_1 \\ 8 \\ I \\ G_1 \\ 1 \end{array} \right| = g(-g^2+y_1G_1); \quad (5.9.20)$$

$$\left| \begin{array}{c} 2 \\ | \\ 1 \\ | \\ 1' \\ | \\ 8 \\ | \\ (pC_1)_1 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ g \\ | \\ 8 \\ | \\ pC_1 \\ | \\ g \\ | \\ G_1 \\ | \\ I \\ | \\ \text{---} \end{array} \right| = -g(g + G_1), \quad (5.9.21)$$

где в символьных выражениях проводимость pC_1 заменена на y_1 .

После подстановки выражений (5.9.15)–(5.9.20) в (5.9.14) получаем единое выражение для искомой чувствительности

$$S_{pC_1}^K = \frac{y_1[-g^2G_1(g+G_1)(2g+y_1)-g(-g^2+y_1G_1)g(g+G_1)]}{\{gG_1(g+y_1)+[(g+y_1)y_1G_1-g^2y_1]\}g^2(g+G_1)}.$$

После сокращения дроби на $g^2(g+G_1)$ и удаления слагаемых, равных по модулю, но противоположных по знаку, которые образуются из-за наличия в схеме элементов с одинаковой проводимостью, получаем следующую формулу

$$S_{pC_1}^K = \frac{y_1[-G_1(2g+y_1)-(-g^2+y_1G_1)]}{gG_1(g+y_1)+[(g+y_1)y_1G_1-g^2y_1]} = \frac{y_1[-2G_1(g+y_1)+g^2]}{G_1(g+y_1)^2-g^2y_1}.$$

Как видно, относительная чувствительность схемы зависит только от параметров первой подсхемы, которая содержит варьируемый параметр, и не зависит от параметров второй подсхемы без варьируемого параметра. Это объясняется тем, что определитель схемы представляется в виде произведения определителей двух подсхем.

Утверждение. Если определители числителя и знаменателя схемной функции могут быть представлены в виде произведений определителей двух подсхем, причем варьируемый параметр находится только в одной из подсхем, то относительная чувствительность функции будет зависеть только от параметров подсхемы с варьируемым параметром.

Это положение доказывается по определению относительной чувствительности (5.1.1). Пусть произвольная схемная функция представлена в виде

$$K = \frac{A_1(x) \cdot A_2}{D_1(x) \cdot D_2},$$

где $A_1(x)$, $D_1(x)$ – определители подсхемы 1, содержащей варьируемый параметр x , в числителе и знаменателе схемной функции соответственно; A_2 , D_2 – определители подсхемы 2 без варьируемого параметра.

По определению относительная чувствительность имеет вид

$$S_x^K = \frac{x}{K} \cdot \frac{dK}{dx} = \frac{xD_1(x) \cdot D_2}{A_1(x) \cdot A_2} \cdot \frac{A_2 \frac{dA_1(x)}{dx} D_1(x) \cdot D_2 - A_1(x) \cdot A_2 \frac{dD_1(x)}{dx}}{D_1^2(x) \cdot D_2^2}.$$

После сокращения дроби получается выражение для относительной чувствительности

$$S_x^K = \frac{x}{A_1(x)} \cdot \frac{\frac{dA_1(x)}{dx} D_1(x) - A_1(x) \frac{dD_1(x)}{dx}}{D_1(x)},$$

которое содержит определители подсхемы 1 с переменным параметром x и не содержит определители подсхемы 2 без переменного параметра x .

5.10. ВЫВОДЫ

Формула Боде для чувствительности коэффициента передачи напряжения по передаточной проводимости или сопротивлению обобщена на произвольные схемные функции и схемы с любыми линейными элементами, в том числе, аномальными нуллорными и зеркальными элементами. Набор предложенных формул на основе МСАД сводится всего к двум обобщенным формулам.

Предложены формулы, исключающие образование избыточных множителей в числителе и знаменателе функций чувствительности путем учета особенностей подсоединения элементов.

Разложение МСАД с помощью метода схемных определителей обеспечивает наглядное получение компактно свернутых выражений для функций чувствительности без взаимно уничтожающихся слагаемых.

6. ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД СХЕМНЫХ МИНОРОВ

6.1. МЕТОД СХЕМНЫХ МИНОРОВ

Метод схемных миноров [57, 62] дополняет аппарат схемных определителей [55] для символьного анализа сложных электрических цепей по частям. Формирование минимальных по сложности выражений функций и откликов требует выбора подсхем согласно принципу половинного деления [53]. Однако наличие управляющих связей между подсхемами нередко препятствует делению схемы на примерно равные части без увеличения числа общих узлов подсхем, что усложняет анализ.

В традиционных диакоптических методах предусматривается выбор подсхем, связанных только гальванически [46], считается нежелательным наличие управляющих связей между подсхемами [22] или такие подсхемы упрощаются независимо от управляющих связей между ними [67].

Метод схемных миноров получил развитие в работах [30,33,34], что позволило выбирать подсхемы с идеальными (нуллорными) связями между ними. Целью настоящей главы является обобщение метода схемных миноров для анализа произвольных линейных схем, содержащих подсхемы с любыми – конечными и нуллорными – параметрами связи.

Отсутствие взаимно уничтожающихся слагаемых – центральное свойство схемного определителя и минора, которое отличает их от матричного определителя и минора [62]. Схемный определитель, как и определитель матрицы, можно разложить по минорам. Минор матрицы образуется вычеркиванием строк и столбцов, а минор схемы – подключением аномальных элементов (норатора и нуллатора) между соответствующими узлами и базисным узлом [57].

В исходном методе схемных миноров [57, 62] для объединения выбранных подсхем используются *равновесные схемные миноры*, которые образованы одинаковым числом нораторов и нуллаторов. Для разложения определителя схемы рекурсивно используется формула бисекции

$$\Delta = \sum_{i=1}^{\psi_q} (-1)^\xi \Delta_1^i(V_i) \Delta_2^i(\bar{V}_i), \quad (6.1.1)$$

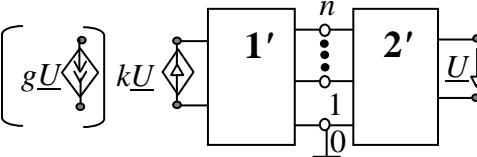
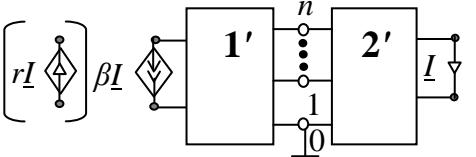
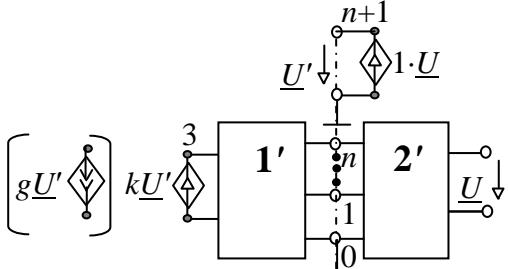
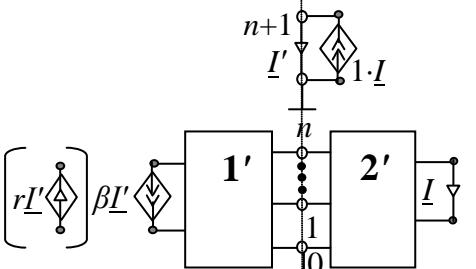
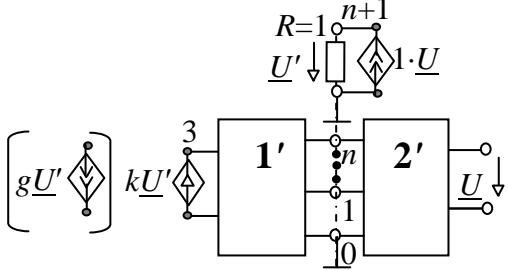
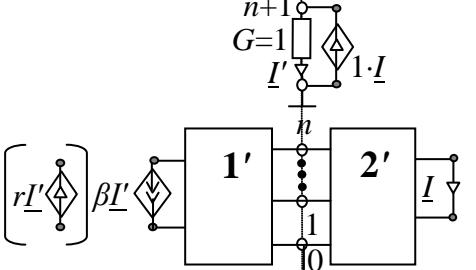
где $\Delta_1^i(V_i)$ и $\Delta_2^i(\bar{V}_i)$ – i -е миноры первой и второй подсхемы, соответствующие двоичной переменной V_i и ее дополнению \bar{V}_i ; $V_i = [x_1 \ x_2 \dots \ x_n \ y_1 \ y_2 \dots \ y_n]$; $[x_1 \ x_2 \dots \ x_n]$, $[y_1 \ y_2 \dots \ y_n]$ – нораторная и нуллаторная составляющая V_i соответственно; ξ – параметр, равный сумме номеров ненулевых позиций переменных V_i или \bar{V}_i ; ψ_q – число миноров первой и второй подсхем с $q=n+1$ общими узлами. Разряды двоичных переменных $x_j=1$ ($y_j=1$), если к j -му полюсу подключен норатор (нуллатор), или $x_j=0$ ($y_j=0$), если у j -го полюса норатор (нуллатор) отсутствует.

6.2. ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА СХЕМНЫХ МИНОРОВ ДЛЯ ПОДСХЕМ С КОНЕЧНЫМИ УПРАВЛЯЮЩИМИ СВЯЗЯМИ

В основе обобщения лежит преобразование управляемых связей в гальванические с помощью дополнительного управляемого источника (УИ) с единичным параметром (табл. 6.2.1). Один полюс этого УИ служит дополнительным общим узлом подсхем, а второй – подключается к базисному узлу. Управляющей переменной дополнительного УИ является соответствующая переменная управляемой связи подсхемы 2. Напряжение или ток дополнительного УИ задает новую управляемую переменную для подсхемы 1.

Исходные схемы показаны в строке с номером 0 табл.6.2.1. Дополнительный УИ является: источником напряжения, управляемым напряжением (ИНУН) – ячейка 1-1; источником тока, управляемым напряжением (ИТУН) – ячейка 2-1; источником тока, управляемым током (ИТУТ) – ячейка 1-2; источником напряжения, управляемым током (ИНУТ) – ячейка 2-2. Эквивалентность схем с дополнительными УИ исходным схемам доказывается по формулам выделения УИ [55].

Таблица 6.2.1. Замещение управляющей связи гальванической

№	1	2
0	Схема с источником напряжения (тока), управляемым напряжением 	Схемы с источником тока (напряжения), управляемым током 
1	Схема с дополнительным ИНУН 	Схема с дополнительным ИТУТ 
2	Схема с дополнительным ИТУН 	Схема с дополнительным ИНУТ 

Дополнительные УИ позволяют сохранить состав рассматриваемых подсхем, выбранных по функциональному признаку или по правилу половинного деления. При этом число дополнительных общих узлов не превышает числа разрываемых управляющих связей.

6.3. АНАЛИЗ НЕСИММЕТРИЧНОГО СИНХРОННОГО ГЕНЕРАТОРА С НАГРУЗКОЙ

Схема замещения генератора [69] с сопротивлениями линии и нагрузкой показана на рис. 6.3.1 [36]. Требуется найти символьное выражение тока I_1 .

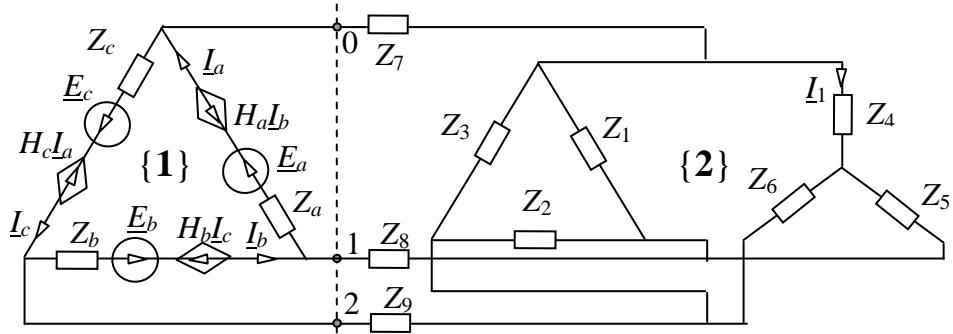


Рис. 6.3.1. Схема замещения синхронного генератора с нагрузкой

Исходная схема разделена на две примерно одинаковые по сложности подсхемы 1 и 2 (рис. 6.3.1). Задачу нахождения отклика удобно свести к нахождению одного определителя замкнутой схемы [66]. Замкнутая схема получается путем замены независимых источников ЭДС источниками напряжения, управляемыми искомым откликом.

Для разложения определителя замкнутой схемы по минорам подсхем 1 и 2 избавимся от трех управляющих связей с помощью предложенного в ячейке 1-2 табл. 6.2.1 вспомогательного единичного ИТУТ. Отсюда получаем

$$\Delta = \left| \begin{array}{c} \text{Diagram of the closed-loop circuit with controlled voltage sources } E_a I_1, E_b I_1, E_c I_1 \text{ instead of independent voltage sources } E_a, E_b, E_c. \\ \text{The diagram is identical to Fig. 6.3.1, but the voltage sources } E_a, E_b, E_c \text{ are replaced by } E_a I_1, E_b I_1, E_c I_1. \\ \text{The circuit is divided into two minor schemes: } \{1\} \text{ on the left and } \{2\} \text{ on the right.} \end{array} \right|. \quad (6.3.1)$$

Для раскрытия определителя (6.3.1) применяется формула (6.1.1) при $q=4$. Каждая подсхема задается 20-ю схемными минорами: 1) 000000; 2) 001001; 3) 001010; 4) 001100; 5) 010001; 6) 010010; 7) 010100; 8) 011011; 9) 011101; 10) 011110; 11) 100001; 12) 100010; 13) 100100; 14) 101011; 15) 101101; 16) 101110; 17) 110011; 18) 110101; 19) 110110; 20) 111111. Нумерация разрядов (позиций) двоичных переменных имеет вид: 123123.

Ненулевыми будут лишь те миноры подсхемы 1, которые содержат единицу и ноль в третьих позициях нораторной и нуллаторной частей соответственно. Таких схемных миноров всего 4 – с номерами 3, 4, 10 и 16. После выделения параметров элементов по методу схемных определителей [53] эти миноры принимают вид соответственно

$$\begin{aligned} V_{11} &= -(E_a + E_b)(Z_c + H_c) + E_c(Z_a + Z_b + H_a + H_b); \\ V_{12} &= -E_a(Z_b + Z_c + H_b + H_c) + (E_b + E_c)(Z_a + H_a); \\ V_{13} &= -E_a(H_b H_c - Z_b Z_c) + (E_c H_b - E_b Z_c)(Z_a + H_a); \\ V_{14} &= -E_a H_c (Z_b + H_b) - E_b (Z_c Z_a + H_a H_c) + E_c Z_a (Z_b + H_b), \end{aligned} \quad (6.3.2)$$

где первая цифра индекса при обозначении ненулевого минора означает его принадлежность к подсхеме, а вторая – порядковый номер.

При обнулении дополнительного УИ управляющая ветвь преобразуется в идеальный проводник. При этом ненулевыми будут лишь миноры, которые содержат в третьих позициях нули: 1, 6, 7, 12, 13 и 19. Эти миноры не содержат параметров независимых источников и образуют знаменатель отклика:

$$\begin{aligned} W_{11} &= H_a H_b H_c + Z_a Z_b Z_c; W_{12} = -H_a H_c + Z_a (Z_b + Z_c + H_b); \\ W_{13} &= H_c (H_a + H_b + Z_b) + Z_a Z_c; W_{14} = (H_a + Z_a)(H_b + Z_c); \\ W_{15} &= Z_c (H_a + Z_a + Z_b) - H_c H_b; W_{16} = H_a + H_b + H_c + Z_a + Z_b + Z_c. \end{aligned} \quad (6.3.3)$$

Миноры подсхемы 2 взаимно дополняют миноры подсхемы 1 из (6.3.2) и находятся аналогично:

$$\begin{aligned} V_{21} &= -[Z_1(Z_2((Z_5 + Z_8)Z_3 - Z_6Z_7) + Z_8Z_3(Z_5 + Z_6)) + Z_5Z_2Z_3(Z_7 + Z_8)]; \\ V_{22} &= Z_2(Z_3((Z_6 + Z_9)Z_1 - Z_5Z_7) + Z_1Z_6(Z_7 + Z_9)) + Z_1Z_3Z_9(Z_5 + Z_6); \\ V_{23} &= -Z_1[Z_3(Z_2 + Z_5 + Z_6) + Z_2Z_6]; V_{24} = -Z_3[Z_1(Z_2 + Z_5 + Z_6) + Z_2Z_5]. \end{aligned} \quad (6.3.4)$$

Миноры подсхемы 2, соответствующие (6.3.3), имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} W_{21} &= Z_1((Z_3 + Z_4)(Z_2 + Z_5 + Z_6) + Z_6(Z_2 + Z_5)) + (Z_4 + Z_5)(Z_2(Z_3 + Z_6) + Z_3Z_6) + \\ &+ Z_4Z_5(Z_2 + Z_3); W_{22} = (Z_7 + Z_9)W_{21} + Z_3((Z_4 + Z_6)(Z_2(Z_1 + Z_5) + Z_1Z_5) + Z_4Z_6(Z_1 + Z_2)); \\ W_{23} &= Z_7W_{21} + Z_1Z_3(Z_4(Z_2 + Z_5 + Z_6) + Z_5Z_6); W_{24} = W_{23}; \\ W_{25} &= (Z_7 + Z_8)W_{21} + Z_1((Z_2 + Z_3)(Z_6(Z_4 + Z_5) + Z_4Z_5) + Z_2Z_3(Z_4 + Z_5)); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{26} = & Z_7((Z_8 + Z_9)W_{21} + Z_2((Z_1 + Z_3)(Z_4(Z_5 + Z_6) + Z_5Z_6) + Z_1Z_3(Z_5 + Z_6))) + \\
& + (Z_3 + Z_9)((Z_1(Z_2 + Z_8) + Z_2Z_8)(Z_4(Z_6 + Z_5) + Z_5Z_6) + Z_1Z_2Z_8(Z_4 + Z_6)) + \\
& + Z_3Z_9((Z_2 + Z_5 + Z_6)(Z_1(Z_4 + Z_8) + Z_4Z_8) + (Z_2 + Z_6)Z_5(Z_1 + Z_8)). \quad (6.3.5)
\end{aligned}$$

Выражения (6.3.2) и (6.3.4) образуют числитель

$$N = -V_{11}V_{21} + V_{12}V_{22} + V_{13}V_{23} - V_{14}V_{24}, \quad (6.3.6)$$

а (6.3.3) и (6.3.5) – знаменатель отклика

$$D = W_{11}W_{21} + W_{12}W_{22} - W_{13}W_{23} - W_{14}W_{24} + W_{15}W_{25} + W_{16}W_{26}. \quad (6.3.7)$$

Отсюда

$$\underline{I}_1 = -N / D. \quad (6.3.8)$$

При пренебрежении сопротивлениями линии на рис. 6.3.1 формула (6.3.8) с подвыражениями (6.3.2)–(6.3.7) тождественна решению, полученному методом нуллорых схем [30]. Как видно, обобщенный метод схемных миноров менее трудоемок, поскольку не требует проверки нуллорных схем на совместимость.

Введение дополнительного УИ с единичным параметром позволило получить решение (6.3.6), (6.3.7) путем обработки 20-ти схемных миноров для каждой подсхемы вместо 70-ти, если перенести ветвь с искомым откликом в первую подсхему.

6.4. ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА СХЕМНЫХ МИНОРОВ ДЛЯ ПОДСХЕМ С НУЛЛОРНЫМИ СВЯЗЯМИ

При наличии нуллорной управляющей связи между подсхемами эти подсхемы становятся вырожденными. Такие подсхемы отображаются неравновесными схемными минорами [30, 33], соответствующими неравному числу вычеркнутых строк и столбцов матрицы схемы.

Для замены нуллорной связи гальванической в схему вводится δ дополнительных узлов и такое же число пар соединенных параллельно нуллаторов и нораторов (они не оказывают влияния). Учет одной

нуллорной связи при введении узла $n+1$ вытекает из табл.6.2.1 и показан на рис. 6.4.1.

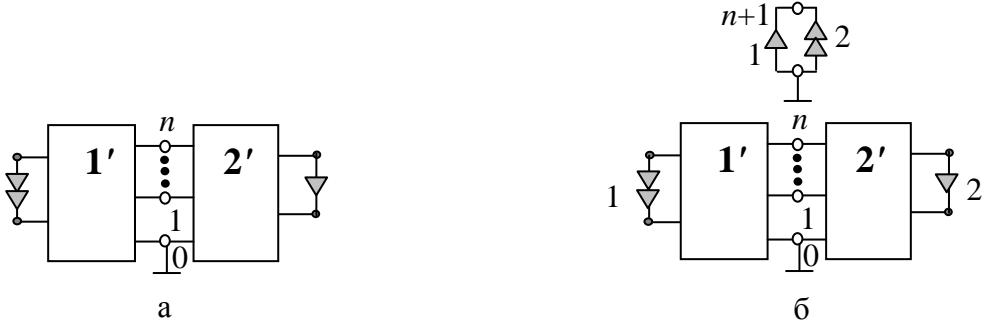


Рис. 6.4.1. Объединение подсхем с нуллорной связью (а);
введение дополнительного общего узла для устранения нуллорной связи (б)

Как видно, нуллатор (норатор) каждой пары относится к подсхеме, в которой имеется недостаток нуллаторов (нораторов). Это приводит к подсхемам с одинаковым числом нораторов и нуллаторов. Последующая перенумерация нуллаторов (нораторов) с учетом изменения знака определителя [34] обеспечивает только гальваническую зависимость подсхем 1 и 2, разделенных по $(n + 1 + \delta)$ узлам.

При использовании диакоптической формулы (6.1.1) для схемы на рис. 6.4.1,б оказывается, что из всей совокупности слагаемых в формуле (6.1.1) ненулевыми будут лишь те, в которых миноры первой (второй) подсхемы образованы подключением нораторов (нуллаторов) к полюсам $(n + 1), (n + 2), \dots, (n + \delta)$. В то же время к этим полюсам не подсоединенны нуллаторы (нораторы). Таким образом, из формулы (6.1.1) получается обобщенная диакоптическая формула для подсхем с нуллорными связями [10]

$$\Delta = \sum_{l=1}^{\psi_q^\delta} (-1)^{\xi_l} \Delta_1(V_l^\delta) \Delta_2(\bar{V}_l^\delta), \quad (6.4.1)$$

где $\Delta_1(V_l^\delta)$ и $\Delta_2(\bar{V}_l^\delta)$ – миноры подсхем 1 и 2 с δ нуллорными связями, содержащих нораторов (нуллаторов) на δ меньше, чем нуллаторов (нораторов); соответствующие минорам взаимно дополнительные двоичные переменные $V_l^\delta = [x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n]$ и \bar{V}_l^δ ; ψ_q^δ – число

миноров подсхем 1 и 2; $\xi_l = (2n+1+\delta)\delta/2+m$, где m – сумма номеров ненулевых позиций в V_l^δ или \bar{V}_l^δ .

Полезность обобщения (6.4.1) заключается в том, что подсхемы не только лишаются δ нуллорных связей, но и не связываются гальванически через δ дополнительных узлов (как в случае обычных управляющих связей). Число общих полюсов для подсхем с нуллорными связями составляет $q=n+1$, то есть столько же, сколько для подсхем, связанных гальванически. Формула (6.4.1) отображает обобщенный метод схемных миноров для произвольных подсхем, как с нуллорными связями (при $\delta \neq 0$), так и без них (при $\delta=0$).

Число равновесных ($\delta=0$) и неравновесных ($\delta > 0$) схемных миноров можно найти по формуле [9]

$$\psi_q^\delta = \sum_{i=0}^n C_n^{i-\delta} C_n^i,$$

где C_a^b – число сочетаний из a по b . Эта формула была использована при расчете табл. 6.4.1. Число неравновесных миноров указано в скобках для $\delta = 1, 2, \dots, 9$. Как показывает эта таблица, число неравновесных схемных миноров меньше числа равновесных (строка для $\delta=0$) и значительно уменьшается при возрастании числа нуллорных связей δ между подсхемами. Число схемных миноров минимально и равно 1, если число независимых общих узлов подсхем равно числу имеющихся нуллорных связей ($\delta=n$).

Число схемных миноров для подсхем с управляющими связями, имеющими конечный параметр, находится для заданного q путем суммирования соответствующего числа равновесных и неравновесных схемных миноров (СМ). Полученные числа приведены без скобок в строках с $\delta = 1, 2, \dots, n$.

Неравновесные СМ полезны не только для подсхем с нуллорными связями в составе некоторой схемы. Такие миноры образуются при нахождении несимметричных миноров объединенной схемы [66].

Таблица 6.4.1. Число ненулевых миноров схемы, разделенной по q узлам на две подсхемы с δ управляющими (нуллорными) связями от первой ко второй подсхеме

$q \rightarrow$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\delta \downarrow$										
0	1	2	6	20	70	252	924	3432	12870	48620
1		3	10 (1)	35 (4)	126 (15)	462 (56)	1716 (210)	6435 (792)	24310 (3003)	92378 (11440)
2			7 (1)	26 (6)	98 (28)	372 (120)	1419 (495)	5434 (2002)	20878 (8008)	80444 (31824)
3				21 (1)	78 (8)	297 (45)	1144 (220)	4433 (1001)	17238 (4368)	67184 (18564)
4					71 (1)	362 (10)	990 (66)	3796 (364)	14690 (1820)	57188 (8568)
5						253 (1)	936 (12)	3523 (91)	13430 (560)	51680 (3060)
6							925 (1)	3446 (14)	12990 (120)	49436 (816)
7								3433 (1)	12886 (16)	48773 (153)
8									12871 (1)	48638 (18)
9										48621 (1)

6.5. ОБЪЕДИНЕНИЕ ДВУХ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНЫХ ПОДСХЕМ С ВНЕШНИМИ ПОЛЮСАМИ

Объединенная схема на рис. 6.5.1, а в соответствии с табл. 6.4.1 (при $q = 3$ и $\delta = 0$) обладает шестью схемными минорами (с номерами позиций 3434): 1) 0000; 2) 0101; 3) 0110; 4) 1001; 5) 1010; 6) 1111.

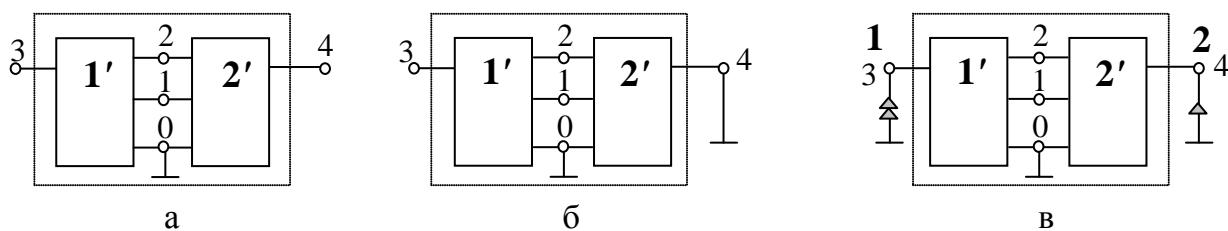


Рис. 6.5.1. Объединение двух четырехполюсных подсхем (а): схемные миноры объединенной схемы – 0101 (б) и 1001 (в)

При получении формул для указанных миноров достаточно дважды обратиться к формуле (6.4.1): один раз для миноров 1, 2, 5 и 6, не образующих нуллорную связь между подсхемами, и второй раз для миноров 3 и 4 с одной нуллорной связью между подсхемами.

Например, применив к минору с номером 2 (рис. 6.5.1,б) формулу (6.4.1), получим

$$\Delta[0101] = \Delta_1[0000]\Delta_2[1111] + \Delta_1[0101]\Delta_2[1010] - \Delta_1[0110]\Delta_2[1001] - \\ - \Delta_1[1001]\Delta_2[0110] + \Delta_1[1010]\Delta_2[0101] + \Delta_1[1111]\Delta_2[0000], \quad (6.5.1)$$

где миноры подсхем имеют позиции 1212, соответствующие их общим узлам. Знак первого слагаемого – положительный, поскольку сумма ненулевых позиций миноров-сомножителей число четное – 0 или 6, остальные знаки найдены аналогично.

Минор объединенной схемы с номером 4 (рис. 6.5.1,в) имеет вид

$$\Delta[0110] = -\Delta_1[0001]\Delta_2[1110] + \Delta_1[0010]\Delta_2[1101] + \\ + \Delta_1[0111]\Delta_2[1000] - \Delta_1[1011]\Delta_2[0100], \quad (6.5.2)$$

где схемные миноры подсхем являются неравновесными ($\delta = 1$), а знаки слагаемых находятся по правилу к формуле (6.4.1), например, отрицательный знак первого слагаемого – по нечетности суммы $(2n+1+\delta)\delta/2+m = (2\cdot2+1+1)1/2+2=3+2$.

Формула для минора объединенной схемы с номером 3 получается из (6.5.2) путем изменения миноров обеих подсхем – отражения их двоичных переменных относительно вертикальной оси симметрии. Это необходимо, поскольку направления нуллорных связей в минорах 3 и 4 объединенной схемы противоположны.

При использовании формул (6.5.1) и (6.5.2) для раскрытия миноров 1, 2, 5, 6 и 3, 4 соответственно необходимо учитывать различное состояние полюсов 3 и 4 объединенной схемы. Важно, что формулы (6.5.1) и (6.5.2) получены, минуя перебор $20\cdot20=400$ пар миноров подсхем и сортировку слагаемых, что требуется в известном методе схемных миноров [57].

6.6. ПРИМЕНЕНИЕ ПОДСХЕМ С НУЛЛОРНО-ЗЕРКАЛЬНЫМИ СВЯЗЯМИ

Подсхема связана с другой подсхемой нуллорно-зеркальной связью, если в ней суммарное число нуллаторов и ЗЭН больше или меньше суммарного числа нораторов и ЗЭТ. В соответствующей подсхеме соотношение этих элементов будет противоположным. При этом разность чисел указанных элементов в обеих подсхемах одинакова.

В подразделе 6.4 метод схемных миноров обобщен на подсхемы с нуллорными связями между ними. Для этого используются неравновесные схемные миноры, которые позволяют не только построить диакоптическую формулу для подсхем, содержащих неравное число нораторов и нуллаторов, но и уменьшить число слагаемых в этих формулах. Диакоптическая формула бисекции для подсхем с нуллорно-зеркальной связью совпадает с формулой (6.4.1) для подсхем с нуллорной связью, поскольку ЗЭН и ЗЭТ имеют нуллорные схемы замещения (рис. 2.1.1,в и 2.1.1,г), в которых число нуллаторов на единицу больше и меньше числа нораторов соответственно. Так, формула для схемы, разделенной на подсхемы по трем узлам, имеет вид

$$\begin{aligned}
 & \left| \begin{array}{c} 2 \\ \bullet \\ \downarrow \\ \bullet \\ 1 \\ \bullet \\ 0 \\ \bullet \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} \bullet \\ \downarrow \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \bullet \\ \downarrow \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \right| + \\
 & + \left| \begin{array}{c} \bullet \\ \downarrow \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \bullet \\ \downarrow \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \bullet \\ \downarrow \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \right| = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 + A_4B_4, \quad (6.6.1)
 \end{aligned}$$

где изображение нуллатора и ЗЭТ внутри подсхемы означает, что этот элемент не имеет в подсхеме парного норатора (ЗЭН) и нуллатора (ЗЭТ) соответственно; A_1, \dots, A_4 , B_1, \dots, B_4 – схемные миноры первой и второй

подсхем. Эта формула содержит четыре слагаемых, как и формула для подсхем с нуллорной связью, вместо шести при делении этой схемы на равновесные подсхемы. Схемные миноры из (6.6.1) раскрываются с использованием формул выделения зеркальных элементов (2.2.2) и (2.2.3).

Пример анализа схемы по частям на основе подсхем с нуллорно-зеркальной связью. Рассмотрим нахождение одного из составных определителей схемы фильтра в формуле (2.5.2):

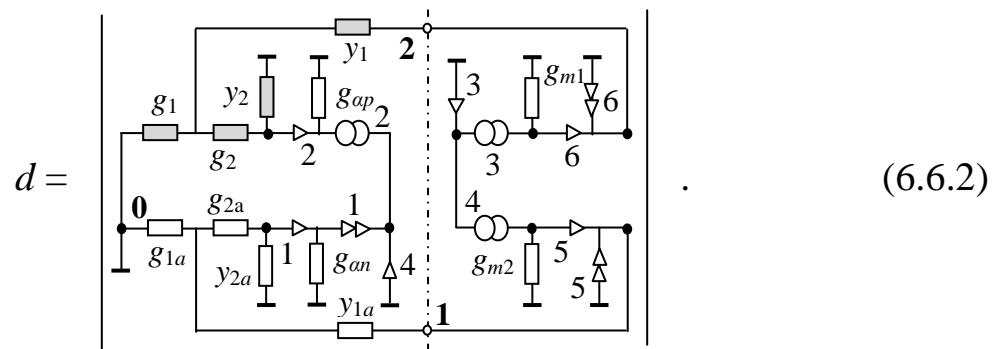
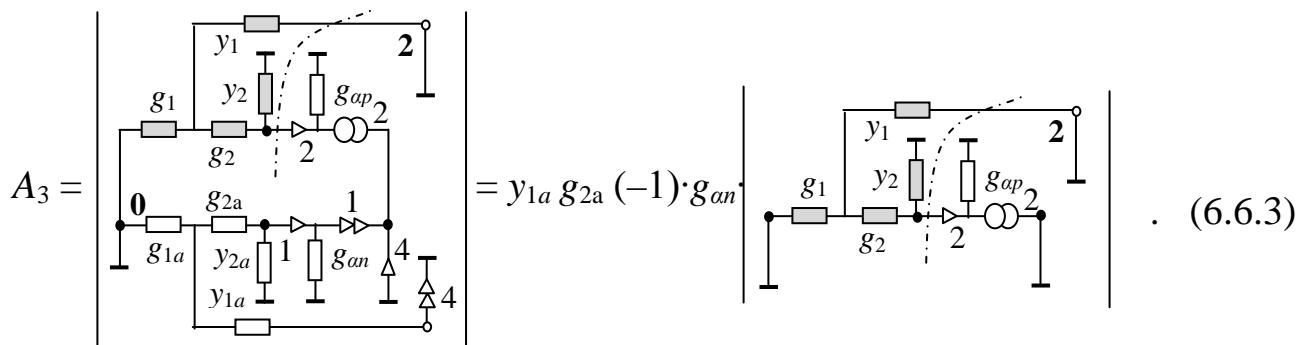


Схема в (6.6.2) делится по узлам **0**, **1** и **2** на две подсхемы с нуллорно-зеркальной связью – нуллатор с номером 4 находится в левой подсхеме, а ЗЭТ 4 – в правой подсхеме. Для этих подсхем первое и второе слагаемое в диакоптической формуле (6.6.1) равны нулю, поскольку в схемных минорах второй подсхемы B_1, B_2 образуются короткозамкнутые нораторы. Схемный минор из третьего слагаемого находится следующим образом:



Схемно-алгебраическая формула в (6.6.3) получена с помощью следующих операций: выделения проводимости y_{1a} , соединенной последовательно с норатором 4; удаления проводимости g_{1a} , параллельной норатору 4; выделения проводимости g_{2a} , соединенной последовательно с

норатором 4; удаления проводимости y_{2a} , параллельной норатору 4; умножения на (-1) с взаимной заменой номеров у нораторов с номерами 1 и 4; удаления из схемы последовательного соединения нуллатора и норатора с номером 1; выделения проводимости g_{an} , соединенной последовательно с норатором 4; замены проводником последовательного соединения норатора и нуллатора с номером 4.

После применения к определителю в (6.6.3) формулы деления схемы по двум узлам (1.3.8) получаем искомое символьное выражение

$$A_3 = y_{1a} g_{2a} (-1) \cdot g_{an} \left| \begin{array}{c} \text{Diagram showing a network of resistors } g_1, g_2, y_1, y_2, and a dependent source } g_{ap} \\ \text{with a voltage } u_2 \text{ across the parallel branch.} \end{array} \right| = -y_{1a} g_{2a} g_{an} [(g_1 + y_1)(g_2 + y_2) + g_2 y_2]. \quad (6.6.4)$$

В (6.6.4) первый определитель раскрыт с помощью формулы сложения параллельного соединения проводимостей и формулы выделения проводимости (1.3.4). Во втором определителе удалены: проводимость g_{ap} , параллельная нуллатору 2, и последовательное соединение нуллатора и ЗЕТ по формуле из строки 3 в табл. 2.2.1.

Остальные схемные миноры из формулы (6.6.1) находятся аналогично, их символьные выражения имеют вид

$$B_3 = -g_{m1}; \quad A_4 = -y_{1a} g_{2a} g_{ap} [(g_{1a} + y_{1a})(g_{2a} + y_{2a}) + g_{2a} y_{2a}]; \quad B_4 = -g_{m2}. \quad (6.6.5)$$

Следует отметить, что в силу симметрии схемы в (6.6.2) достаточно найти два схемных минора A_3 и B_3 , а схемные миноры A_4 и B_4 находятся формальной заменой индексов при переменных $1a, 2a, an, 1, 2$ и $m1$ на $1, 2, ap, 1a, 2a$ и $m2$ соответственно.

После подстановки (6.6.4) и (6.6.5) в (6.6.1) получаем символьное выражение для определителя (6.6.2):

$$d = g_{m1} y_{1a} g_{2a} g_{an} [(g_1 + y_1)(g_2 + y_2) + g_2 y_2] + g_{m2} y_{1a} g_{2a} g_{ap} [(g_{1a} + y_{1a})(g_{2a} + y_{2a}) + g_{2a} y_{2a}], \quad (6.6.6)$$

которое совпадает с соответствующим символьным выражением в фигурных скобках формулы (2.5.4), полученным путем выделения

проводимостей g_{m1} , g_{m2} и применения формулы деления схемы по двум узлам.

6.7. НЕЗАВИСИМЫЕ СХЕМНЫЕ МИНОРЫ

Метод схемных миноров позволяет анализировать сложные электрические цепи по частям [57]. Однако при увеличении числа полюсов подсхемы наблюдается резкий рост числа схемных миноров. Так, для трех-, пяти- и десятиполюсной подсхемы требуется найти 6, 70 и 48620 схемных миноров соответственно [57]. В настоящем подразделе предлагается способ сокращения числа раскрываемых схемных миноров с помощью тождеств Якоби [48], связывающих между собой миноры определителя системы линейных уравнений.

Схемно-минорные тождества по теореме Якоби. Согласно теореме Якоби «минор s -го порядка присоединенной матрицы $\tilde{\mathbf{A}}$ равен произведению $(s-1)$ -й степени определителя Δ на s -кратное алгебраическое дополнение $\Delta_{i_1 j_1, \dots, i_s j_s}$ данной матрицы \mathbf{A} » [48, с. 170]. Порядок матрицы равен n . Индексы i_1, \dots, i_s и j_1, \dots, j_s – любые перестановки из различных целых чисел $1 \dots n$. Присоединенная матрица получается из исходной матрицы заменой элементов a_{ij} алгебраическими дополнениями элементов a_{ji} .

С учетом взаимного соответствия схемы и матрицы ее параметров теорема Якоби справедлива и для схемного определителя. При этом входящие в ее текст понятия приобретают следующие особенности. Присоединенная матрица составляется из схемных миноров, соответствующих одноименным матричным алгебраическим дополнениям. S -кратное алгебраическое дополнение – схемный минор S -го порядка получается путем подключения к соответствующим полюсам s пар нораторов и нуллаторов. Матричным определителем Δ является

определитель соответствующей схемы. С учетом этих особенностей и формируются схемно-минорные тождества Якоби.

Например, для миноров второго порядка присоединенной матрицы произвольной системы уравнений имеет место следующее тождество Якоби [48]:

$$\Delta_{ab}\Delta_{cd} - \Delta_{ad}\Delta_{cb} = \Delta\Delta_{ab,cd}, \quad (6.7.1)$$

где a, c и b, d – рассматриваемые номера строк и столбцов матрицы соответственно; Δ – определитель матрицы; Δ_{ij} – алгебраическое дополнение, элемент присоединенной матрицы ($i = a, c; j = b, d$); $\Delta_{ab,cd}$ – двухкратное алгебраическое дополнение исходной матрицы.

Схемно-минорная формула, соответствующая (6.7.1), получается путем замены определителя и алгебраических дополнений на схемный определитель и схемные миноры соответственно. При этом схемный минор Δ_{ab} получается из исходной схемы путем подключения к полюсам a и b относительно базисного полюса норатора и нуллатора соответственно. Для получения схемного минора, соответствующего дополнению $\Delta_{ab,cd}$, необходимо подключить к полюсам a и c нораторы, а к b и d – нуллаторы. Причем элементы, подключенные к полюсам a и b , как и к полюсам c и d , имеют одинаковые номера. Окончательно схемно-минорная формула имеет вид

Общее число схемно-минорных тождеств определяется числом различных схемных миноров порядка от 0 до n . Однако для порядка 0, 1 и n в левой и правой частях тождества содержатся совпадающие выражения. Поэтому число значащих тождеств определяется по формуле [57]:

$$\psi_{n+1} = \sum_{l=2}^{n-1} (C_n^l)^2, \quad (6.7.3)$$

где l – индекс суммирования – порядок схемного минора; C_n^l – число сочетаний из n элементов по l ; n – число полюсов подсхемы, не считая базисного узла.

Число независимых схемных миноров определяется как разность общего числа схемных миноров и числа тождеств (6.7.3)

$$\psi_{n+1}^H = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^n)^2 = n^2 + 2. \quad (6.7.4)$$

Число схемных миноров $(n+1)$ -полюсника можно найти также через число ψ_n^H для n -полюсника с помощью следующего рекуррентного выражения:

$$\psi_{n+1}^H = \psi_n^H + 2n - 1. \quad (6.7.5)$$

Результаты подсчета числа независимых миноров сведены в строку 3 в табл. 6.7.1. Как видно, число независимых схемных миноров многократно (в десятки и сотни раз) меньше общего числа схемных миноров (строка 2 в табл. 6.7.1). Следовательно, и затраты на формирование определителя сокращаются многократно.

Таблица 6.7.1. Число независимых схемных миноров многополюсника

Число полюсов $n+1$	3	4	5	6	7	8	9	10
Общее число миноров ψ_{n+1}	6	20	70	252	924	3432	12870	48620
Число независимых миноров ψ_{n+1}^H	5	11	18	27	38	51	66	83

Пример анализа контурной сети методом бисекции с использованием независимых схемных миноров. Требуется найти символьное выражение тока I в контурной сети на рис. 6.7.1 [34].

Искомое выражение представляется в виде отношения определителей схем числителя и знаменателя. Построение схемы знаменателя выполняется на основе исходной схемы путем нейтрализации источника и приемника отклика. Схема числителя находится из исходной схемы путем замены независимого источника норатором, а приемника отклика – нуллатором [57].

Для нахождения определителей схем числителя и знаменателя разделим схему по четырем узлам (рис. 6.7.1), и используем формулы четырехузловой бисекции [57]

$$\Delta = \Delta_1(000000)\Delta_2(111111) + \Delta_1(001001)\Delta_2(110110) - \Delta_1(001010)\Delta_2(110101) + \\ + \Delta_1(001100)\Delta_2(110011) - \Delta_1(010001)\Delta_2(101110) + \Delta_1(010010)\Delta_2(101101) - \\ - \Delta_1(010100)\Delta_2(101011) + \Delta_1(011011)\Delta_2(100100) - \Delta_1(011101)\Delta_2(100010) + \\ + \Delta_1(011110)\Delta_2(100001) + \Delta_1(100001)\Delta_2(011110) - \Delta_1(100010)\Delta_2(011101) + \\ + \Delta_1(100100)\Delta_2(011011) - \Delta_1(101011)\Delta_2(010100) + \Delta_1(101101)\Delta_2(010010) - \\ - \Delta_1(101110)\Delta_2(010001) + \Delta_1(110011)\Delta_2(001100) - \Delta_1(110101)\Delta_2(001010) + \\ + \Delta_1(110110)\Delta_2(001001) + \Delta_1(111111)\Delta_2(000000), \quad (6.7.6)$$

где Δ_1 и Δ_2 – схемные миноры первой и второй подсхем (слева и справа соответственно на рис. 6.7.1,а).

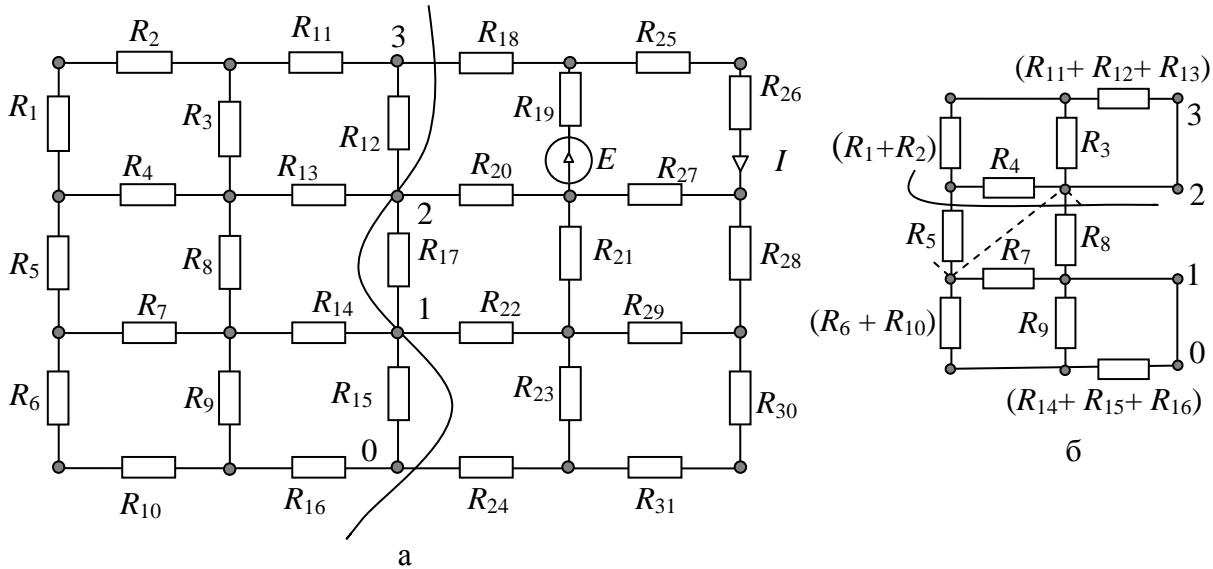


Рис. 6.7.1. Контурная сеть для примера (а) и ее первая подсхема (б) с линиями бисекции для нахождения схемного минора $\Delta_1(000000)$

Тип минора подсхемы в (6.7.6) определяется двоичным вектором (ДВ) в скобках, который состоит из двух половин: левой и правой – нораторной и нуллаторной. Нумерация позиций в каждой из двух половин – слева направо цифрами 1, 2 и 3 в соответствии с нумерацией полюсов на рис. 6.7.1,а. Единица в одной из позиций первой (второй) половины ДВ означает, что к полюсу с номером данной позиции подключен норатор (нуллатор) относительно общего нулевого полюса подсхемы. Ноль свидетельствует о том, что соответствующий полюс разомкнут.

Из 20-ти схемных миноров для каждой подсхемы в бисекционной формуле (6.7.6) достаточно раскрыть только 11 независимых миноров (строка 3 в табл. 6.7.1) – определитель схемы (при разомкнутых полюсах), минор третьего порядка и 9 миноров первого порядка. К примеру, определитель первой подсхемы $\Delta_1(000000)$ для знаменателя находится путем половинной бисекции (пунктирная линия на рис. 6.7.1,б делит на две части по 5 сопротивлений) подсхемы по двум узлам и последующего применения формул выделения сопротивлений, а также повторного применения той же формулы деления по двум узлам [55]. В результате получаем следующее выражение

$$\begin{aligned} \Delta_1(000000) = & ((R_1 + R_2 + R_4) \cdot (R_3 + R_{11} + R_{12} + R_{13}) + R_3 \cdot (R_{11} + R_{12} + \\ & + R_{13})) \cdot ((R_{14} + R_{15} + R_{16} + R_9) \cdot ((R_6 + R_{10}) \cdot (R_7 + R_8) + R_7 \cdot R_8) + R_9 \times \\ & \times (R_{14} + R_{15} + R_{16}) \cdot (R_7 + R_8)) + ((R_{11} + R_{12} + R_{13} + R_3) \cdot ((R_1 + R_2) \times \\ & \times (R_4 + R_5) + R_4 \cdot R_5) + R_3 \cdot (R_{11} + R_{12} + R_{13}) \cdot (R_4 + R_5)) \cdot ((R_6 + R_7 + \\ & + R_{10}) \cdot (R_9 + R_{14} + R_{15} + R_{16}) + R_9 \cdot (R_{14} + R_{15} + R_{16})). \end{aligned} \quad (6.7.7)$$

Следует отметить, что если использовать приближенную (4 и 6 сопротивлений в подсхемах) бисекцию подсхемы 1 по сплошной кривой на рис. 6.7.1,б, то получается более компактная формула

$$\begin{aligned} \Delta_1(000000) = & R_4 \cdot ((R_{11} + R_{12} + R_{13}) \cdot (R_1 + R_2 + R_3) + R_3 \cdot (R_1 + R_2)) \cdot ((R_6 + \\ & + R_7 + R_{10}) \cdot (R_9 + R_{14} + R_{15} + R_{16}) + R_9 \cdot (R_{14} + R_{15} + R_{16})) + ((R_1 + R_2 + \\ & + R_4) \cdot (R_3 + R_{11} + R_{12} + R_{13}) + R_3 \cdot (R_{11} + R_{12} + R_{13})) \cdot ((R_9 + R_{14} + R_{15} + \\ & + R_{16}) \cdot (R_1 + R_2 + R_3) + R_3 \cdot (R_1 + R_2 + R_3)) \end{aligned}$$

$$+R_{16}) \cdot ((R_6 + R_{10}) \cdot (R_7 + R_8 + R_5) + R_7 \cdot (R_4 + R_5)) + R_9 \cdot (R_{14} + R_{15} + \\ +R_{16}) \cdot (R_7 + R_8 + R_5)). \quad (6.7.8)$$

Последняя формула содержит 14 и 36 операций умножения и сложения, что меньше, чем 16 и 37 соответствующих операций в формуле (6.7.7). Это свидетельствует о том, что принцип половинного деления [57] не требует для получения компактного выражения абсолютно точного деления схемы.

Девять зависимых миноров второго порядка первой подсхемы в (6.7.6) находятся через независимые схемные миноры с помощью схемно-минорных тождеств в табл.6.7.1, для записи которых используются ДВ:

$$\Delta_1(110110)=\frac{[\Delta_1(100100)\Delta_1(010010)-\Delta_1(100010)\Delta_1(010100)]}{\Delta_1(000000)};$$

$$\Delta_1(011110)=\frac{[\Delta_1(010100)\Delta_1(001010)-\Delta_1(010010)\Delta_1(001100)]}{\Delta_1(000000)};$$

$$\Delta_1(110011)=\frac{[\Delta_1(100010)\Delta_1(010001)-\Delta_1(100001)\Delta_1(010010)]}{\Delta_1(000000)};$$

$$\Delta_1(011011)=\frac{[\Delta_1(010010)\Delta_1(001001)-\Delta_1(010001)\Delta_1(001010)]}{\Delta_1(000000)};$$

$$\Delta_1(101110)=\frac{[\Delta_1(100100)\Delta_1(001010)-\Delta_1(100010)\Delta_1(001100)]}{\Delta_1(000000)};$$

$$\Delta_1(101011)=\frac{[\Delta_1(100010)\Delta_1(001001)-\Delta_1(100001)\Delta_1(001010)]}{\Delta_1(000000)};$$

$$\Delta_1(110101)=\frac{[\Delta_1(100100)\Delta_1(010001)-\Delta_1(100001)\Delta_1(010100)]}{\Delta_1(000000)};$$

$$\Delta_1(011101)=\frac{[\Delta_1(010100)\Delta_1(001001)-\Delta_1(010001)\Delta_1(001100)]}{\Delta_1(000000)};$$

$$\Delta_1(101101)=\frac{[\Delta_1(100100)\Delta_1(001001)-\Delta_1(100001)\Delta_1(001100)]}{\Delta_1(000000)}. \quad (6.7.9)$$

Схемные миноры для второй подсхемы из формулы (6.3.3) находятся аналогично. Сведения о числе арифметических операций в формулах для тока I в схеме на рис. 6.7.1 приведены в строке 1 из табл. 6.7.2. Для сравнения в строке 2 даны сведения о числе операций в аналогичной последовательности формул при раскрытии всех 20-ти миноров для каждой подсхемы. Как видно, число мультипликативных и аддитивных операций в формуле на основе независимых схемных миноров в 1,8 и 1,9 раз соответственно меньше, чем в формуле, полученной путем поиска всех схемных миноров.

Следует отметить, что искомое символьное решение для тока не было получено с помощью известной математической системы Maple 11 [12] из-за очень больших затрат времени – более 1,5 часов. При этом была предпринята попытка решить символьную систему 12-ти контурных уравнений для анализируемой схемы как методом исключения Гаусса, так и методом Крамера. В то же время решение получено в виде единого выражения в программе *CIRSYMD* [7], использующей бисекционные формулы вида (6.1.1) с поиском всех схемных миноров. Характеристики этого выражения приведены в строке 3 табл. 6.7.2 и, как видно, уступают характеристикам формул, содержащим подформулы (в строки 1 и 2).

Таблица 6.7.2. Число арифметических операций в формулах для тока I из схемы на рис. 6.7.1

№	Тип формулы	Тип операций	
		аддитивные	мультипликативные
1	Бисекционная с подформулами на основе поиска независимых схемных миноров	2176	1180
2	Бисекционная с подформулами на основе поиска всех схемных миноров	3983	2282
3	Единая формула по программе <i>CIRSYMD</i>	19662	10586

Схемно-минорные тождества по теореме Якоби для неравновесных подсхем. При нахождении числителей откликов чаще

используются неравновесные подсхемы, в которых число нораторов (нуллаторов) на единицу меньше, чем нуллаторов (нораторов) [30]. Это связано с тем, что независимый источник воздействия и нагрузка, которые в методе СМ заменяются норатором и нуллатором соответственно, находятся в разных частях схемы, и, следовательно, в разных подсхемах. Поэтому необходимо рассмотреть обобщение независимых СМ на неравновесные подсхемы, чтобы сократить число раскрываемых СМ как в знаменателе, так и числитеle искомого отклика.

Для равновесных подсхем независимыми СМ являются миноры 0- и 1-го порядка. Остальные СМ – зависимые и определяются через независимые СМ с помощью указанных тождеств.

Основные правила формирования тождеств сохраняются и для неравновесных подсхем. Для их использования необходимо привести неравновесные подсхемы к равновесным подсхемам путем вынесения «лишнего» норатора или нуллатора за пределы подсхемы. Этот аномальный элемент будет считаться минорообразующим, а полюс, к которому он подключен, – внешним полюсом подсхемы.

Для построения тождеств в этом случае нужен неполный комплект независимых СМ, так как в формулах бисекции на основе неравновесных СМ используются схемные миноры, к собственному полюсу (полюсам) которых всегда подключен норатор или нуллатор. Это позволяет исключить нахождение части независимых СМ, необходимых для определения остальных СМ, у которых собственный полюс (полюса) разомкнут или замкнут. При этом отпадает необходимость также и в нахождении СМ при всех замкнутых полюсах, так как данный СМ не используется ни в формуле бисекции для неравновесных подсхем, ни в формулах по теореме Якоби.

Например, для числителя четырехполюсной подсхемы с источником ЭДС на рис. 6.7.2,а соответствует алгебраическое тождество Якоби

$$\Delta_{32,43} = (\Delta_{32} \Delta_{43} - \Delta_{42} \Delta_{33}) / \Delta \quad (6.7.10)$$

и эквивалентное ему схемно-алгебраическое уравнение

$$\Delta(00110110) = \frac{\Delta(00100100)\Delta(00010010) - \Delta(00010100)\Delta(00100010)}{\Delta(00000000)},$$

где Δ – схемный определитель; в скобках представлен двоичный вектор, нумерация позиций которого соответствует полюсам 1–4 на рис. 6.7.2,а.

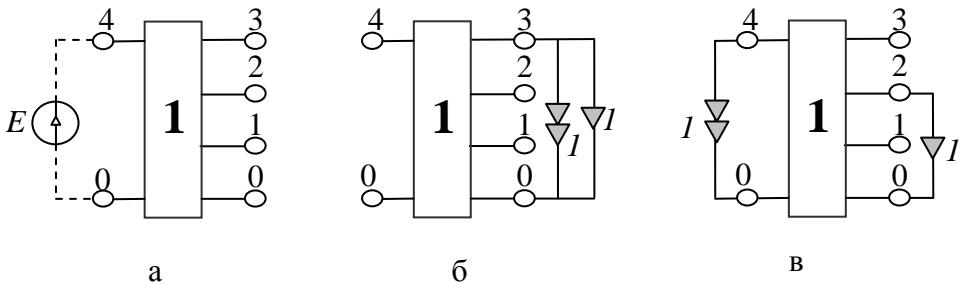


Рис. 6.7.2. Подсхема с источником ЭДС (а) и ее СМ для тождества (6.7.10): $\Delta(00100010)$ (б) и $\Delta(00010100)$ (в)

Схемный минор $\Delta(00100010)$ из формулы (6.7.10) изображен на рис. 6.7.2,б, он получается из исходной подсхемы (рис. 6.7.2,а), подключением к третьему узлу норатора и нуллатора относительно базисного узла, что соответствует позициям нулей и единиц в обеих половинах двоичного вектора определителя. При этом к полюсу 4 норатор не подключается. На рис. 6.7.2,в приведен полученный аналогично СМ $\Delta(00010100)$, в котором к полюсу 4 подключен норатор.

Число схемно-минорных тождеств для неравновесных СМ определяется числом различных схемных миноров порядка от 2 до n (n – число полюсов подсхемы, не считая базисного узла) по формуле [30]:

$$\psi_{n+1} = \sum_{i=2}^n C_n^{i-1} C_n^i,$$

где i – индекс суммирования – порядок схемного минора; C_n^i, C_n^{i-1} – число сочетаний из n элементов по i и $(i-1)$ соответственно. Формула (6.7.10) получена из формулы для общего числа схемных миноров неравновесного $(n+1)$ -полюсника [30] путем выбора схемных миноров 2, 3, ..., n -го порядка.

6.8. ВЫВОДЫ

Обобщенный метод схемных миноров позволяет проводить анализ электрических цепей путем деления их на подсхемы с произвольными (обычными и нуллорными) управляющими связями между ними.

Введение дополнительного УИ с единичным параметром для замены управляющей связи гальванической позволяет сократить до минимума число схемных миноров, необходимых для нахождения схемного определителя по частям.

Достоинством обобщения путем использования неравновесных схемных миноров является уменьшение числа общих узлов подсхем на число связей δ , имеющих бесконечно большие параметры. Размерность миноров и их число зависят лишь от количества общих полюсов подсхем, что упрощает нахождение знака слагаемых и уменьшает объем выкладок.

Исключается как традиционный перебор пар миноров объединяемых подсхем, так и сортировка слагаемых диакоптических формул, что обеспечивает нахождение только заданных миноров и многократно сокращает число операций.

В методе схемных миноров предложено использовать тождества по теореме Якоби, связывающие миноры определителя между собой, что многократно уменьшает число раскрываемых схемных миноров и повышает быстродействие метода.

7. МЕТОД НУЛЛОРНЫХ СХЕМ ДЛЯ АНАЛИЗА ЦЕПЕЙ С АВТОНОМНЫМИ ПОДСХЕМАМИ

Диакоптический метод нуллорных схем обобщен на цепи с произвольными автономными подсхемами, которые имеют меньшее число полюсов по сравнению с соответствующими неавтономными подсхемами. Обобщенный метод требует многократно меньшего числа теоретико-множественных операций и позволяет получить символьные отклики от многих воздействий в дробно-рациональной форме.

7.1. О МЕТОДЕ НУЛЛОРНЫХ СХЕМ

Диакоптические методы используются как для численного [69], так и для символьного [91, 57] анализа сложных электрических цепей. Расширенный однородный координатный базис [91] позволяет учитывать произвольные линейные элементы. Однако использование токовых переменных усложняет редукцию внутренних узлов подсхем. Кроме того, параметр элемента схемы может находиться в матрице более одного раза, что проявляется в избыточности формируемых выражений. Другим недостатком этих выражений является наличие многочисленных операций деления, что практически не допускает преобразование к дробно-рациональной форме, необходимой для аналитических исследований.

Метод схемных миноров [57] обеспечивает формирование числителя и знаменателя символьной функции без операций деления в дробно-рациональном виде. Однако на этапе объединения подсхем образуются взаимно уничтожающиеся слагаемые вследствие взаимосвязей схемных миноров [19].

Диакоптический метод нуллорных схем позволяет получать символьные выражения без взаимно уничтожающихся слагаемых, как при анализе подсхем, так и при их объединении [19,27,32,33]. Нуллорные

схемы (НС) подсхемы строятся на ее полюсах и содержат только нуллоры и идеальные проводники, эквивалентные параллельному соединению норатора и нуллатора. НС с их весовыми коэффициентами образуют схемно-алгебраическую формулу (САФ) определителя подсхемы [27]. САФ предназначена для объединения неавтономных подсхем, которые получаются из исходной схемы удалением всех независимых источников (НИ) и ветви отклика. При этом число полюсов у схемы увеличивается в общем случае на удвоенное число НИ и пару полюсов ветви отклика, а искомый отклик получается с использованием традиционного принципа наложения. Это приводит к многократному увеличению числа НС и объема проверок на их совместимость.

Неявный принцип наложения – использование автономных подсхем – позволяет многократно сократить число НС [33]. Однако такой подход применим для цепей, в которых независимые источники и ветвь искомого отклика находятся в разных подсхемах. Целью настоящей главы является обобщение метода нуллорных схем для объединения автономных подсхем произвольного типа – содержащих как независимые источники, так и ветвь отклика.

7.2. НУЛЛОРНЫЕ СХЕМЫ АВТОНОМНЫХ ПОДСХЕМ

На рис. 7.2.1 показана схема из n подсхем, которые содержат произвольные линейные элементы, в том числе управляемые источники (УИ). Подсхемы не имеют между собой управляемых связей. Подсхемы с номерами 1 и n являются автономными, причем подсхема 1, содержащая НИ, называется *подсхемой первого типа*, а подсхема n с ветвью искомого отклика (тока I или напряжения U) – *подсхемой второго типа*. Если подсхема n содержит как ветвь искомого отклика, так и НИ, то она называется *подсхемой третьего типа*. Подсхемы с номерами 2... ($n-1$)

могут быть как автономными (первого типа с произвольным числом НИ), так и неавтономными.

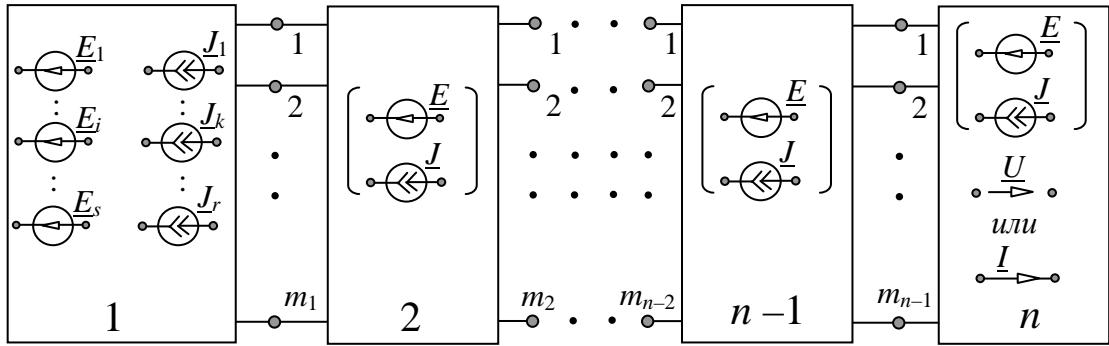


Рис. 7.2.1. Объединение автономных и неавтономных подсхем

Для формирования множества НС автономных подсхем используется понятие *определителя автономной подсхемы* (подсхемы с НИ) [34]. Для раскрытия определителя автономной подсхемы первого типа необходимы формулы выделения не только сопротивлений, проводимостей и УИ [32], но и НИ [34]

$$\Delta = \underline{E}_i \Delta_i (\underline{E}_i \rightarrow \text{норатор}; \underline{E}_j = 0, j = 1 \dots s, j \neq i; \underline{J}_l = 0, l = 1 \dots r) + \Delta^i (\underline{E}_i = 0); \quad (7.2.1)$$

$$\Delta = \underline{J}_k \Delta_k (\underline{J}_k \rightarrow \text{норатор}; \underline{J}_l = 0, l = 1 \dots r, l \neq k; \underline{E}_j = 0, j = 1 \dots s) + \Delta^k (\underline{J}_k = 0), \quad (7.2.2)$$

где Δ – определитель подсхемы; i и k – номера выделяемых источников ЭДС и тока соответственно; Δ_i и Δ_k – определители подсхемы, в которой источники ЭДС \underline{E}_i и тока \underline{J}_k соответственно заменены на норатор противоположного направления, а все остальные НИ нейтрализованы (величины равны нулю); Δ^i и Δ^k – определители подсхемы, в которой НИ \underline{E}_i и \underline{J}_k соответственно нейтрализованы; s и r – число источников ЭДС и тока соответственно.

В результате рекурсивного выделения всех элементов подсхемы первого типа получаются как *равновесные*, содержащие одинаковое число нораторов и нуллаторов, так и *неравновесные НС*, в которых число нораторов на единицу больше числа нуллаторов [27]. Неравновесные НС

формируются за счет НИ, поскольку при их выделении по формулам (7.2.1) и (7.2.2) образуется норатор, а соответствующий ему нуллатор находится в подсхеме n .

Равновесные НС появляются во втором слагаемом формул (7.2.1) и (7.2.2) при нейтрализации всех НИ, поэтому их весовые коэффициенты не содержат параметров НИ. Такие НС называются *равновесными НС без параметров НИ* в отличие от рассматриваемых ниже равновесных НС с весовыми коэффициентами, содержащими НИ. Равновесные НС без параметров НИ могут участвовать в формировании как знаменателя, так и числителя искомого отклика, а неравновесные НС – только числителя.

Для нахождения НС автономной подсхемы второго типа применяются формулы выделения ветвей искомого напряжения или тока, которые соответственно имеют вид

$$\Delta = \Delta(\underline{U} \rightarrow \text{нуллатор}) + \Delta^{\underline{U}}; \quad (7.2.3)$$

$$\Delta = \Delta(\underline{I} \rightarrow \text{нуллатор}) + \Delta_{\underline{I}}, \quad (7.2.4)$$

где верхний и нижний индекс означает удаление ветви и замену ее на идеальный проводник (стягивание) соответственно. Первое слагаемое в (7.2.3) и (7.2.4) образует неравновесные НС, содержащие нуллаторов на единицу больше числа нораторов. Второе слагаемое в этих формулах содержит равновесные НС без параметров НИ. Эти неравновесные и равновесные НС участвуют в формировании числителя и знаменателя отклика соответственно.

НС подсхемы третьего типа формируются как с помощью формул (7.2.3) и (7.2.4) выделения ветвей откликов, так и формул (7.2.1) и (7.2.2) выделения НИ. При этом первое слагаемое в (7.2.3) и (7.2.4) будет включать не только неравновесные, но и равновесные НС с параметрами НИ. Эти НС будут участвовать в формировании числителя искомого отклика.

7.3. ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ БАЗИСНЫХ НУЛЛОРНЫХ СХЕМ

За основу для построения САФ как неавтономных, так и автономных подсхемы приняты *базисные нуллорные схемы*, при перечислении которых не учитываются направления аномальных элементов [32]. В дальнейшем базисные нуллорные схемы называются для краткости нуллорными схемами – НС.

Максимальное число равновесных и неравновесных НС определяется как сумма возможных вариантов подключения нуллоров к полюсам подсхемы [32]. Данные о числе равновесных и неравновесных НС сведены в строки 1 и 2 из табл. 7.3.1. В столбцах 1...11 и 12...17 табл. 7.3.2 приведены все 11 равновесных и 6 неравновесных НС для трехполюсной подсхемы [33].

Таблица 7.3.1. Максимальное число нуллорных схем (НС) автономной подсхемы (АП) и отношение числа НС неавтономной подсхемы (НП) к числу НС АП

№	Число полюсов АП, m	3	4	5	6	7	8
1	Равновесных НС АП (НС НП, N_h)	11	87	952	13 513	237 113	5 016 728
2	Неравновесных НС АП	6	55	650	9 661	197 477	3 838 801
3	Всего НС АП первого и второго типа, $N_{a1} = N_{a2}$	17	142	1 602	23 174	434 590	8 855 529
4	Всего НС АП третьего типа, N_{a3}	28	229	2554	36 687	671 703	13 872 257
5	$\chi_1 = \chi_2 = N_h(m + 1)/N_{a1}(m)$ $\chi_3 = N_h(m + 1)/N_{a3}(m)$ (1 заземленный НИ)	5,1 3,1	6,7 4,2	8,4 5,3	10,2 6,5	11,5 7,5	14,4 9,0
6	$\chi_1 = \chi_2 = N_h(m + 2)/N_{a1}(m)$ $\chi_3 = N_h(m + 2)/N_{a3}(m)$ (1 незаземленный НИ)	56 34	95 59	148 93	211 137	285 186	
7	$\chi_1 = \chi_2 = N_h(m + 4)/N_{a1}(m)$ $\chi_3 = N_h(m + 4)/N_{a3}(m)$ (2 незаземленных НИ)	13948 8468	35329 21907	78103 48990			
8	$\chi_1 = \chi_2 = N_h(m + 6)/N_{a1}(m)$ $\chi_3 = N_h(m + 6)/N_{a3}(m)$ (3 незаземленных НИ)	$7,36 \cdot 10^6$ $4,47 \cdot 10^6$					

Общее число НС произвольной автономной подсхемы первого и второго типа одинаково $N_{a1} = N_{a2}$ (строка 3 в табл. 7.3.1) и находится как сумма числа равновесных и неравновесных НС. Множества равновесных НС у подсхем первого и второго типа совпадают, а неравновесные НС для подсхемы второго типа получаются из НС подсхемы первого типа с тем же числом полюсов путем взаимной замены нораторов и нуллаторов.

Общее число НС подсхемы третьего типа N_{a3} (строка 4 в табл. 7.3.1) включает удвоенное число равновесных НС, поскольку такие подсхемы характеризуются равновесными НС как с параметрами НИ, так и без них. Неравновесные НС подсхемы третьего типа содержат нуллаторов на единицу больше, чем нораторов, то есть так, как в НС подсхемы второго типа.

Таблица 7.3.2. НС автономной трехполюсной подсхемы первого типа

Равновесные НС										
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•

Окончание табл. 7.3.2

Неравновесные НС					
12	13	14	15	16	17
•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•

Для сравнения чисел НС различных подсхем в строках 5...8 табл. 7.3.1 приведены отношения числа НС неавтономной подсхемы к числу НС соответствующей автономной подсхемы первого, второго и третьего типа. В строке 5 эти отношения даны для одного заземленного, а в строке 6 – для одного незаземленного НИ. В первом случае число полюсов неавтономной подсхемы увеличивается на 1, а во втором – на 2

по сравнению с автономной подсхемой. При этом число НС неавтономной подсхемы увеличивается по сравнению с НС автономной подсхемы первого или второго типа в 5...14 и 50...280 раз соответственно, а по сравнению с числом НС третьего типа в 3...9 и 30...180 раз. При дальнейшем увеличении числа НИ (строки 7, 8 в табл. 7.3.1) использование неавтономных подсхем для символьного анализа не представляется возможным из-за резкого роста числа НС. Следует отметить, что расчет указанных отношений НС при трех НИ (строка 8 в табл. 7.3.1) выполнен с использованием максимального числа НС $N_h(9) = 125121009$ для неавтономной подсхемы с 9-ю полюсами [32].

7.4. ОБЪЕДИНЕНИЕ ПОДСХЕМ НА ОСНОВЕ НУЛЛОВЫХ СХЕМ

В первую очередь объединяются подсхемы с наименьшим числом полюсов как до, так и после объединения. При одинаковом числе полюсов преимущество получают подсхемы с меньшим числом НС. Такой порядок объединения сокращает число проверок на совместимость подсхем.

При объединении пары подсхем каждая НС первой подсхемы проверяется на совместимость с каждой НС второй подсхемы. Совместные пары НС образуют НС объединенной подсхемы. Последнее объединение соответствует исходной схеме и характеризуется алгебраическим выражением в виде суммы числителя и знаменателя искомого отклика.

Алгоритм объединения двух подсхем.

1. Перебор всех пар НС выбранных подсхем и выполнение для каждой пары операций 2–5.
2. Математическое объединение множеств узлов и ветвей двух НС. Общие узлы, не являющиеся внешними узлами объединенной НС, образуют множество ее внутренних узлов. Собственные узлы подсхем и

общие узлы, являющиеся внешними узлами объединенной НС, образуют множество ее внешних узлов.

3. Проверка пары НС на совместимость. Пара НС совместима (невырождена), если: 1) имеется путь от каждого внутреннего узла к внешнему узлу; 2) отсутствуют контура из нуллаторов или нораторов; 3) нет сечения из нуллаторов или нораторов, охватывающего внутренние узлы. Если пара НС несовместима, то отбросить ее и перейти к проверке следующей пары НС.

4. Редукция внутренних узлов объединенной НС с помощью операций: 1) выделения нуллора [32]; 2) замены параллельного соединения нуллатора и норатора идеальным проводником; 3) удаления внутреннего узла вместе с последовательным соединением нуллатора и норатора; 4) исключения внутреннего узла вместе с идеальным проводником, соединяющим его с внешним узлом.

5. Занесение полученной НС в формируемую САФ. Для этого НС приводится к одной из уже имеющихся в САФ НС с помощью эквивалентных преобразований: 1) изменения направления одного из аномальных элементов со сменой знака весового коэффициента; 2) взаимного изменения номеров у аномальных элементов. Если такое приведение невозможно, то в САФ заносится новое слагаемое в виде этой НС и весового коэффициента, который получается как произведение коэффициентов соответствующих НС подсхем.

Если объединение начинается с неавтономных и автономных – первого типа – подсхем, а подсхема второго или третьего типа подключается последней, то на промежуточных этапах объединения явное выделение равновесных и неравновесных НС не требуется. При последнем ($n-1$)-м объединении подсхем учитывается, что выражение знаменателя образуется объединением равновесных НС без параметров НИ, а выражение числителя – объединением неравновесных НС подсхем первого и второго типа. Если объединяются подсхемы первого и третьего типа, то числитель формируется как из неравновесных НС, так и

равновесных НС с параметрами НИ и без них. При этом определители объединенных НС могут принимать значения 1, -1 и 0 [33].

Следует отметить, что в отличие от метода нуллорных схем на основе неавтономных подсхем здесь не требуется дополнительных операций объединения исходной схемы с НС числителя и знаменателя [33].

7.5. АНАЛИЗ НЕСИММЕТРИЧНОГО СИНХРОННОГО ГЕНЕРАТОРА С НАГРУЗКОЙ

Исходная схема замещения цепи [69] дана на рис. 7.5.1.

Применение автономной подсхемы третьего типа для нахождения тока I_r . Подсхема 1 (рис. 7.5.1) является автономной подсхемой третьего типа, а подсхемы 2 и 3 – неавтономными подсхемами.

САФ подсхемы 1 подразделяется на две подформулы: D_1^1 содержит равновесные НС без параметров НИ, а D_1^2 – равновесные НС с параметрами НС. Первая подформула САФ содержит все 11 слагаемых с равновесными НС из табл. 7.3.2:

$$D_1^1 = W_1^1 \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \right| + W_2^1 \left| \begin{array}{c} \bullet \rightarrow \bullet \\ \uparrow \quad \downarrow \end{array} \right| + W_3^1 \left| \begin{array}{c} \bullet \rightarrow \bullet \\ \uparrow \quad \downarrow \end{array} \right| + W_4^1 \left| \begin{array}{c} \bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet \\ \uparrow \quad \downarrow \end{array} \right| + W_5^1 \left| \begin{array}{c} \bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet \\ \uparrow \quad \downarrow \end{array} \right| + W_6^1 \left| \begin{array}{c} \bullet \leftarrow \bullet \\ \uparrow \quad \downarrow \end{array} \right| + W_7^1 \left| \begin{array}{c} \bullet \rightarrow \bullet \leftarrow \bullet \\ \uparrow \quad \downarrow \end{array} \right| + W_8^1 \left| \begin{array}{c} \bullet \rightarrow \bullet \\ \uparrow \quad \downarrow \end{array} \right| + W_9^1 \left| \begin{array}{c} \bullet \rightarrow \bullet \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \right| + W_{10}^1 \left| \begin{array}{c} \bullet \rightarrow \bullet \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \right| + W_{11}^1 \left| \begin{array}{c} \bullet \rightarrow \bullet \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \right|, \quad (7.5.1)$$

где $W_1^1 = H_a H_b H_c + Z_a Z_b Z_c$; $W_2^1 = H_a H_b$; $W_3^1 = H_a H_c$; $W_4^1 = H_c H_b$; $W_5^1 = Z_a H_b$;
 $W_6^1 = Z_b H_c$; $W_7^1 = Z_c H_a$; $W_8^1 = Z_a Z_b$; $W_9^1 = Z_a Z_c$; $W_{10}^1 = Z_b H_c$;
 $W_{11}^1 = H_a + H_b + H_c + Z_a + Z_b + Z_c$.

Вторая подформула САФ имеет вид

$$D_1^2 = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \right| + V_2^1 \left| \bullet \rightarrow \bullet \right| + V_3^1 \left| \begin{array}{c} \bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet \\ \uparrow \quad \downarrow \end{array} \right| + V_4^1 \left| \bullet \leftarrow \bullet \right|, \quad (7.5.2)$$

где $V_1^1 = [H_b E_c - \underline{E}_b (Z_c + H_c)] H_a + Z_b (-Z_a \underline{E}_c + \underline{E}_a (Z_c + H_c))$;
 $V_2^1 = \underline{E}_a (Z_c + H_c) - \underline{E}_c (Z_a + H_a)$; $V_3^1 = \underline{E}_b (Z_a + H_a) - \underline{E}_a (Z_b + H_b)$;
 $V_4^1 = E_c (Z_b + H_b) - E_b (Z_c + H_c)$.

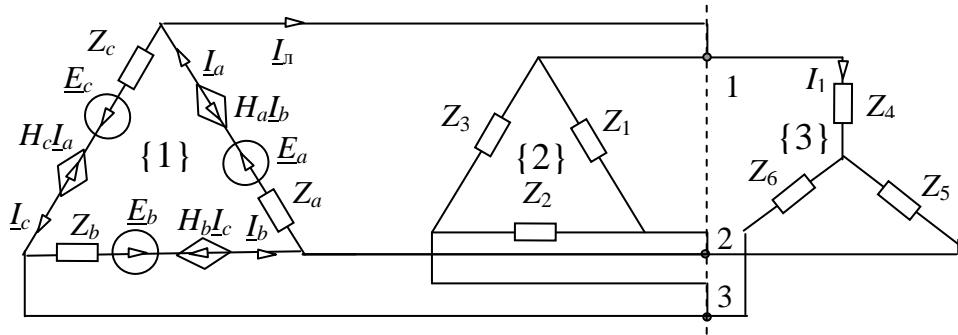


Рис. 7.5.1. Схема замещения синхронного генератора с двумя нагрузками

САФ подсхемы 2 включает 5 из одиннадцати НС трехполюсной неавтономной подсхемы (строка 1 в табл. 7.3.1):

$$D_2 = W_1^2 \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \circ & \circ & \circ \end{array} \right| + W_2^2 \left| \begin{array}{ccc} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{array} \right| + W_3^2 \left| \begin{array}{ccc} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{array} \right| + W_4^2 \left| \begin{array}{ccc} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{array} \right| + W_5^2 \left| \begin{array}{ccc} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{array} \right|, \quad (7.5.3)$$

где $W_1^2 = Z_1 Z_2 Z_3$; $W_2^2 = Z_1 Z_3$; $W_3^2 = Z_1 Z_2$; $W_4^2 = Z_2 Z_3$; $W_5^2 = Z_1 + Z_2 + Z_3$.

САФ подсхемы 3 содержит те же НС, что САФ (7.5.3) подсхемы 2, но с другими весовыми коэффициентами:

$$W_1^3 = Z_4(Z_5 + Z_6) + Z_5Z_6; \quad W_2^3 = Z_4; \quad W_3^3 = Z_5; \quad W_4^3 = Z_6; \quad W_5^3 = 1. \quad (7.5.4)$$

На первом этапе объединяются подсхемы 2 и 3, имеющие наименьшее число НС – по 5. Совместными оказываются 15 пар НС (из 25-ти): 1–1, 1–2, ..., 1–5, 2–1, 2–3, 2–4, 3–1, 3–2, 3–4, 4–1, 4–2, 4–3, 5–1, которые составляют САФ объединенной подсхемы 4 в виде (7.5.3) с весовыми коэффициентами

$$W_1^4 = W_1^2 W_1^3; \quad W_2^4 = W_2^2 W_1^3 + W_1^2 W_2^3; \quad W_3^4 = W_3^2 W_1^3 + W_1^2 W_3^3; \quad W_4^4 = W_1^2 W_4^3 + W_4^2 W_1^3; \\ W_5^4 = W_3^2 W_2^3 + W_2^2 W_3^3 + W_4^2 W_2^3 + W_2^2 W_4^3 + W_5^2 W_1^3 + W_1^2 W_5^3 + W_4^2 W_3^3 + W_3^2 W_4^3. \quad (7.5.5)$$

На втором этапе объединяются подсхемы 4 и 1 в исходную схему. При этом числитель и знаменатель тока I_L находятся путем объединения пяти НС подсхемы 4 с четырьмя и одиннадцатью НС подсхемы 1 из формул (7.5.2) и (7.5.1) соответственно. Для числителя совместными являются 5 пар НС (из двадцати): 1–5; 2–3; 2–4; 3–4 и 4–3, на основе которых формируется его выражение

$$N = V_1^1 W_5^4 + (V_2^1 - V_4^1) W_3^4 + (V_2^1 - V_3^1) W_4^4. \quad (7.5.6)$$

Для знаменателя совместными являются 14 пар НС (из 55-ти): 5–1; 2–2; 4–3; 3–4; 4–5; 2–6; 3–7; 2–8; 4–8; 3–9; 4–9; 2–10; 3–10; 1–11, весовые коэффициенты которых составляют его выражение

$$D = W_{11}^1 W_1^4 + (-W_2^1 + W_6^1 + W_8^1 + W_{10}^1) W_2^4 + (-W_4^1 + W_7^1 + W_9^1 + W_{10}^1) W_3^4 + \\ + (-W_3^1 + W_5^1 + W_8^1 + W_9^1) W_4^4 + W_1^1 W_5^4. \quad (7.5.7)$$

Как видно, искомое выражение тока I_L сформировано в виде отношения формул (7.5.6) и (7.5.7), для этого потребовалось 100 операций объединения НС.

Сравнение с методом объединения неавтономных подсхем.

Неавтономные подсхемы 1, 2 и 3 имеют 19, 5 и 5 НС соответственно. При объединении подсхем 2 и 3 требуется 25 проверок объединенных НС, при этом объединенная подсхема имеет так же, как и исходные подсхемы, 5 НС. При объединении ее с подсхемой 1 требуется 95 проверок объединенных НС, при этом формируются все 95 НС исходной схемы.

При формировании числителя отклика потребуется объединение схемы с НС числителя, для этого необходимо выполнить 285 операций проверки объединенных НС. Для получения знаменателя – 95 проверок. Всего – 405 проверок, что в 4 раза больше, чем при использовании предлагаемого метода.

Применение автономных подсхем первого и второго типа для нахождения тока I_L . Аналогичный пример рассмотрен в [33], поэтому здесь приводится только результат, полученный объединением трех подсхем (рис. 7.5.1): 1) синхронного генератора – подсхемы первого типа; 2) трехфазной нагрузки в виде треугольника из сопротивлений – неавтономной подсхемы и 3) нагрузки в виде звезды из сопротивлений – подсхемы второго типа:

$$I_L = [(-W_{16}^1 + W_{17}^1) W_6^4 + (-W_{15}^1 + W_{17}^1) W_7^4 + (-W_{12}^1 + W_{14}^1) W_8^4 + (-W_{13}^1 + W_{14}^1) W_9^4] / D, \quad (7.5.8)$$

где знаменатель D совпадает с выражением (7.5.7); $W_1^2, W_2^2, W_3^2, W_4^2$

определенны в (7.5.3); $W_{12}^1 = Z_b (Z_a E_c - H_c E_a) + H_a H_c E_b$;

$$W_{13}^1 = Z_a(Z_c \underline{E}_b - H_b \underline{E}_c) + H_b H_c \underline{E}_a; \quad W_{14}^1 = Z_c(Z_b \underline{E}_a - H_a \underline{E}_b) + H_a H_b \underline{E}_c;$$

$$W_{15}^1 = \underline{E}_b(Z_a + H_a) - \underline{E}_a(Z_b + H_b); \quad W_{16}^1 = \underline{E}_c(Z_b + H_b) - \underline{E}_b(Z_c + H_c);$$

$$W_{17}^1 = \underline{E}_a(Z_c + H_c) - \underline{E}_c(Z_a + H_a);$$

$$W_6^3 = Z_5; \quad W_7^3 = Z_6; \quad W_8^3 = 1; \quad W_6^4 = W_6^3 W_1^2; \quad W_7^4 = W_7^3 W_1^2;$$

$$W_8^4 = W_6^3(W_2^2 + W_4^2) + (W_7^3 + W_8^3)W_1^2; \quad W_9^4 = W_7^3 W_3^2.$$

Формула (7.5.8) получена объединением подсхем в порядке 2–3–1 (сначала объединяются подсхемы 2 и 3, а затем подсоединяется подсхема 1), при этом потребовалось 119 операций проверки пар НС на совместимость. Этот порядок соответствует первоочередному выбору подсхем с наименьшим числом НС. При объединении подсхем в порядке 1–2–3 и 1–3–2 требуется 158 и 163 операции соответственно.

Сравнение с решением по методу контурных токов. По методу контурных токов выражение искомого тока оказывается избыточным. Оно содержит 408 и 220 слагаемых в знаменателе и числителе соответственно, из них 310 и 174 взаимно уничтожающихся слагаемых. После использования известной математической системы *Maple* [12], реализующей трудоемкие алгоритмы развертки, сортировки и свертки слагаемых, символьное выражение тока содержит 152, 106 и 28 операций умножения, сложения и вычитания соответственно. При этом последовательное выражение (7.5.8), полученное с помощью предлагаемого метода, содержит значительно меньше операций – 68, 41 и 7 умножений, сложений и вычитаний соответственно.

7.6. МАТРИЧНЫЕ НУЛЛОВЫЕ СХЕМЫ АВТОНОМНЫХ ПОДСХЕМ

Метод нулловых схем основан на схемно-алгебраических формулах (САФ) определителей подсхем [27]. САФ подсхемы содержит сумму произведений определителей ее нулловых схем и соответствующих весовых коэффициентов. Нулловой схемой (НС) подсхемы называют схему, построенную на ее полюсах и содержащую нуллаторы, нораторы и

идеальные проводники – параллельные соединения тех же нуллаторов и нораторов. Весовые коэффициенты – это рациональные выражения, содержащие параметры элементов подсхемы.

САФ используются для объединения подсхем. Объединение двух подсхем осуществляется путем проверки на совместимость каждой пары НС. Совместимая пара НС является нуллорной схемой объединенной подсхемы. Ее весовой коэффициент равен произведению весовых коэффициентов НС подсхем. Объединение выполняется до тех пор, пока не образуется исходная схема и ее САФ, которая позволяет сформировать искомую схемную функцию или отклик цепи.

Для анализа используют неавтономные [18] и автономные [35] подсхемы. Автономные подсхемы обладают меньшим числом полюсов, чем соответствующие неавтономные подсхемы. У автономных подсхем меньше число НС, несмотря на то, что неавтономные подсхемы характеризуются только равновесными НС, а автономные подсхемы – как равновесными, так и неравновесными НС. В результате автономные подсхемы требуют меньшего числа операций для объединения подсхем, чем неавтономные подсхемы [35].

В САФ подсхем используются два типа НС – базисные [32] и матричные [20]. Базисными НС называют множество невырожденных и взаимно неэквивалентных НС. Две НС взаимно неэквивалентны, если ни одна из них не может быть получена из другой с помощью эквивалентных преобразований: 1) одновременного изменения направления аномального элемента и знака весового коэффициента; 2) замены параллельного соединения норатора и нуллатора идеальным проводником; 3) удаления последовательного соединения норатора и нуллатора; 4) переноса полюса норатора (нуллатора) вдоль пути из нораторов (нуллаторов).

Матричными НС называют подмножество базисных НС, которое получается путем исключения из множества базисных НС зависимых схем с помощью схемно-алгебраических тождеств [30]. Например, тождество для произвольных (равновесных и неравновесных) НС с подвижным

норатором имеет вид:

$$\left| \begin{array}{c} 1 \\ \bullet \xrightarrow{\longrightarrow} \bullet \\ \hline \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} 2 \\ \bullet \dots \bullet \xrightarrow{\longrightarrow} \bullet \\ \hline \end{array} \right| + \dots + \left| \begin{array}{c} i \\ \bullet \dots \bullet \xrightarrow{\longrightarrow} \bullet \\ \hline \end{array} \right| + \dots + \left| \begin{array}{c} m \\ \bullet \dots \bullet \xrightarrow{\longrightarrow} \bullet \\ \hline \end{array} \right| = 0, \quad (7.6.1)$$

или кратко:

$$/1/ + /2/ + \dots + /i/ + \dots + /m/ = 0, \quad (7.6.2)$$

где прямоугольник содержит произвольное число нораторов и нуллаторов, подключенных к изображенным полюсам; $/i/$ – определитель i -й НС.

Матричные НС разработаны применительно к неавтономным подсхемам, для которых их многократно меньше, чем базисных НС [20]. Применение матричных НС уменьшает число теоретико-множественных операций при объединении подсхем. Можно предположить, что матричных НС меньше и для автономных подсхем. Это подтверждается применением упомянутых тождеств для уменьшения числа неравновесных базисных НС четырехполюсной подсхемы [17]. Целью раздела является обобщение матричных НС на автономные подсхемы и применение их для диакоптического анализа сложных линейных электрических цепей.

Перечисление матричных нулпорных схем автономных подсхем.

Матричные НС автономных подсхем включают, как и соответствующие базисные НС, равновесные и неравновесные НС. Причем матричные равновесные НС автономных подсхем совпадают с соответствующими НС неавтономных подсхем. *Матричные неравновесные НС* можно получить, как и матричные равновесные НС, путем исключения из множества соответствующих базисных НС зависимых схем на основе схемно-алгебраических тождеств (7.6.1)–(7.6.2).

В то же время матричные НС автономных подсхем, как и неавтономных подсхем, можно получить прямым перечислением, минуя

преобразование базисных НС. *Первый способ* перечисления равновесных и неравновесных НС повторяет способ перечисления соответствующих равновесных [57] и неравновесных [30] схемных миноров, которые совпадают с НС по структуре. Для этого используются двоичные векторы (ДВ) размерностью $2(n-1)$, где n – число полюсов подсхемы. При этом ДВ делится на две половины, в каждой из которых выполняется нумерация позиций: 1, 2, ..., $n-1$. Эта нумерация соответствует нумерации полюсов НС за исключением нуля, который присваивается общему узлу подсхемы.

Равновесные НС перечисляются путем перебора двоичных чисел размерностью $2(n-1)$, при этом пропускаются те, у которых количество единиц в первой половине позиций отличается от числа единиц во второй половине позиций. При нахождении множества неравновесных НС выбираются те двоичные числа, у которых единиц в первой половине разрядов на единицу больше или меньше, чем во второй половине. Единица в разряде из первой (второй) половины ДВ означает наличие в НС норатора (нуллатора), который подключается к соответствующему и общему полюсу.

Число неравновесных и равновесных матричных НС определяется, как и число соответствующих схемных миноров, по формуле [30]:

$$\Psi_n^\delta = \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^{i-\delta} C_{n-1}^i, \quad (7.6.3)$$

где $\delta = 1$ и $\delta = 0$ – для неравновесных и равновесных НС; i – индекс суммирования, равный числу нораторов (нуллаторов), если их больше, чем нуллаторов (нораторов); $C_{n-1}^{i-\delta}, C_{n-1}^i$ – число сочетаний из $n-1$ по $(i-\delta)$ и из $n-1$ по i соответственно.

Второй способ перечисления матричных НС – путем попарного сочетания нораторных и нуллаторных подсхем – основан на том, что произвольная НС – равновесная или неравновесная – состоит из двух подсхем – нуллаторной и нораторной. Нораторная (нуллаторная) подсхема содержит все полюсы n -полюсника и $k = 0, 1, \dots, (n-1)$ нораторов (нуллаторов). Генерация нораторных (нуллаторных) подсхем

основана, как и в первом способе, на перечислении двоичных чисел, но размерностью в 2 раза меньшей – ($n - 1$). Построение нораторных и нуллаторных подсхем осуществляется независимо друг от друга. НС получаются путем попарного сочетания нораторных и нуллаторных подсхем. Таким же образом находятся и базисные НС [32]. Поэтому этот способ позволяет находить уравнения связи между матричными и базисными НС в процессе их построения без последующего преобразования.

В табл. 7.6.1 приведено число матричных НС, рассчитанное по формуле (7.6.3) и совпадающее, как уже отмечалось, с числом схемных миноров. Для сравнения в той же табл. 7.6.1 приведено число базисных НС, которое получено по программе [26]. Как видно, число матричных НС автономной подсхемы многократно меньше числа базисных НС.

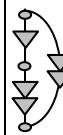
Таблица 7.6.1. Максимальное число матричных и базисных НС автономной подсхемы с числом полюсов n

n	3	4	5	6	7	8	9	10
Матричные НС равновесные	6	20	70	252	924	3432	12870	48620
неравновесные	4	15	56	210	792	3003	11440	43758
всего	10	35	126	462	1716	6435	24310	92378
Базисные НС равновесные								
	11	87	952	13513	237113	5016728	125121009	$3,615 \cdot 10^9$
неравновесные	6	55	650	9661	176337	3838801	97916616	$2,882 \cdot 10^9$
Всего	17	142	1602	23174	413450	8855529	223037625	$6,497 \cdot 10^9$

Трех- и четырехполюсные матричные неравновесные НС автономной подсхемы. Здесь в отличие от [17] удалось сократить число трехполюсных базисных неравновесных НС и получить 4 матричные неравновесные НС (столбец 2 в табл. 7.6.1). Они приведены в табл. 7.6.2. В этой же таблице для сравнения даны базисные неравновесные НС. НС с номерами 3* и 4* приводятся к схемам с общим полюсом с помощью упомянутых выше эквивалентных преобразований. Зависимые базисные НС находятся через матричные НС по формулам

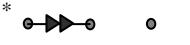
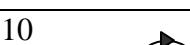
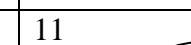
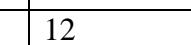
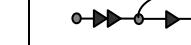
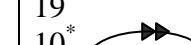
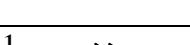
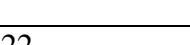
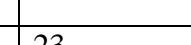
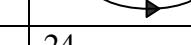
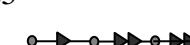
$$/1/ = /2^*/ - /1^* / \text{ и } /6/ = /3^*/ - /4^*. \quad (7.6.4)$$

Таблица 7.6.2. Базисные (с номерами 1...6) и матричные ($1^* \dots 4^*$) неравновесные НС трехполюсной автономной подсхемы

1	2 1^*	3 2^*	4 3^*	5 4^*	6
					

Четырехполюсная подсхема обладает 15-ю матричными неравновесными НС (столбец 3 в табл. 7.6.1), что значительно меньше 28-ми минимизированных НС [17]. Эти матричные НС приведены в одной таблице (табл. 7.6.3) с базисными НС [3].

Таблица 7.6.3. Базисные (с номерами 1...55) и матричные ($1^* \dots 15^*$) неравновесные НС автономного четырехполюсника

1 1^* 	2 2^* 	3 3^* 	4 
5 	6 	7 4^* 	8 5^* 
9 6^* 	10 	11 	12 
13 7^* 	14 8^* 	15 9^* 	16 
17 	18 	19 10^* 	20 11^* 
21 12^* 	22 	23 	24 
25 	26 	27 	28 
29 	30 	31 	32 
33 	34 	35 	36 

Окончание табл. 7.6.3

37	38	39	40
41	42	43	44
45	46	47	48
49 13*	50 14*	51 15*	52
53	54	55	

Матричные НС в табл. 7.6.3, не имеющие общего полюса, могут быть преобразованы к соответствующему виду, как и трехполюсные НС, с помощью эквивалентных операций. Определители базисных НС из табл. 7.6.3 получаются через определители матричных НС по формулам из табл. 7.6.4.

Таблица 7.6.4. Зависимость
базисных НС четырехполюсной
подсхемы от матричных НС
(табл. 7.6.3)

Определитель базисной НС	Формула
1	2
/1/	/1*/
/2/	/2*/
/3/	/3*/
/4/	/2*/-/1*/
/5/	/3*/-/1*/
/6/	/3*/-/2*/
/7/	/4*/
/8/	/5*/
/9/	/6*/
/10/	/5*/-/4*/
/11/	/6*/-/4*/
/12/	/6*/-/5*/
/13/	/7*/

Продолжение табл. 7.6.4.

1	2
/14/	/8*/
/15/	/9*/
/16/	/8*/-/7*/
/17/	/9*/-/7*/
/18/	/9*/-/8*/
/19/	/10*/
/20/	/11*/
/21/	/12*/
/22/	/11*/-/10*/
/23/	/12*/-/10*/
/24/	/12*/-/11*/
/25/	/10*/-/7*/+/4*/
/26/	/11*/-/8*/+/5*/
/27/	/12*/-/9*/+/6*/

Продолжение табл. 7.6.4

Определитель базисной НС	Формула
1	2
/28/	/11*/-/8*/+/5*/- /10*/+/-7*/-4/
/29/	/12*/-/9*/+/6*/- /11*/+/-8*/-5*/
/30/	/12*/-/9*/+/6*/- /11*/+/-8*/-5*/
/31/	/7*/-4*/
/32/	/8*/-5*/
/33/	/9*/-6*/
/34/	/8*/-5*/-7*/+/4*/
/35/	/9*/-6*/-7*/+/4*/
/36/	/9*/-6*/-8*/+/5*/
/37/	/4*/+10*/
/38/	/5*/+11*/
/39/	/6*/+12*/
/40/	/5*/+11*/-4*/-10*/
/41/	/6*/+12*/-4*/-10*/

Окончание табл. 7.6.4

1	2
/42/	/6*/+12*/-5*/-11*/
/43/	/10*/-7*/
/44/	/11*/-8*/
/45/	/12*/-9*/
/46/	/11*/-8*/-10*/+7*/
/47/	/12*/-9*/-10*/+7*/
/48/	/12*/-9*/-11*/+8*/
/49/	/13*/
/50/	/14*/
/51/	/15*/
/52/	/15*/-14*/+13*/
/53/	/14*/-13*/
/54/	/13*/+15*/
/55/	/15*/-14*/

Формирование САФ автономных подсхем на основе матричных НС. САФ на матричных, как и на базисных НС, формируются путем выделения всех элементов подсхемы, в том числе, независимых источников, ветвей тока и напряжения [35]. Получающиеся при этом равновесные и неравновесные НС приводятся с помощью операций эквивалентного преобразования к базисным НС. Преобразование базисных НС к матричным НС осуществляется с помощью формул, аналогичных выражениям из табл. 7.6.4.

Для минимизации затрат на объединение подсхем целесообразно применять комбинированный подход при получении САФ подсхем, поскольку для конкретной подсхемы – исходной или объединенной – число базисных НС может оказаться меньше числа матричных НС. Следует использовать тот тип НС, число которых меньше. Реализацию этого критерия можно выполнить с помощью следующего условия, которое проверяется для каждой подсхемы: если число базисных НС

больше максимального количества матричных НС (табл. 7.6.1), то следует перейти к матричным НС, иначе для построения САФ использовать базисные НС.

В отдельных случаях число матричных НС может быть меньше числа базисных НС даже при невыполнении вышеприведенного условия. Это выявляется по наличию в базисных НС контура с перемещающимся норатором или нуллатором, подобного в формуле (7.6.1).

Объединение автономных подсхем на основе матричных НС.

Алгоритм объединения автономных подсхем на основе матричных НС совпадает с соответствующим алгоритмом на основе базисных НС [35]. При этом количество объединений НС существенно сократится, поскольку оно определяется произведением чисел равновесных и неравновесных НС, которых для матричных НС многократно меньше (табл. 7.6.1).

В табл. 7.6.5 приведено число проверок пар НС при объединении двух n -полюсных подсхем, одна содержит независимые источники, а вторая – ветвь искомого тока или напряжения. Проверка выполняется для пар одноименных – равновесных и неравновесных НС. Как видно, многократно выгоднее применять матричные НС по сравнению с базисными НС. При возрастании числа полюсов подсхемы эффект от применения матричных НС усиливается.

Таблица 7.6.5. Сравнение предельных чисел N_b и N_m проверок пар НС на совместимость при объединении двух автономных подсхем на основе базисных и матричных НС

n	3	4	5	6	7	8	9	10
N_b	157	$1.1 \cdot 10^4$	$1.3 \cdot 10^6$	$2.7 \cdot 10^8$	$8.7 \cdot 10^{10}$	$3.9 \cdot 10^{13}$	$2.5 \cdot 10^{16}$	$2.1 \cdot 10^{19}$
N_m	52	625	$8.0 \cdot 10^3$	$1.0 \cdot 10^5$	$1.4 \cdot 10^6$	$2.0 \cdot 10^7$	$2.9 \cdot 10^8$	$4.2 \cdot 10^9$
N_b/N_m	3.0	17	165	$2.5 \cdot 10^3$	$5.9 \cdot 10^4$	$1.9 \cdot 10^6$	$8.5 \cdot 10^7$	$5.0 \cdot 10^9$

7.7. АНАЛИЗ СИНХРОННОГО ГЕНЕРАТОРА С НАГРУЗКОЙ НА ОСНОВЕ МАТРИЧНЫХ НУЛЛОВЫХ СХЕМ

Требуется найти ток \underline{I}_1 в нагрузке несимметричного синхронного генератора на рис. 7.7.1,а [35], схема замещения которого дана на рис. 7.7.1,б [69]. Параметры всех элементов известны.

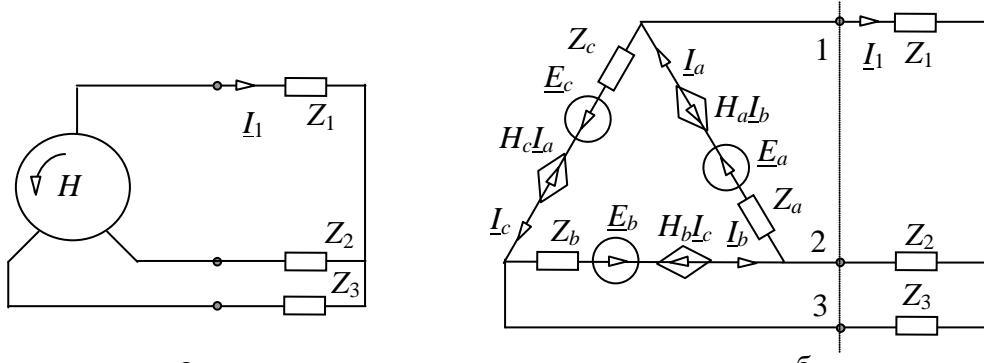


Рис. 7.7.1. Синхронный генератор с нагрузкой: исходная схема (а);
схема замещения (б)

Равновесная САФ первой подсхемы (слева на рис. 7.7.1,б) содержит 11 базисных НС [35]. Поскольку их больше максимального числа матричных НС (6 в строке и столбце 2 из табл. 7.6.1), то в соответствии с предложенным комбинированным подходом следует перейти с помощью формул [5] к САФ на основе матричных НС

$$D_1 = (H_a H_b H_c + Z_a Z_b Z_c) \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \bullet & \circ & \circ \end{array} \right| + (H_a H_b + Z_a H_b + Z_c H_a + Z_a Z_c) \left| \begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & \circ \\ \bullet & \circ & \circ \end{array} \right| + \\ + (Z_b H_c + H_a H_c + H_c H_b - Z_a Z_c) \left| \begin{array}{ccc} \bullet & \circ & \circ \\ \bullet & \circ & \circ \end{array} \right| + (Z_a Z_b - H_a H_c + Z_a H_b + Z_a Z_c) \left| \begin{array}{ccc} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \end{array} \right| + \\ + (Z_b Z_c - H_c H_b + Z_c H_a + Z_a Z_c) \left| \begin{array}{ccc} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{array} \right| + (H_a + H_b + H_c + Z_a + Z_b + Z_c) \left| \begin{array}{ccc} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{array} \right|. \quad (7.7.1)$$

Неравновесная САФ первой подсхемы содержит 6 базисных НС [35], которых также больше максимального числа соответствующих матричных НС (4 в столбце 2 и строке 3 из табл. 7.6.1). Поэтому с помощью формулы (7.6.4) формируется САФ на основе матричных НС

$$N_1 = [Z_b(Z_a \underline{E}_c - H_c \underline{E}_a) + H_a H_c \underline{E}_b - Z_a(Z_c \underline{E}_b - H_b \underline{E}_c) + H_b H_c \underline{E}_a] \left| \begin{array}{ccc} \bullet & \circ & \circ \\ 1 & 2 & 3 \end{array} \right| + \\ + [Z_c(Z_b \underline{E}_a - H_a \underline{E}_b) + H_a H_b \underline{E}_c - Z_a(Z_c \underline{E}_b - H_b \underline{E}_c) + H_b H_c \underline{E}_a] \left| \begin{array}{ccc} \circ & \bullet & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \end{array} \right| + \\ + [\underline{E}_b(Z_a + H_a) - \underline{E}_a(Z_b + H_b) - \underline{E}_a(Z_c + H_c) - \underline{E}_c(Z_a + H_a)] \left| \begin{array}{ccc} \circ & \circ & \circ \\ \bullet & \bullet & \circ \end{array} \right| + \\ + [\underline{E}_c(Z_b + H_b) - \underline{E}_b(Z_c + H_c) - \underline{E}_a(Z_c + H_c) - \underline{E}_c(Z_a + H_a)] \left| \begin{array}{ccc} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \end{array} \right|. \quad (7.7.2)$$

САФ второй (справа на рис. 7.7.1,б) подсхемы строится на базисных НС, поскольку их число меньше, чем матричных, и нет зависимостей, аналогичных приведенной в формуле (7.6.1):

$$D_2 = [Z_1(Z_2 + Z_3) + Z_2Z_3] \left| \begin{array}{ccc} \circ & \circ & \circ \end{array} \right| + Z_1 \left| \begin{array}{cc} \circ & \circ \circ \end{array} \right| + Z_2 \left| \begin{array}{c} \circ \circ \\ \circ \end{array} \right| + Z_3 \left| \begin{array}{cc} \circ \circ & \circ \end{array} \right| + \left| \begin{array}{ccc} \circ & \circ & \circ \end{array} \right| ; \quad (7.7.3)$$

$$N_2 = Z_2 \left| \begin{array}{ccc} \circ & \circ & \circ \end{array} \right| + Z_3 \left| \begin{array}{cc} \circ \circ & \circ \end{array} \right| + \left| \begin{array}{ccc} \circ \circ & \circ \end{array} \right|. \quad (7.7.4)$$

Знаменатель функции тока находится объединением равновесных нуллорных схем в (7.7.1) и (7.7.3). Совместными оказываются 8 пар нуллорных схем: 1–5; 2–2; 3–2; 4–2; 4–4; 5–2; 5–3 и 6–1, причем весовой коэффициент пары НС 2–2 имеет знак минус. Нумерация нуллорных схем в (7.7.1) и (7.7.3) осуществляется по порядку от начала к концу формул. После группировки искомый знаменатель имеет вид

$$D = (H_aH_bH_c + Z_aZ_bZ_c) - (H_aH_b + Z_aH_b + Z_cH_a + Z_aZ_c)Z_1 + (Z_bH_c + H_aH_c + H_cH_b - Z_aZ_c)Z_1 + (Z_aZ_b - H_aH_c + Z_aH_b + Z_aZ_c)Z_1 + (Z_aZ_b - H_aH_c + Z_aH_b + Z_aZ_c)Z_3 + + (Z_bZ_c - H_cH_b + Z_cH_a + Z_aZ_c)Z_1 + (Z_bZ_c - H_cH_b + Z_cH_a + Z_aZ_c)Z_2 + (H_a + H_b + H_c + Z_a + Z_b + Z_c)(Z_1(Z_2 + Z_3) + Z_2Z_3). \quad (7.7.5)$$

Числитель искомой функции тока I_1 находится путем объединения неравновесных нуллорных схем из (7.7.2) и (7.7.4). Совместными оказываются 4 пары НС: 1–3; 2–3; 3–2 и 4–1. Произведение весовых коэффициентов первой, третьей и четвертой пар НС имеют знак минус. В результате группировки слагаемых получается числитель функции тока

$$N = -[Z_b(Z_a\underline{E}_c - H_c\underline{E}_a) + H_aH_c\underline{E}_b - Z_a(Z_c\underline{E}_b - H_b\underline{E}_c) - H_bH_c\underline{E}_a] + [Z_c(Z_b\underline{E}_a - H_a\underline{E}_b) + H_aH_b\underline{E}_c - Z_a(Z_c\underline{E}_b - H_b\underline{E}_c) - H_bH_c\underline{E}_a] - [\underline{E}_b(Z_a + H_a) - \underline{E}_a(Z_b + H_b) - \underline{E}_a(Z_c + H_c) + \underline{E}_c(Z_a + H_a)]Z_3 - [\underline{E}_c(Z_b + H_b) - \underline{E}_b(Z_c + H_c) - \underline{E}_a(Z_c + H_c) + \underline{E}_c(Z_a + H_a)]Z_2. \quad (7.7.6)$$

Для сравнения приведем знаменатель и числитель тождественного символьного выражения, полученного по методу базисных НС [35]

$$D_6 = (H_a + H_b + H_c + Z_a + Z_b + Z_c)[Z_1(Z_2 + Z_3) + Z_2Z_3] - H_aH_bZ_1 + Z_bH_cZ_1 + + Z_aZ_bZ_1 + Z_bZ_cZ_1 - H_cH_bZ_2 + Z_cH_aZ_2 + Z_aZ_cZ_2 + Z_bZ_cZ_2 - H_aH_cZ_3 + Z_aH_bZ_3 + + Z_aZ_bZ_3 + Z_aZ_cZ_3 + H_aH_bH_c + Z_aZ_bZ_c; \quad (7.7.7)$$

$$N_6 = -[Z_b(Z_a \underline{E}_c - H_c \underline{E}_a) + H_a H_c \underline{E}_b] + [Z_c(Z_b \underline{E}_a - H_a \underline{E}_b) + H_a H_b \underline{E}_c] - [\underline{E}_b(Z_a + H_a) - \underline{E}_a(Z_b + H_b)] Z_3 - [\underline{E}_c(Z_b + H_b) - \underline{E}_b(Z_c + H_c)] Z_2 + [\underline{E}_a(Z_c + H_c) - \underline{E}_c(Z_a + H_a)] Z_1 + [\underline{E}_a(Z_c + H_c) - \underline{E}_c(Z_a + H_a)] Z_3. \quad (7.7.8)$$

Для построения формул (7.7.5) и (7.7.6) по методу матричных НС потребовалось 42 операции проверки пар НС на совместимость, а для выражений (7.7.7) и (7.7.8) – 73, что значительно больше. В то же время символьные выражения (7.7.7)–(7.7.8) по методу базисных НС не содержат избыточных взаимно уничтожающихся слагаемых, а формулы (7.7.5) и (7.7.6) – 12 и 6 таких слагаемых. Символьное выражение по методу базисных НС является также более компактным – содержит 53 умножения и 43 аддитивные операции, по методу матричных НС – 67 и 62 соответствующих операций. Это объясняется появлением в формулах (7.7.5)–(7.7.6) большего числа повторяющихся выражений.

7.8. АНАЛИЗ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ С ЗЕРКАЛЬНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ МЕТОДОМ НУЛЛОВЫХ СХЕМ

Метод нуллорных схем может применяться для анализа электрических цепей с зеркальными элементами, поскольку при выделении ЗЭН и ЗЭТ по формулам (2.2.2) и (2.2.3) образуются нуллаторы и нораторы. При этом остается неизменным максимальное число базисных нуллорных схем, которое приведено в табл. 7.3.1. Также без изменения остается алгоритм объединения подсхем в подразделе 7.4.

Пример анализа схемы с зеркальными элементами. Сформируем методом нуллорных схем выражение схемного определителя из формулы (6.6.2):

$$d = \left| \begin{array}{c} \text{I} \\ g_1 \\ y_2 \\ \text{II} \\ g_2 \\ g_{2a} \\ y_{2a} \\ g_{1a} \\ \text{III} \\ g_{m1} \\ g_{m2} \\ g_{an} \\ y_1 \\ y_2 \\ y_1a \\ y_{1a} \end{array} \right| . \quad (7.8.1)$$

Разобьем схему на три подсхемы, их номера показаны римскими цифрами. Находим САФ каждой из подсхем путем выделения всех элементов подсхем, в том числе, и по формуле (2.2.3) для ЗЭТ. Подсхема 1 является неравновесной – в ней 2 нуллатора, а ЗЭТ всего один. Поэтому САФ для подсхемы 1 содержит неравновесные нуллорные схемы:

$$d_1 = \left| \begin{array}{c} \text{I} \\ \textbf{0} \\ g_1 \\ \text{---} \\ g_2 \\ \text{---} \\ y_2 \\ \text{---} \\ g_{ap} \\ \text{---} \\ y_1 \\ \text{---} \\ \textbf{2} \end{array} \right| = V_1 \left| \begin{array}{c} \textcircled{3} \\ \textcircled{2} \\ \textbf{0} \end{array} \right| + V_2 \left| \begin{array}{c} \textcircled{3} \\ \textcircled{2} \\ \textbf{0} \end{array} \right| + V_3 \left| \begin{array}{c} \textcircled{3} \\ \textcircled{2} \\ \textbf{0} \end{array} \right|, \quad (7.8.2)$$

где $V_1 = -y_1 g_2 g_{ap}$; $V_2 = y_1 [g_1(g_2 + y_2) + g_2 y_2]$; $V_3 = -[(y_1 + g_1)(g_2 + y_2) + g_2 y_2]$.

САФ подсхемы 2 содержит равновесные нуллорные схемы:

$$d_2 = \left| \begin{array}{c} \textbf{0} \\ g_{1a} \\ \text{---} \\ g_{2a} \\ \text{---} \\ y_{2a} \\ \text{---} \\ y_{1a} \\ \text{---} \\ \textbf{1} \\ \text{---} \\ \textbf{3} \end{array} \right| = W_1 \left| \begin{array}{c} \textcircled{3} \\ \textcircled{1} \\ \textbf{0} \end{array} \right| + W_2 \left| \begin{array}{c} \textcircled{3} \\ \textcircled{1} \\ \textbf{0} \end{array} \right| + W_3 \left| \begin{array}{c} \textcircled{3} \\ \textcircled{1} \\ \textbf{0} \end{array} \right|, \quad (7.8.3)$$

где $W_1 = y_{1a} g_{2a} g_{an}$; $W_2 = -y_{1a} [g_{1a}(g_{2a} + y_{2a}) + g_{2a} y_{2a}]$;

$W_3 = -[(y_{1a} + g_{1a})(g_{2a} + y_{2a}) + g_{2a} y_{2a}]$.

САФ подсхемы 3, как и САФ подсхемы 1, содержит неравновесные нуллорные схемы:

$$d_3 = \left| \begin{array}{c} \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \\ \textcircled{4} \\ \textcircled{5} \\ \textcircled{6} \\ \textcircled{1} \\ \text{---} \\ g_{m1} \\ \text{---} \\ g_{m2} \\ \text{---} \end{array} \right| = P_1 \left| \begin{array}{c} \textcircled{2} \\ \textcircled{1} \\ \textbf{0} \end{array} \right| + P_2 \left| \begin{array}{c} \textcircled{2} \\ \textcircled{1} \\ \textbf{0} \end{array} \right|, \quad (7.8.4)$$

где $P_1 = g_{m1}$; $P_2 = -g_{m2}$.

Объединяя подсхемы 1 и 2 на основе САФ (7.8.2) и (7.8.3) по алгоритму в подразделе 7.4. Находим нуллорные схемы объединенной подсхемы, которую обозначим номером 4. Из табл. 7.8.1 видно, что получается 3 ненулевых нуллорных схемы. Коэффициенты этих НС

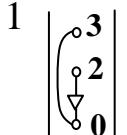
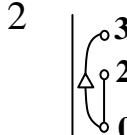
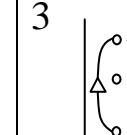
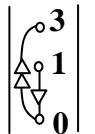
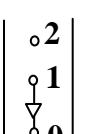
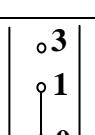
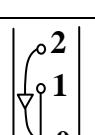
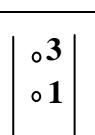
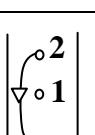
находятся в виде произведения коэффициентов соответствующих НС подсхем 1 и 2. Искомая САФ подсхемы 4 записывается следующим образом:

$$d_4 = V_3 W_1 \begin{vmatrix} \circ 2 \\ \circ 1 \\ \nabla \\ \mathbf{0} \end{vmatrix} + V_1 W_2 \begin{vmatrix} \circ 2 \\ \circ 1 \\ \nabla \\ \mathbf{0} \end{vmatrix} + V_1 W_3 \begin{vmatrix} \circ 2 \\ \circ 1 \\ \nabla \\ \mathbf{0} \end{vmatrix}. \quad (7.8.5)$$

Определитель исходной схемы получается путем объединения САФ (7.8.4) и (7.8.5) подсхем 3 и 4 соответственно. Ненулевых слагаемых получается два – при объединении первых НС, второго в (7.8.4) и третьего НС в (7.8.5). Причем определители объединенных НС в обоих случаях равны –1. В результате искомый определитель получается в виде

$$d = -P_1 V_3 W_1 - P_2 V_1 W_3 = g_{m1} [(y_1 + g_1)(g_2 + y_2) + g_2 y_2] y_{1a} g_{2a} g_{an} + g_{m2} y_1 g_2 g_{ap} [(y_{1a} + g_{1a})(g_{2a} + y_{2a}) + g_{2a} y_{2d}]. \quad (7.8.6)$$

Таблица 7.8.1. НС подсхемы 4, полученные объединением НС подсхем 1 и 2

НС подсхемы 1 → НС подсхемы 2 ↓	1 	2 	3 
1 	0	0	
2 		0	0
3 		0	0

Формула (7.8.6) по методу нуллорных схем совпадает с формулой (6.6.6), полученной по методу схемных миноров.

7.9. ВЫВОДЫ

В разделе проведена классификация типов автономных подсхем и соответствующих им нуллорных схем. Число таких нуллорных схем во много раз меньше числа нуллорных схем соответствующей неавтономной подсхемы.

Метод нуллорных схем обобщен для анализа цепей с различными типами автономных подсхем, что позволило многократно уменьшить число проверок подсхем на совместимость и затраты при формировании символьных выражений откликов.

Матричные нуллорные схемы (НС), число которых многократно меньше базисных НС, обобщены для автономных подсхем. Обобщенный метод НС позволяет существенно уменьшить число операций при объединении подсхем. Однако символьные выражения по методу матричных НС, в отличие от выражений по методу базисных НС, менее компактны и могут содержать взаимно уничтожающиеся слагаемые.

Метод нуллорных схем может применяться для электрических цепей с зеркальными аномальными элементами. При этом метод сохраняет основное достоинство – не создает взаимно уничтожающихся слагаемых в отличие от метода схемных миноров, который может генерировать избыточные слагаемые.

8. МЕТОД СХЕМНО-АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ РЕДУКЦИИ ДЛЯ ЦЕПЕЙ С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ ПОДСХЕМАМИ

Метод схемно-алгебраической редукции [31] обобщен на подсхемы с произвольными, в том числе, цепными параметрами. Приведены формулы для нахождения этих параметров и топологические условия их существования. Разработан иерархический алгоритм анализа сложных электрических цепей, который позволяет получить компактные символьные выражения, эффективные при многократных расчетах.

8.1. О МЕТОДЕ СХЕМНО-АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ РЕДУКЦИИ

Анализ сложных систем выполняется по частям (диакоптически) [1, 68]. При этом подсхемы обрабатываются раздельно и представляются в виде многополюсников различными методами: 1) исключением внутренних переменных подсхемы и формированием ее уравнений с гибридными и цепными параметрами относительно внешних переменных [1]; 2) матричным исключением переменных в системе уравнений блочно-диагонального вида с двухсторонним окаймлением (БДДО) [43]; 3) приведением подсхемы к эквивалентному многомерному генератору (ЭМГ) с однородными или гибридными параметрами путем переноса элементов через сечение или по контуру [68].

Анализ схем может быть численным или символьным. Символьный анализ эффективен при параметрическом и структурном исследовании сложных электрических систем, когда требуется многократный расчет режима или характеристик системы [43]. Символьные выражения необходимы также при макромоделировании типовых каскадов [44].

Формирование символьных выражений предъявляет специальные требования к алгоритмам анализа. Например, метод переноса элементов [68] формирует символьные выражения с многочисленными операциями

вычитания даже для пассивных *RLC*-цепей без управляемых источников, что приводит к снижению точности расчета при большом разбросе параметров элементов. Другим недостатком этого метода является излишняя трудоемкость, поскольку ЭМГ может содержать внутренние ветви, которые перед объединением подсхем отбрасываются.

Любые матричные методы [1, 43, 44, 66] образуют при исключении внутренних переменных подсхем взаимно уничтожающиеся слагаемые с противоположными знаками, поскольку матрица параметров является избыточной – один и тот же параметр содержится в нескольких ячейках. Недостатком метода [43] является также использование алгоритма построения системы уравнений БДДО, значительно увеличивающего размерность этой системы.

Для символьного анализа предпочтителен метод схемно-алгебраической редукции (САР) [31], основанный на схемно-алгебраических формулах (САФ) и формулах выделения элементов [27]. Этот метод не требует построения систем уравнений и не образует избыточных отрицательных слагаемых [19], но, как и метод ЭМГ [68], не разработан для учета подсхем с цепными параметрами, которые используются для описания длинных линий, линий задержки, электрических фильтров, схем с нуллорами [66] и т. д. Целью настоящей главы является обобщение метода САР на подсхемы с произвольными параметрами.

8.2. ОБОБЩЕНИЕ РЕЖИМОВ ХОЛОСТОГО ХОДА И КОРОТКОГО ЗАМЫКАНИЯ С ПОМОЩЬЮ НУЛЛОРОВ

САФ для однородных и гибридных параметров многополюсников представляются в виде отношения схемных определителей [31]. САФ для произвольных, в том числе, цепных параметров могут быть найдены с помощью схемы на рис. 8.2.1 [1], где стороны многополюсника разделены

на четыре типа: 1) с задающим током и зависимым напряжением (тип α); 2) с задающим напряжением и зависимым током (β); 3) с зависимыми током и напряжением (λ); 4) с задающими током и напряжением (θ). Уравнение такого многополюсника имеет вид

$$\begin{array}{|c|} \hline \mathbf{U}^\alpha \\ \hline \mathbf{I}^\beta \\ \hline \mathbf{U}^\lambda \\ \hline \mathbf{I}^\lambda \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \mathbf{Z}^{\alpha\alpha} & \mathbf{K}^{\alpha\beta} & \mathbf{K}^{\alpha\theta} & \mathbf{Z}^{\alpha\theta} \\ \hline \mathbf{B}^{\beta\alpha} & \mathbf{Y}^{\beta\beta} & \mathbf{Y}^{\beta\theta} & \mathbf{B}^{\beta\theta} \\ \hline \mathbf{Z}^{\lambda\alpha} & \mathbf{K}^{\lambda\beta} & \mathbf{K}^{\lambda\theta} & \mathbf{Z}^{\lambda\theta} \\ \hline \mathbf{B}^{\lambda\alpha} & \mathbf{Y}^{\lambda\beta} & \mathbf{Y}^{\lambda\theta} & \mathbf{B}^{\lambda\theta} \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline \mathbf{I}^\alpha \\ \hline \mathbf{U}^\beta \\ \hline \mathbf{U}^\theta \\ \hline \mathbf{I}^\lambda \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \mathbf{E}^\alpha \\ \hline \mathbf{J}^\beta \\ \hline \mathbf{E}^\lambda \\ \hline \mathbf{J}^\lambda \\ \hline \end{array}, \quad (8.2.1)$$

где $\mathbf{U}^\alpha = [\underline{U}_1^\alpha, \dots, \underline{U}_i^\alpha, \dots, \underline{U}_j^\alpha, \dots, \underline{U}_n^\alpha]^T$; $\mathbf{U}^\beta = [\underline{U}_1^\beta, \dots, \underline{U}_k^\beta, \dots, \underline{U}_l^\beta, \dots, \underline{U}_p^\beta]^T$;

$\mathbf{U}^\lambda = [\underline{U}_1^\lambda, \dots, \underline{U}_r^\lambda, \dots, \underline{U}_s^\lambda, \dots, \underline{U}_v^\lambda]^T$; $\mathbf{U}^\theta = [\underline{U}_1^\theta, \dots, \underline{U}_r^\theta, \dots, \underline{U}_s^\theta, \dots, \underline{U}_v^\theta]^T$;

$\mathbf{I}^\alpha = [\underline{I}_1^\alpha, \dots, \underline{I}_i^\alpha, \dots, \underline{I}_j^\alpha, \dots, \underline{I}_n^\alpha]^T$; $\mathbf{I}^\beta = [\underline{I}_1^\beta, \dots, \underline{I}_k^\beta, \dots, \underline{I}_l^\beta, \dots, \underline{I}_p^\beta]^T$; $\mathbf{I}^\lambda = [\underline{I}_1^\lambda, \dots, \underline{I}_r^\lambda, \dots, \underline{I}_s^\lambda, \dots, \underline{I}_v^\lambda]^T$;

$\mathbf{I}^\theta = [\underline{I}_1^\theta, \dots, \underline{I}_r^\theta, \dots, \underline{I}_s^\theta, \dots, \underline{I}_v^\theta]^T$ – векторы комплексных или операторных напряжений и токов сторон многополюсника (рис. 8.2.1); $\mathbf{Z}^{\alpha\alpha}$; $\mathbf{Z}^{\alpha\theta}$; $\mathbf{Z}^{\lambda\alpha}$; $\mathbf{Z}^{\lambda\theta}$ и $\mathbf{Y}^{\beta\beta}$; $\mathbf{Y}^{\beta\theta}$; $\mathbf{Y}^{\lambda\beta}$; $\mathbf{Y}^{\lambda\theta}$ – матрицы передаточных сопротивлений и проводимостей между указанными в индексах типами сторон многополюсника; $\mathbf{K}^{\alpha\beta}$; $\mathbf{K}^{\alpha\theta}$; $\mathbf{K}^{\lambda\beta}$; $\mathbf{K}^{\lambda\theta}$ и $\mathbf{B}^{\beta\alpha}$; $\mathbf{B}^{\beta\theta}$; $\mathbf{B}^{\lambda\alpha}$; $\mathbf{B}^{\lambda\theta}$ – матрицы коэффициентов передачи напряжения и тока; T – знак транспонирования.

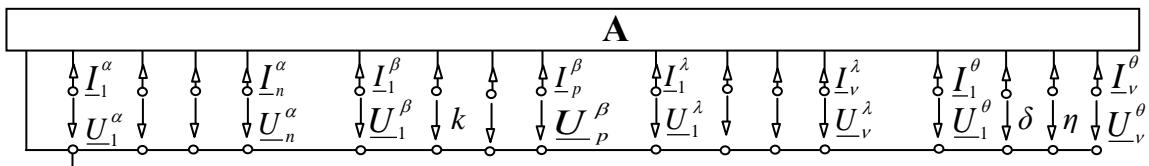


Рис. 8.2.1. Автономный многополюсник со сторонами α, β, λ и θ типа: символы токов и напряжений сторон с номерами $i, j, k, l, r, s, \delta = r$ и $\eta = s$ не показаны; задающие переменные сторон выделены здесь прямым шрифтом

Выход САФ для параметров из формулы (8.2.1) аналогичен выводу формул для многополюсника, содержащего стороны, управляемые одной переменной (α и β типа) [31]. Отличие состоит в том, что требуемое равенство нулю двух задающих переменных (тока и напряжения) одной стороны нельзя обеспечить с помощью опытов холостого хода и короткого замыкания. В [1] эта

задача решается путем проведения серии опытов с последующим решением дополнительной системы уравнений.

Здесь предлагается *обобщить в одном опыте свойства режимов холостого хода и короткого замыкания* с помощью направленных нуллоров. При этом нуллаторы, ток и напряжение которых равны нулю, подключаются к сторонам θ с двумя задающими (известными) переменными, а соответствующие им нораторы – к сторонам λ , токи и напряжения которых являются зависимыми (не известными). Полученная схема обеспечивает требуемый режим многополюсника по аналогии с нуллорным представлением базисной задачи диагностики [31], где нуллатор включается в ветвь, ток и напряжение которой известны, а норатор – в ветвь, параметр которой неизвестен.

Например, расчетная схема (рис. 8.2.2) для формирования САФ передаточного сопротивления от j -й к i -й стороне многополюсника (рис. 8.2.1) получается подключением нуллаторов к сторонам θ , а соответствующих нораторов – к сторонам λ . Нуллаторы и нораторы обозначены на рис. 8.2.2 одинарной и двойной укрупненной стрелкой. Многополюсник считается неавтономным и для него выполняются условия:

$$\underline{I}_q^\alpha = 0; q = 1, 2, \dots, n; q \neq j; \quad \underline{U}_\mu^\beta = 0; \mu = 1, 2, \dots, p; \quad \underline{U}_s^\theta = 0; \underline{I}_s^\theta = 0; s = 1, 2, \dots, v,$$

необходимые для получения искомой передаточной функции в виде

$$Z_{ij}^{\alpha\alpha} = \underline{U}_i^\alpha / \underline{I}_j^\alpha. \quad (8.2.2)$$

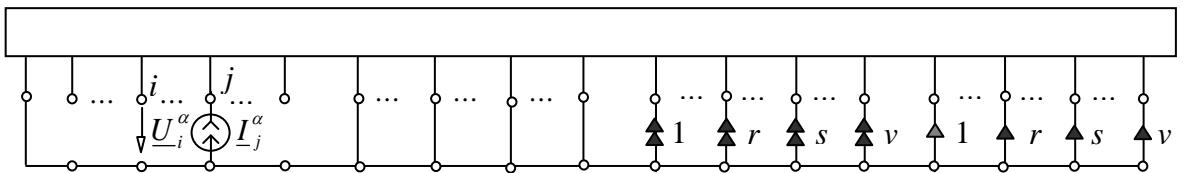


Рис. 8.2.2. Схема для нахождения передаточного сопротивления $Z_{ij}^{\alpha\alpha}$: парные нуллаторы и нораторы обозначены символами соответствующих сторон типа λ

САФ искомого сопротивления (8.2.2) записывается по схеме на рис. 8.2.2, в виде дроби так же, как и произвольная схемная функция [31]

$$Z_{ij}^{\alpha\alpha} = \frac{\left| \begin{array}{c} \text{---} \\ | \dots | i \dots | j \dots | v \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{c} \text{---} \\ | \dots | v \end{array} \right|}, \quad (8.2.3)$$

где $|\cdot|$ – определитель соответствующей схемы; $*$ – обозначение нуллорной пары, образующей числитель передаточной функции; знаменатель является общим для всех передаточных функций из формулы (8.2.1) и является определителем D многополюсника.

САФ для параметров сторон θ и λ выводятся аналогично формуле (8.2.3). Отличие состоит в том, что подключаемые вместо независимого источника и ветви отклика норатор и нуллатор оказываются соединенными параллельно или последовательно с нуллатором и норатором сторон θ и λ . Эти параллельные и последовательные соединения заменяются идеальным проводником и разрывом соответственно. В результате передаточное сопротивление от стороны η к стороне r имеет вид

$$Z_{r\eta}^{\lambda\theta} = \frac{\left| \begin{array}{c} \text{---} \\ | \dots | \dots | \dots | \dots | \dots | \dots | r \dots | s \dots | \dots | \delta \dots | \eta \dots | v \end{array} \right|}{D}. \quad (8.2.4)$$

САФ для параметров эквивалентных источников ЭДС и тока E^α, E^λ и J^β, J^λ из формулы (8.2.1) находятся с помощью определителя схемы с независимыми источниками (НИ) [31]. Схема такого определителя получается подключением нуллатора к стороне многополюсника, для которой требуется найти параметр эквивалентного источника, и помещается в числитель САФ для искомого параметра. В такой схеме отсутствует парный норатор, который появляется при выделении НИ [31]. Например, САФ для параметра источника ЭДС стороны типа α имеет вид

$$\underline{E}_i^{\alpha} = \frac{\left| \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \right|}{D} . \quad (8.2.5)$$

САФ для параметров эквивалентных источников ЭДС и тока сторон с двумя зависимыми переменными находятся аналогично формуле (8.2.5) с последующим упрощением последовательных и параллельных соединений нораторов и нуллаторов, как это сделано в формуле (8.2.4). Символьные выражения для параметров многополюсников находятся из формул вида (8.2.3)–(8.2.5) на основе выделения параметров элементов [55].

Топологические условия существования параметров многополюсников. Достаточным условием существования параметров многополюсника является невырожденность (отличие от нуля) его определителя D в формуле (8.2.3). Необходимые топологические условия (рис. 8.2.1) состоят в том, что: 1) стороны β не должны входить в контуры, содержащие только источники напряжения и нораторы, или только ветви тока и нуллаторы [31]; 2) стороны α не должны входить в сечения, содержащие только источники тока и нораторы или только ветви напряжения и нуллаторы [31]; 3) стороны θ не должны входить в контуры, содержащие только ветви тока и нуллаторы, а также в сечения, содержащие только ветви напряжения и нуллаторы; 4) стороны λ не должны входить в контуры, содержащие только источники напряжения и нораторы, а также в сечения, содержащие только источники тока и нораторы.

Перечисленные здесь контуры и сечения вырождают многополюсник, и найти его параметры при данных типах сторон невозможно. Если сторона с одной задающей переменной, то необходимо изменить ее тип. Если сторона с двумя задающими (зависимыми) переменными, то сменить тип необходимо у двух сторон – у вырождающей стороны и любой стороны с двумя зависимыми (задающими) переменными. При необходимости можно сменить тип двух сторон (одной из которых

является вырождающая сторона) и получить пару сторон θ и λ . После изменения типа сторон вновь проверяются условия 1–4.

Схема замещения многополюсника. В результате схемной редукции исходный многополюсник на рис. 8.2.1 представляется схемой замещения, содержащей только внешние узлы – полюсы. Схемы замещения сторон α и β известны [68]. Схемы замещения для сторон λ и θ формируются с помощью нулловоров подобно схеме замещения четырехполюсника с цепными параметрами [31]. На рис. 8.2.3 приведены схемы замещения таких сторон с номерами r и δ (рис. 8.2.1). Управляющими переменными для зависимых источников в этих схемах являются переменные соответствующих сторон многополюсника на рис. 8.2.1.

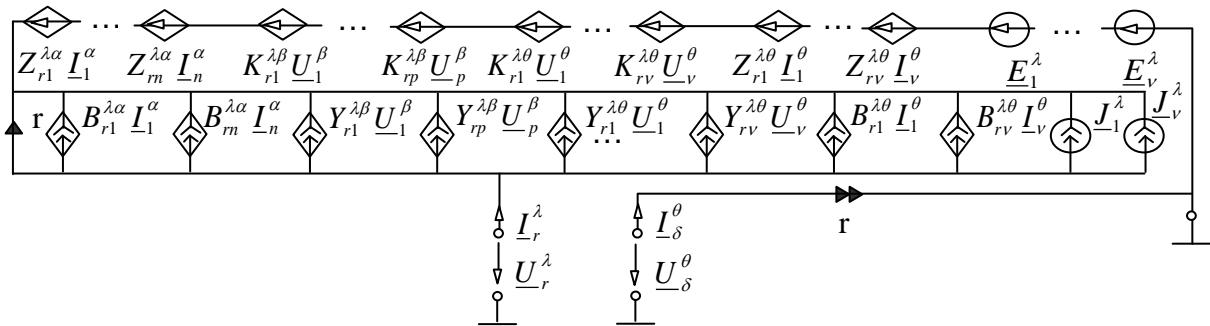


Рис. 8.2.3. Схема замещения сторон типа λ и θ с номерами r и δ (рис. 8.2.1)

8.3. АЛГОРИТМ ИЕРАРХИЧЕСКОЙ СХЕМНО-АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ РЕДУКЦИИ

Анализ сложных схем, содержащих сотни элементов, осуществляется путем попарного объединения подсхем. Объединение выполняется многократно до тех пор, пока не образуется исходная схема. Такой метод получил название иерархической схемно-алгебраической редукции [31]. При этом искомый отклик формируется в виде последовательного выражения.

Алгоритм содержит следующие операции: 1) разделение схемы на n мало связанных друг с другом частей; 2) определение типа сторон каждой подсхемы из п. 1 с последующей проверкой топологических и

достаточных условий существования параметров; 3) нахождение символьных выражений параметров каждой подсхемы из п. 1 по формулам вида (8.2.3)–(8.2.5); 4) присвоение номера объединенной подсхеме (паре объединяемых подсхем) $k = 1$; 5) объединение схем замещения подсхем (рис. 8.2.3) из пары с номером k и получение параметров объединенной подсхемы по формулам вида (8.2.3)–(8.2.5); 6) присвоение номера следующей объединенной подсхеме $k = k + 1$, если $k < (n-1)$, то перейти к п. 4, иначе параметры исходной схемы, представленной в виде многополюсника с внешними полюсами, найдены; 7) нахождение отклика по формулам, аналогичным (8.2.5), в схемах которых нуллатор подключается к полюсам искомого отклика.

Из альтернативных вариантов деления схемы на части выбирают вариант подсхем с наименьшим числом полюсов, что уменьшает трудоемкость анализа. Изложенный алгоритм реализован В. В. Филаретовым в программе *REDSYM* [31]. Программа позволяет получить символьные выражения для схем, содержащих многие сотни элементов и узлов. С помощью этой программы проанализирована схема трехфазной электроэнергетической системы, содержащей 4 генераторные станции с трансформаторами и 2 линии передачи электроэнергии [70].

Метод САР позволяет анализировать более сложные схемы, чем метод схемных миноров [31] и метод нуллорных схем [19], поскольку число параметров многополюсника значительно меньше, чем схемных миноров и нуллорных схем. Меньшими возможностями обладают и математические системы общего назначения [12], которые формируют выражения для электрических цепей сложностью 10–15 узлов [19].

8.4. АНАЛИЗ СХЕМЫ СИНХРОННОГО ГЕНЕРАТОРА С ДЛИННОЙ ЛИНИЕЙ И ТРЕХФАЗНОЙ НАГРУЗКОЙ

Исходная схема дана на рис. 8.4.1, параметры всех элементов известны. Синхронный генератор представлен системной схемой

замещения [70]. Длинная линия задана волновыми параметрами [14]. Требуется найти символьные выражения характеристического полинома Δ и напряжения \underline{U}_4 на сопротивлении нагрузки.

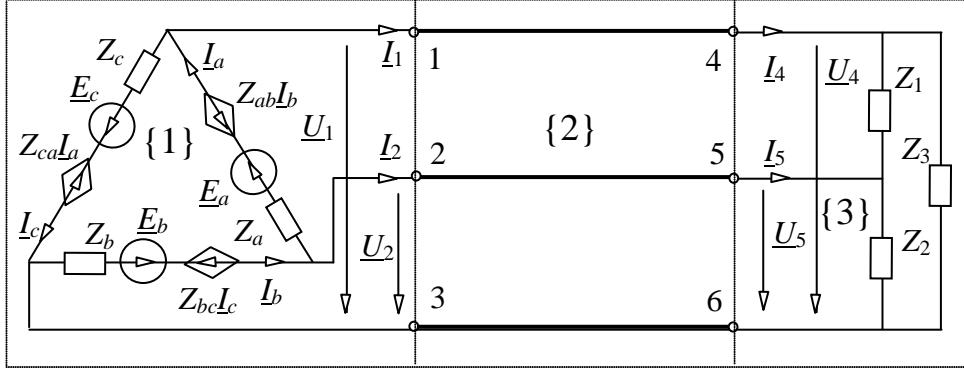


Рис. 8.4.1. Синхронный генератор с длинной линией и нагрузкой:
 $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$ – номера подсхем

Анализ подсхем. Подсхема 1 (рис. 8.4.1) содержит две стороны, которые обозначаются номерами 1 и 2. Для такой подсхемы наиболее компактными являются Z -параметры. Определитель подсхемы D по формуле (8.2.3) имеет вид

$$D^1 = \begin{vmatrix} I_a & Z_c \\ Z_{ca}I_a & Z_{ab}I_b \\ I_c & Z_b \\ Z_{bc}I_c & I_b \end{vmatrix} = Z_a + Z_b + Z_c + Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}, \quad (8.4.1)$$

здесь и далее верхний индекс у символа D и далее у некоторых Z -параметров означает номер подсхемы.

При нахождении формулы (8.4.1) управляемые источники были эквивалентным образом заменены сопротивлениями, а определитель контура из сопротивлений равен их сумме [55]. Числители находятся аналогично по формуле (8.2.3). В результате искомые параметры имеют вид

$$\begin{aligned} Z_{11} &= [(Z_a + Z_b + Z_{ab})Z_c - Z_{bc}Z_{ca}] / D^1; \quad Z_{12} = [(Z_b + Z_{ab})(Z_c + Z_{ca})] / D^1; \\ Z_{21} &= [Z_cZ_b - Z_{bc}(Z_a + Z_{ca} + Z_{ab})] / D^1; \quad Z_{22} = [(Z_a + Z_c + Z_{ca})Z_b - Z_{ab}Z_{bc}] / D^1. \end{aligned} \quad (8.4.2)$$

Параметры эквивалентных источников ЭДС находятся по (8.2.5)

$$\begin{aligned}\underline{E}_1 &= [(E_a + E_b)(Z_c + Z_{ca}) - \underline{E}_c(Z_a + Z_b + Z_{ab} + Z_{bc})]/D^1; \\ \underline{E}_2 &= [\underline{E}_b(Z_a + Z_c + Z_{ab} + Z_{ca}) - (E_a + E_c)(Z_b + Z_{bc})]/D^1.\end{aligned}\quad (8.4.3)$$

Подсхема 2 содержит 4 стороны с номерами 1, 2, 4, 5 и характеризуется цепными параметрами, которые находятся через волновые параметры [14]

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \underline{U}_1 & K_{14} & K_{15} & Z_{14} & Z_{15} \\ \hline \underline{U}_2 & K_{24} & K_{25} & Z_{24} & Z_{25} \\ \hline \underline{I}_1 & Y_{14} & Y_{15} & B_{14} & B_{15} \\ \hline \underline{I}_2 & Y_{24} & Y_{25} & B_{24} & B_{25} \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \underline{U}_4 & & & & \\ \hline \underline{U}_5 & & & & \\ \hline \underline{I}_4 & & & & \\ \hline \underline{I}_5 & & & & \\ \hline \end{array}, \quad (8.4.4)$$

где обозначения напряжений и токов сторон, а также передаточных функций соответствуют системе (8.2.1), при этом тип сторон λ и θ у переменных не указывается.

Подсхема 3 характеризуется следующими параметрами:

$$Z_{44} = Z_3(Z_1 + Z_2)/D^3; \quad Z_{55} = Z_2(Z_1 + Z_3)/D^3; \quad Z_{45} = Z_{54} = Z_2Z_3/D^3, \quad (8.4.5)$$

где $D^3 = Z_1 + Z_2 + Z_3$ – определитель подсхемы.

Объединение подсхем 1 и 2. Сначала объединяются подсхемы 1 и 2 в подсхему с номером 4 на рис. 8.4.2,а, при этом используются схемы замещения сторон на рис. 8.2.3.

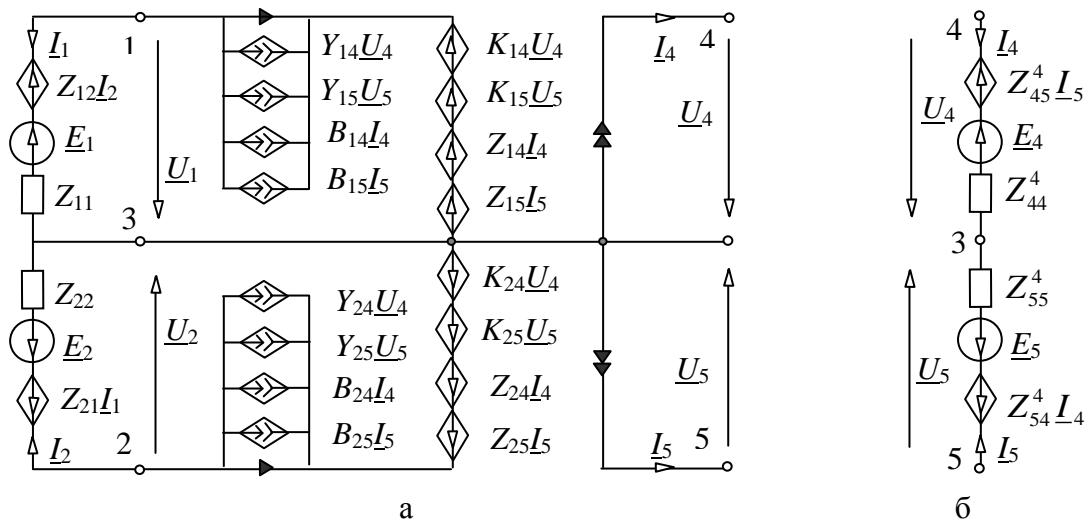


Рис. 8.4.2. Объединенная подсхема 4 (а), и ее схема замещения как многополюсника с двумя сторонами 4 и 5 (б)

В подсхеме 4 внешними являются стороны с номерами 4 и 5 (рис. 8.4.2,а), для которых и находятся Z -параметры (рис. 8.4.2,б). Соответствующий определитель подсхемы имеет вид

$$D^4 = [(Y_{54}Y_{45} - Y_{44}Y_{55})Z_{12} + K_{44}Y_{45} - K_{45}Y_{44}]Z_{21} + (K_{55}Y_{54} - K_{54}Y_{55})Z_{12} + [(Y_{44}Y_{55} - Y_{45}Y_{54})Z_{11} + Y_{55}K_{44} - Y_{54}K_{45}]Z_{22} + (Y_{44}K_{55} - Y_{45}K_{54})Z_{11} - K_{54}K_{45} + K_{55}K_{44}. \quad (8.4.6)$$

Используя последнюю формулу, записываем Z -параметры подсхемы 4

$$\begin{aligned} Z_{44}^4 &= \{(Y_{45}B_{54} - B_{44}Y_{55})Z_{12} - B_{44}K_{45} + Y_{45}Z_{44}\}Z_{21} + (B_{54}K_{55} - Z_{54}Y_{55})Z_{12} + [(B_{44}Y_{55} - Y_{45}B_{54})Z_{11} + \\ &+ Y_{55}Z_{44} - B_{54}K_{45}]Z_{22} + (B_{44}K_{55} - Y_{45}Z_{54})Z_{11} + K_{55}Z_{44} - Z_{54}K_{45}\} / D^4; \\ Z_{55}^4 &= \{(Y_{54}B_{45} - B_{55}Y_{44})Z_{12} + B_{45}K_{44} - Y_{44}Z_{45}\}Z_{21} + (Y_{54}Z_{55} - B_{55}K_{54})Z_{12} + [(Y_{44}B_{55} - Y_{54}B_{45})Z_{11} + \\ &+ B_{55}K_{44} - Y_{54}Z_{45}]Z_{22} + (Y_{44}Z_{55} - B_{45}K_{54})Z_{11} - K_{54}Z_{45} + Z_{55}K_{44}\} / D^4; \\ Z_{45}^4 &= \{(Y_{45}B_{55} - B_{45}Y_{55})Z_{12} - B_{45}K_{45} + Z_{45}Y_{45}\}Z_{21} + (B_{55}K_{55} - Y_{55}Z_{55})Z_{12} + [(B_{45}Y_{55} - Y_{45}B_{55})Z_{11} + \\ &+ Y_{55}Z_{45} - B_{55}K_{45}]Z_{22} + (B_{45}K_{55} - Y_{45}Z_{55})Z_{11} + K_{55}Z_{45} - Z_{55}K_{45}\} / D^4; \\ Z_{54}^4 &= \{(Y_{54}B_{44} - B_{54}Y_{44})Z_{12} + B_{44}K_{44} - Z_{44}Y_{44}\}Z_{21} + (Y_{54}Z_{54} - B_{54}K_{54})Z_{12} + [(Y_{44}B_{54} - B_{44}Y_{54})Z_{11} + \\ &+ B_{54}K_{44} - Y_{54}Z_{44}]Z_{22} + (Y_{44}Z_{54} - B_{44}K_{54})Z_{11} - K_{54}Z_{44} + Z_{54}K_{44}\} / D^4; \\ E_4 &= [(Z_{22}Y_{55} + K_{55} + Z_{21}Y_{45})\underline{E}_1 - (Y_{45}Z_{11} + Y_{44}Z_{12} + K_{45})\underline{E}_2] / D^4; \\ E_5 &= [-(Z_{22}Y_{54} + K_{54} + Z_{21}Y_{44})E_1 + (Y_{44}Z_{11} + Y_{54}Z_{12} + K_{44})E_2] / D^4. \end{aligned} \quad (8.4.7)$$

Объединение подсхем 4 и 3. Объединенная исходная подсхема 5 строится аналогично подсхеме 4 на рис. 8.4.2,а. Соответствующие Z -параметры находятся аналогично ранее рассмотренным подсхемам

$$\begin{aligned} Z_{44}^5 &= \{[(Z_{55}^4 + Z_{55})Z_{44} - Z_{45}Z_{54}]Z_{44}^4 - Z_{44}Z_{45}^4Z_{54}^4\} / D^5; \\ \underline{E}_4^5 &= \{[(Z_{55}^4 + Z_{55})Z_{44} - (Z_{54}^4 + Z_{54})Z_{45}]\underline{E}_4 + (Z_{45}Z_{44}^4 - Z_{44}Z_{45}^4)\underline{E}_5\} / D^5; \\ D^5 &= (Z_{55}^4 + Z_{55})(Z_{44}^4 + Z_{44}) - (Z_{45}^4 + Z_{45})(Z_{54}^4 + Z_{54}). \end{aligned} \quad (8.4.8)$$

Из (8.4.8) находится искомый характеристический полином $\Delta = D_5$ и напряжение $\underline{U}_4 = \underline{E}_4^5$, которые являются последовательными выражениями, включающими формулы (8.4.1)–(8.4.8). Формула для сопротивления Z_{44}^5 из (8.4.8) необходима, если к схеме подключаются другие подсхемы, кроме подсхем на рис. 8.4.1. Анализ продолжается по рассмотренному алгоритму. Фактически выполняется корректировка полученного решения, из которого удаляются ненужные и добавляются новые выражения.

Сравнение формулы по САР с формулами, полученными другими методами. Для этого приведем в строках 1, 2 и 3 табл. 8.4.1 число арифметических операций в формулах, полученных здесь методом САР, решением системы уравнений по законам Кирхгофа с матрицей в БДДО [43] и с помощью символьного блока системы *Maple* [12] соответственно. Матрица в БДДО размерностью 13 (строк и столбцов) разбивалась на две квадратные диагональные подматрицы размерностью 5 и 8.

Таблица 8.4.1. Число операций в формулах для напряжения на нагрузке \underline{U}_4 (рис. 8.4.1)

№	Метод построения формул	Операции			
		*	+	-	/
1	Метод САР	159	85	69	16
2	Блочно-матричное исключение	332	209	151	15
3	По <i>Maple</i> операторами <i>linsolve</i> и <i>simplify(size)</i>	514	362	270	2

Сравнительные характеристики формул по методу САР в табл. 8.4.1 будут улучшаться по мере роста сложности анализируемой схемы, поскольку при этом растет и число избыточных элементов в ее матрице.

При решении этой задачи методом переноса элементов [68] переход к Z-параметрам увеличивает исходную формулу на 55 умножений, 22 сложения и 23 вычитания. При этом должно выполняться условие существования параметров. В общем случае подсхема может не иметь других параметров, кроме цепных, например, при наличии в схеме аномальных элементов [66].

8.5. КОРРЕКЦИЯ РЕЖИМА ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ САР

Электроэнергетические системы (ЭЭС) являются параметрическими системами – их структуры зависят от времени. Для определения режима таких систем наиболее экономичным является метод анализа режима путем коррекции узловых сопротивлений ЭЭС [65]. В то же время этот

метод обладает ограниченными возможностями – позволяет подключать только ветви или подсхемы, все узлы которых являются узлами исходной ЭЭС, то есть не допускаются подсхемы с внутренними узлами.

Для исключения этого недостатка можно использовать методы анализа цепей по частям, например, метод многомерных эквивалентных генераторов, к которым преобразуются подсхемы после переноса отдельных ветвей [68]. Однако перенос ветвей осуществляется с помощью формул, включающих операции вычитания. В результате при анализе даже пассивной схемы используется множество операций вычитания, которые снижают точность вычислений [38]. Тем же недостатком обладает и блочно-матричный метод [13].

Отсутствует такой недостаток у диакоптических методов на основе схемных определителей – метода нуллорных схем, метода схемных миноров и схемно-алгебраической редукции [31]. Наиболее экономичным из них является метод САР, требующий определения наименьшего числа схемных миноров.

Алгоритм коррекции методом САР. Так как метод САР позволяет получить выражение отклика в виде последовательности формул, каждая из которых относится к определенной подсхеме, то выражение отклика при изменении состава подсхем можно корректировать, не проводя анализ схемы целиком. Коррекция последовательности формул выполняется путем изъятия формул, соответствующих отключенными подсхемам, и добавления формул для вновь подключенных подсхем. Может изменяться также число объединенных подсхем и формулы для некоторых объединенных подсхем в случае изменения числа их внешних полюсов.

Коррекция режима ЭЭС выполняется в следующем порядке.

1. Разделить схему на подсхемы с учетом изменения ее структуры в процессе работы. При этом узлы, к которым будут подключаться новые подсхемы, должны сохраняться в течение всего анализа.
2. Найти символьные формулы для первичных параметров каждой части подсхемы по формулам вида (8.2.3)–(8.2.5).

3. Построить схему замещения исходной цепи.
4. Использовать иерархический подход из подраздела 8.3 для нахождения требуемого отклика в системе.
5. После изменения структуры ЭЭС найти параметры измененной или вновь подключенной подсхемы по формулам вида (8.2.3)–(8.2.5).
6. Заменить в символьной формуле для отклика только параметры, относящиеся к измененной подсхеме.
7. При подключении к ЭЭС новой подсхемы следует найти ее параметры и провести анализ ЭЭС, начиная с этапа ее подключения.

8.6. ПРИМЕРЫ КОРРЕКЦИИ РЕЖИМА ЭЭС

Коррекция режима ЭЭС при подключении подсхемы без внутренних узлов. Найдем установившийся режим ЭЭС на рис. 8.6.1,а с замкнутыми ключами путем коррекции установившегося режима той же ЭЭС с разомкнутыми ключами [68]. Требуется получить символьное выражение для напряжения U_5 (рис. 8.6.1,а) до и после изменения структуры. Параметры элементов известны. Комплексные коэффициенты трансформации \hat{K}_{Ti} и \dot{K}_{Ti} ($i = 5, 6, 7$) взаимно сопряженные числа.

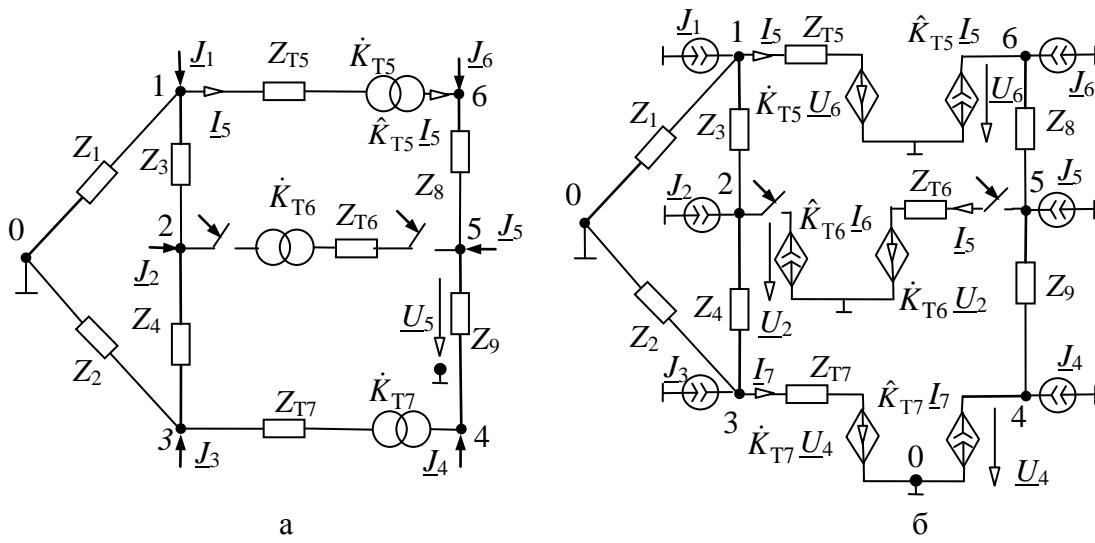


Рис. 8.6.1. Схемы ЭЭС: принципиальная схема (а); схема замещения (б)

Поскольку исходная схема достаточно простая, то представим ее одной подсхемой с полюсами 0, 2 и 5, которая в соответствии с

рис. 8.4.1,б содержит две разомкнутых ветви, соединенные в нулевом полюсе (рис. 8.6.2,а). Для нахождения параметров элементов используем формулы (8.2.2)–(8.2.4) и программу *CIRSYMD* [7]. Для этого сделаем замену параметров УИ на обозначения, которые используются в этой программе:

$$F1 = \hat{K}_{T5}; K1 = \dot{K}_{T5}; F2 = \hat{K}_{T6}; K2 = \dot{K}_{T6}; F3 = \hat{K}_{T7}; K3 = \dot{K}_{T7}.$$

Находим выражение знаменателя искомых входных и передаточных сопротивлений и напряжений источников (записано в текстовом формате программы *CIRSYMD*):

$$D = F1*K1*((Z1+Z3+Z4)*(Z2+Z7)+Z2*Z7)-F1*Z2*K3*Z1-K1*F3*Z1*Z2+Z1*F3*K3*(Z2+Z3+Z4)+((Z8+Z9)*F1*K1+Z5)*(Z1+Z3+Z4+Z2)*F3*K3. \quad (8.6.1)$$

Входные и передаточные сопротивления имеют вид:

$$Z22 = ((Z1*(Z3+Z5)+Z3*Z5)*(Z2+Z4)*F3*K3 +(Z1+Z3)*F1*K1*(Z2*(Z4+Z7)+Z4*Z7+(Z2+Z4)*(Z8+Z9)*F3*K3))/D; \quad (8.6.2)$$

$$Z55 = (Z1*((Z3+Z4)*(Z2+Z7)+Z2*Z7) + (Z5+Z8*F1*K1)*((Z1+Z3+Z4)*(Z2+Z7)+Z2*Z7) + Z9*Z1*F3*K3*(Z2+Z3+Z4) + Z9*(Z5+Z8*F1*K1)*(Z1+Z3+Z4+Z2)*F3*K3)/D; \quad (8.6.3)$$

$$Z25 = (K3*Z2*(Z1*(Z3+Z5)+Z3*Z5)+(Z2*(Z4+Z7)+Z4*Z7+\\+(Z2+Z4)*Z9*F3*K3)*K1*Z1+Z8*K3*Z2*F1*K1*(Z1+Z3))/D; \quad (8.6.4)$$

$$Z52 = (F3 * Z2 * (Z1 * (Z3 + Z5) + Z3 * Z5) + (Z2 * (Z4 + Z7) + Z4 * Z7 + (Z2 + Z4) * Z9 * F3 * K3) * F1 * Z1 + Z2 * Z8 * F3 * F1 * K1 * (Z1 + Z3)) / D. \quad (8.6.5)$$

Напряжения источников ЭДС следующие:

$$*F1*F3*K1*K3+J3*F1*F3*K1*K3+F1*K3*J4*K1+F3*K3*K1*J5+ \\ +F3*K3*K1*J6)))/D; \quad (8.6.6)$$

$$E55 = (Z1*(Z4*(Z2*(J1*F1+J2*F1+J3*F3+J4+J5+J6)+Z7*(J1*F1+J2*F1+ \\ +J4+J5+J6)+F3*K3*Z9*(J1*F1+J2*F1+J5+J6))+Z3*(Z2*(J1*F1+J2*F3+ \\ +J3*F3+J4+J5+J6)+Z7*(J1*F1+J4+J5+J6)+F3*K3*Z9*(J1*F1+J5+J6))+ \\ +F1*F3*K1*K3*J5*Z8*Z9+F1*F3*K3*Z9*Z2*(J1+J2+J3)+F1*F3*K1*Z8*Z2* \\ *(J1+J2+J3)+F3*K3*Z2*Z9*(J5+J6)+F3*K1*Z2*J6*Z8+F3*Z5*K3*Z9*(J5+ \\ +J6)-F3*Z5*Z2*(-J1-J2-J3)+F1*K3*Z2*J4*Z9+F1*K1*Z2*Z8*(J4+J5)+ \\ +F1*Z7*K1*Z8*(J4+J5)+F1*Z7*Z2*(J1+J2+J3)+(Z5+Z7)*Z2*(J4+J5+J6)+ \\ +Z5*Z7*(J4+J5+J6))+Z2*(Z3*(Z5*(J2*F3+J3*F3+J4+J5+J6)+F1*K1* \\ *Z8*(J2*F3+J3*F3+J4+J5))+F1*F3*K1*K3*J5*Z8*Z9+F1*F3*K1*Z4* \\ *Z8*J3+F3*Z5*K3*Z9*(J5+J6)+F3*Z5*Z4*J3+F1*K1*(Z4+Z7)*Z8*(J4+J5)+ \\ +Z5*(Z4+Z7)*(J4+J5+J6)+(Z3+Z4)*F1*F3*K1*K3*J5*Z8*Z9+(Z3+Z4)*F3*Z5* \\ *K3*Z9*(J5+J6)+(Z3+Z4)*F1*K1*Z7*Z8*(J4+J5)+(Z3+Z4)*Z5*Z7*(J4+J5+J6))/ \\ D. \quad (8.6.7)$$

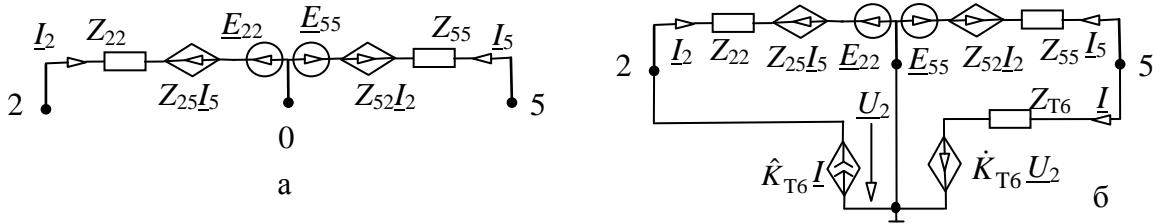


Рис. 8.6.2. Схема замещения ЭЭС (рис. 8.6.1): до (а) и после (б) коммутации

Поскольку ветви схемы замещения являются разомкнутыми (рис. 8.6.2,а), то искомое напряжение $\underline{U}_5 = \underline{E}_{55}$. Таким образом, для определения напряжения \underline{U}_5 до коммутации достаточно найти только формулы (8.6.1) и (8.6.7).

Остальные формулы (8.6.2)–(8.6.6) нужны для определения послекоммутационного режима. Получим послекоммутационную схему на рис. 8.6.2,б путем подключения к схеме замещения исходной схемы на рис. 8.6.2,а новой подсхемы. По этой схеме находим искомое напряжение

$$U5=((Z22*E55-E22*Z52)*F2+Z55*E22-Z25*E55)*K2+Z6*E55)/ \\ ((Z22*F2-Z25)*K2-Z52*F2+Z6+Z55). \quad (8.6.8)$$

Для получения послекоммутационного напряжения понадобилось сформировать только одну формулу – (8.6.8). Остальные (8.6.3)–(8.6.7)

были найдены до коммутации. Таким образом, проводить анализ всей схемы целиком не требуется, что уменьшает затраты на анализ ЭЭС.

Коррекция режима ЭЭС при подключении подсхемы с внутренними узлами. Подключим к схеме на рис. 8.6.1,а между узлами 0, 2, 5 подсхему, содержащую внутренние узлы 7 и 8 (рис. 8.6.3). Найдем напряжение \underline{U}'_5 путем корректировки решения, полученного для схемы до коммутации на рис. 8.6.1,а.

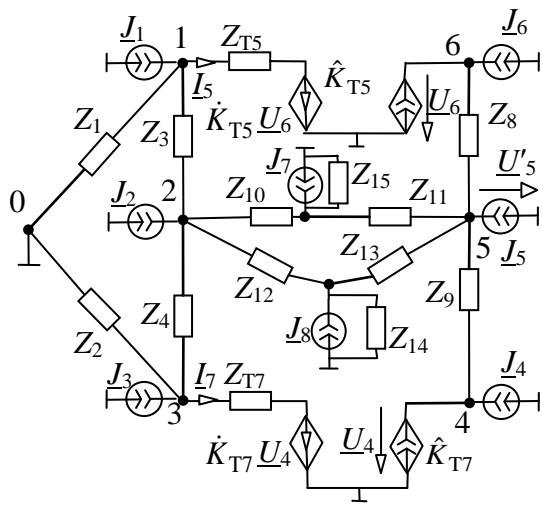


Рис. 8.6.3. Схема ЭЭС после подключения подсхемы с внутренними узлами

Как и ранее, исходную схему до коммутации на рис. 8.6.1,а считаем первой подсхемой, а подключенную подсхему – второй. Параметры подсхемы 1 уже найдены при расчете докоммутационного режима и записаны в виде формул (8.6.1)–(8.6.7). Остается найти параметры второй подсхемы, чтобы отличать их от параметров подсхемы 1, обозначим их штрихом.

$$D' = (Z_{10} + Z_{12}) * (Z_{11} + Z_{13} + Z_{14} + Z_{15}) + (Z_{11} + Z_{13}) * (Z_{14} + Z_{15}); \quad (8.6.9)$$

$$Z'_{22} = (Z_{10} * ((Z_{11} + Z_{13} + Z_{15}) * (Z_{12} + Z_{14}) + Z_{12} * Z_{14}) + Z_{15} * ((Z_{11} + Z_{13}) * (Z_{12} + Z_{14}) + Z_{12} * Z_{14})) / D';$$

$$Z'_{55} = (Z_{11} * ((Z_{10} + Z_{12} + Z_{15}) * (Z_{13} + Z_{14}) + Z_{13} * Z_{14}) + Z_{15} * ((Z_{10} + Z_{12}) * (Z_{13} + Z_{14}) + Z_{13} * Z_{14})) / D';$$

$$Z'_{25} = (Z_{10} * (Z_{11} + Z_{15}) * Z_{14} + Z_{15} * (Z_{12} * (Z_{13} + Z_{14}) + Z_{14} * (Z_{11} + Z_{13}))) / D';$$

$$Z'_{52} = (Z_{10} * (Z_{14} * (Z_{11} + Z_{15})) + Z_{15} * (Z_{12} * (Z_{13} + Z_{14}) + Z_{14} * (Z_{11} + Z_{13}))) / D'; \quad (8.6.10)$$

$$\begin{aligned}
E'22 &= ((Z11 + Z13) * (Z10 * ((J8) * Z14) + Z15 * (Z12 * (J7) + Z14 * (J7 + J8))) + \\
&+ Z10 * (Z14 * Z15 * (J7 + J8)) + Z12 * Z14 * Z15 * (J7 + J8)) / D'; \\
E'55 &= ((Z10 + Z12) * (Z11 * ((J8) * Z14) + Z15 * (Z13 * (J7) + Z14 * (J7 + J8))) + \\
&+ Z11 * Z14 * Z15 * (J7 + J8) + Z13 * Z14 * Z15 * (J7 + J8)) / D'. \quad (8.6.11)
\end{aligned}$$

Схема замещения с использованием рассчитанных Z -параметров представлена на рис. 8.6.4.

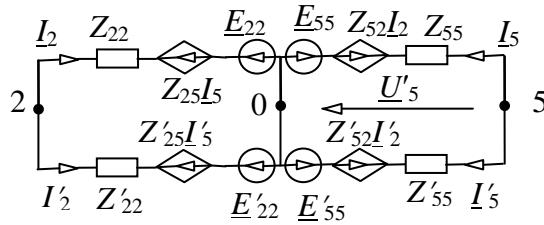


Рис. 8.6.4. Схема замещения ЭЭС на рис. 8.6.3

По этой схеме находим искомое напряжение:

$$\begin{aligned}
U5' &= (Z22 * (Z55 * E'55 + Z'55 * E55) + Z'22 * (Z55 * E'55) + Z'55 * E55) + \\
&+ Z55 * (Z'52 * E22 - Z'52 * E'22) + Z'55 * (-Z52 * (E22) + Z52 * (E'22)) + Z'52 * \\
&* (-Z25 * E55) + (-Z'25 * Z'52) * E55 - E'55 * Z25 * Z52 - Z'25 * Z52 * \\
&* (E'55)) / (Z22 * (Z55 + Z'55) + Z'22 * (Z55 + Z'55) - Z25 * Z'52 - Z25 * Z52 - Z25 \\
&* Z52 - Z'25 * Z'52). \quad (8.6.12)
\end{aligned}$$

Последовательная формула для искомого напряжения в послекоммутационном режиме содержит формулы (8.6.1)–(8.6.7) и (8.6.9)–(8.6.12). Коррекция последовательной формулы докоммутационного режима для получения послекоммутационного режима состоит в нахождении Z -параметров подсхемы 2 и расчете полученной схемы замещения, которая несравненно проще, чем послекоммутационная схема в целом на рис. 8.6.3.

Таким образом, коррекция с помощью САР позволяет получить искомые напряжения или токи в ЭЭС после подключения или отключения подсхем с внутренними узлами в отличие от метода коррекции матрицы узловых сопротивлений [65]. Для расчета сложных схем целесообразно использовать программу REDSYM, которая является реализацией метода САР и позволяет автоматизированным путем объединять подсхемы [8].

8.7. ВЫВОДЫ

Выведены схемно-алгебраические формулы (САФ) для произвольных, в том числе, цепных параметров линейной подсхемы путем использования нуллора, объединяющего в одном опыте режимы холостого хода и короткого замыкания.

Установлены обобщенные топологические условия существования параметров подсхем и разработан диакоптический алгоритм схемно-алгебраической редукции, позволяющий формировать компактные выражения и корректировать их при подключении к системе дополнительных подсхем или при их отключении.

Предложен алгоритм нахождения послекоммутационного режима линейных электроэнергетических систем с произвольным элементным составом путем коррекции символьных формул для докоммутационного режима, что существенно уменьшает вычислительные затраты. Алгоритм допускает подключение или отключение произвольных блоков и подсистем, в том числе, содержащих внутренние узлы, и позволяет изменять параметры не только вновь подключаемых, но и докоммутационных блоков без пересчета режима системы в целом.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, метод схемных определителей (МСО), предложенный для решения базовой задачи формирования схемных функций в 1996 году [54] и получивший такое название в 2001 году [59], в настоящее время является универсальным и наиболее эффективным методом для решения всех задач символического анализа электрических цепей.

В перечень решаемых с помощью МСО задач входят задачи получения оптимальных выражений схемных функций и откликов, анализа чувствительности, диагностики, преобразования и структурного синтеза, анализа сложных схем по частям, в том числе с зеркальными аномальными элементами.

МСО выгодно отличается от других методов полным набором линейных элементов, подлежащих прямому учету (без вспомогательных преобразований). При этом в базовый набор элементов входят как проводимости, так и сопротивления, все типы управляемых источников, нуллорных и зеркальных аномальных элементов. Аномальные элементы используются как для моделирования активных элементов, так и для формирования схемных определителей и схемных миноров при расчете цепей по частям.

МСО и программы, реализованные на его основе, применяются для раскрытия символьных определителей и многократных суммарных и разностных алгебраических дополнений, а также решения систем линейных алгебраических уравнений произвольной физической природы.

МСО в отличие от большинства других методов лишен избыточности, связанной с представлением параметров схемы в соответствующих матрицах. Это устраняет необходимость упрощения выражений путем исключения взаимно уничтожающихся слагаемых. При этом минимизируется объем выкладок и обеспечивается получение выражений, близких к оптимальным выражениям, которые по сложности не уступают выражениям, сформированным с помощью универсальных

математических систем. Важно, что МСО позволяет осуществлять компактную свертку не «вслепую», а путем выбора элементов и подсхем с максимальным показателем участия по простым структурным признакам.

В монографии рассмотрено моделирование многополюсных дифференциальных токовых конвейеров и операционных усилителей на основе многомерных аномальных элементов. Представлены эквивалентные преобразования активных электрических цепей на основе нуллорных и зеркальных аномальных элементов.

Схемно-алгебраические методы обобщены на зеркальные аномальные элементы, получившие широкое распространение в аналоговой электронике. Рассмотрены операции переключения-преобразования, стягивания и подключения нуллорных и зеркальных элементов, позволяющие получить эквивалентные схемы для синтеза электрических фильтров и усилителей.

Нуллорные и зеркальные элементы применены не только для моделирования электронных схем, но и для моделирования произвольных линейных уравнений. Предложены алгоритмы для символьного раскрытия матричных определителей и нахождения многократных суммарных и разностных алгебраических дополнений.

На основе аномальных нуллорных элементов предложены обобщенные компактные формулы чувствительности электрических цепей, содержащие четыре схемных определителя. Учет топологических особенностей схем позволяет сократить число раскрываемых определителей в два раза.

Рассмотрено применение метода схемных миноров для подсхемы с управляющими связями между ними как с конечными, так и бесконечными (нуллорными связями) параметрами. С помощью тождеств Якоби уменьшено число раскрываемых схемных миноров, что позволяет сократить число арифметических операций в формируемых символьных функциях. Метод нуллорных схем обобщен на автономные подсхемы, что

позволило получить более компактные выражения для цепей с несколькими независимыми источниками.

Подключение нуллорных элементов к подсхеме позволяет найти цепные параметры многополюсника, которые используются для моделирования передающих линий. Полученные на основе этих параметров модели применены в методе схемно-алгебраической редукции (САР) для анализа электроэнергетических систем (ЭЭС). Метод САР используется здесь для коррекции режима ЭЭС при его многократном анализе с целью экономии вычислительных затрат.

Пристальное внимание к нуллорным и зеркальным аномальным элементам обусловлено тем, что это – «кирпичики», из которых может быть построено большинство устройств современной аналоговой схемотехники. Поэтому развитие теории линейных электрических цепей происходит в последние десятилетия главным образом в направлении применения аномальных элементов. Есть предпосылки, что на этом пути в ближайшие годы появятся удовлетворительные и достаточно общие решения задачи структурного синтеза электрических цепей [39, 86, 88, 89, 94, 102, 109, 121].

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Анализ**
матричный, 36
символьный, 12, 33, 122
схемно-алгебраический, 11, 13
электрических цепей, 41, 162
Аномальные элементы, 11, 43
Выделение параметра, 91, 100
Вырождение схемы, 21, 24
Генератор
напряжения, 22, 23
НУИ, 14, 20
Дерево, 8, 25
Длинная линия, 197
Зеркальный элемент, 97, 101
напряжения (ЗЭН), 98, 109
плавающий, 108
тока (ЗЭТ), 91
Идеальный усилитель, 11, 169
Избыточность, 8
Источник
напряжения, 18, 20
тока, 18, 20
управляемый (УИ), 14
ИНУН, 19, 20
ИНУТ, 19, 20
ИТУН, 19, 40
ИТУТ, 19, 37
Конвейер тока, 86
с балансным выходом, 66
дифференциальный, 62
Коррекция режима, 200
Коэффициент полинома, 58, 122
Матрица
контурных сопротивлений, 8
узловых проводимостей, 9, 37
Метод
нуллорных схем, 163, 174
схемных определителей (МСО), 13
узловых напряжений, 36
Минор,
схемный, 34, 45
независимый, 155, 157
Многополюсник, 189, 191
МСАД, 9
Мультиветвь, 28
Нейтрализация элементов, 22, 27
Неудаляемый управляемый источник (НУИ), 15, 23
Норатор, 22, 24
Нуллатор, 24, 26
Нуллор, 26, 31
Операционный усилитель (ОУ), 73
Определитель
матричный, 67
схемы, 12, 15
Отклик, 11, 14
Переключение, 72, 74
Подсхема, 140, 143
автономная, 165, 167
неавтономная, 167
Приемник
напряжения, 18, 20
НУИ, 14
тока, 18, 20
Программа компьютерная
CIRSYM, 59
REDSYM, 196
Разложение определителя, 10, 18
Сечение, 23, 25
Стягивание элемента, 70, 75
Схемы
базисные нуллорные, 168, 175
вырожденные, 25
знаменателя, 33, 41
нуллорные, 31, 59
числителя, 14, 33
Условия вырождения, 22, 42
Формула выделения
ЗЭН, 45
ЗЭТ, 45
схемно-алгебраическая (САФ), 17
Фойснера, 18, 22
Функция
полиномиальная, 58, 122
символьная схемная (ССФ), 28
Чувствительность, 123, 125
абсолютная, 115
относительная, 126, 131
Электрический фильтр, 34, 40
Эквивалентное преобразование, 12

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Адонц Г. Т. Многополюсник. – Ереван: АН Арм. ССР, 1965. – 467 с.
2. Березуев Р.И., Курганов С.А., Филаретов В.В., Шеин Д.В. SCAD – система символьного анализа и диагностики линейных электронных цепей // Схемно-топологические модели активных электрических цепей: Синтез и анализ: Тр. международ. конф. КЛИН–2005. – Ульяновск : УлГТУ, 2005. – Т. 3. – С. 3–11.
3. Боде Г. Теория цепей и проектирование усилителей с обратной связью: Пер. с англ.– М.: ГИИЛ, 1948.– 641 с. [H. W. Bode. *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*. New York: Van Nostrand, 1945].
4. Бондаренко А.В., Курганов С.А., Филаретов В.В. Формулы для анализа чувствительности схемных функций линейных электрических цепей // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр. – Ульяновск: УлГТУ, 2013. – Вып. 11. – С. 79–96.
5. Боревич З.И. Определители и матрицы.– М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988.– 184 с.
6. Влах И., Сингхал К. Машины методы анализа и проектирования электронных схем: Пер. с англ.– М. : Радио и связь, 1988.– 560 с.
7. Вольнов В.Е., Курганов С.А., Филаретов В.В. Символьный анализ сложных электрических цепей и сетей с помощью программы *CIRSYM* // Схемно-топологические модели активных электрических цепей: синтез, анализ, диагностика: Тр. международ. конф. КЛИН-2004.– Ульяновск: УлГТУ, 2004.– Т.4.– С.75–80.
8. Вольнов В.Е., Курганов С.А., Филаретов В.В. Символьный анализ электронных цепей и электрических систем методом схемно-алгебраической редукции // Схемно-топологические модели активных электрических цепей: синтез, анализ, диагностика: Тр. международ. конф. КЛИН-2005.– Ульяновск : УлГТУ, 2005.– Т. 3.– С. 34–41.

9. Галямичев Ю.П. Расчет активных схем при помощи деревьев схемы // Электросвязь.– 1960.– №8.– С. 48–57.
10. Горшков К.С., Филаретов В.В. Преобразование электрических цепей переносом активных элементов через сечения и контуры с нуллорами // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр. – Ульяновск : УлГТУ, 2009. – Вып. 7. – С. 37–44.
11. Горшков К. С., Филаретов В. В. Реализация структурных схем электрических цепей на основе транскондуктивных усилителей // Электричество. – 2009.– №1.– С. 32–40.
12. Дьяконов В.П. Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании.– М. : Солон-Пресс, 2006.– 720 с.
13. Идельчик В. И. Расчеты и оптимизация режимов электрических сетей и систем. – М. : Энергоатомиздат, 1988. – 288 с.
14. Каганов З. Г. Электрические цепи с распределенными параметрами и цепные схемы.– М. : Энергоатомиздат, 1990.– 248 с.
15. Калниболотский Ю.М., Казанджан Н.Н., Нестер В.В. Расчет чувствительности электронных схем.– Киев : Техника, 1982.– 176 с.
16. Кирхгоф Г. О решении уравнений, к которым приводит изучение линейного распределения гальванических токов // Избранные труды Г.Р.Кирхгоф. – М. : Наука, 1988. – С. 170–178.
17. Королев Ф. А. Сокращение неравновесного нуллорного инварианта подсхем для символьного анализа электрических цепей по частям // Синтез, анализ и диагностика электрических цепей: Международ. сб. науч. тр. / под ред. В. В. Филаретова. – Ульяновск : УлГТУ, 2009. – Вып. 7. – С. 139–155.
18. Королев Ф.А., Курганов С.А., Филаретов В.В. Символьный анализ линейных электрических цепей методом объединения схемно-алгебраических формул // Схемно-алгебраические модели активных электрических цепей: Синтез, анализ, диагностика: Тр. международ. конф. КЛИН–2006. – Ульяновск : УлГТУ, 2006. – Т. 3. – С. 98–115.

19. Королев Ф.А., Курганов С.А., Филаретов В.В. Сравнение методов анализа электрических цепей по частям в символьном виде // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Тр. международ. конф. КЛИН–2007. – Ульяновск : УлГТУ, 2007. – Т. 3. – С. 91–104.
20. Королев Ф.А., Филаретов В.В. Иерархический метод матричных нуллорных схем // Электроника и связь (темат. вып. «Электроника и нанотехнологии»). Ч. 1. – Киев, 2009. – С. 124–129.
21. Коротков А.С., Курганов С.А., Филаретов В.В. Символьный анализ дискретно-аналоговых цепей с переключаемыми конденсаторами // Электричество. – 2009. – № 4. – С. 37–47.
22. Крон Г. Исследование сложных систем по частям – диакоптика.– М. : Наука, 1972. – 544 с.
23. Крон Г. Тензорный анализ сетей. – М. : Советское радио, 1978. – 720 с.
24. Крутчинский С.Г. Структурный синтез в аналоговой микросхемотехнике. – Таганрог : Южный федеральный университет, 2008.– 355 с.
25. Курганов С.А. О символьном анализе электрических цепей с токовыми конвейерами// Синтез, анализ, диагностика электронных цепей: Международн. сб. науч. тр. – Ульяновск : УлГТУ, 2012. – Вып.10. – С. 210–220.
26. Курганов С.А., Трофимов Д.С. Программа для расчета числа нуллорных схем // Тезисы докладов 44-й научно-технической конференции УлГТУ «Вузовская наука в современных условиях» (1–7 февраля 2010 г.). – Ульяновск : УлГТУ, 2010. – С. 81.
27. Курганов С.А., Филаретов В.В. Символьный анализ линейных электронных цепей на основе схемно-алгебраических формул выделения параметров многополюсников // Электричество. – 2003. – №6. – С. 52–65.
28. Курганов С. А., Филаретов В. В. Символьный анализ и диагностика линейных электрических цепей методом схемных определителей: учебное пособие. – Ульяновск : УлГТУ, 2004. – 228 с.

29. Курганов С.А., Филаретов В.В. Схемно-алгебраические тождества топологических функций для линейных электрических цепей//Схемно-топологические модели активных электрических цепей : синтез, анализ, диагностика: Тр. международ. конф. КЛИН-2005. – Ульяновск : УлГТУ, 2005. – Т.3. – С.95–105.
30. Курганов С.А., Филаретов В.В. Формирование передаточных функций электронных цепей по частям методом неравновесных двоичных векторов // Схемно-алгебраические модели активных электрических цепей: Синтез, анализ, диагностика: Тр. международ. конф. КЛИН–2005. – Ульяновск : УлГТУ, 2005. – Т. 3. – С. 106–116.
31. Курганов С.А., Филаретов В.В. Схемно-алгебраический анализ, диакоптика и диагностика линейных электрических цепей : учебное пособие. – Ульяновск : УлГТУ, 2005. – 320 с.
32. Курганов С. А., Филаретов В. В. Неравновесные нуллорные схемы для символного анализа цепей методом объединения подсхем// Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр. – Ульяновск : УлГТУ, 2008. – С. 202–210.
33. Курганов С.А., Филаретов В.В. Анализ линейных электрических цепей по частям с управляющими связями между ними // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр. – Ульяновск : УлГТУ, 2009. – Вып. 7. – С. 139–156.
34. Курганов С.А., Филаретов В.В. Применение неравновесных схемных миноров для построения формул объединения подсхем // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международный сб. науч. тр.– Ульяновск : УлГТУ, 2009. – Вып. 7. – С. 156–162.
35. Курганов С. А., Филаретов В. В. Нуллорные схемы автономных подсхем // Синтез, анализ и диагностика электрических цепей: Международ. сб. науч. тр. / под ред. В. В. Филаретова. – Ульяновск : УлГТУ, 2009. – Вып. 7. – С. 163–171.

36. Курганов С.А., Филаретов В.В. Символьный анализ линейных электрических цепей с автономными подсхемами методом нуллорных схем // Электричество. – 2011. – №12. – С. 42–47.
37. Курганов С.А., Филаретов В.В. Символьный анализ электрических цепей с нуллорными и зеркальными аномальными элементами // Электричество. – 2013. – №10. – С. 60–65.
38. Лаксберг Э.А. Моделирование электронных цепей на основе схемной редукции.– Таллин : Валгус, 1990.– 159 с.
39. Майко Г.В., Филаретов В. В. Эквивалентные преобразования деревьев с нуллорными и зеркальными аномальными элементами в линейных электрических цепях // Синтез, анализ, диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр. – Ульяновск : УлГТУ, 2013. – Вып.11. – С. 17–38.
40. Майко Г.В., Филаретов В. В. Перечисление нуллаторных и нораторных деревьев одного знака для порождения эквивалентных схем Синтез, анализ, диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр. – Ульяновск : УлГТУ, 2013. – Вып.11. – С. 39–68.
41. Мигулин И.Н., Чаповский М.З. Усилительные устройства на транзисторах. – Киев : Техника, 1971. – 324 с.
42. Миланцей Т., Славский Г. Н., Филаретов В. В. Пять формул метода схемных определителей // Схемно-топологические модели активных электрических цепей: Тр. международ. конф. КЛИН–2004.– Ульяновск : УлГТУ, 2004. – Т. 4. – С. 102–113.
43. Михайлов В. Б. Спектральные методы расчета радиоэлектронных схем // Электричество. – 2009. – №7. – С. 46–55.
44. Орличенко А. Н., Шаповалов Р. Г. Символьные методы в задачах автоматизированного проектирования электронных узлов // Изв. вузов. Электромеханика. – 2002. – №1. – С. 34–36.
45. Писсанецки С. Технология разреженных матриц. – М. : Мир, 1988. – 410 с.

46. Пухов Г.Е. Теория метода подсхем // Электричество. – 1952. – № 8. – С. 65–73.
47. Сигорский В.П. Анализ электронных схем. – Киев : Гос. изд-во техн. лит. УССР, 1960. – 176 с.
48. Сигорский В.П. Анализ электронных схем. – Киев : Гос. изд-во техн. лит. УССР, 1963. – 199 с.
49. Сигорский В.П. Моделирование электронных цепей в обобщенном узловом базисе // Изв. вузов СССР. Радиоэлектроника. – 1981. – № 6. – С. 37–46.
50. Сигорский В.П., Петренко А.И. Алгоритмы анализа электронных схем. – Киев : Техніка, 1970. – 396 с.
51. Сигорский В.П., Петренко А.И. Алгоритмы анализа электронных схем. – М.: Сов. радио, 1976. – 608 с.
52. Тутышкин А.А., Коротков А.С. Анализ цепей с токовыми конвейерами при помощи графов // Радиоэлектроника. – 2003. – №8. – С. 58–63.
53. Филаретов В.В. Синтез оптимальных формул схемных функций электрических цепей // Электричество. – 1995. – № 4. – С. 36–43.
54. Филаретов В. В. Схемный подход к символьному анализу активных электрических цепей // Электроника и связь : Науч.-техн. сб. – Киев, 1996. – Вып. 2. – Ч. 1. – С. 97–101.
55. Филаретов В.В. Топологический анализ электронных схем методом выделения параметров // Электричество. – 1998. – №5. – С. 43–52.
56. Филаретов В.В. Формирование символьных функций для активных электрических цепей методом стягивания и удаления ветвей // Электричество. – 2001. – №4. – С. 43–51.
57. Филаретов В. В. Метод двоичных векторов для топологического анализа электронных схем по частям // Электричество. – 2001. – №8. – С. 33–42.
58. Филаретов В.В. Схемное отображение матрицы для символьного решения систем линейных алгебраических уравнений // Логико-

алгебраические методы, модели, прикладные применения: Тр. международ. конф. – Ульяновск: Ульян. гос. техн. ун-т, 2001.– С. 13–15.

59. Филаретов В. В. Анализ электрических цепей методом схемных определителей: Метод. указания к практическим занятиям по электротехнике и электронике. – Ульяновск : УлГТУ, 2001. – 40 с.

60. Филаретов В.В. Топологический анализ электрических цепей на основе схемного подхода: Дис. ... д-ра техн. наук: 05.09.05 (Теорет. электротехника) / Московский энергетический ин-т.– М., 2002.– 280 с.

61. Филаретов В.В. О взаимосвязи схемного и матричного определителей // Системы искусственного интеллекта: алгоритмы обработки и модели: Тр. международ. конф. КЛИН–2002.– Ульяновск: УлГТУ, 2002. – Т. 4. – С. 85–93.

62. Филаретов В.В. Теорема Сигорского об определителе суммы матриц и диакоптика // Киев : Электроника и связь, 2010.– №2.– С. 5–13.

63. Филаретов В.В. Топологический анализ электрических цепей с зеркальными аномальными элементами // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей : Международ. сб. науч. тр.– Вып.10.– Ульяновск : УлГТУ, 2012. — С. 66–92.

64. Филаретов В.В. Разложение многократных суммарных и разностных алгебраических дополнений методом схемных определителей // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр. – Ульяновск : УлГТУ, 2013. – Вып. 11. – С. 191–212.

65. Хачатрян В. С., Бадалян Н. П., Хачатрян К. В. Метод построения и коррекции узловых сопротивлений при учете комплексных коэффициентов трансформации // Электричество. – 2009. – №8. – С. 27 – 32.

66. Чуа Л.О., Лин П.М. Машины анализ электронных схем: Алгоритмы и вычислительные методы.– М. : Энергия, 1980.– 640 с.

67. Шакиров М. А. Расчет по частям линейных электрических цепей при отсутствии гальванических соединений между подсхемами // Электромеханика. – 1980. – №5. – С. 527–533.

68. Шакиров М. А. Преобразования и диакоптика электрических цепей.– Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980.– 196 с.
69. Шакиров М.А. Теоретические основы электротехники: Новые идеи и принципы: Схемоанализ и диакоптика.– СПб. : Изд. СПбГТУ, 2001.– 212 с.
70. Шакиров М. А. Системные схемы замещения трехфазных машин и их применение для расчета несимметричных режимов электрических систем // Электротехника. – 2003. – №3. – С. 26–35.
71. Alderson G.E., Lin P.M. Computer generation symbolic network functions – a new theory and implementation // IEEE Trans. on Circuit Theory.– 1973.– Vol. CT–20, no. 1.– P. 48–56.
72. Antoniou A. New gyrator circuits obtained by using nullors // Electron. Letters, 1968.– Vol. 4 (Mar).– P. 87–88.
73. Anuntahirunrat K., Fongsamut C., Surakampontorn W., Fujii N. On the Use of Norator Transformation in Oscillator Circuits // [TENCON IEEE Region 10 Conference](#).– 14–17 Nov. 2006.– Hong Kong, 2006. 5 p.
74. Asenova I., Balik F. Multiparameter symbolic sensitivity analysis of enhanced by nullor model and modified Coates flow graph // Theoretical and applied electrical engineering.– 2013.– Vol. 11, No. 2.– P. 108 – 115.
75. Awad I.A., Soliman A.M. Inverting second generation current conveyors: the missing building blocks, CMOS realizations and applications // Int. J. Electronics.–1999.–Vol.86, no. 4.– P. 413–432.
76. Braun J. Topological analysis of networks containing nullators and norators // Electronics letters.– 1966.– Vol. 2, No. 11.– P. 427–428.
77. Bruton L.T. RC active circuits: theory and design / Englewood Cliffs.– NJ: Prentice-Hall, 1980.
78. Carlin H.J. Singular network elements // IEEE Trans. Circuit Theory.– 1964.– Vol. CT–11, no. 3.– P. 67–72.
79. Davies A.C. Matrix Analysis of Networks Containing Nullators and Norrators // Electronic Letters.– 1966.– Vol. 2, no.2 (February).– P. 48–49.

80. Davies A.C. Topological solution of networks containing nullators and norators // Electronics Letters.– 1966, Vol. 2, no.3 (March). – P. 90–91.
81. Feussner W. Ueber Stromverzweigung in netzformigen Leitern // Annalen der Physik. – 1902. – Bd 9, N 13. – S. 1304–1329.
82. Feussner W. Zur Berechnung der Stromstarke in netzformigen Leitern // Annalen der Physik. – 1904. – Bd 15, N 12. – S. 385–394.
83. Filaretov V.V. A topological analysis of electronic circuits by a parameter extraction method // Electrical Technology Russia. – 1998. – No.2. – P. 47–61.
84. Filaretov V.V., Korotkov A.S. Generalized parameter extraction method in symbolic network analysis // Proc. of the European Conf. on circuit theory and desing (ECCTD–2003). – Kraków, Poland, 2003 (Sept). – Vol. 2. – P. 406–409.
85. Filaretov V.V., Gorshkov K.S. Transconductance realization of block-diagrams of electronic networks // Proc. of Int. Conf. on signals and electronic systems (ICSES`08).– Krakow, Poland.– 2008 (Sept).– P. 261–264.
86. Filaretov V., Gorshkov K., Mikheenko A. A circuit synthesis technique based on network determinant expansion // Proc. of International Conference on Synthesis, Modeling, Analysis and Simulation Methods and Applications to Circuit Design (SMACD).– Seville, Spain.– 2012 (Sept.).– P. 293–296.
87. Filaretov V.V., Gorshkov K.S. Topological analysis of active network containing pathological mirror elements // 33th IEEE Int. Conf. on Elektronics and Nanotechnology (ELNANO).– 2013.– P. 460–464.
88. Haigh D.G. Analytic approach to nullor transformations for FET circuit synthesis: Part I – nullator-norator tree transformations // IEEE Proceedings of the international symposium on circuits and systems (ISCAS).– 2006.– P. 5231–5234.
89. Haigh D.G. Analytic approach to nullor transformations for FET circuit synthesis: Part II – nullator-norator re-pairing and cloning // IEEE Proceedings of the international symposium on circuits and systems (ISCAS). – 2006.– P. 5235–5238.

90. Hashemian R. Symbolic representation of network transfer functions using norator-nullator pairs // Electronic circuits and systems.– 1977.– Vol. 1, No. 6 (November).– P. 193–197.
91. Hassoun M.M., Lin P.M. A hierarchical network approach to symbolic analysis of large-scale networks // IEEE Transactions on circuits and systems – I: Fundamental theory and applications.– 1995.– Vol. 42, N4.– P. 201–211.
92. Hoang S. The direct topological method in network sensitivity analysis // Rozprawy elektrotechniczne.– 1975.– T. 21, z. 4.– S. 767–784.
93. Kumar P., Senani R. Bibliography on nullors and their applications in circuit analysis, synthesis and design // Analog integrated circuits and signal processing. – 2002. – Vol. 33, no. 1 (Oct). – P. 65–76.
94. Lasota S. Parameter decision diagrams in the analysis and structural synthesis: part I, II, III // 10th Int. Workshop on Symbolic and Numerical Method5s, Modeling and Application to Circuit Design (SMMACD’08.– Erfurt (Germany), 10.2008.– P. 149–157, 172–179, 180–187.
95. Lasota S. Multilevel hierarchical always cancellation-free symbolic analysis method for large electric networks // Elektronika: konstrukcje, technologie, zastosowania (Poland). – 2013.– Vol. 54, no. 2.– P. 51–57.
96. Lin P.M. Symbolic network analysis.– Amsterdam-Oxford-New York-Tokyo: Elsevier, 1991.– 319 p.
97. Milic M. M. General passive networks – solvability, degeneracies, and order of complexity // IEEE Transactions on circuits and systems. – 1974.–Vol. CAS–21, No. 2 (March). – P. 177–183.
98. Muir T. The theory of determinants in the historical order of development: Vol. 1.– London, 1906.
99. Ozawa T. Topological conditions for the solvability of linear active networks // Circuit Theory and Applications. – 1976. – Vol. 4. – P. 125–136.
100. Ozoguz S., A. Toker A., Cigekoglu O. First-order allpass sections-based current mode universal filter using ICCLls // Electronic Letters. – 2000. – Vol.36, no. 17. – P.1443–1444.

101. Pierzchala M., Rodanski B. Obtaining symbolic network functions of large circuits by block decomposition of the node admittance matrix // Proc. of the European conference on circuit theory and design.– 1995.– P. 71–74.
102. Saad R.A., Soliman A.M. Use of mirror elements in the active device synthesis by admittance matrix expansion // IEEE Trans. on circuits and systems—I: regular papers.– 2008.– Vol. 55, No. 9.– P. 2726–2735.
103. Sánchez-López C. Modeling Active Devices with Nullors for Analog Signal Processing// Design of Analog Circuits through Symbolic Analysis, 2012, P.61-82.
104. Sanchez-Lopez C. Pathological equivalents of fully-differential active devices for symbolic nodal analysis // IEEE Trans. on circuits and systems—I: regular papers.– 2013.– Vol. 60, no. 6.– P. 603–614.
105. Sanchez-Lopez C., Fernandez F.V., Tlelo-Cuautle E., Tan S.X.-D. Pathological element-based active device models and their application to symbolic analysis // IEEE Trans. on circuits and systems—I: regular papers.– 2011.– Vol. 58, no. 6.– P. 1382–1395.
106. Slezak J., Sotner R. Circuit Synthesis Using Admittance Network Modification in MATLAB // Proc. 16th International Conference "Mixed Design of Integrated Circuits and Systems".– Lodz, Poland, 2009 (June).– P. 612–617.
107. Smit J. The efficient calculation of symbolic determinants // Proc. of the ACM symposium on symbolic and algebraic computation. – 1976. – P. 105–113.
108. Soliman A.M. Applications of voltage and current unity gain cells in nodal admittance matrix expansion // IEEE Circuits and systems magazine.– 2009.– Fourth quarter.– P. 29–42.
109. Soliman A.M. Synthesis of oscillators using limit variables and NAM expansion // Hindawi Publishing Corporation: Active and passive electronic components.– Vol. 2011.– Article ID 131546.– 13 p.

110. Soliman A.M., Saad R.A. On the voltage mirrors and the current mirrors // Analog Integr. Circuits signal process.– 2002.– Vol. 32, No. 1 (Jul).– P. 79–81.
111. Soliman A.M., Saad R.A. The voltage mirror-current mirror pair as a universal element // Int. J. circuit theory Appl.– 2010.– Vol. 38, no. 8 (Oct).– P. 787–795.
112. Svoboda J.A. Current conveyors, operational amplifiers and nullors // IEE Proceedings.– 1989 (December).–Vol. 136, pt. G, no. 6.– P. 317–322.
113. Tellegen B.D.H. La recherche pour una série complète d'éléments de circuit ideaux non-linéaires // Rendiconti del seminario matematico e fisico di Milano: Sotto gli auspice dell'università e del politecnico.– Milano, 1955. Vol. 25 (1953–1954).– P. 134–144.
114. Tlelo-Cuautle E., Sanchez-Lopez C., Martinez-Romero E., Tan Sheldon X.-D. Symbolic analysis of analog circuits containing voltage mirrors and current mirrors // Analog Integr Circ Sig Process. – 2010.– Vol. 65.– P. 89–95.
115. Topor-Kaminski L., Holajn P. Dual differential current conveyor as an element of active circuits// XVII National conference Circuit theory and electronic networks.– Wroclaw – Polanica Zdroj, Poland.– Oct. 19–21,1994.– P. 101–105.
116. Topor-Kaminski L., Holajn P. Wielozaciskowy konwejer pradowy.– Wydawnictwo Politechniki Slaskiej: Gliwice, 2001.– 164 p.
117. Topor-Kaminski L., Pasko M. Nullator/norator models of active circuits with controlled parameters // Proc. of the 1995 First IEEE International Caracas Conference on Devices, Circuits and Systems (12–14 Dec).– 1995.– P.19–23.
118. Vandewalle J., Nossek J.A. Nullators and norators in circuit education a benefit or an obstacle ? // IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS).– 2011.– P. 349–352.
119. Verhaegen W., Gielen G. An efficient evaluation scheme for linear transfer functions using the determinant decision diagram representation of the

system determinant // Proc. of the fifth international workshop on symbolic methods and applications in circuit design.– 1998.– P. 125–129.

120. Wang H.Y., Chang S.H., Jeang Y.L., Huang C.Y. Rearrangement of mirror elements // Analog Integr. Circuits signal process.– 2006.– Vol. 49.– P. 87–90.

121. Wang H.Y., Chiang N.H., Nguyen Q.M., Chang S. H. Advanced Materials, chapter 26: Circuit Synthesis Using Pathological Elements // Springer Proceedings in Physics.– Vol. 152, 2014.– P. 317–328.

122. Wang H.Y., Lee C.T., Huang C.Y. Characteristic Investigation of New Pathological Elements. // Analog integrated circuits and signal processing.– 2005. – Vol. 44, no. 1 (July). – P. 95–102.

123. Wierzba G.M. Op-Amp Relocation: A Topological Active Network Synthesis. // IEEE Trans. on circuits and systems.– 1986.– Vol. CAS–33, no. 5.– P. 469–475.

124. Wilson B. A low-distortion bipolar feedback current amplifier technique // Proc. of the IEEE.– 1981.– Vol. 69, no. 11.– P. 1514–1515.

Научное электронное издание

Курганов Сергей Александрович
Филаретов Владимир Валентинович

**АНАЛИЗ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ С НУЛЛОВЫМИ
И ЗЕРКАЛЬНЫМИ АНОМАЛЬНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ**

ЭИ № 691. Объем данных 5,82 Мб.

Редактор Н. А. Евдокимова

Печатное издание

ЛР № 020640 от 22.10.97.

Подписано в печать 28.10.2015. Формат 60×84/16.

Усл. печ. л. 13,02. Тираж 100 экз. Заказ 920.

Ульяновский государственный технический университет
432027, Ульяновск, Северный Венец, 32.

ИПК «Венец» УлГТУ. 432027, Ульяновск, Северный Венец, 32.

Тел.: (8422) 778-113

E-mail: venec@ulstu.ru

<http://www.venec.ulstu.ru>